

La matematica applicata

Il problema di definire una "quantità" implica la "qualificazione" per definire una unità di confronto della stessa specie, implica la "misura" rispetto a tale unità arbitraria, cioè nasce la teoria dei numeri, nasce il delicato problema della continuità e della discontinuità.

Un gregge può essere definito dal numero dei capi (sarà un numero intero, che implica discontinuità). Ma può essere anche definito dal peso di carne, (sarà un numero frazionario di unità arbitrarie che implica continuità)

Abbiamo già dato lo schema dei numeri: (V. Vol. I) ed abbiamo già esposte le condizioni di numerabilità

Poiché i numeri reali possono rappresentarsi su una retta, rispetto ad un segmento preso arbitrariamente come unitario, faremo l'impostazione geometrica, ove il segmento unitario diventerà il simbolo dell'unità di quella quantità qualificata

Abbiamo già trattato questi argomenti, compreso il simbolo algebrico.

Dobbiamo ora tornare sull'argomento. I numeri "ordinali", implicando una sequenza, hanno in se il concetto di tempo. ore l'intervallo di tempo può essere infinitamente piccolo, o infinitamente grande, sarà sempre una quantità riferita ad una unità arbitraria.

Si noti come la sequenza (il succedere) implichi, rispetto all'unità arbitraria, una velocità. (Possiamo assumere l'unità arbitraria sulla base della velocità di quella certa sequenza, di quel certo fenomeno, però non sempre è possibile.)

Tal volta la velocità è meglio ri-guardarla come una frequenza: per esempio: attraverso un ponte passano cento uomini ogni ora, oppure come una portata: attraverso quell'orificio passano tot. metri cubi al secondo.

Si noti come una grandezza continua, o discontinua, riferita all'unità di

tempo: cicli al secondo, operazioni al secondo fatte da un computer, ecc. può riguardarsi sia come una velocità, sia come una portata, sia come una frequenza.

Ma il problema è ancora più complesso. Torniamo agli uomini che attraversano un ponte: (100 uomini/ora), un uomo ogni 36 secondi.

Supponiamo di contarli in uscita, come fosse un traguardo.

Possono arrivare singolarmente, oppure affiancati (per due, per tre, per ...)

Quindi la frequenza media oraria non fornisce il dettaglio del fenomeno.

Occorre molta precisione nel definire le dimensioni da attribuire ai simboli algebrici, e soprattutto non attribuire arbitrariamente unità dimensionali.

Ogni unità dimensionale deve essere riguardata nei vari aspetti: non si può dire: "(velocità - m/sec)" se non è specificata non solo la direzione della lunghezza, (campi vettoriali), ma la stessa definizione di

lunghezza e di tempo. Un esempio divertente è il romanzo: "Il giro del Mondo in 80 giorni" di G. Verne (1873).

Le dimensioni: "spazio" e "tempo", non sono indipendenti fra loro, anche le altre dimensioni, che chiamiamo fisiche, non sono indipendenti; occorre ripartire da cognizioni primitive.

Dall' "io", il "cogito ergo sum" cartesiano, a ciò che ci circonda, (o meglio: a ciò in cui siamo immersi), appare una specie di emissione dal centro: "io-osservatore" a tutto l'intorno, cioè in tutte le direzioni.

Che il concetto "direzione" fosse fondamentale l'abbiamo già esposto, ma nel procedere della conoscenza dall' "io" all'intorno di quell' "io", notiamo che vi sono altri "io", a ciascuno dei quali corrisponde una direzione a partire da un "io" preso come osservatore, e che in ogni direzione da quell' "io" vi sono infiniti "io", più o meno lontani.

Il concetto di "spazio" e di "tempo" è già implicito, e nessun "io" è così privilegiato da poter essere preso come riferimento fondamentale.

Quindi, piaccia o non piaccia, l'origine non è all'interno del nostro cosmo.

La constatazione ci lascia perplessi. Vi sono, (si pensano), entità spirituali, che esulano dal nostro cosmo; non hanno infiniti o infinitesimi, non sono né spazio, né tempo; ne percepiamo in noi l'esistenza, come forme di affetto difficili a spiegare. Il nostro pensiero vola alla ricerca di "un bello", la cui bellezza è già amore. Ma sono parole umane che limitano, la sensazione... È più in là! Siamo, o cerchiamo di essere, consapevoli dei nostri limiti, accettiamo i nostri "infinitesimi" ed il nostro infinitamente grande, che chiamiamo infinito.

Il segmento delimitato dalla localizzazione di due "io" puntiformi è sempre divisibile con infiniti

tagli, e comunque grande sia il segmento finito, al limite delle infinite divisioni, si ha l'eleatica definizione di punto.

- Che differenza c'è, sul segmento, fra taglio e punto?

- Il taglio è la separazione di due punti adiacenti (negli anni 40' scrivevo sul bipunto)

Occorre una "materializzazione" del punto per fare il differenziale. = (La più piccola entità di una dimensione fisica, oltre la quale non esiste più tale dimensione)

Per fare esempi semplici, dividiamo un volume con un fascio di piani paralleli, ogni elemento di volume è costituito da un'area finita per lo spessore (che è la distanza fra i piani)

Diminuendo lo spessore (misura lineare di lunghezza) arriveremo ad un limite " ds " = differenziale spessore, ove l'area A moltiplicata per " ds " dà il differenziale volume che indichiamo con $dV = A ds$.

" ds " è la più piccola misura lineare oltre la quale non v'è più spessore resta la superficie piana di area A priva di spessore.

Se l'area A la consideriamo rettangolare di base " b " ed altezza " h " e supponiamo di dividerla con segmenti paralleli a " b " distanti dh (differenziale altezza) l'elemento differenziale di area $dA = b \cdot dh$ ore per $dh = 0$ non si ha più area ma un segmento " b " che supponiamo lungo " l " ore " dl " sarà il differenziale delle lunghezze lineari che ritroviamo in $ds, dh, dx, dy, dz, db, ecc.$

Il simbolo: $d(\cdot)$ = differenziale ci rappresenta la variazione infinitesima di quella grandezza, la più piccola, oltre la quale sparisce la dimensione di quella grandezza.

Abbiamo già trattato e discusso il calcolo infinitesimale, negli altri volumi, abbiamo ripetuto queste osservazioni per cercare, nella esperienza sul nostro cosmo, le differenziazioni iniziali.

Abbiamo visto che ogni origine porta nel nostro cosmo è arbitraria.

Consideriamo un qualsiasi "io" osservatore puntiforme che vari in un altro "io".

La prima variazione implica la determinazione

di una direzione e poi una variazione di distanza. Se indichiamo con "O" l'"io" osservatore e con "P" l'"io" variato, abbiamo che, sia "O" che "P", giacciono entrambi sulla stessa retta di verso \vec{OP} , e su di essa vi sono altri infiniti punti "io", non solo ma se l'origine è indefinitamente lontana, vi sono per quella origine infinite rette parallele costituenti una direzionalità e tali rette coprono tutti i punti del nostro cosmo.

Solo la variazione di direzionalità implica la variazione di un punto indefinitamente lontano. Ma la variazione di direzionalità è un angolo piano! quindi dare come primitiva dimensione la dimensione angolare piana, appare fondata, ma non è definito su quale piano.

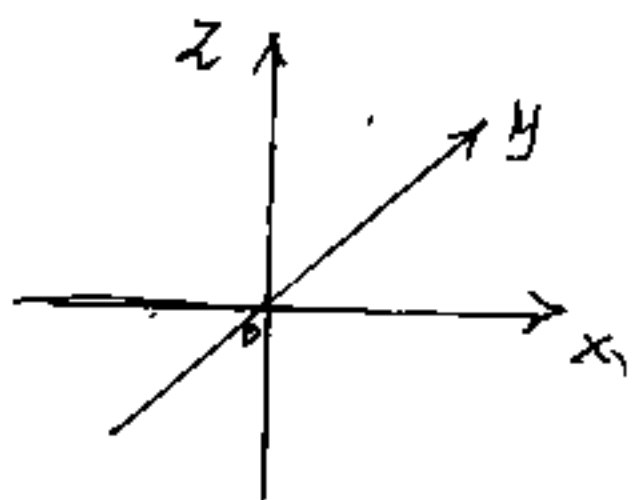
Si noti che la direzionalità data da un punto indefinitamente lontano fino a divenire improprio, è comune a tutti i punti del nostro cosmo.

Per esempio consideriamo il "nord" terrestre, circa la direzione della stella polare, (troppo vicina per parlare di direzionalità). Consideriamo invece la direzionalità di tutte le rette parallele alla retta che, in un certo istante, congiunge il polo terrestre col centro della stella polare; Una tale direzionalità non è più limitata al campo terrestre, può essere assunta nel cosmo. Essa è la giacitura dei piani ortogonali fra cui il piano equatoriale terrestre, o quello passante per il centro del sole, o altro; qualunque sia il piano, su di esso esiste un punto intersezione con una delle rette normali da poter considerare "centro".

Fra tutti i raggi uscenti da tale centro, solo uno è la direzionalità. Ogni raggio può proiettarsi sul piano e sulla retta di giacitura.

Il raggio della direzionalità, sul piano

ha proiezione nulla. Nel fascio di piani aventi per asse il raggio della direzionalità, consideriamo due piani ortogonali; avremo così tre piani ortogonali fra loro che dividono il cosmo in ottanti; chiamando con x, y, z le rette intersezione di tali piani, abbiamo un sistema cartesiano



ortogonale, che noi considereremo in coordinate polari

Sia la z la direzionalità iniziale che determina il piano $x; y$ (perpendicolare) se definiamo una delle due direzionalità x o y , nota la z , l'altra resta definita. Quindi, poiché nello spazio tridimensionale occorrono tre coordinate rispetto agli assi di riferimento, per determinare un punto, esse non possono essere tutte angolari.

Avremo quindi i seguenti casi di coordinate:

- 1) $x_p; y_p; z_p$; tutte e tre lineari (cartesiane).
- 2) $\hat{p}_Ox; \hat{p}_Oy; \overline{p}_O$; (polari) la $\hat{p}_Oz = \arccos \sqrt{1 - \cos^2 \hat{p}_Ox - \cos^2 \hat{p}_Oy}$.
- 3) $z_p; R_p; \hat{R}_X = \alpha$; (cilindriche).

Le tre coordinate cartesiane sono possibili solo avendo definito le direzionalità: x, y, z . ed il punto origine "0", nonché le unità dimensionali nelle tre direzionalità.

Consideriamo nota una sola direzionalità ed una variazione angolare φ_{rad} di tale direzionalità. Non essendo definito il piano di φ_{rad} da un "io" osservatore avremo il vertice di un cono indefinito, ampio $2\varphi_{\text{rad}}$, ed avente per asse la direzionalità iniziale.

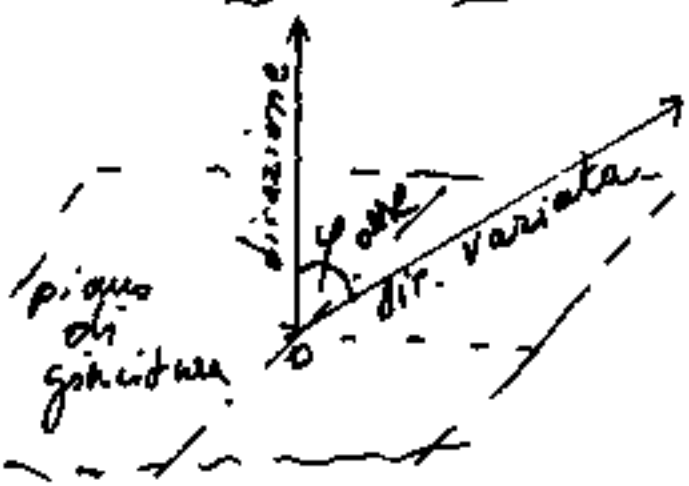
Chiameremo: angolo solido, lo spazio interno a tale cono.

Per $\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad. il cono degenera in un piano. Gli angoli solidi si misurano in stereradiani e sono l'area della sfera di raggio unitario intercettata dal cono. L'area totale di tale sfera è: 4π (stereradiani) il semispazio delimitato da un piano quando $\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad. è: 2π (stereradiani) e l'angolo solido del cono con al vertice 2φ sarà: $2\pi(1 - \cos\varphi)$ (stereradiani).

Il cambio di direzione da un punto finito "0" è un angolo. La semiretta, direzione originaria, ruota intorno ad una delle infinite rette del piano di giacitura.

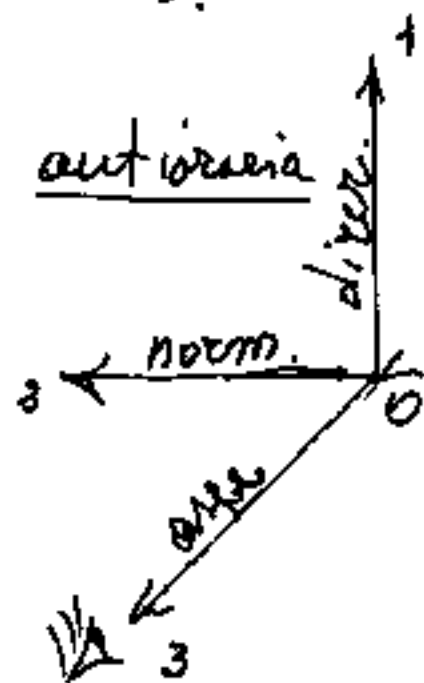
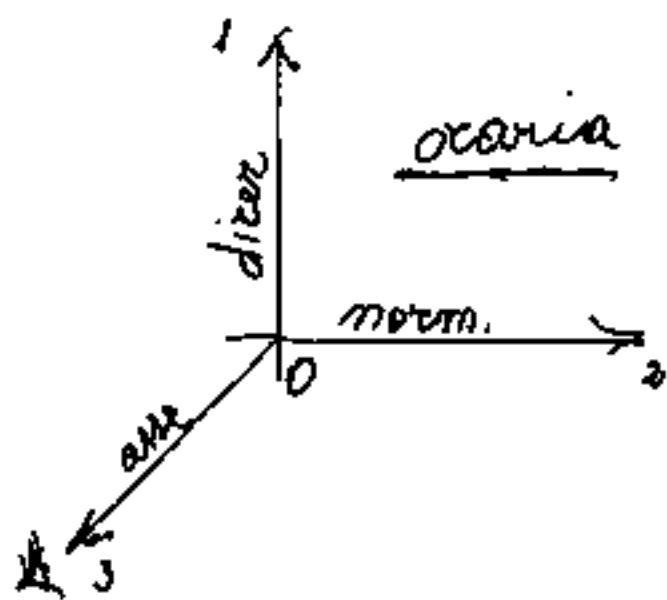
La variazione di direzione implica il moto rotatorio, la perpendicolarità fra semiretta-direzione ed asse di rotazione, Ma soprattutto indica la prima unità fondamentale (non convenzionale), che è l'angolo giro.

L'angolo giro, ha un verso di rotazione e un tempo per compiersi. Per definire i versi di rotazione occorre attribuire un verso all'asse ed



alla retta di giacitura del piano comune alla direzione ed al suo asse.

Nascono così due terne ortogonali dette ocaria ed autiocaria.



di cui abbiamo già trattato, però vi è già l'arbitrarietà dei versi e delle sequenze, da cui vorremmo uscire.

In campo finito, un piano ha due facce, come una pagina, un davanti, un dietro, un pari, un dispari, ecc, attribuiti convenzionalmente (arbitrariamente)

E, visto dall'infinito, cosa succede?

Se il punto indefinitamente lontano ci dà la direzionalità (direzione e verso di tutte le rette parallele, o la giacitura dei piani ad esse normali,) è implicito che la direzione opposta è un punto indefinitamente lontano opposto al primo.

Ma se questo punto indefinitamente lontano, supera il limite, non può essere un punto, perché un punto all' ∞ non ha senso, esso diventa come l'infinito stesso, non v'è più il segno + o - come la tangente a 90° , i piani non hanno più due facce, non esistono "versi" sulle rette. La retta è come una circonferenza di raggio infinito, gli estremi

si riuniscono.

Il nastro di Möbius è una superficie
avente una sola faccia!

Abbiamo già trattato il concetto di limite
e di calcolo infinitesimale; Lucio Lombardo
Radice, nel suo libro: "L'infinito" (Itinerari
filosofici e matematici d'un concetto di base),
riporta e commenta il pensiero degli antichi,
fino agli studiosi moderni, da Aristotele a
Galileo, a Cantor, a Kaut, a Russell,
a Hilbert, ecc.

Mi sembra (sono un essere umano, so di sbagliare)
che la parola "Infinito" e la parola
"zero", sulle quali si sono dibattuti gli
studiosi fra definibili o no numeri.

L'infinitesimo, preso come un quasi zero,
l'infinito aggettivato in "attuale", in
"assoluto", in potenziale, catalogato
coi transfiniti, ... ripeto mi sembra sia
una presuntuosa involuzione di uomini
che qualche milione di anni fa' non aveva
specie sulla terra, ... e fra qualche milione
di anni la sua specie terrestre sarà pro-
babilmente estinta.

Come nessun uomo dovrebbe permettersi
osservazioni su ciò che chiamiamo "Dio",
perché al di fuori, al di sopra, di tutta
l'intelligenza di tutta la generazione
umana; è apprezzabile l'uomo primitivo che,
non avendone mai sentito parlare, sente in
se l'esigenza di comunicare, e piazzato un
palo in terra fa il primo totem.

Tornando alla matematica, credo che
lo "zero" e l'infinito siano due limiti.
Se prendiamo una grandezza finita: N
e la dividiamo per infinito: $\frac{N}{\infty} = 0$ è
ovvio che otteniamo lo zero, perché se
ottenessimo una particella infinitesima
potremmo continuare a dividerla, ciò
vorrebbe dire che prima non avevamo
fatto infinitesime sezioni, ma solo un numero
molto grande.

Ecco perché se proiettiamo un seg-
mento su un'altro di diversa grandezza
notiamo che a ciascun "punto" del proiettato
corrisponde uno ed un sol punto della
proiezione, cioè entrambi (di diversa lunghezza)
hanno lo stesso infinito numero di punti.

Abbiamo già fatto l'esempio di $\frac{1}{3}$ trasformato nella serie: $3 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^n} \right)$ con "n" tendente all'infinito, e finché "n" non diventa infinito il nostro numero $0,333\bar{3} \dots$ non sarà esattamente $\frac{1}{3}$.

Il differenziale sarà una specie di punto dimensionalmente qualificato.

Consideriamo $d\varphi$ = differenziale delle misure angolari. L'arco di distanza "R" sarà:

$$da = R \cdot d\varphi$$

Ma per $R = \infty$, l'arco diventa finito e rettilineo.

Assumiamo come prima unità fondamentale
le "l'angolo giro", che, chiameremo anche:
ciclo. È implicita la direzione della retta di giacitura del piano contenente l'angolo e passante per il vertice dell'angolo stesso. Consideriamo, nel piano, un raggio: \overline{OA} origine, ed un raggio mobile che compie il ciclo, sia "T" il periodo, cioè il tempo impiegato a compiere un ciclo; avremo $\frac{1}{T} = \underline{\nu} = \underline{\text{frequenza}}$ misura i cicli percorsi nell'unità di tempo, cioè quante volte nell'unità

di tempo il raggio mobile si trova nella stessa posizione.

La frequenza ν è una velocità angolare per angoli misurati in angoli giro.

Se misuriamo gli angoli in radianti la velocità angolare si indica con ω ed avremo: $\omega = 2\pi\nu$ ($\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$)

Se misuriamo gli angoli in gradi avremo

$$\omega_g = \frac{360^\circ \nu}{1} = \frac{180^\circ}{\pi} \omega$$

Si noti che, nei dimensionamenti ora proposti, non figurano misure di lunghezza.

Si noti che, sia l'azione del ruotare (che noi abbiamo chiamato Momento), sia la velocità angolare, sono vettori, rappresentabili secondo l'asse di rotazione ma anche componibili o scomponibili secondo assi diversi.

Poiché abbiamo visto che la densità della materia, cioè la massa per unità di volume, è il quadrato di una frequenza, cerchiamo di capire il quadrato di una frequenza,

Le composizioni e scomposizioni dei vettori frequenze ci danno la somma o la differenza o la ripartizione di frequenze.

Per quadrato di una frequenza è da intendersi la frequenza di una frequenza, è una frequenza spaziale.

Il concetto di frequenza deve essere approfondito; ha in sé l'unità di misura del tempo, non solo perché gli uomini hanno scelto come unità di tempo certe frequenze astronomiche, ma perché ne connette, col pendolo, le misure lineari, le azioni ponderomotrici, ed in genere tutta la fenomenologia fisica.

Abbiamo già trattato il problema del pendolo, si noti che, avendo preso il ciclo, come angolo giro, come unità, esso è divisibile per le potenze di due moltiplicate per 1, 3, 5; ma non è divisibile per 7, per 9, per 11. ecc. - Data una frequenza detta fondamentale i multipli interi di essa sono dette:

"armoniche". Abbiamo visto che la frequenza è l'inverso del periodo: $(\nu = \frac{1}{T})$ e che la misura del tempo si è convenzionalmente riferita

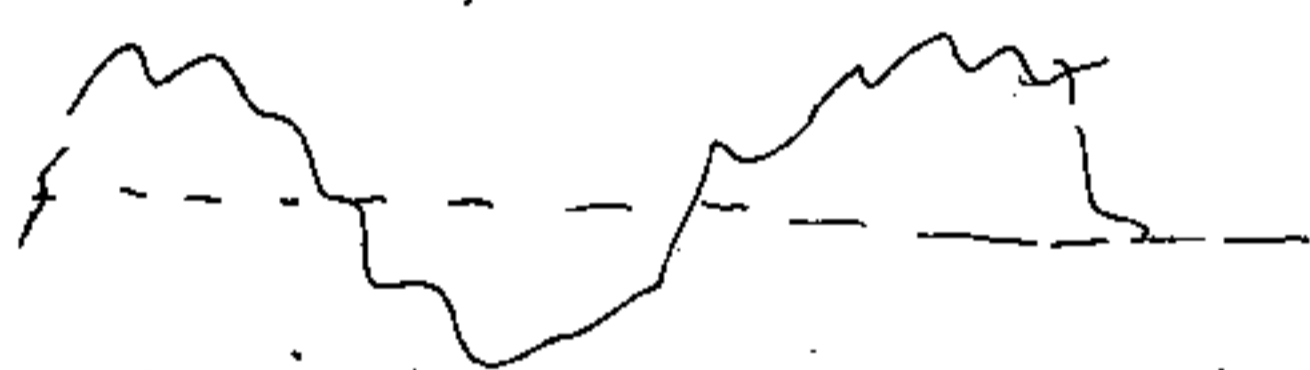
ai movimenti della terra, cioè ad apparenti frequenze astronomiche. Frequenza uno vuol dire: un ciclo nell'unità di tempo; l'eclittica in un anno, il giro della terra sul suo asse in un giorno. La frequenza di un "anno" non è la 365^{a} armonica della frequenza "giorno" perché $365,25$ non è intero ogni 4 anni occorre aggiungere il bisestile ... e neppure ciò è esatto.

In fisica, le frequenze delle vibrazioni elastiche, e le frequenze delle vibrazioni elettro-magnetiche sono fondamentali.

Ma nelle frequenze sono opportune molte precisazioni.

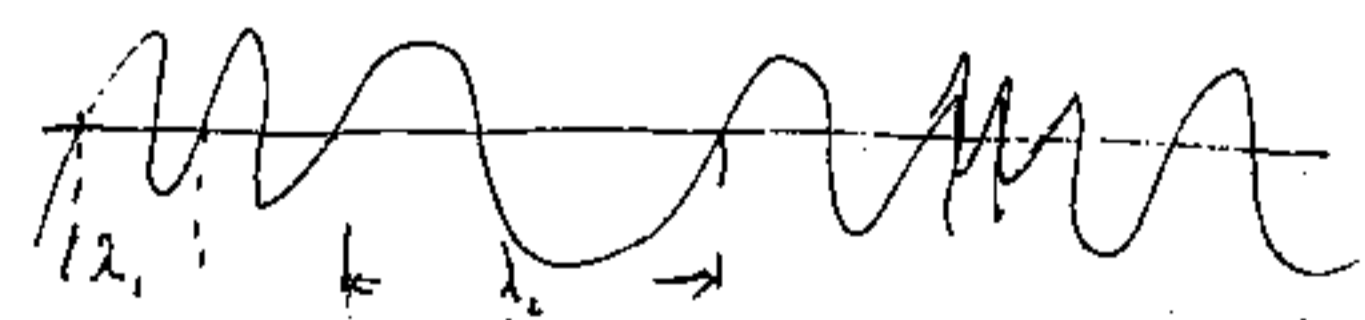
Noi abbiamo fatto vedere la sinusoidale tracciata da un pendolo che si muove perpendicolarmente al piano di oscillazione, da cui la definizione di lunghezza d'onda λ . Abbiamo visto la corrispondenza fra velocità angolare ω e la sinusoidale di ampiezza A
 $A = R \cos(\omega t + \varphi)$ ove R è l'ampiezza massima, t è il tempo, $\varphi = \text{fase}$ è l'inizio

della sinusoidale che può essere spostata dell'angolo φ rispetto all'origine dei tempi. Ma tutt'ocío ancora non basta, perché la frequenza può essere modulata e la modulazione può avvenire in ampiezza o ve la linea media della sinusoidale che abbiamo visto tracciare dal nostro pendolo, presenta delle irregolarità



che sono appunto le modulazioni in ampiezza.

Ma la modulazione dell'onda portante può anche avvenire in frequenza, cioè la frequenza oscilla intorno ad un valore detto base o fondamentale, come si



vede ciò comporta una variazione della lunghezza d'onda.

Una terza modulazione è detta di fase in cui la sinusoidale è come se avesse cambiato origine istante per istante.

($\varphi = \text{variabile}$)

Le Frequenze

Le frequenze invadono tutti i campi della fisica. Distinguiamo frequenze nel tempo da frequenze percentuali.

In cinematica: i moti armonici (v. Vol. II)

moto armonico semplice: $f(t) = a(\cos(\omega t + \varphi_0))$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \text{cost.} = \text{velocità angolare (rad/sec)}$$

$$\varphi = \text{angolo percorso al tempo } t = \varphi = (\omega t + \varphi_0)$$

$$\varphi_0 = \text{angolo percorso al tempo zero.} = \text{fase}$$

Poiché: $\sin(90^\circ - \varphi) = \cos \varphi$; l'espressione può essere espressa in seno.

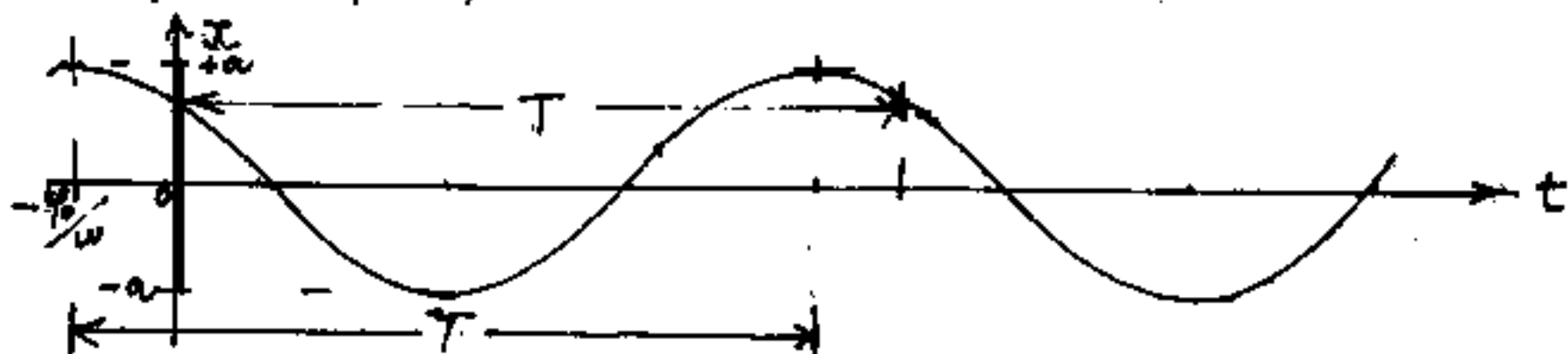
a = ampiezza del moto armonico.

$x = f(t) = a(\cos(\omega t + \varphi_0))$ è detta elongazione.

Se poniamo in ascisse i tempi ed in ordinate l'elongazione, tenuto conto che l'elongazione è nulla quando $(\omega t + \varphi_0) = \frac{\pi}{2}$ oppure $= \frac{3}{2}\pi$; cioè un ciclo completo è 2π (rad) ed il tempo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ è detto periodo di

oscillazione; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ = pulsazione (che è la velocità angolare media in un ciclo in rad/cic)

$$\nu = \frac{1}{T} = \text{frequenza di oscillazione.}$$

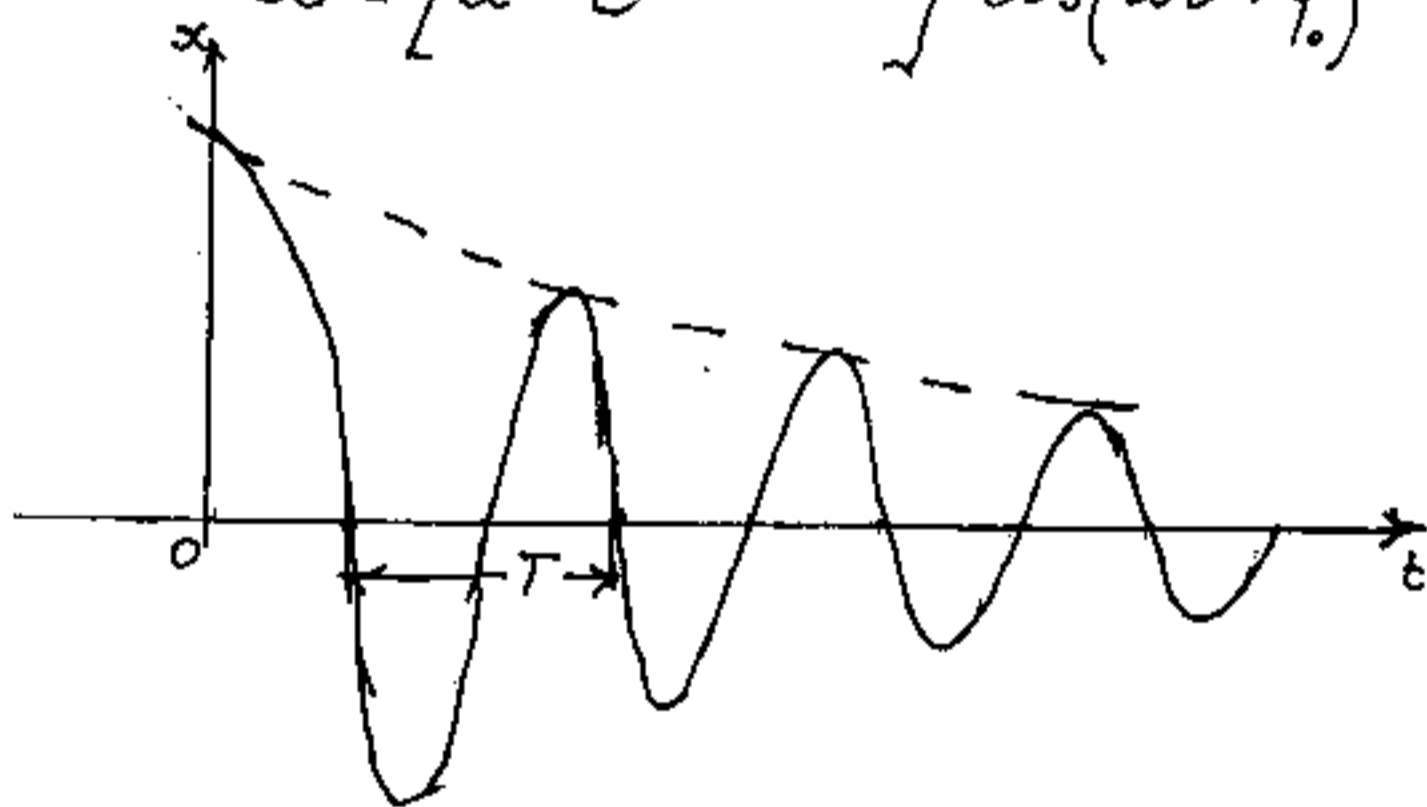


L'oscillazione intorno ad "0" è fra $+a$ e $-a$.
 Il moto armonico semplice, si chiama anche moto pendolare, perché corrisponde alle piccole oscillazioni di un pendolo.

Moto armonico smorzato

Se il fenomeno oscillatorio, mantiene costante il periodo T , e quindi la frequenza ν , e la velocità angolare $\omega = 2\pi\nu$, ma diminuisce l'ampiezza (con funzione esponenziale) nel tempo avremo:

$$x = [a \cdot e^{-\lambda(\omega t + \varphi_0)}] \cos(\omega t + \varphi_0)$$



Mentre i tempi possono computarsi in periodi T , cioè l'accrescimento dei tempi t diventa una progressione aritmetica di ragione T , la diminuzione dell'elongazione è in progressione geometrica di ragione: $\left(e^{-2\lambda\pi} = \frac{1}{e^{2\lambda\pi}} \right)$
 $2\lambda\pi = \ln \frac{x_{n-1}}{x_n} = \underline{\text{decremento logaritmico}}$

$$\lambda \text{ (chi)} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{x_{n-1}}{x_n} = \underline{\text{coefficiente di smorzamento}}$$

$$(1 - e^{-2\pi\alpha}) = \frac{x_{m-1} - x_m}{x_{m-1}} = \underline{\text{fattore di smorzamento}}$$

La sinusoide ad ampiezza costante abbiamo visto che è possibile ottenerla con un pendolo a punta scrivente ancorato su un carrello che scorre perpendicolarmente al piano del pendolo e con velocità costante tale da percorrere nel tempo T la lunghezza $(2\pi a)$ ove a è l'ampiezza della elongazione. Se R è la lunghezza del pendolo $a = R \sin \alpha$ ove α è l'angolo massimo del pendolo rispetto alla verticale di riposo. (col pendolo in assenza di attriti)

Se poniamo sul carrello, nel piano del pendolo, una circonferenza di raggio " a " e la facciamo percorrere, con velocità costante, da un punto che, istante per istante, proietta se stesso ~~normalmente~~ sul piano di scorrimento del carrello, la proiezione coprirà esattamente la sinusoide tracciata dal pendolo.

Ma, se ferma restando la velocità angolare del raggio " a ", facciamo "a" variabile, anziché una circonferenza

otterremo una spirale, ed in particolare, se la spirale è quella logaritmica, il cui raggio variabile $\tilde{a} = a \cdot e^{-\chi(\omega t + \varphi)}$, con $\chi > 0$ ed $\omega > 0$. otteniamo la proiezione della sinusoidale smorzata, relativa al moto armonico smorzato di cui sopra.

Nel V Volume abbiamo trattato la spirale logaritmica con "e" ad esponente positivo, cioè percorsa in verso opposto al moto armonico smorzato. Nel VI volume trattando il moto armonico si è passati alle Curve di Lissajous (1)

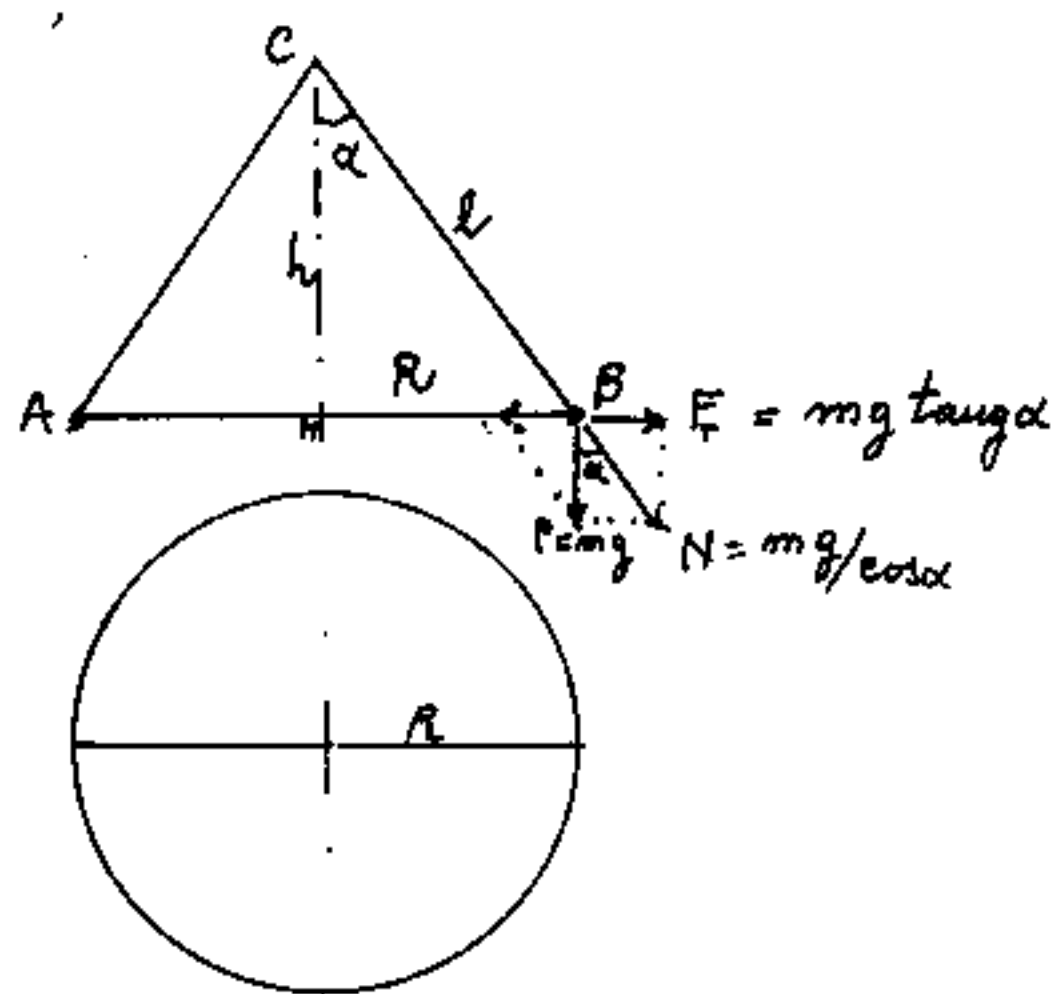
MISURA dei TEMPI

Consideriamo un peso attaccato ad un filo, in campo gravitazionale abbiamo, se fermo, un filo a piombo.

Ancorato l'altro estremo del filo, possiamo far oscillare il peso in un piano, segue le leggi del pendolo, avremo un moto pendolare smorzato in ampiezza per effetto degli attriti.

Se invece al peso imprimiamo un moto circolare, il filo sarà la generatrice di un cono, la velocità angolare

sarà costante, vogliamo dimostrare che il periodo dipende solo dall'altezza del cono ed è indipendente dalla lunghezza del filo. Cioè il periodo dipende solo dalla distanza del vertice del cono dal piano della circonferenza descritta dal peso.



- $m = \text{massa}$
- $P = \text{peso} = mg$
- $g = \text{accelerazione di gravità}$
- $N = \text{sforzò normale nel filo}$
- $F_c = \text{forza centrifuga}$
- $V_T = \text{velocità tangenziale}$
- $\omega = \frac{V_T}{R} = \text{velocità angolare}$

$l = \text{lunghezza del filo}$, $h = \text{altezza del cono}$, $R = \text{raggio cerchio}$.

Scomponiamo il peso secondo la direzione del filo e secondo una orizzontale $F_c = mg \tan \alpha$ che dovrà essere equilibrata dalla forza centrifuga data dalla accelerazione centripeta:

$$m V_T \omega = m g \tan(\alpha)$$

$$R \omega^2 = \frac{V_T^2}{R} = g \frac{R}{h} \quad ; \quad \boxed{\omega^2 = \frac{g}{h}}$$

$$\omega^2 = g/h$$

la velocità angolare: $\omega = \sqrt{g/h} = 2\pi \nu$ (rad/sec)

la frequenza: $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g/h} = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ (cicli/sec)

il periodo: $T = 2\pi \sqrt{h/g}$ (sec/ciclo)

come ci eravamo proposti di dimostrare.

uguagliando le definizioni delle cosiddette forze

$$\frac{m \cdot \omega^2}{l} = \frac{m \cdot g}{l}$$

$\gamma = \text{densità} = \frac{m}{l^3} = \frac{1}{T^2} = \nu^2 = \text{quadrato di frequen}$

$$\text{densità} = \gamma = \frac{1}{4\pi^2} \frac{g}{h}$$

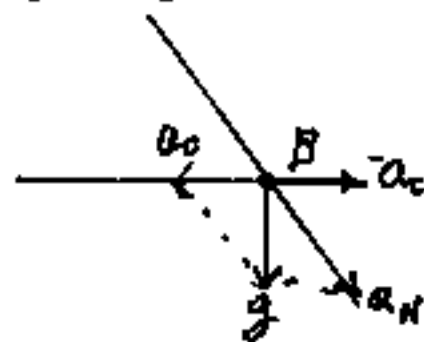
$$\text{densità} = \gamma = \left(\frac{\omega}{2\pi} \right)^2$$

$$g = h \omega^2 = \text{accelerazione di gravità}$$

quindi l'accelerazione di gravità è analoga ad una accelerazione centripeta: $a_c = v \cdot \omega = R \cdot \omega^2$

ove il raggio è l'altezza del nostro cono moltiplicata per $\tan(\alpha)$, l'accelerazione che

tende il filo: $a_N = l \omega^2$



Notiamo che:

$$g : h = a_N : l = a_c : R$$

cioè il peso P della massa ruotante $mg = P$

$$P : h = N : l = F_c : R$$

ove: $N =$ forza normale nel filo.

$F_c =$ Forza centrifuga

L'accelerazione centrifuga uguaglia l'accelerazione di gravità quando $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ cioè quando $h = R$ ed $l = h\sqrt{2}$.

Ma v'è qualcosa di più sottile, che la nostra abitudine a considerare gli angoli in radianti, ci rende difficile apprezzare; $2\pi \text{ rad} = 1 \text{ ciclo} = 1 \text{ angolo giro}$.

È molto più "pulito" misurare gli angoli in cicli piuttosto che in radianti, ove l'angolo in radianti, non è un angolo, ma l'arco sotteso di raggio unitario

Noi abbiamo già fissato come prima unità fondamentale, l'angolo giro o ciclo. Qui occorrono precisazioni, perché l'angolo giro è un angolo piano, cioè tutte le direzioni uscenti da un punto e giacenti in un piano, mentre il ciclo

può essere considerato il percorso di un raggio che torna su se stesso all'origine, ma il ciclo può non avere riferimenti spaziali angolari, infatti un qualsiasi fenomeno che si ripete può essere preso come un ciclo. Ogni vibrazione è un ciclo.

Se consideriamo i cicli dell'angolo solido, dobbiamo considerare una sfera dal cui centro escono raggi in tutte le direzioni. Consideriamo il raggio unitario in modo che l'area della superficie sferica intercettata ci dia la misura dell'angolo solido in steroradiani.

Consideriamo un raggio origine e consideriamo il suo punto di intersezione con la superficie sferica, supponiamo che il punto si dilati circolarmente sulla superficie sferica, il raggio diventa l'asse di un settore sferico che continuando a crescere diventa una semisfera, poi una sfera intera, che si chiude sul raggio opposto a quello origine, e continuando ripercorre inversamente tutte le posizioni

fino a tornare al raggio origine, il fenomeno la compiuto un ciclo.

Potremmo considerare contemporaneamente le varie direzioni uscenti da un punto e far variare i raggi da zero ad un massimo ove, giunti al massimo, si staccano dal centro e diminuiscono fino a tornare nulli.

Vedremo meglio il comportamento di centri emissivi di frequenze di vario genere, particolarmente importanti le frequenze elettro-magnetiche, l'emissività degli elementi come il radio o l'uranio ed il confronto con la luce o le onde radio.

Completamente diverse le vibrazioni elastiche dei suoni.

Cio' che appassiona è che le varie frequenze, mantenendo costante il loro periodo, si muovono nello spazio con velocità diverse dipendenti dal mezzo di trasmissione, ma il periodo appare variato per un osservatore in moto relativo rispetto all'emittente,

(Effetto Doppler) effetto che viene utilizzato in astronomia per studiare lo spostamento verso il rosso della luce proveniente da galassie lontane.

Per trattare meglio questi argomenti, dobbiamo dare alcuni cenni sui campi vettoriali, sul calcolo vettoriale, anche se riteniamo che in una più moderna impostazione scientifica il calcolo vettoriale, nato per aver negato la unità angolare, ha superato.

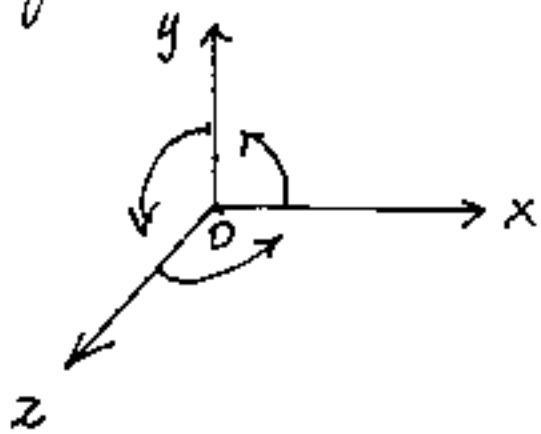
Le frequenze percentuali ammettono la distribuzione di frequenze. Un contenitore contiene il 3% di palline bianche, il 70% rosse e il 27% verdi, la frequenza percentuale massima è detta "moda" (vedi vol II).

La frequenza di un evento è considerata probabilità a posteriori (vedi vol II).

I vettori in campo tridimensionale

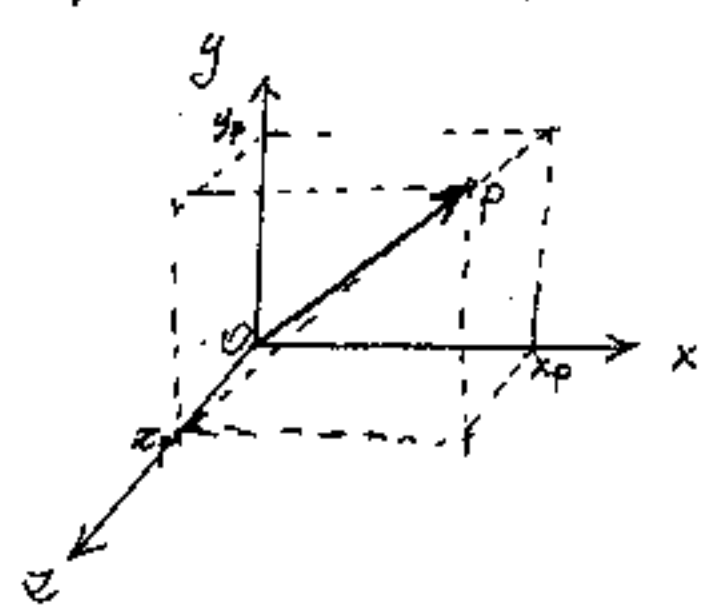
Trattandosi di grandezze la cui definizione dipende dall'orientamento, è necessario riferirsi ad un sistema di assi cartesiani coordinati che saranno in ogni caso ortogonali (e ne vedremo il motivo).

Scegliremo una terna antioraria $(0, x, y, z)$ ove dal punto 0 origine l'asse x orientato determina la direzionalità di tutte le rette parallele ad x sulle quali saranno misurate grandezze lineari chiamate asseisse.



Quindi se facciamo ruotare l'asse x intorno al punto 0 di $\pi/2$ e la sua rotazione vista dalla punta di z è antioraria il semiasse positivo delle x si sovrappone al semiasse positivo delle y .
Facciamo ora ruotare y intorno ad 0 ruotando su un piano normale a x se guardando dalla punta di x la rotazione di y la vediamo antioraria il semiasse positivo di y si sovrapporrà al semiasse positivo z . Infine se facciamo ruotare z intorno ad 0 ruotando su un piano perpendicolare ad y e dalla punta di y vediamo z ruotare antiorario, il semiasse positivo z tornerà a sovrapporsi all'iniziale semiasse positivo x .

In una siffatta terna di assi consideriamo il punto $P \equiv (x_p, y_p, z_p)$ e consideriamo orientato il segmento \vec{OP} da O a P .



\vec{OP} è detto vettore geometrico e si indica con $(P-O)$

vettore che abbiamo già visto. Poniamo $(P-O) = \vec{V}$

Le coordinate di P (proiezioni del modulo di \vec{V}) sono semplici segmenti e sono dette le componenti di \vec{V} e sono grandezze scalari. Se, ricordando il coeffi-

ciente immaginario i (che abbia ruotato di $\pi/2$ segmenti di unipotetico asse reale) consideriamo \vec{i} il versore dell'asse x cioè il vettore unitario che determina la direzionalità x

analogamente: \vec{j} il versore dell'asse y , e \vec{k} il versore dell'asse z ; avremo che le componenti di \vec{V} (scalari) moltiplicate per i rispettivi versori diventano i vettori componenti di \vec{V} e quindi:

$$\vec{V} = \vec{i}x_p + \vec{j}y_p + \vec{k}z_p$$

ove: $|\sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}| = |\vec{V}| =$ modulo del vettore \vec{V}

ed: $\frac{x_p}{|\vec{V}|} = \cos \alpha$; $\frac{y_p}{|\vec{V}|} = \cos \beta$; $\frac{z_p}{|\vec{V}|} = \cos \gamma =$ coseni direttori

$$\vec{V} = |\vec{V}|(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma)$$

Operazioni sui vettori

Il prodotto di un numero per un vettore è un vettore (inteso sommato a se stesso tante volte quanto è il numero).

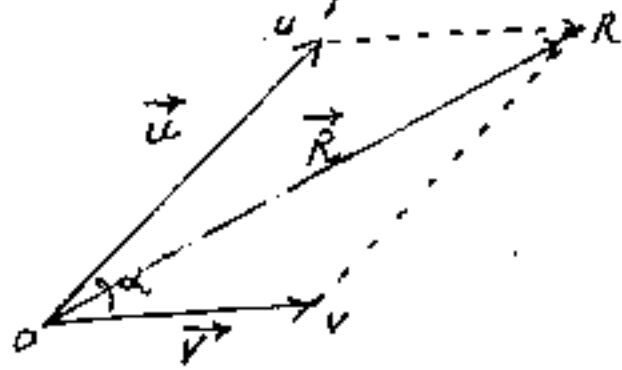
Somma e differenza di due vettori

Graficamente un vettore può rappresentarsi con un segmento orientato la cui lunghezza rappresenta, in una certa scala, l'intensità: cui $1 =$ (dimensione del vettore)

Consideriamo quindi due vettori i cui versi positivi derivano dell'angolo α . e siano \vec{u} e \vec{v} trattandosi di due soli vettori, in qualunque posizione siano nello spazio essi definiscono una giacitura e quindi possiamo ridurci a sistemi piani. (Se fossero le cosiddette forze non potremmo riferirci ad un piano perché le loro rette di azione potrebbero essere sghembe e quindi generare dei momenti)

Noi riferiremo i nostri due vettori \vec{u} e \vec{v} ad un sistema piano per cui possono essere disegnati su uno stesso foglio (cosa impossibile per rette sghembe).

avremo quindi:



la regola del parallelogramma:

Poiché un vettore può spostarsi parallelamente a se stesso

$(V-O) = (R-U) = \vec{v}$ per cui: $(U-O) = \vec{u} = (R-V)$

possiamo scrivere: $\vec{u} + \vec{v} = (U-O) + (R-U) = (R-O) = \vec{R}$

od anche $\vec{v} + \vec{u} = (V-O) + (R-V) = (R-O) = \vec{R}$

La somma di vettori gode della proprietà commutativa.

L'angolo $\widehat{OUR} = (180^\circ - \alpha)$

$$|OR| = |R| = \left| \sqrt{|u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos(180^\circ - \alpha)} \right|$$

$$|R| = \left| \sqrt{|u|^2 + |v|^2 + 2|u||v| \cos \alpha} \right|$$

La somma di due vettori uscenti da O è il vettore uscente da O diagonale del parallelogramma che ha per lati i vettori dati.

Se i due vettori nello spazio tridimensionale

sono espressi da $\vec{u} = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}$

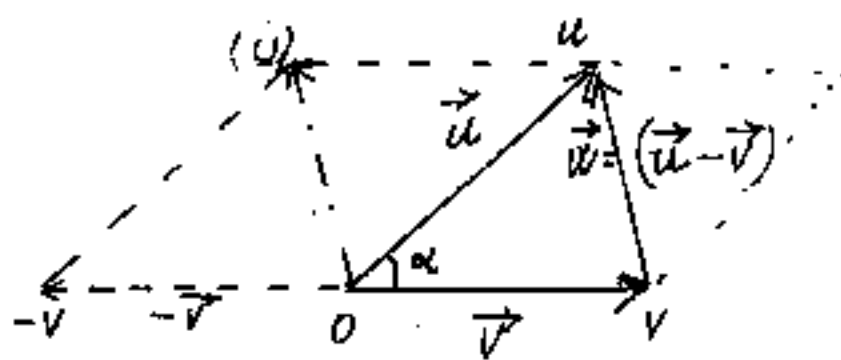
$\vec{v} = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}$

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{W} = (a_1 + a_2) \vec{i} + (b_1 + b_2) \vec{j} + (c_1 + c_2) \vec{k}$$

Il vettore somma ha per componenti la somma delle componenti omonime dei vettori addendi.

Differenza di due vettori

Poiché per invertire il segno di un vettore, basta prenderlo di verso opposto (vedi figura)



$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = (u, -0) =$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{w} = (u - v)$$

Il vettore differenza di due vettori uscenti da

O è la diagonale del parallelogramma che ha per lati i vettori ed esce dalla punta del vettore diminutore diretta verso la punta del vettore diminuendo.

$$\vec{v} \vec{u} = \vec{w} = (\vec{u} - \vec{v}) = (u - v)$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{|u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\alpha}$$

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

$$\vec{v} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{w} = (a - a_1)\vec{i} + (b - b_1)\vec{j} + (c - c_1)\vec{k}$$

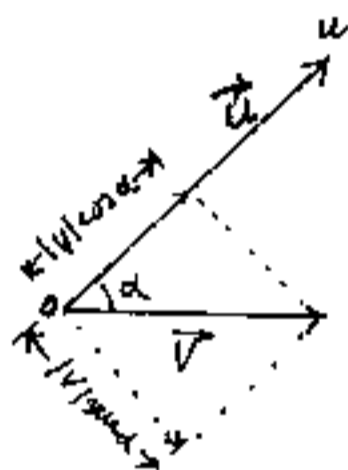
Il vettore differenza di due vettori ha per componenti la differenza delle componenti omonime del diminuendo e del diminutore.

Prodotto scalare fra due vettori (X)

(In notazione americana si indica con un punto (\cdot) $(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)$
(The Scalar, Dot, or Inner Product of Two Vectors v_1 and v_2)

Si abbiano due vettori \vec{u} e \vec{v} moltiplicarli fra loro scalarmente significa eseguire il prodotto del modulo del primo vettore per la proiezione del modulo del secondo vettore sul primo o viceversa. ed il risultato è uno scalare. (Il prodotto scalare si simboleggia: X) (In notazione europea e si legge il scalare V)

$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \alpha$$



Sia per esempio $(u=0) = \vec{u}$ lo spostamento di una barca a vela quando la direzione e l'intensità del vento è \vec{v} avviene che solo il componente di \vec{v} che ha per modulo: $|\vec{v}| \cos \alpha$ è la parte attiva, l'altro non è influente.

Il prodotto scalare di due vettori è lo scalare prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso fra i due vettori.

Chiameremo flusso di un vettore \vec{v} l'integrale

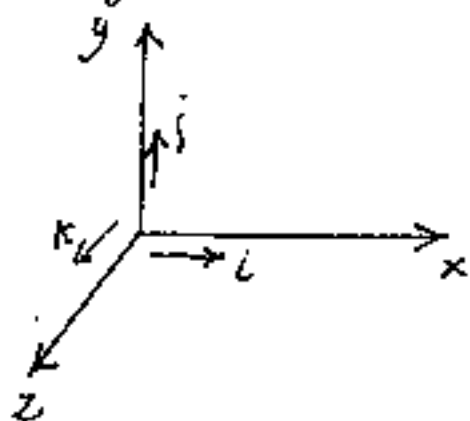
$$\varphi = \int \vec{v} \times dA$$

ricordando che le aree elementari dA sono vettori elementari la cui direzionalità è determinata dalle rette di giacitura.

Facciamo ora il prodotto scalare dei versori:

i, j, k tenendo conto che l'angolo retto $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

e che: $\cos(0) = 1$



$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{i} = 1 & \vec{j} \times \vec{i} = 0 & \vec{k} \times \vec{i} = 0 \\ \vec{i} \times \vec{j} = 0 & \vec{j} \times \vec{j} = 1 & \vec{k} \times \vec{j} = 0 \\ \vec{i} \times \vec{k} = 0 & \vec{j} \times \vec{k} = 0 & \vec{k} \times \vec{k} = 1 \end{array}$$

Il prodotto scalare gode della proprietà commutativa.
da notare che questo "i" pur avendo le proprietà operazionali (costante di $\frac{\pi}{2}$) uguale a $\sqrt{-1}$ è da esso ben distinto infatti $i^2 = i \times i = +1$ e non (-1) (Hamilton)

Esempio di prodotto scalare:

$$\vec{U} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{V} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\vec{U} \times \vec{V} = \begin{matrix} (2)(2) & + & (-3)(4) & + & (4)(-5) \\ 2 & - & 12 & - & 20 \end{matrix}$$

$$\underline{\vec{U} \times \vec{V} = -30}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{j} \times \vec{i} = 0 \\ \vec{i} \times \vec{k} = \vec{k} \times \vec{i} = 0 \\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{k} \times \vec{j} = 0 \end{array} \right.$$

Condizione di perpendicolarità di due vettori

è che sia nullo il loro prodotto scalare

se mi precedenti vettori: $\vec{U} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$
 $\vec{V} = \lambda\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$

poniamo il \vec{V} dipendente da un parametro λ

avremo: $\vec{U} \times \vec{V} = 2\lambda - 32$ per $\lambda = 16$ i

due vettori sono perpendicolari.

Prodotto vettoriale fra due vettori (\wedge)

(In notazione americana si indica con una croce \times) ($\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$)
(The Vector or Cross Product of Vectors \vec{v}_1 and \vec{v}_2)

Il simbolo del prodotto vettoriale è: \wedge ; $\left\{ \begin{array}{l} \text{in notazione} \\ \text{europea} \end{array} \right.$

Il prodotto vettoriale di due vettori è un vettore

che ha per modulo il prodotto dei moduli per il seno

dell'angolo formato dai vettori; per direzione

una retta perpendicolare al piano dei vettori

e di verso tale che il primo vettore, il secondo vettore

ed il vettore prodotto, nell'ordine, formino una terna

antioraria. Cioè il prodotto vettoriale non gode

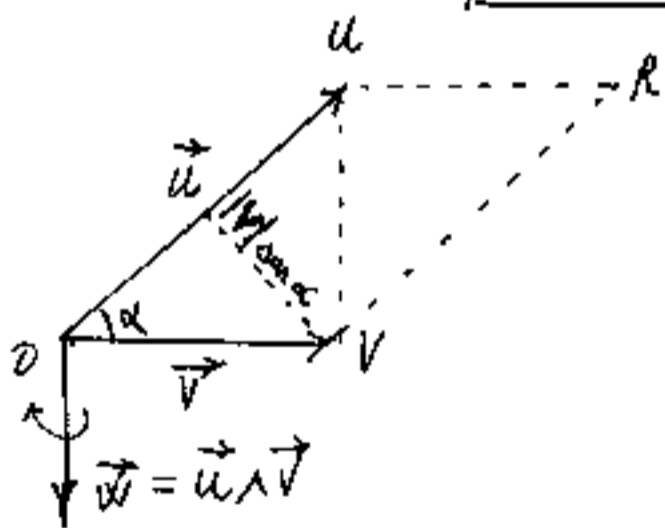
della proprietà commutativa perché invertendo

i fattori cambia verso il vettore prodotto.

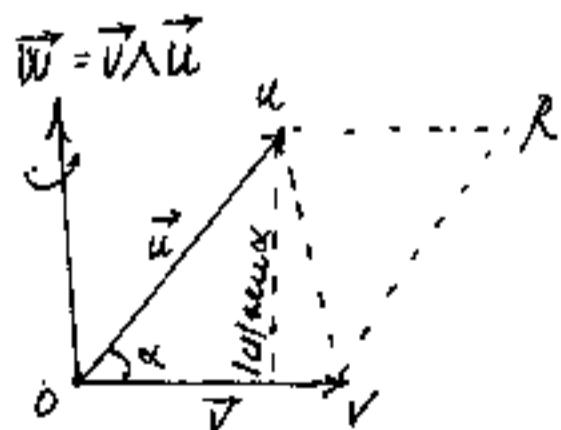
(si legge: u vettore v)

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$$

$$|\vec{w}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \alpha$$



Si noti che $|\vec{w}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \alpha$ è il doppio dell'area del triangolo: uov quindi il modulo di \vec{w} cioè $|\vec{w}|$ è l'area del parallelogramma: $OURV$.



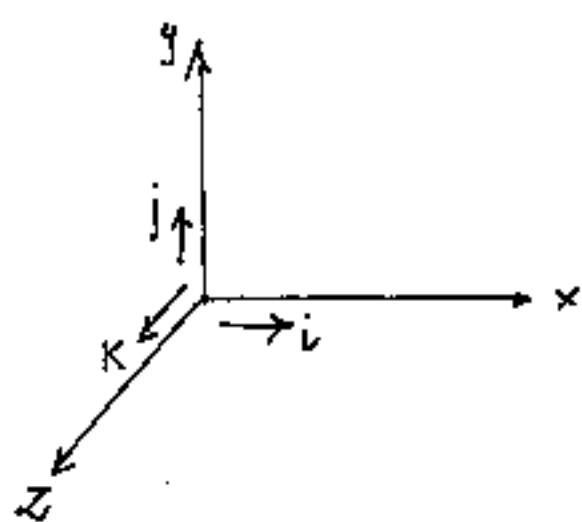
cioè $|\vec{v}| \sin \alpha$ è l'altezza relativa ad \vec{ou} , mentre $|\vec{u}| \sin \alpha$ è l'altezza relativa ad \vec{ov} ; cioè $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ è il momento di \vec{u} rispetto a \vec{v}

mentre $\vec{v} \wedge \vec{u}$ è il momento di \vec{v} rispetto ad \vec{u} .

Facciamo il prodotto vettoriale dei versori tenendo

presente che $\sin(0) = 0$;

$$\sin(\pi/2) = 1$$



$$\begin{array}{lll} \vec{i} \wedge \vec{i} = 0 & \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} & \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} & \vec{j} \wedge \vec{j} = 0 & \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j} & \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} & \vec{k} \wedge \vec{k} = 0 \end{array}$$

possiamo ora calcolare il prodotto vettoriale

dei nostri due vettori: $\vec{u} = (2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k})$

$$\vec{v} = (\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k})$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}) \wedge (\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}) \quad \left(\begin{array}{l} \text{sviluppendo ordinatamente} \\ \text{da sinistra.} \end{array} \right)$$

si ha: $(2)(1)(0) + (2)(4)(\vec{k}) + (2)(-5)(-\vec{j})$

$$(-3)(4)(-\vec{k}) + (-3)(4)0 + (-3)(-5)\vec{i}$$

$$(4)(1)(\vec{j}) + (4)(4)(-\vec{i}) + (4)(-5)0 =$$

$$(-16 + 15)\vec{i} + (10 + 4)\vec{j} + (8 + 3)\vec{k} =$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{i} + 14\vec{j} + 11\vec{k}$$

oppure come determinante:

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} =$$

Condizioni di parallelismo di due vettori e che sia nullo il loro prodotto vettoriale

I due vettori avranno coefficienti proporzionali,

$$\vec{u} = (2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}) \quad \vec{v} = \lambda\vec{i} + \mu\vec{j} + \nu\vec{k} \quad \text{avremo:}$$

$$2\lambda(0) + 2\mu\vec{k} + 2\nu(-\vec{j}) \quad (-3\nu + 4\mu)\vec{i} = 0 \quad \nu = -\frac{4}{3}\mu \quad \frac{8}{3}\mu + 4\lambda = 0$$

$$-3\lambda(\vec{k}) + (-3)\mu(0) + (-3)\nu\vec{i} \quad (-2\nu + 4\lambda)\vec{j} = 0 \quad \lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad -2\mu + 2\mu = 0$$

$$4\lambda\vec{j} + 4\mu(-\vec{i}) + 4\nu(0) \quad (+3\lambda + 2\mu)\vec{k} = 0$$

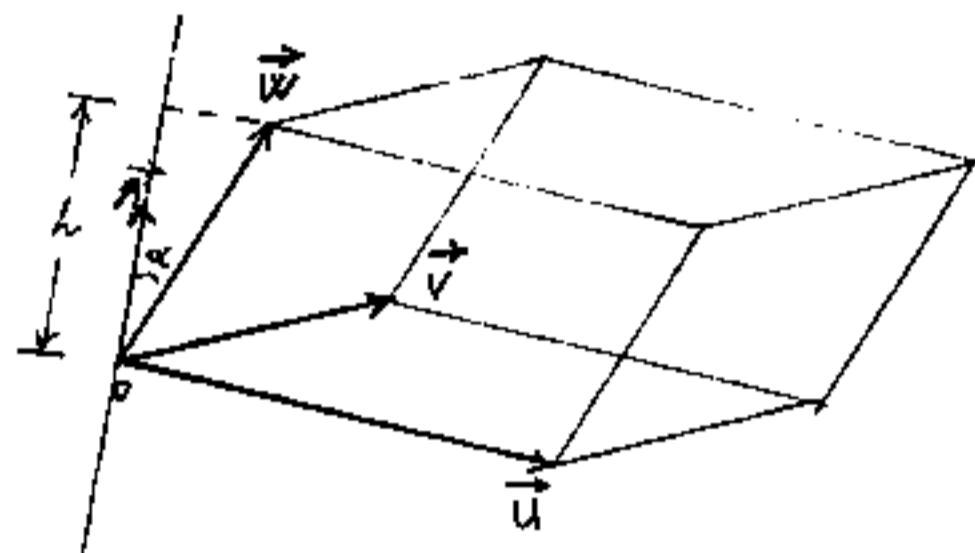
$$\mu = 3; \quad \lambda = +2; \quad \nu = +4 \quad \vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \quad \text{identifica } \vec{u}$$

attribuendo qualsiasi valore arbitrario a μ si ottengono \vec{v} paralleli a \vec{u}

Prodotto misto di tre vettori

$$(\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w}) = \text{scalare}$$

Dimostriamo che il prodotto misto è il volume del parallelepipedo che ha per spigoli i tre vettori.



Infatti: $(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{A}$
il prodotto vettoriale \vec{u} e \vec{v} è un vettore \vec{A} perpendicolare al piano di \vec{u} e \vec{v} ed ha per

modulo l'area del parallelogramma di \vec{u} e \vec{v} , che è la base del solido. Sostituendo \vec{A} nel prodotto misto si ha il prodotto scalare: $\vec{A} \times \vec{w} = |\vec{A}| \cdot |\vec{w}| \cos \alpha$ ove $|\vec{w}| \cos \alpha = h =$ altezza del solido per cui Area base (A) per altezza $h =$ volume.

$$\begin{aligned} (\vec{u} \wedge \vec{v}) \times \vec{w} &= \text{volume} \\ &= \vec{A} \times \vec{w} = \\ &= |\vec{A}| \cdot |\vec{w}| \cos \alpha = \\ &= \underline{A h = \text{volume}} \end{aligned}$$

ove se:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k} \\ \vec{v} &= a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k} \\ \vec{w} &= a_3 \vec{i} + b_3 \vec{j} + c_3 \vec{k} \end{aligned}$$

$$\text{si ha: } Ah = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w} = 0$ è la condizione di complanarità.

Per piano di vettori si intende il piano a cui essi sono paralleli

È anche interessante costruire il cubetto
 coi vettori unitari:

$$\begin{array}{ll} \vec{i} \wedge \vec{j} \times \vec{k} = 1 & \vec{i} \wedge \vec{k} \times \vec{j} = -1 \\ \vec{j} \wedge \vec{k} \times \vec{i} = 1 & \vec{j} \wedge \vec{i} \times \vec{k} = -1 \\ \vec{k} \wedge \vec{i} \times \vec{j} = 1 & \vec{k} \wedge \vec{j} \times \vec{i} = -1 \end{array}$$

Nell'eseguire le operazioni abbiamo fatto precedere
 il prodotto vettoriale che si trova più a sinistra, ed
 il risultato lo abbiamo moltiplicato scalarmente.

$$(\vec{i} \wedge \vec{j}) = +\vec{k} \rightarrow \vec{k} \times \vec{k} = 1 \quad (\vec{i} \wedge \vec{k}) = -\vec{j} \rightarrow -\vec{j} \times \vec{j} = -1$$

Se avessimo fatto precedere il prodotto scalare
 avremmo avuto (nella 1ª uguaglianza) $(\vec{j} \times \vec{k}) = 0$ e
 quindi: $\vec{i} \wedge 0$ (non ha senso) perché per
fare il prodotto vettoriale entrambi i fattori
debbono essere vettori per cui il prodotto
vettoriale deve in ogni caso precedere il
prodotto scalare.

È ora possibile esprimere il teorema
 dello scambio dei simboli \wedge e \times . (si veda
 la prima e seconda equazione.)

$$\vec{i} \wedge \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \times \vec{j} \wedge \vec{k} = 1 \text{ infatti } \vec{i} \times (\vec{j} \wedge \vec{k}) = (\vec{j} \wedge \vec{k}) \times \vec{i} = 1$$

Doppio prodotto vettoriale

Il doppio prodotto vettoriale non gode della proprietà associativa, e pertanto dovremo mettere delle parentesi: per indicare i vettori complanari.

$$1) (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} \cdot \vec{v} - \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{u}$$

$$2) \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{w} \times \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$$

Sappiamo che $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è un vettore ortogonale al piano di \vec{u} e \vec{v} (abbiamo già detto in che senso si può parlare di complanarità di vettori); qualunque sia la direzione di \vec{w} il piano comune a \vec{w} e $(\vec{u} \wedge \vec{v})$ avrà rette di giacitura perpendicolari a \vec{w} cioè nel piano di \vec{u} e \vec{v} . perciò il risultato della 1) espansione è un vettore complanare ad \vec{u} e \vec{v} , mentre della 2) è complanare con \vec{v} e \vec{w} .

$$\vec{u} = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k} \quad ; \quad \vec{v} = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k} \quad ; \quad \vec{w} = a_3 \vec{i} + b_3 \vec{j} + c_3 \vec{k}$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (b_1 c_2 - b_2 c_1) \vec{i} + (a_1 c_2 - a_2 c_1) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}$$

$$\left[(b_1 c_2 - b_2 c_1) \vec{i} + (a_1 c_2 - a_2 c_1) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k} \right] \wedge \vec{w} =$$

$$= (+b_3 b_1 c_2 - b_3 b_2 c_1) \vec{k} - (b_1 c_2 c_3 - b_2 c_1 c_3) \vec{j} + (a_2 c_1 c_3 - a_1 c_2 c_3) \vec{i} \\ - (a_3 a_2 c_1 - a_3 a_1 c_2) \vec{k} + (a_1 a_3 b_2 - a_2 a_3 b_1) \vec{j} - (a_1 b_2 b_3 - a_2 b_1 b_3) \vec{i} =$$

che può essere scritta:

$$= (b_1 b_3 + c_1 c_3) (a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}) - (b_2 b_3 + c_2 c_3) (a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}) =$$

$$\text{cioè: } \boxed{[(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}}$$

analogamente si dimostra la seconda.

Identità vettoriali

Analogamente possono dimostrarsi le seguenti formule
ove il prodotto scalare precede il prodotto di uno scalare per un
vettoce

$$(\vec{u})^2 = (\vec{u} \times \vec{u}) = |\vec{u}|^2 \cos \alpha.$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v})^2 = (\vec{u})^2 (\vec{v})^2 - (\vec{u} \times \vec{v})^2$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{w} \wedge \vec{z}) = \vec{u} \times \vec{w} \wedge \vec{z} \cdot \vec{v} - \vec{v} \times \vec{w} \wedge \vec{z} \cdot \vec{u}$$

(Questa relazione se consideriamo i vettori unitari ed
 $\vec{w} = \vec{u}$, diventa la formula fondamentale di trigonome-
tria sferica)

$$(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} + (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} + (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = 0$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{z} = \vec{z} \times \vec{v} \wedge \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{z} \times \vec{w} \wedge \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{z} \times \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{a} \wedge \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} (\vec{u} \times \vec{a}) & (\vec{u} \times \vec{b}) & (\vec{u} \times \vec{c}) \\ (\vec{v} \times \vec{a}) & (\vec{v} \times \vec{b}) & (\vec{v} \times \vec{c}) \\ (\vec{w} \times \vec{a}) & (\vec{w} \times \vec{b}) & (\vec{w} \times \vec{c}) \end{vmatrix}$$

Queste relazioni possono permettere la costruzione di
certe equazioni vettoriali. per es.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{z} = \vec{u} \times \vec{z} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{v} \times \vec{z} \cdot \vec{w} \wedge \vec{u} + \vec{w} \times \vec{z} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v}$$

dati: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ permette di assegnare un vettore \vec{x} tale che

$$\vec{u} \times \vec{x} = \alpha ; \quad \vec{v} \times \vec{x} = \beta ; \quad \vec{w} \times \vec{x} = \gamma$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{x} = \alpha \vec{u} \wedge \vec{w} + \beta \vec{w} \wedge \vec{u} + \gamma \vec{u} \wedge \vec{v}$$

(ecc.)

Equazioni vettoriali di curve notevoli

Ricordiamo come l'operatore algebrico:

$$\underline{e^{i\varphi}} = (\cos\varphi + (\sin\varphi)i) \quad (\text{veoli Vol II} \\ \text{pag 43-52})$$

moltiplicato per un modulo $|V|$ determini un vettore cioè il segmento reale $|V|$ viene orientato dell'angolo φ rispetto all'asse reale. Se questo operatore moltiplica un vettore lo fa ruotare dell'angolo φ .

per esempio: $\underline{\vec{u}} = (\cos\varphi)\vec{i} + (\sin\varphi)\vec{j}$

$$\underline{\vec{u}} = (\cos\varphi + (\sin\varphi)i)\vec{i}$$

abbiamo con ciò distinto "i" operatore capace di far ruotare i segmenti o vettori di $\pi/2$ ed "i" vettore sull'asse x di modulo unitario, ove $(i\vec{i}) = \vec{j}$.

cioè: $(\cos\varphi + (\sin\varphi)i)$ è l'operatore che fa ruotare \vec{i} fino a sovrapporsi ad \vec{u} avremmo potuto scrivere: $\underline{\vec{u}} = e^{i\varphi} \cdot \vec{i}$

P sia l'estremo del vettore $(P-O)$ avremo: $(0 \leq n \leq +\infty)$

$P = (O + n\vec{u})$ (equazione) della retta per O parallela ad \vec{u} .
(vettoriale)

$P = (O + \rho e^{i\varphi} \vec{i})$ (con φ variabile da 0 a 2π) = equazione vettoriale del cerchio di centro O e raggio ρ

$P = (O + a \cos\varphi \vec{u} + b \sin\varphi \vec{v})$ (i5) = equazione vettoriale dell'ellisse di centro O di semiasse a, b paralleli ad \vec{u}, \vec{v} .

$P = (O + am\vec{u} + bm^2\vec{v})$ equazione di una parabola passante per O , la retta tangente in O è parallela al vettore \vec{u} , i diametri sono paralleli a \vec{v}

Se consideriamo l'equazione:

$$P = O + r\varphi \vec{u} + r\dot{\varphi} \vec{u} - r\dot{\varphi} e^{-i\varphi} \vec{u}$$

si ha l'equazione di una cicloide generata da un cerchio di raggio r che rotola sulla retta per O parallela ad \vec{u} .

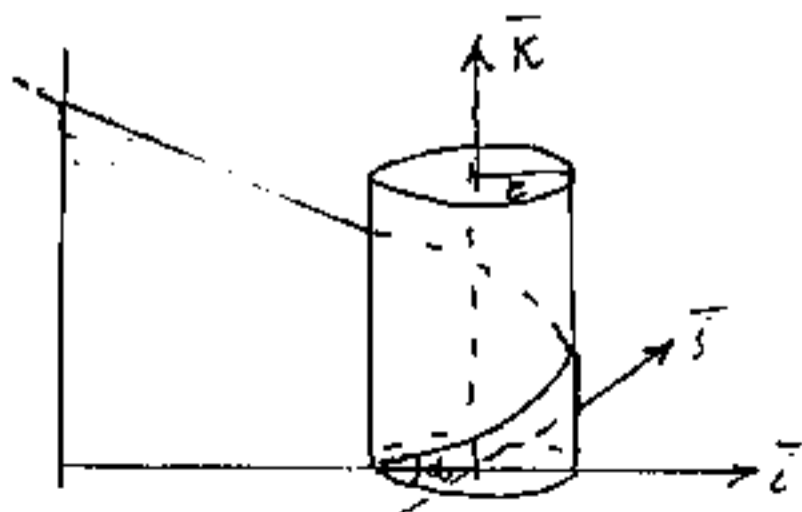
$$P = O + (R+r) e^{i\varphi} \vec{u} - b e^{i(\frac{R+r}{r}\varphi)} \vec{u}$$

= equazione vettoriale di una epicicloide generata da un punto connesso col cerchio di raggio r e distante b dal suo centro, cerchio che rotola sulla circonferenza fissa di raggio R (\vec{u} = vettore unitario costante).

Cambiando segno ad R e b diventa ipocicloide.

$$P = O + r e^{i\varphi} \vec{i} + r\varphi \tan(\alpha) \vec{k}$$

È l'equazione di un'elica cilindrica tracciata su un cilindro circolare retto di centro O e raggio r ($90^\circ - \alpha$) è l'angolo costante che le tangenti formano con vettore \vec{k} (direzionalità \vec{k}) unitario.



Analisi vettoriale

Le coordinate di un punto P siano funzioni di uno scalare t ; $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ o più sinteticamente: $P = P(t)$.

Un vettore geometrico $\vec{v} = (Q - P)$ ove P e Q o solo uno dei due punti sia funzione di t , possiamo dire che il vettore \vec{v} è funzione di t : $\vec{v} = \vec{v}(t)$; naturalmente saranno funzione di t le componenti di \vec{v} rispetto a qualunque versore \underline{u} indipendente da t . Ciò vale non solo per il segmento orientato $(Q - P)$ che resta vincolato alla retta direzione da P a Q , ma vale per qualsiasi vettore rappresentato da $(Q - P)$ nella direzionalità del suo campo di azione.

Cerchiamo ora di definire la derivata di un punto e di un vettore. Analogamente a quanto si fa per le funzioni:

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t+h) - P_t}{h} ; \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t+h) - \vec{v}(t)}{h}$$

valgono per queste derivate le stesse proprietà delle derivate di uno scalare.

In particolare:

$$\boxed{\frac{d(\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2 \pm \dots)}{dt} = \frac{d\vec{v}_1}{dt} \pm \frac{d\vec{v}_2}{dt} \pm \dots}$$

$$\frac{d(n\vec{V})}{dt} = \frac{dn}{dt} \cdot \vec{V} + n \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2)}{dt} = \frac{d\vec{V}_1}{dt} \times \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \times \frac{d\vec{V}_2}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)}{dt} = \frac{d\vec{V}_1}{dt} \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \frac{d\vec{V}_2}{dt}$$

quadro delle
derivate

Il punto $P \equiv (x, y, z)$ se considerato estremo del vettore geometrico $(P-O)$ avremo:

$$P = O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

Se X, Y, Z sono le componenti del vettore:

$$\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dX}{dt} \vec{i} + \frac{dY}{dt} \vec{j} + \frac{dZ}{dt} \vec{k}$$

Da queste espressioni risulta:

Le componenti della derivata di un punto sono le derivate delle sue coordinate

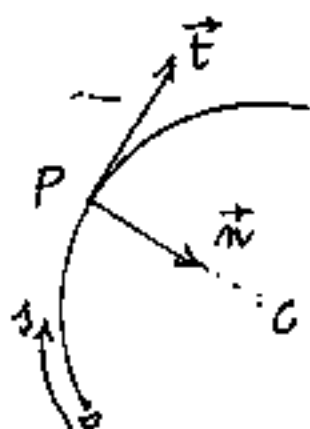
Le componenti della derivata di un vettore sono le derivate delle sue componenti

Se consideriamo che il punto P appartenga ad

una linea (luogo geometrico), fissata una origine ed un verso per gli archi s della linea, la derivata:

$$\frac{dP}{ds} = \frac{dx}{ds} \vec{i} + \frac{dy}{ds} \vec{j} + \frac{dz}{ds} \vec{k} = \vec{t}$$

ove il vettore \vec{t} è tangente in ogni punto alla linea.



cioè:
$$\frac{dP}{ds} = \vec{t}$$

$$\vec{t} = \frac{dx}{ds} \vec{i} + \frac{dy}{ds} \vec{j} + \frac{dz}{ds} \vec{k}$$

si noti che le componenti di \vec{t} sono i coseni direttori della retta tangente in P. alla linea col verso degli archi s crescenti.

Facciamo ora la derivata seconda:

$$\frac{d^2P}{ds^2} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{t}(s+h) - \vec{t}(s)}{h}$$

la variazione in P. di \vec{t} , le due tangenti determinano il piano osculatore della linea in P, e su questo piano dovrà essere il vettore derivata seconda.

Ma \vec{t} è un vettore per cui $(\vec{t})^2 = \vec{t} \times \vec{t} = 1$ derivando l'espressione
$$\frac{d\vec{t}}{ds} \times \vec{t} + \vec{t} \times \frac{d\vec{t}}{ds} = 0$$

cioè:
$$2 \left(\vec{t} \times \frac{d\vec{t}}{ds} \right) = 0$$

$$\vec{t} \times \frac{d\vec{t}}{ds} = 0$$

ma l'essere il prodotto scalare = 0 significa che i due vettori sono ortogonali:
$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{n} \left(\frac{1}{r} \right)$$
 \vec{n} è quindi

il vettore della normale ed il verso è diretto verso

il centro di curvatura C ,

Il modulo di $\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{n}$; $|\vec{n}|=1$ è $\frac{1}{\rho}$ rappre-
senta la curvatura.

$$\frac{d^2P}{ds^2} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{n} = \frac{d^2x}{ds^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{ds^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{ds^2} \vec{k}$$

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$$

ove ρ è il raggio di flessione della linea nel punto P .

I vettori \vec{t} ed \vec{n} sono complanari, perpendicolarmente ad essi in P definiamo un terzo vettore \vec{b} che chiameremo binormale

$$\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$$

la terna di vettori in P , individua il triedro principale relativo alla linea del punto P .

La derivata di \vec{b}

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\tau}$$

ove τ è un numero reale ed è il raggio di torsione

$\frac{1}{\tau}$ è la torsione se $\frac{d\vec{b}}{ds} = 0$ la torsione è nulla

e la linea è piana.

Le tre formule:

$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{n}$
$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{1}{r} \vec{n}$
$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho} \vec{t} - \frac{1}{r} \vec{b}$

sono dette:
formule di
Frenet

esprimono le derivate della triada di vettori in P : $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ per mezzo dei vettori stessi e dei raggi di flessione e torsione

se ξ, η, ζ sono i coseni direttori della binormale

$$\xi = \rho \left(\frac{dy}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} \right)$$

$$\eta = \rho \left(\frac{dz}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} \right)$$

$$\zeta = \rho \left(\frac{dx}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} \right)$$

Il Gradiente

Sia $U(P)$ una funzione scalare di $P = (x, y, z)$ derivabile, e sia \vec{V} un vettore pure funzione di P nello stesso spazio. ($\vec{V} = \vec{V}(P)$) che per la presenza di \vec{V} è un campo vettoriale.

Consideriamo il vettore infinitesimo (differenziale di P)

$$dP = \vec{i} \cdot dx + \vec{j} \cdot dy + \vec{k} \cdot dz$$

e moltiplichiamolo scalarmente per $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

$$\vec{V} \cdot dP = X dx + Y dy + Z dz$$

se questa

espressione è un differenziale esatto esiste una fun-

zione:

$U(P)$ tale che

$$dU = \vec{V} \cdot dP$$

ed in

tal caso:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} ; Y = \frac{\partial U}{\partial y} ; Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

si dice allora che \vec{V} è il gradiente di U

e si scrive

$$\vec{V} = \text{grad } U$$

mentre U è detto il potenziale di \vec{V}

Le superfici $U = \text{cost.}$ sono dette equipotenziali

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$$

in ogni punto P di una superficie equipotenziale il vettore $\vec{V} = \text{grad } U$ essendo $\vec{V} \times dP = dU = 0$ ($U = \text{cost}$)

qualunque sia lo spostamento dP su tale superficie

$\text{grad } U$ è perpendicolare a tale superficie intorno di P .

Si noti che $\vec{V} = \text{grad } U$ è diretto secondo U crescente

e che \vec{V} ha gli stessi coseni direttori della normale alle superficie ad $U = \text{cost}$.

Se consideriamo un vettore unitario $\vec{u} = \frac{(P-O)}{s}$

ovv: $|(P-O)| = d|\vec{u}| = \overline{OP} = s$

$$\frac{dU}{ds} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{ds}$$

Il trinomio al secondo membro è la somma dei prodotti delle componenti di $\vec{V} = \text{grad } U$ per i coseni direttori della retta di \vec{u} sulla quale è misurato s : perciò

$$\boxed{\frac{dU}{ds} = \text{grad } U \times \vec{u}}$$

Cioè la derivata del potenziale rispetto ad s è il prodotto scalare del gradiente di U per il vettore di s .

$$\boxed{dU = (\text{grad } U \times \vec{u}) ds}$$

Cioè si dice gradiente l'accrecimento per unità di lunghezza

(un accrescimento per unità di tempo è una velocità)

Integrali di vettori

Sia $\vec{V}(t) = X(t)\vec{i} + Y(t)\vec{j} + Z(t)\vec{k}$ ove t è una variabile e $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ tre vettori indipendenti da t

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{V} dt = \vec{i} \int_{t_0}^{t_1} X dt + \vec{j} \int_{t_0}^{t_1} Y dt + \vec{k} \int_{t_0}^{t_1} Z dt$$

se l'estremo superiore t è variabile

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{V}$$

Se il vettore \vec{V} funzione dei punti di campo qualsiasi n -dimensionale l'integrale vettore \vec{J} che ha per componenti gli integrali estesi al campo C delle componenti di \vec{V} si dice: integrale del vettore \vec{V} relativo a C e

si scrive:

$$\vec{J} = \int_C \vec{V} dc$$

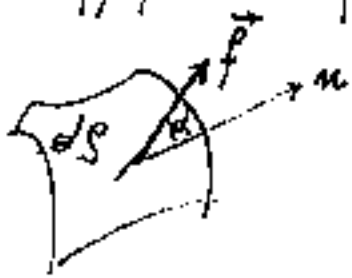
In questo il fattore finito \vec{V} può avere dimensioni diverse dal fattore differenziale C .

Flusso di un vettore

Abbiamo appena accennato al flusso di un vettore nel trattare il prodotto scalare. Abbiamo visto che un'area può essere rappresentata da un vettore perpendicolare cioè avente la direzione della giacitura:

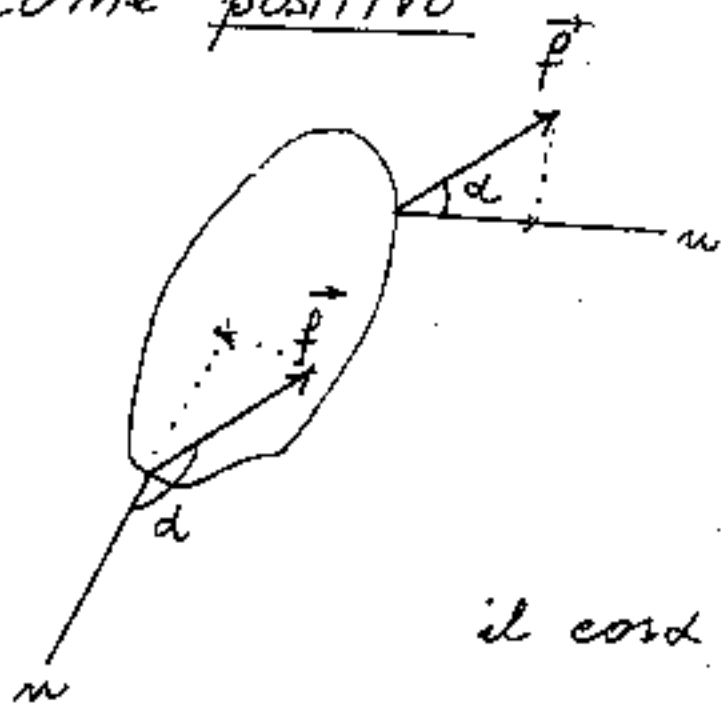
Se consideriamo un involucro chiuso, esaminando le singole aree elementari dS avremo $d\varphi = \vec{f} \times d\vec{S}$ cioè:

$d\varphi = |\vec{f}| \cdot \cos\alpha \cdot |dS|$ ma distingueremo: il flusso entrante cioè diretto verso



l'interno che assumeremo, per

convenzione, negativo. Il flusso uscente cioè diretto verso l'esterno della superficie chiusa lo assumeremo come positivo



con ciò resta valida la formula: $f \cdot \cos\alpha \cdot dS = d\varphi$

se consideriamo la normale alla superficie diretta verso l'esterno, per \vec{f} entrante

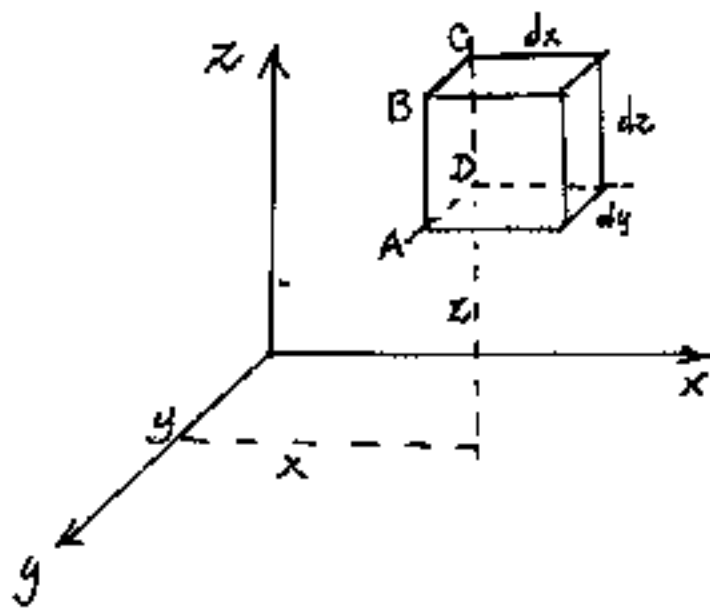
il cos α è nel II° quadrante cioè negativo.

Divergenza

Consideriamo una superficie chiusa qualsiasi e suddividiamo lo spazio in cubetti elementari la somma dei flussi uscanti dai cubetti è il flusso uscente dalla superficie chiusa, infatti i flussi che attraversano i cubetti sono computati una volta come negativi (entranti) una volta come positivi (uscanti) cioè vengono computati solo i flussi generati all'interno dei cubetti, o assorbiti dai cubetti.

Si chiama divergenza di un vettore il rapporto fra il flusso uscente ed il volume da cui esce. $(\frac{d\varphi}{dV})$

Consideriamo uno dei cubetti elementari in cui abbiamo diviso lo spazio racchiuso dalla nostra superficie chiusa e siano x, y, z le coordinate che



individuano il vertice D del cubetto da cui si dipartono gli spigoli dx, dy, dz nel verso degli assi.

Siano f_x, f_y, f_z , le componenti del vettore secondo i tre assi che supponiamo funzioni continue e derivabili delle coordinate.

Il flusso entrante dalla faccia ABCD del cubetto è $-f_x dy dz$ il flusso uscente dalla faccia opposta

la cui area è ancora $dydz$, ma la componente del vettore secondo x sarà variata, perché è variata l'asse quindi il flusso uscente sarà:

$$+ \left(f_x + \frac{\partial f_x}{\partial x} dx \right) dydz$$

complessivamente il flusso secondo x nel cubetto sarà:

$$-f_x dydz + f_x dydz + \frac{\partial f_x}{\partial x} dx dydz$$

cioè: essendo: $dx dx dy = dv =$ volume elementare ripetendo il discorso per le altre componenti f_y ed f_z complessivamente otteniamo:

$$d\varphi = \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) dv$$

$$\frac{d\varphi}{dv} = \boxed{\text{div. } \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}}$$

poiché il flusso da una superficie chiusa è la somma dei flussi dei singoli cubetti:

$$\oint_S f \cos \alpha dS = \int_V d\varphi$$

cioè:

$$\boxed{\oint_S f \cos \alpha dS = \int_V \text{div}(\vec{f}) dv = \int_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS}$$

È questo il teorema della divergenza il quale esprime che l'integrale della divergenza di un vettore esteso ad un solido è uguale al flusso del vettore attraverso la superficie del solido. (Trasforma un integrale di superficie in integrale di volume (meno più facile)) Il teorema della divergenza è detto anche Teorema di Green

Linee e tubi di flusso di un vettore

Sono linee di flusso di un vettore quelle linee che punto per punto sono tangenti al vettore stesso.



se un certo insieme di linee di flusso è recintabile trasversalmente questo insieme si dirà tubo di flusso

Il tubo di flusso non può essere attraversato dal flusso del vettore; perché in ogni punto, ogni sua linea è tangente al vettore stesso.

Ogni cubetto all'interno del tubo di flusso avrà il flusso entrante uguale al flusso uscente cioè avrà $d\varphi = 0$ e quindi anche $\frac{d\varphi}{dV} = \text{div} \vec{f} = 0$

Il flusso nel tubo di flusso è costante questo genere di campi è detto solenoidale

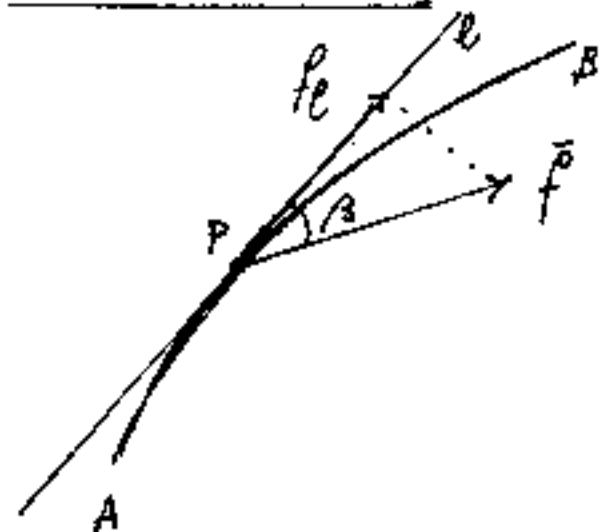
Inversamente un campo solenoidale ha divergenza nulla.

La funzione di quel campo ammette potenziale.

(vedi criterio di Schwarz) Il tubo di flusso e le linee di flusso inducono a considerare superfici sempre in ogni punto perpendicolari al vettore e quindi alle linee di flusso; tali superfici sono dette di livello o equipotenziali

Circuitazione di un vettore

Integrale lineare o integrale lungo una linea di un vettore. - Il rotore o vortice di \vec{f} -



Consideriamo una linea AB nel campo del vettore \vec{f} proiettiamo il vettore \vec{f} sulla tangente alla linea ed indichiamo con \vec{f}_t la sua

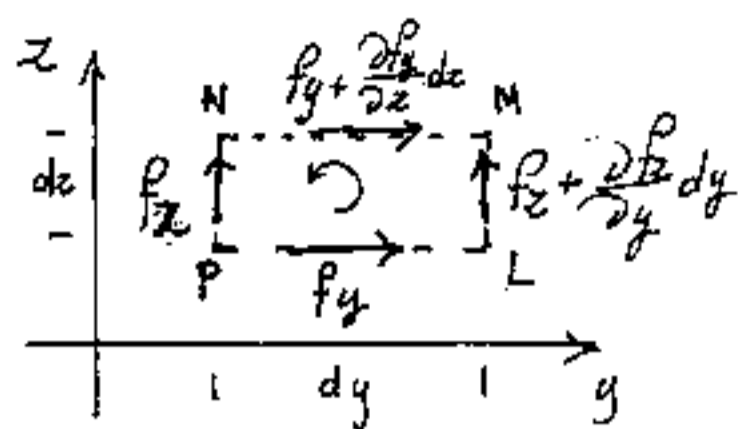
proiezione: $\vec{f}_t = \vec{f} \cos \beta$. Definiamo integrale del vettore \vec{f} in $\widehat{AB} = l$, l'integrale:

$$\int_{AB} \vec{f}_t \, dl = \int_{AB} f \cos \beta \, dl$$
 (e se la linea \vec{l} orientata) si può scrivere: $= \int_A^B \vec{f} \times d\vec{l} = \int_A^B f \cos \beta \, dl$ cioè il risultato è uno scalare.

Abbiamo già trattato gli integrali curvilinei. (vol V)

Consideriamo ora nel campo del vettore una linea chiusa che delimiti un'area, dividiamo questa area in rettangoli, se il vettore lungo l ha un integrale lineare in un verso l'integrale $\oint \vec{f} \times d\vec{l}$ detto circuitazione equivale alla somma delle circuitazioni dei rettangoli perché i tratti interni sono percorsi due volte ed in senso opposto quando si esaminano due rettangoli adiacenti.

consideriamo quindi un rettangolo supponiamo sul piano zy del campo vettoriale, e sia il



punto P della linea AB l'origine dei lati in direzione y e direzione z ed i lati siano dy e dz

Siano f_z ed f_y le componenti del vettore sugli assi passanti per P avremo le variazioni in figura delle componenti del vettore. Assumiamo come verso positivo di circolazione (l'integrale lineare del vettore) quello antiorario indicato in figura ed avremo: (ovetto \oint il perimetro del rettangolo) $\oint_{P \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N} \vec{f}_e \cdot d\vec{l} =$
 $= +f_y \cdot dy + \left(f_z + \frac{\partial f_z}{\partial y} dy\right) dz + \left(-\left(f_y + \frac{\partial f_y}{\partial z} dz\right) dy\right) + \left(-f_z dz\right) =$

avremo l'espressione:

$$\oint_{P \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N} \vec{f}_e \cdot d\vec{l} = \frac{\partial f_z}{\partial y} dy dz - \frac{\partial f_y}{\partial z} dy dz$$

Perciò l'integrale di circolazione sul piano zy

$$\boxed{\oint_{P \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N} \vec{f}_e \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right) dy dz = \oint_{zy} f_{z_y} \cos \beta_{zy} d\alpha_{zy}}$$

Definiamo rotore di \vec{f} il vettore perpendicolare all'area circuitata da \vec{f} e lo indicheremo

$$\vec{C} = (\text{rot } \vec{f}) \quad (\text{vorticale di } \vec{f})$$

ed avrà per modulo il valore della circolazione diviso per l'area circuitata

nel caso considerato l'asse x è perpendicolare al rettangolo: PLMN perciò:

$$\vec{C}_x = \left(\frac{\partial \vec{f}_z}{\partial y} - \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial z} \right) \quad \text{e analogamente:}$$

$$\vec{C}_y = \left(\frac{\partial \vec{f}_x}{\partial z} - \frac{\partial \vec{f}_z}{\partial x} \right)$$

$$\vec{C}_z = \left(\frac{\partial \vec{f}_y}{\partial x} - \frac{\partial \vec{f}_x}{\partial y} \right)$$

che saranno le componenti secondo gli assi del vettore $\vec{C} = \text{rot} \vec{f}$

Se la circuitazione di \vec{f} è zero anche

$\text{rot}(\vec{f}) = \vec{c} = \text{zero}$ ed il campo si dice irrotazionale

cioè che il campo ammette potenziale, è

solemoidale

Se esiste una funzione U tale che:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = f_z \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = f_y \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial x} = f_x$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = \frac{\partial f_z}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial z} \quad \text{da cui } \vec{C}_x = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial z} \quad \dots \quad \vec{C}_y = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x} \quad \dots \quad \vec{C}_z = 0$$

La chiameremo funzione potenziale, (Vedi Vol III)

Teorema di Stokes

Dimostriamo, prima di tutto, che la definizione del vettore vorticale o rotore (in inglese *Curl = zicciolo*)
(in tedesco *Wirbel = vortice*)
permette di trasformare un integrale lineare in un integrale di superficie.

$$\oint_C f \cos \beta \, dl = \oint_{yz} f_{yz} \cos \beta_{yz} \, dl_{yz} + \oint_{xz} f_{zx} \cos \beta_{zx} \, dl_{zx} + \oint_{xy} f_{xy} \cos \beta_{xy} \, dl_{xy}$$

Cioè abbiamo scomposto la circuitazione sui tre piani di riferimento xy ; yz ; zx . Sapendo che la circuitazione di un vettore lungo una linea è la somma delle circuitazioni delle proiezioni del vettore.

$$\text{Abbiamo già visto che: } \oint_{zy} f_{zy} \cos \beta_{zy} \, dl_{zy} = \underline{C_x \, dz \, dy}$$

cioè:

$$\oint_C f \cos \beta \, dl = \boxed{C_x \, dS_{zy} + C_y \, dS_{zx} + C_z \, dS_{xy}}$$

ove dS_{xy} ; dS_{xz} ; dS_{zy} ; sono le proiezioni di dS .

Notiamo che le componenti d_i sono normali alle rispettive aree che li moltiplicano cioè il secondo membro è la somma dei flussi delle componenti d_i .

Cioè sono il flusso di \vec{C} su dS

$$\vec{C} \cos \alpha dS = \vec{C} \times d\vec{S} = \vec{C}_x dS_{yz} + \vec{C}_y dS_{zx} + \vec{C}_z dS_{xy}$$

ed anche

$$\oint_L \vec{f} \cos \beta dl = \oint_L \vec{f} \times d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{f} \times d\vec{S}$$

estendendo il risultato a superfici finite delimitate da una linea L (L delimitava la superficie infinitesima dS)
avremo:

$$\oint_L \vec{f} \times d\vec{l} = \int_S (\text{rot } \vec{f}) \times d\vec{S}$$

circuitazione di f intorno L = flusso di $\text{rot}(f)$ attraverso S

È questo il teorema di Stokes che trasforma un integrale di linea in un integrale di superficie.

La circuitazione di un vettore \vec{f} equivale al flusso del suo rotore attraverso l'area circuitata.

Il vorticale è un vettore a distribuzione solenooidale. (facciamo la divergenza di $\text{rot } f$)

$$\text{div rot } \vec{f} = \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}$$

sostituendo i valori di C_x, C_y, C_z si ha:

$$\text{div rot } f = \frac{(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z})}{\partial x} + \frac{\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}}{\partial y} + \frac{\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}}{\partial z}$$

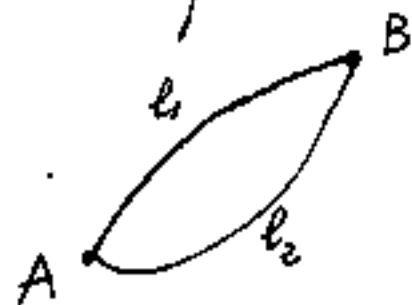
$$\text{div rot } f = \frac{\partial^2 f_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f_x}{\partial y \partial z} = 0$$

$\boxed{\text{div rot } f = 0}$ sempre!

Si può anche definire il vorticale " \vec{c} " di un vettore \vec{f} , come un vettore a distribuzione solenoidale il cui flusso attraverso una certa superficie equivale la circuitazione di \vec{f} lungo la linea che delimita la superficie stessa

Il Potenziale

Consideriamo due punti A e B in un campo vettoriale ed uniamo A con B



con due diverse linee l_1 e

l_2 calcolando l'integrale lineare del vettore f lungo l_1 , oppure

lungo l_2 si hanno due casi e cioè i valori

di tali integrali possono essere uguali o diversi.

Se sono uguali, poiché nella circuitazione una delle due linee avrebbe verso opposto \overrightarrow{AB} \overrightarrow{BA} vuol dire che

la circuitazione sarebbe nulla. Inversamente

presa una linea chiusa di un campo vettoriale,

lungo la quale sia nulla la circuitazione

e presi su tale linea due punti qualsiasi A e B

l'integrale lineare da A a B è uguale per i due

tratti in cui è stata divisa la linea.

Esendo nulla la circuitazione il campo è quindi irrotazionale: ($\text{rot}(\vec{F}) = 0$), o come si dice solenoidale e l'integrale di \vec{F} lungo una linea aperta \widetilde{AB} è indipendente dal percorso della linea e dipende solo dai limiti A e B.

Affinchè ciò si verifichi deve essere $C = 0$
 $C_x = 0$; $C_y = 0$; $C_z = 0$ cioè:

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} = 0$$

che sono le condizioni che l'espressione:

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = dU$$

sia un differenziale esatto.

Abbiamo già ipotizzato l'esistenza della funzione potenziale U ; Tal volta si usa porre $U = -V$ ove il segno negativo di V implica che nella direzione del vettore aumenta come positiva il Potenziale diminuisce.

Se esiste il potenziale avremo che:

$$f_e = -\frac{dV}{de}; \quad f_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad f_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad f_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Cioè le derivate parziali secondo una direzione della funzione potenziale sono le proiezioni del vettore campo secondo quella direzione. (ma di segno opposto). Si può dire sono le componenti del vettore campo

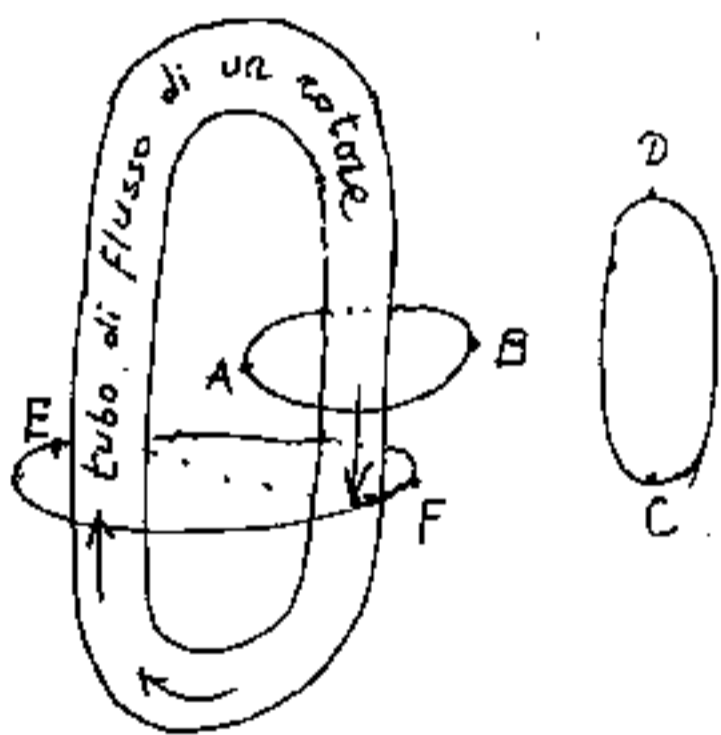
Ne segue che per avere il valore totale del vettore campo in un punto basta prendere, (cambiata di segno) la derivata del potenziale in quel punto rispetto alla normale alla superficie di livello o equipotenziale passante per esso.

Le derivate di $-V$ rispetto alle tangenti la superficie di livello sono nulle $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$

od anche: $\frac{dV}{dt} = 0$ infatti su tali superfici V è una costante.

Il potenziale policiclico

Abbiamo visto che il rotore o vorticale di un vettore \vec{f} è un vettore che genera un campo solenoidale, cioè i tubi di flusso del rotore sono a flusso costante il che vuol dire che in ogni sezione il flusso uscente è uguale a quello entrante (infatti: $\text{div rot } \vec{f} = 0$) ma affinché ciò si verifichi occorre che i tubi di flusso si richiudano su se stessi, (magari $\pm \infty$ può essere il ricongiungimento)

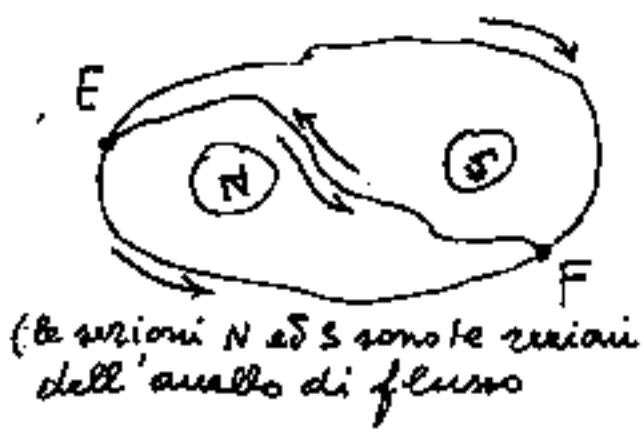


Consideriamo un tubo di flusso di un rotore in campo finito, e consideriamo tre linee chiuse:

AB concatenata con l'anello di flusso; CD esterna all'anello di flusso EF

racchiudente l'anello di flusso. Supponiamo nullo il rotore in tutto il campo esterno al tubo di flusso, avremo che la circuitazione di $\text{rot}(\vec{f})$ lungo AB è pari al flusso di $\text{rot}(\vec{f})$ nel tubo mentre è nulla la circuitazione di $\text{rot}(\vec{f})$ lungo CD. Anche lungo

La linea EF la circuitazione di $\text{rot}(f)$ è nulla perché attraverso la superficie delimitata dalla linea EF il tubo di flusso passa due volte e con versi opposti, per cui matematicamente si annullano. Se consideriamo due punti E ed F di tale linea e li riuniamo con una linea che attraversa l'anello di flusso, avremo



che lungo tale linea l'integrale lineare di $\text{rot}(f)$ è identicamente nullo: mentre

gli integrali lineari $\int_E^F \text{rot}(f) \times dl = 0$. Mentre per linee che non attraversano l'anello, essendo il campo solenooidale, saranno diversi da zero ed uguali fra loro, affinché sia nulla la circuitazione esterna. Il Vallauri (cfr. Dal Monte - Vzebini C. Cania - Corso di Elettrotecnica - ed Di Giorgio - Torino) dice: "Lungo la linea AB invece la circuitazione è uguale al flusso del vorticale, per cui non si può parlare di potenziale nel senso precedentemente definito. In questo caso ad ogni giro la circuitazione varia di una quantità uguale al flusso del vorticale, e si può definire una funzione simile al potenziale sopra definito, detta Potenziale Policiclico." (che utilizzerà per i campi magnetici)

Alcune osservazioni sul simbolismo

mentre in analisi bastano le lettere per indicare quantità qualificate ed il simbolismo è pressoché unificato, (Vedi vol I) In analisi vettoriale i simboli possono essere molto diversi.

Per indicare che una certa lettera dell'alfabeto rappresenta un vettore (per esempio: u)

I francesi la sopralineano con una freccetta	\vec{u}
Alcuni testi sottolineano	\underline{u}
altri scrivono in grassetto	u
i tedeschi usano il gotico	\mathfrak{U}

per indicare il modulo in genere usano la stessa lettera non evidenziata cioè senza soprallineature o sottolineature, non in grassetto non in gotico, altri aggiungono due barrette $|u| = \text{modulo di } \vec{u}$, altri scrivono $\text{mod } \vec{u}$.

In genere i versori (vettori unitari $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ oppure $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ che abbiamo già visto) si scrivono con lettere minuscole.

Purtroppo è molto facile dimenticarsi di evidenziare, e la scrittura del simbolismo vettoriale diventa fastidiosa. Per non dire (come abbiamo già esposto) che la notazione di prodotto vettoriale (\wedge) in america è \times come il prodotto scalare in notazione europea; ed il prodotto scalare (\cdot) in notazione americana è \cdot come il prodotto ordinario in europea. - (Riteniamo che, i simboli dovrebbero essere unificati)

Riepilogo delle correlazioni fra gli operatori vettoriali.

Sia: $\vec{f} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ il vettore del campo

$\vec{f} = \text{grad. } U$ $U =$ lo scalare potenziale se esiste il campo è detto Solenoidale o irrotazionale

$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$ L'operatore gradiente

trasforma uno scalare in un vettore, ove le sue derivate rispetto agli assi sono le componenti del vettore (proporzionali ai coseni direttori della direzionalità di \vec{f}) $\frac{\partial U}{\partial x} = X$; $\frac{\partial U}{\partial y} = Y$; $\frac{\partial U}{\partial z} = Z$.

$\varphi = \int_S \vec{f} \cdot d\vec{S}$ φ è il flusso (scalare) del vettore \vec{f} attraverso la superficie \vec{S} orientata (punto per punto).

$(\vec{f} = \frac{d\varphi}{dS})$
se la superficie è chiusa: La derivata del flusso rispetto al volume V (scalare) attraversato;

$\frac{d\varphi}{dV} = \text{div. } \vec{f}$ è lo scalare divergenza di \vec{f}

$\text{div}(\vec{f}) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$ cioè: l'operatore divergenza trasforma il vettore \vec{f} in uno scalare che è il flusso per unità di volume

Condizione necessaria, ma non sufficiente affinché sia
 $\vec{f} = \text{cost}$ è che $\text{div } \vec{f} = 0$.

$$\int_V \text{div}(\vec{f}) dV = \int_S \vec{f} \times d\vec{S}$$

è il teorema
della
divergenza
o di Green

trasforma un integrale di superficie in integrale di volume.

$$\text{rot}(\vec{f}) = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \vec{c}$$

l'operatore rotore trasforma un vettore \vec{f} in un altro vettore \vec{c} detto vortice o rotore di \vec{f} .

Questo vettore ha distribuzione solenooidale per cui: $\text{div rot}(\vec{f}) = 0$

Dicesi circuitazione di \vec{f} su una linea chiusa

l'integrale $\oint \vec{f} \times d\vec{l}$ prodotto del vettore \vec{f} per gli elementi di linea. si ha l'uguaglianza:

$$\oint_L \vec{f} \times d\vec{l} = \int_S \text{rot}(\vec{f}) \times d\vec{S}$$

Teorema di Stokes
che trasforma un

integrale di linea in integrale di superficie.

Quando: $\text{rot } \vec{f} = 0$ il campo è irrotazionale o sia solenooidale.

Anzi che scrivere: $\int_S \vec{f} \times d\vec{S} =$ (meglio) $\int_S \vec{f} \times \vec{n} dS$

$$\int_S \text{rot } \vec{f} \times d\vec{S} = \int_S \text{rot } \vec{f} \times \vec{n} dS$$

ove \vec{n} è il versore della normale alla superficie

Sia \vec{f} funzione del punto P cioè: $\vec{f} = \vec{f}(P)$.

diamo a P due spostamenti infinitesimi distinti, (differenziali) $d_1 P, d_2 P$; a ciascuno dei quali corrispondono le variazioni: $d_1 \vec{f}$ e $d_2 \vec{f}$, esiste un unico vettore $\vec{c} = \text{rot } \vec{f}$ tale che:

$$\text{rot}(\vec{f}) \times d_1 P \wedge d_2 P = d_1 \vec{f} \times d_2 P - d_2 \vec{f} \times d_1 P$$

$$\text{rot}(m \vec{f}) = m \text{rot } \vec{f} + \text{grad } m \wedge \vec{f} \quad \text{con } m = m(P)$$

$$\text{rot grad}(m) = 0$$

$$\text{rot}(P-O) = 0$$

$$\text{rot} \{ \vec{a} \wedge (P-O) \} = \text{rot } \vec{a}$$

L'operatore di Laplace

Si indica ordinariamente con Δ ma è anche usato ∇^2 (nabla) od anche $\nabla \circ \Delta^2$ è uno scalare di uso frequente: uguagliato a zero è l'equazione di

Laplace $\Delta(u) = \text{div grad}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ l'operatore

è quindi una trasformazione da scalare a scalare passando per il vettore. $\text{grad}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$.
 ore $\text{grad}(u)$ è perpendicolare alle superfici equipotenziali cioè $\text{ad } u = \text{cost.}$, se $\text{grad}(u)$ è lo spostamento di un corpo continuo, $\text{div}(\text{grad } u)$ è il coefficiente di dilatazione cubica.

$$\text{grad} \cdot \text{div}(\vec{u}) - \text{rot}^2 \vec{u} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \Delta \vec{u} \quad \left(\begin{array}{l} \text{attenzione} \\ \text{qui } \vec{u} \\ \text{è vettore} \end{array} \right)$$

Altre formule interessanti:

$$\boxed{\operatorname{div}(\rho - 0) = 3}$$

infatti le componenti di $(\rho - 0)$ sono x, y, z

$$\operatorname{div}(\rho - 0) = \frac{d\rho}{dx} + \frac{dy}{dy} + \frac{dz}{dz} = 3$$

Se indichiamo:

\vec{E} = campo elettrico

\vec{J} = campo di corrente elettrica $\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_i)$; (σ = conduttività)

\vec{D} = campo dielettrico $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ (ϵ = costante dielettrica)

\vec{H} = campo magnetico $\vec{B} = \mu \vec{H}$ (μ = permeabilità magnetica)

\vec{B} = campo induzione magnetica affaruo: (t = tempo)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

equazioni di Maxwell

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

ove (ρ = densità di carica elettrica)

moltiplicando per \vec{E} scalarmente la I^a equar. di Maxwell:

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{E} \times \vec{J} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

sostruendovi la II^a eq. di Maxwell, moltiplicata per \vec{H}

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{J} \times \vec{E} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{integrando.}$$

ma: $\boxed{\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{div}(\vec{E} \wedge \vec{H})}$

$$\vec{P}_i = \int_S (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \text{Vettore di Poynting}$$

avremo il bilancio energetico:

$$\int_V \vec{E}_i \cdot \vec{J} \, dV = \int_V \frac{\vec{J}^2}{\sigma} \, dV + \frac{d}{dt} \int_V \frac{\epsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2}{2} \, dV + \int_S (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot d\vec{S}$$

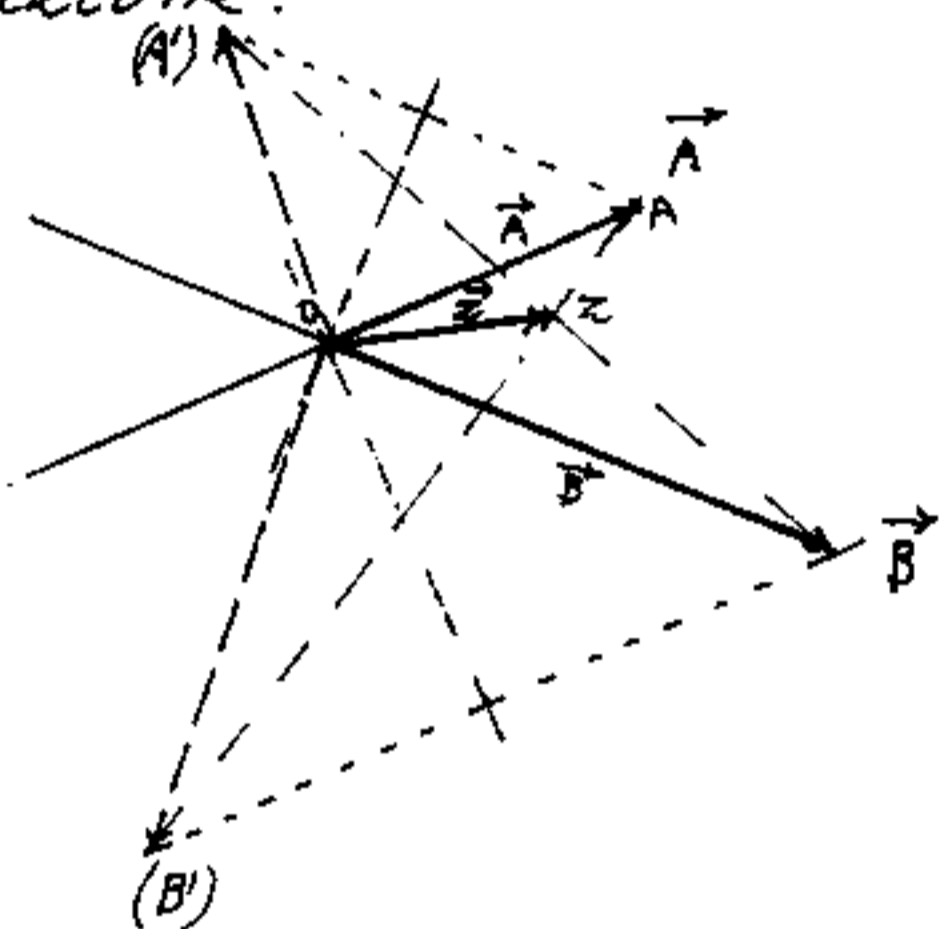
(campo impresso) = Potenza dissipata per effetto Joule + energia elettromagnetica immagazzinata + potenza irradiata attraverso S

Un metodo per trovare il vettore reciproco della somma di due reciproci

Dati graficamente i vettori \vec{A} e \vec{B}
trovare graficamente il vettore:

$$\vec{Z} = \frac{1}{\frac{1}{\vec{A}} + \frac{1}{\vec{B}}}$$

Soluzione:



Siano: $\vec{OA} = \vec{A}$ ed
 $\vec{OB} = \vec{B}$

i vettori dati,
rappresentati
uscanti dal punto
comune O.

Le rette di azione,

facciano da specchio all'altro vettore, per
cui \vec{OB}' è l'immagine speculare di \vec{B} , ed
 \vec{OA}' è l'immagine speculare di \vec{A} ;

unito: A con \vec{B}' e B con \vec{A}' otteniamo

il punto comune z ove: $\vec{OZ} = \vec{Z} = \frac{1}{\frac{1}{\vec{A}} + \frac{1}{\vec{B}}}$

valido come modulo e come direzione

(argomento) rispetto a qualsiasi sistema di
assi di riferimento.

Facciamo la dimostrazione:

Dimostrazione

È noto che dato il vettore \vec{A} è possibile mediante una polarità trovare il vettore $\frac{1}{\vec{A}}$, con le solite notazioni, sia infatti $\vec{A} = a + jb$;

$$\frac{1}{\vec{A}} = \frac{1}{a + jb} = \frac{a - jb}{a^2 + b^2} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - j \frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

posto: $m = \frac{a}{a^2 + b^2}$; $n = \frac{b}{a^2 + b^2}$; $\boxed{\frac{1}{\vec{A}} = (m - jn)}$

Il modulo del vettore $\vec{A} = |A| = (\sqrt{a^2 + b^2})$

Il modulo del vettore $\frac{1}{\vec{A}} = \left| \frac{1}{A} \right| = \sqrt{\left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left(\frac{b}{a^2 + b^2} \right)^2}$

$$\left| \frac{1}{A} \right| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = \text{inverso del modulo di } \vec{A}$$

L'argomento principale del vettore $\vec{A} = \varphi = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$

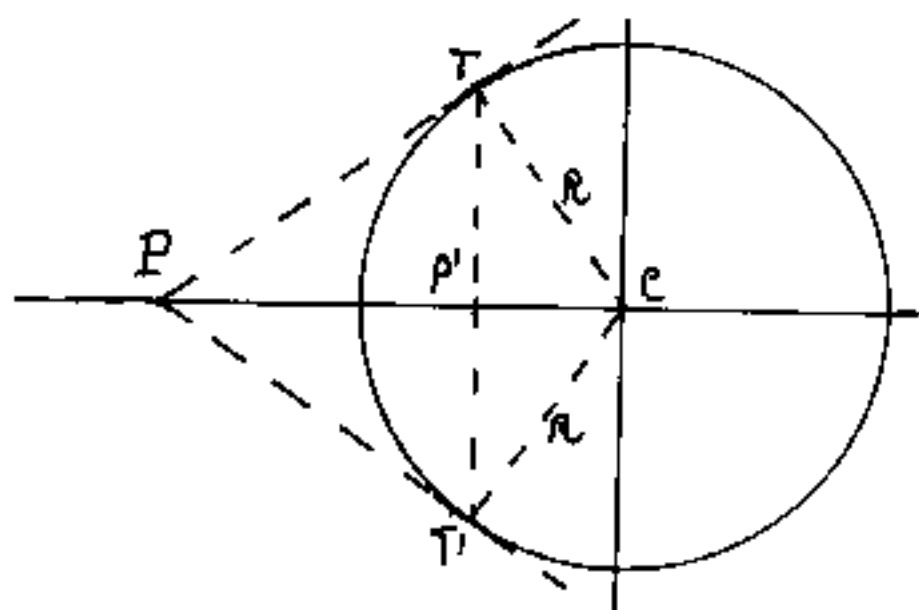
L'argomento principale del vettore $\frac{1}{\vec{A}} = \arctg\left(\frac{-b}{a}\right)$

cioè: $\arctg\left(\frac{-b}{a}\right)$

Cio' indica che i vettori si trovano da banda opposta rispetto all'asse cartesiano assunto per le grandezze reali, e formano con esso angoli complementari.

Abbiamo già esposta una costruzione grafica del reciproco di un segmento (v. Vol I pag 49), ma per questa dimostrazione useremo un altro teorema di geometria elementare, facilmente dimostrabile. Cioè dato un punto P

esterno ad un cerchio di raggio R , tracciamo le tangenti, e costruiamo il punto P' comune alla retta per i punti di tangenza ed al diametro per P ;
 se $C =$ centro del cerchio: $\overline{PC} : \overline{TC} = \overline{TC} : \overline{P'C}$



$$\overline{PC} : R = R : \overline{P'C}$$

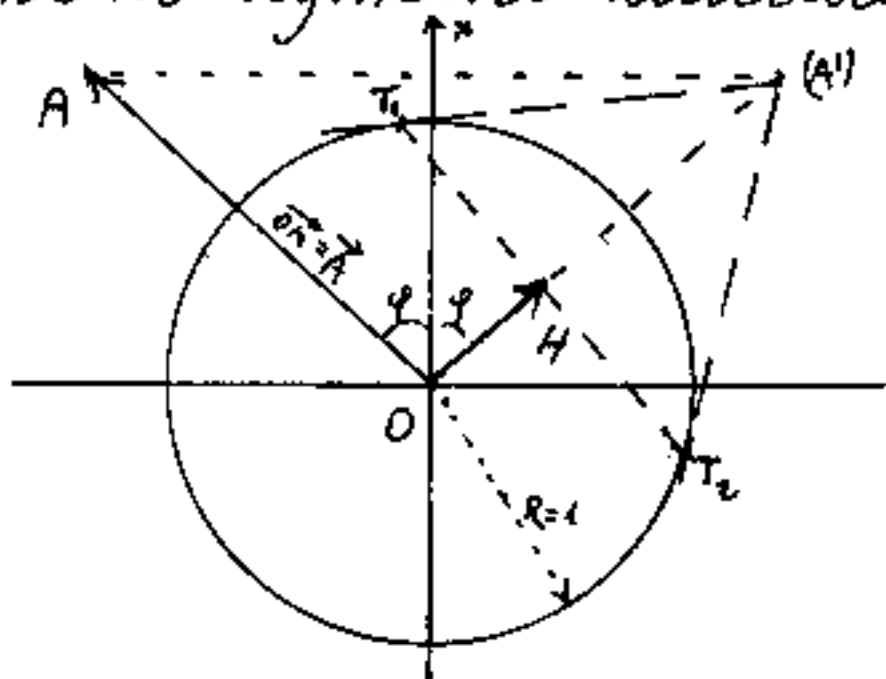
$$\overline{PC} \cdot \overline{P'C} = R^2$$

$$\overline{PC} = R^2 \cdot \frac{1}{\overline{P'C}}$$

e se poniamo $R = 1$

$$\boxed{\overline{PC} = \frac{1}{\overline{P'C}}}$$

Qualora si conosca la scala del modulo di \vec{A} cioè il segmento unitario da porre $R = 1$,

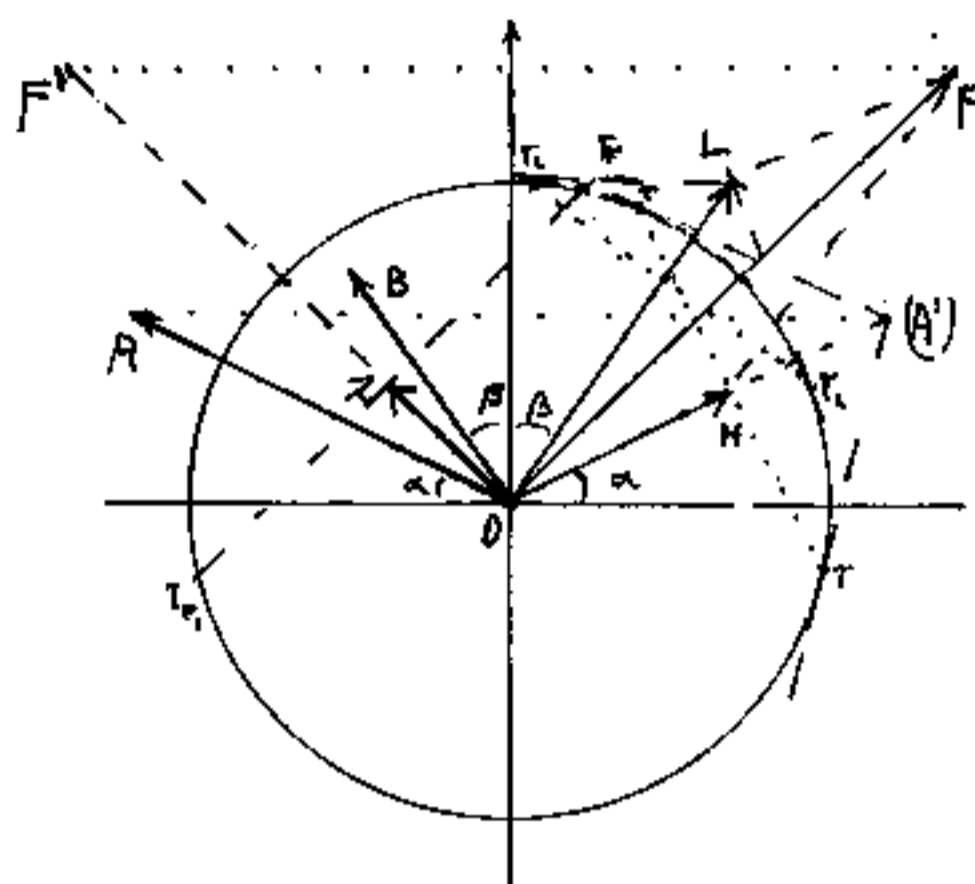


è possibile trovare il vettore $\frac{1}{\vec{A}}$, infatti:
 sia: $\vec{A} = \overrightarrow{OA}$ di argomento φ rispetto ad x .
 sia (A') simmetrico di

A rispetto ad x , da (A') le tangenti in T_1, T_2 al cerchio di centro O e raggio unitario, sia H il punto comune ad $\overline{O(A')}$ e $\overline{T_1 T_2}$ avremo:

$$\vec{H} = \overrightarrow{OH} = \frac{1}{\overrightarrow{OA'}} = \frac{1}{\vec{A}}$$

Notiamo che è stato necessario conoscere il segmento unitario "R" (modulo della scala grafica)



Costruiti col procedimento dimostrato i vettori:

$$\frac{1}{A} = (H-O)$$

$$\frac{1}{B} = (L-O)$$

si compongono con la regola del parallelogramma

ma e si trova il vettore: $\frac{1}{Z} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} = (F-O)$

invertendo il quale si trova: $\vec{Z} = (Z-O) = \frac{1}{\frac{1}{A} + \frac{1}{B}}$

supponendo di aver eseguito i vari procedimenti d'inversione con raggio R diverso da 1 avremmo ottenuto:

$$(H-O) = R^2 / \vec{A} \quad ; \quad (L-O) = R^2 / \vec{B} \quad ; \quad (F-O) = \frac{R^2}{\vec{A}} + \frac{R^2}{\vec{B}} ;$$

$$(\vec{Z}-O) = \frac{R^2}{\frac{R^2}{\vec{A}} + \frac{R^2}{\vec{B}}} = \frac{1}{\frac{1}{\vec{A}} + \frac{1}{\vec{B}}} = \vec{Z}$$

con ciò resta dimostrato che il risultato è lo stesso ed è indipendente dalla misura del raggio del cerchio col quale si opera.

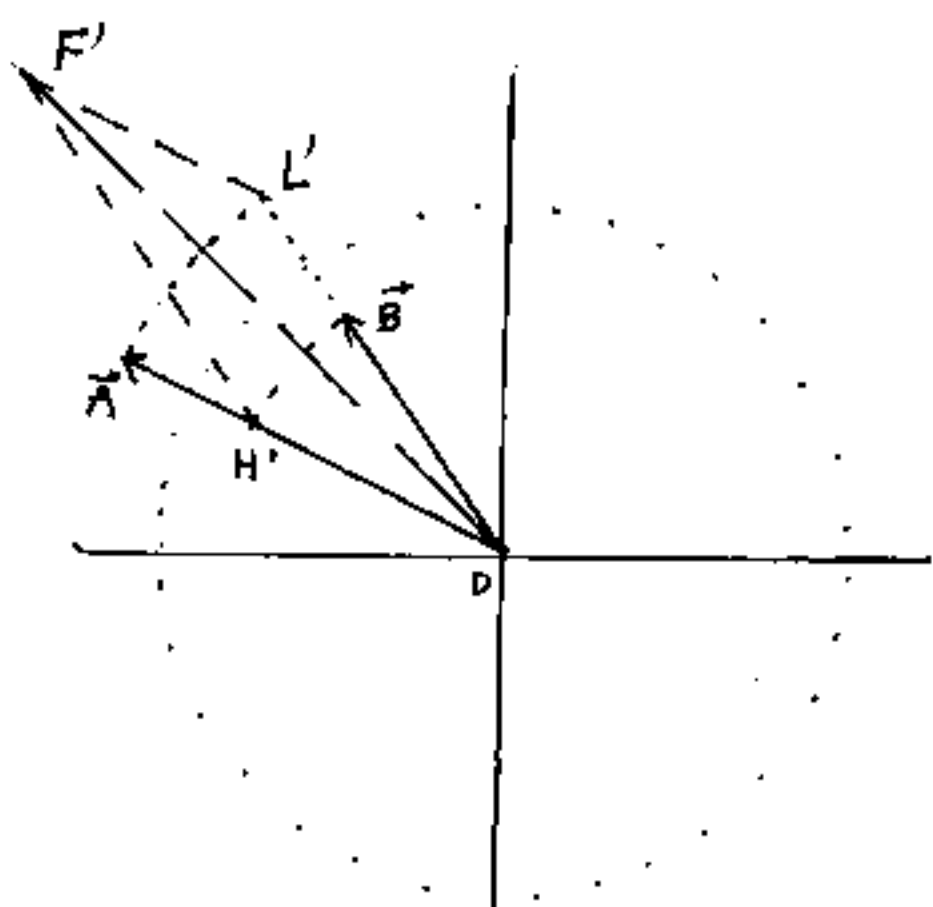
Quindi il raggio del cerchio possiamo sceglierlo arbitrariamente.

Se come raggio del cerchio assumiamo quello per il quale il modulo di un vettore

risulta pari al modulo dell'altro vettore
invertito mediante questo cerchio e viceversa,
se cioè il raggio sia medio proporzionale fra
il prodotto dei moduli:

$$|\vec{A}| \cdot |\vec{B}| = r^2 = K \quad (K = \text{potenza d'inversione})$$

$$|\vec{A}| = K/|\vec{B}| \quad ; \quad |\vec{B}| = K/|\vec{A}|$$



vediamo subito che, esseu-
do la direzione \vec{OF}' identi-
ca a quella di z , conside-
rando \vec{OF}' come somma
dei vettori: $(L-O)$ ed $(H-O)$
ove: $(L-O)$ ha lo stesso mo-
dulo di \vec{A} e l'argomento
di \vec{B} ed $(H-O)$ ha lo stesso

modulo di \vec{B} e l'argomento di \vec{A} , con ciò resta
determinata la direzione (cioè l'argomento) di:

$$\vec{z} = \frac{1}{\frac{1}{\vec{A}} + \frac{1}{\vec{B}}}$$

D'altra parte il vettore $(F'-O)$ ha per modulo
lo stesso modulo di $\vec{A} + \vec{B}$ cioè:

$$|\vec{OF}'| = \frac{r^2}{|\vec{A}|} + \frac{r^2}{|\vec{B}|} = r^2 \left(\frac{1}{|\vec{A}|} + \frac{1}{|\vec{B}|} \right) = r^2 \frac{1}{|z|}$$

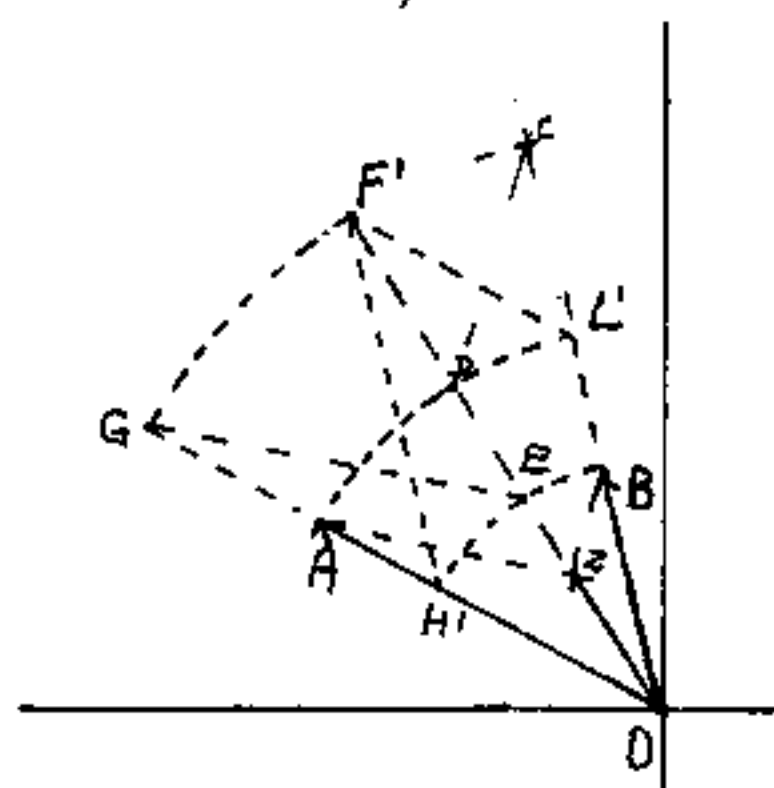
essendo: $r^2 = |\vec{A}| |\vec{B}|$ possiamo scrivere

$$|\vec{OF}'| \cdot |z| = r^2 = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}|$$

$$\overline{OF'} / |B| = \frac{|A|}{|z|}$$

$$|z| : |A| = |B| : \overline{OF'}$$

ra rappresentiamo ora graficamente tale proporzione, dopo aver costruito $\overrightarrow{OF'}$, riportiamo



sul prolungamento di \overline{OA} il punto "G", tale che:

$$\overline{OG} = \overline{OF'}$$

e riportiamo su $\overline{OF'}$ il punto "E" tale che:

$$\overline{OE} = \overline{OB}$$

unito "G" con "E", si traccia per "A" la parallela a \overline{GE} fino all'incontro con $\overline{OF'}$ in "Z".

Avremo:

$$\overline{OZ} : \overline{OA} = \overline{OE} : \overline{OG}$$

ma: $\overline{OA} = |\vec{A}|$; $\overline{OE} = |B|$; $\overline{OG} = \overline{OF'}$;

quindi: $\overline{OZ} : |\vec{A}| = |B| : \overline{OF'}$

perciò il segmento \overline{OZ} rappresenta il modulo di z , cioè: $\overline{OZ} = |z|$, e la proporzione può anche scriversi:

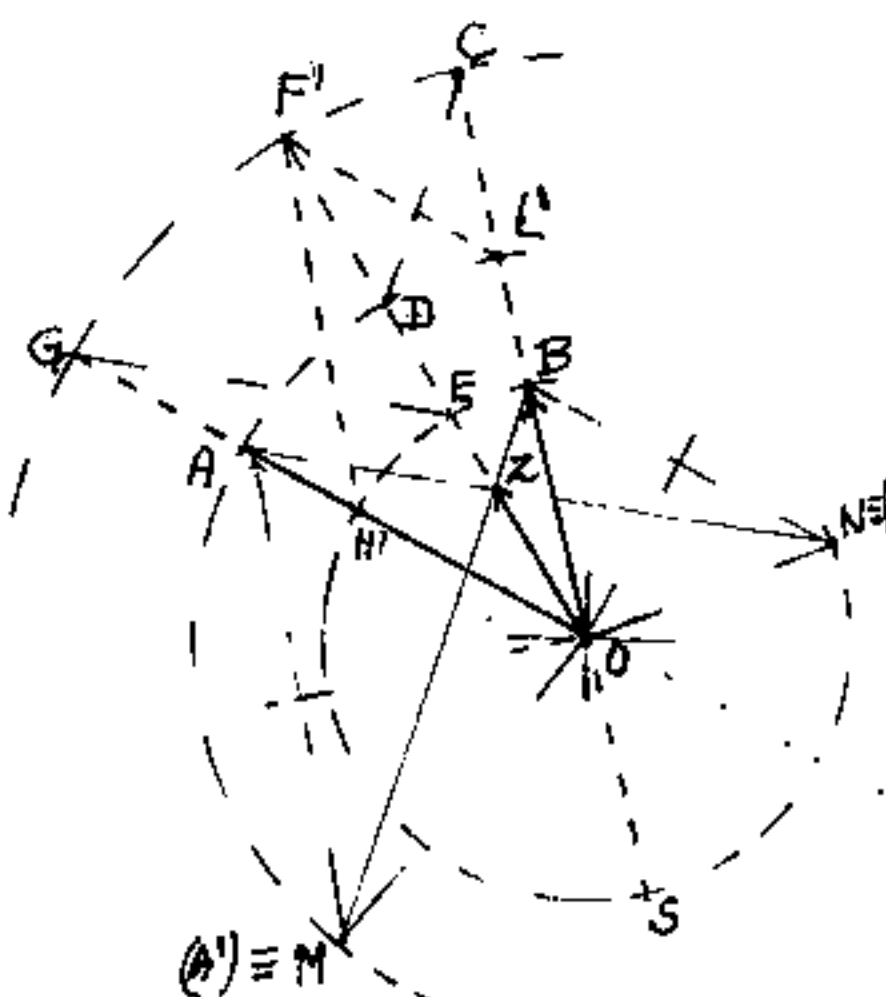
$$|z| : |B| = |\vec{A}| : \overline{F'O}$$

Alle stesse conclusioni si giunge riportando $\overline{OF'}$ in "C" sul prolungamento di \overline{OB} , che unito con D è parallelo a \overline{BZ} .

Quindi \vec{OZ} rappresenta il vettore $(z-0) = \vec{z}$

$$\vec{z} = \frac{1}{\frac{1}{\vec{A}} + \frac{1}{\vec{B}}}$$

Consideriamo ora i triangoli $F'O$ e CDO essi sono uguali, diversamente disposti infatti:



$\overline{F'O} = \overline{OC}$ per costruzione;
 $\overline{OL'} = \overline{OD}$ per costruzione;
 l'angolo $\widehat{L'OF'} = \widehat{COD}$, comune;
 quindi i lati $\overline{DC} = \overline{F'L'}$
 e gli angoli $\widehat{OF'L'} = \widehat{OCD}$.
 Ma $F'L' = \overline{OH'} = \overline{OB} = |\vec{B}|$ per
 costruzione, perciò:
 $\overline{DC} = \overline{OB} = |\vec{B}|$.

Analogamente si può dimostrare che $\overline{GE} = \overline{OA} = |\vec{A}|$.

Prolunghiamo ora \overline{BZ} fino ad un punto M , tale che $\overline{BM} = \overline{OF'}$, si dimostra subito che i triangoli \widehat{OMB} ed $\widehat{OL'F'}$ sono uguali, infatti: $\overline{BM} = \overline{OF'}$ per costruzione; $\overline{OB} = \overline{L'F'}$, per quanto sopra dimostrato; gli angoli: $\widehat{MBO} = \widehat{DCO}$ perché corrispondenti, ma $\widehat{DCO} = \widehat{OF'L'}$ (per quanto sopra dimostrato) quindi anche il lato $\overline{OM} = \overline{OL'} = \overline{OA}$ come dimostrato. Quindi $\overline{OM} = \overline{OA}$ ed il triangolo \widehat{ADM} è isoscele e gli angoli $\widehat{MAO} = \widehat{OMA}$ sono uguali.

Dalla uguaglianza dei triangoli $M\hat{O}B$ ed $O\hat{L}'F'$ si ha che l'angolo $M\hat{O}B = O\hat{L}'F' = (\pi - \angle L'F'O) = (\pi - \hat{B}O'A)$, allora prolungando il lato \overline{BO} oltre l'origine O in "S" si ha: $M\hat{O}B = (\pi - \hat{B}O'A) = (\pi - M\hat{O}S)$ cioè: $M\hat{O}S = \hat{B}O'A$ il che vuol dire che il vettore \overline{OB} è parallelo al segmento \overline{MA} la normale per "O" a queste parallele incontra \overline{MA} nel punto mediano ($M\hat{O}A$ è isoscele) per cui "M" è l'immagine speculare di "A" riflessa da $\overline{OB} = |\vec{B}|$ e la retta che unisce M con B passa per z. La stessa dimostrazione può essere fatta per "N" immagine di "B" riflessa da $\overline{OA} = |\vec{A}|$, ove la retta che unisce "N" con "A" passa per z.

Resta così dimostrata la costruzione del vettore reciproco della somma dei reciproci valido come modulo e argomento rispetto a qualsiasi sistema di riferimento ed esposto nella stessa scala e con gli stessi riferimenti dei vettori noti \vec{A} e \vec{B} (cioè indipendente dai segmenti unitari necessari per costruire i reciproci)

$$\vec{Z} = \frac{1}{\frac{1}{\vec{A}} + \frac{1}{\vec{B}}}$$

$$\frac{1}{\vec{Z}} = \frac{1}{\vec{A}} + \frac{1}{\vec{B}}$$

I vettori e le frequenze

Il concetto di vettore è rappresentativo di un agente che produce un fluire più o meno intenso secondo una determinata direzione (direzionalità dell'insieme di rette parallele ciascuna delle quali avente la direzione prefissata). Però, se questo va bene per i campi gravitazionali, elettrici, magnetici, ecc. con vettori variabili, punto per punto, rimane più difficile "vedere" il fluire del vettore momento, eppure un momento agente in qualsiasi punto del piano, lo fa ruotare intorno al baricentro, ne abbiamo già parlato.

Però il problema è molto più complesso, e dovremmo, prima di tutto fare una tipizzazione dei vettori; ricordiamo che i primi vettori erano quegli enti speciali capaci di portare in "P" il punto "O", si scriveva il vettore geometrico: $(P-O)$ che si leggeva appunto: $(P-O)$ il vettore era il "veicolo", parole che derivano dal latino: *vector* *oris* m. (*veho*) attivo = portatore. La necessità di definire, a certe dimensioni fisiche, la direzione, portò ai vettori (grandezze vettoriali)

Le grandezze fisiche, che non necessitavano di una direzione furono dette "scalari".

Pero' il vettore geometrico: $(P-O)$ ha un preciso punto di applicazione ed un retta di azione giacente su \overline{PO} , col verso da "O" a "P" (era più simile a ciò che fu chiamato "forza"). Abbiamo già espresso il nostro pensiero in proposito. Mentre il momento non ha un punto di applicazione, la sua azione vale per tutti i punti del piano, e l'insieme delle rette normali al piano hanno la direzione del momento (direzionalità delle rette di giacitura di quel piano). È ovvio che il prodotto scalare, ed il prodotto vettoriale, possono portare incongruenze, quando non siano ben definite le caratteristiche dei due fattori vettoriali.

Ma noi, come ci siamo proposti, vogliamo ripartire da zero.

In questa parte vogliamo applicare la matematica alla fenomenologia che ci circonda, cercando, per quanto possibile, di evitare le arbitrarietà, che, troppo spesso, hanno falsato il fenomeno impedendone la conoscenza.

La prima unità dimensionale che abbiamo accettato è "l'angolo giro" o "ciclo", ne abbiamo evoluto la differenza. Ne consegue il concetto di frequenza, se introduciamo il tempo, o il movimento, che implicitamente ci dà il tempo. Se consideriamo l'angolo giro nel tempo zero esso ci dà contemporaneamente tutte le direzioni uscenti da ciascun punto del piano e perpendicolari alla retta normale al piano per quel punto (rette di giacitura, assi.) La direzione del vettore momento è l'asse dell'angolo giro.

Il fluire nel verso e nella direzione del vettore momento ci dà il moto di traslazione lineare, mentre il ruotare dell'angolo giro ci dà il moto di rotazione.

In campo finito il moto di un corpo è sempre riducibile ad una traslazione ed una rotazione, ove la retta della traslazione può essere diversa dall'asse di rotazione. Queste due rette possono essere individuate dalla posizione iniziale e finale; ma possono anche individuarsi istante per istante

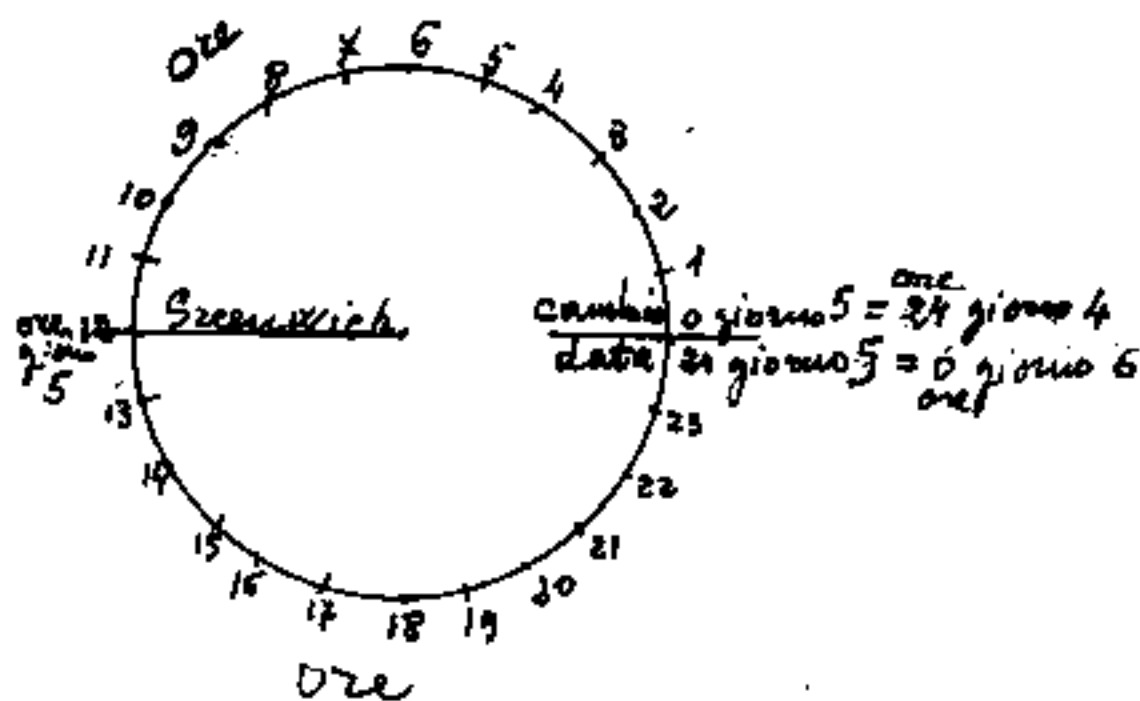
La grandezza "tempo" è implicita nella parola "Variazione" poiché ogni variazione ammette un "prima" ed un "dopo", in ciò un tempo, (me abbiamo già fatto cenno) perciò nel nostro studio entriamo nel campo te tra-dimensionale, ove la quarta dimensione è il tempo. Al nostro sistema di riferimento, manca l'origine: "0", che può essere l'osservatore, l'io puntiforme di cui abbiamo già parlato; le tre direzioni ortogonali uscenti da "0" sono definite da tre punti indefinitamente lontani; $X; Y; Z$; per cui le tre direzioni non mutano al variare dell'origine "0" = (l'io puntiforme) le distanze da 0, come consuetudine in geometria analitica, si indicano con: x, y, z ; (e variano al variare di "0")

Per il tempo, subentra la non facile definizione di "Contemporaneità", problema affrontato nella relatività, Galileiana ed Einsteiniana.

Consideriamo due uomini che si danno la mano, il contatto fra le due mani è contemporaneo, però i due uomini si trovano da banda opposta al meridiano di cambiamento di data, che attraversa il

contatto, in questo caso, sembrerebbe, che la "contemporaneità" differisca di 24 ore; ma ciò dipende dall'aver riferito la misura del tempo ai movimenti della terra.

Guardando la terra ed i suoi meridiani individuati dall'ora di Greenwich, dal



Nord, vediamo come a fianco, e l'istante che fissa le ore 12 di Greenwich

ti vedono le ore degli altri meridiani.

Lo stesso discorso può farsi sull'eclittica divisa in dodici mesi, e la stretta di mano differirebbe di un anno.

Se l'istante in cui si è focalizzata l'ora sui meridiani terrestri è unico per tutto il cosmo avremmo definito la contemporaneità. Poiché le immagini si muovono con la velocità della luce, un osservatore che si allontani da un orologio con la velocità della luce, dicono !!!, vedrebbe sempre la stessa ora. (il flusso di luce non entrerebbe nel suo occhio, se non si ferma)

A parte il fatto che la velocità della luce non è velocità limite, ma esistono, nel reattore nucleare, particelle che si muovono a velocità superiore a quella della luce, consentendo l'auto-fotografia (effetto Čerenkov). Che il cosiddetto vuoto è un assurdo perché all'atto stesso che pronunciamo la parola "nel" lo riempiamo di quel qualcosa. Che nei vari mezzi materiali, la velocità delle singole onde elettromagnetiche che determinano lo spettro dei colori, differiscono fra loro; (il rapporto fra le velocità nei due mezzi è l'indice di rifrazione relativo) Tuttociò ridimensiona le teorie Einsteiniane, e le conseguenze che se ne deduceva.

Facciamo un'altro esempio: supponiamo che l'orologio abbia emesso un suono, (battuto un colpo, ma un suono non è mai istantaneo) e che l'osservatore si allontani con la velocità del suono, per essentilo deve averlo superato e si deve fermare per quel tempo che necessita al suono altrimenti lo sente distorto. (Si noti come osservando una corsa automobilistica dal bordo di una strada

la velocità della macchina in arrivo comprime le frequenze elastiche del suono che la precede diminuendone la lunghezza d'onda e si sente un suono più acuto di quello reale. Non appena la macchina c'è passata davanti il suono che lei emette viene verso di noi in senso opposto e la velocità della macchina addizionandosi a quella del suono ne allunga la lunghezza d'onda e si sente un suono più grave del reale. La variazione da più acuto a più grave si ha proprio quando la macchina ci passa davanti.

Per recepire una frequenza occorrono alcune lunghezze d'onda, in genere non basta una sola, cioè occorre un piccolo intervallo di tempo. Occorre un quoto di energia, ciò vale per tutte le frequenze sia ottiche, sia acustiche; quindi una immagine è un quoto di energia, come l'osservatore acustico ha dovuto sopportare il suono e per poterlo udire, ha dovuto fermarsi; la stessa cosa deve fare l'osservatore ottico. Si può vedere la stessa immagine per molto tempo solo se c'è una sorgente luminosa che continua ad illuminarla.

Quindi per un quoto di energia occorre un intervallo di tempo.

Non intendiamo, almeno per ora, entrare nel merito della teoria di Planck sulla distribuzione a gradini (quanti di energia) in oscillatori, ove ogni gradino avrebbe il valore " $h\nu$ ", con " h " = costante di Planck, (già valutata $6,55 \cdot 10^{-27}$ erg. sec; oggi: $6,626176 \cdot 10^{-34}$ Joule. sec)
" ν " = frequenza dell'oscillatore. (valore energia: $n h \nu$)
con n = numero dei gradini. E la conseguente distribuzione nell'ipotetico "Corpo nero".

Per intervallo di tempo possiamo considerare quanto abbiamo già esposto sul pendolo circolare, cioè l'alterra^{ta} del cono descritto dal filo che è indipendente dalla lunghezza del filo e dal peso applicato:

$$\omega^2 = \frac{g}{h} \quad ; \quad \frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{h}{g}} \quad ; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$$

ω = velocità angolare = rad/sec T = periodo = sec/ciclo

E qui notevole la definizione di potenza che moltiplicata per un intervallo di tempo dà un quoto di energia.

In elettrotecnica la potenza di un Watt, moltiplicata per un secondo dà un Joule.

Ma: (Watt) = (Volt) . (Amper) = (Volt) (Coulomb) / (sec)

perciò: $\frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} = \text{Volt} = \text{Energia dell'unità di carica}$

Ampere = Coulomb/sec. = portata di cariche.
detta comunemente intensità di corrente.

L'energia potenziale è un lavoro o quoto di energia vincolata che per estrinsecarsi impiega un certo tempo. La potenza di un quoto di energia potenziale è il rapporto fra il quantitativo di energia accumulata ed il tempo necessario a svincolarsi, o trasformarsi.

Quindi la potenza è un elemento caratteristico dei congegni che ne permettono la trasformazione. (in genere motori o generatori).

Per rilevare la potenza di un quoto di energia potenziale (cioè un quantitativo limitato che si esaurisce liberandosi) possiamo pensare ad un recipiente cilindrico pieno di acqua, a seconda che sul fondo vi sia un piccolo foro, o addirittura il fondo si apra di colpo, il tempo per svuotare il contenitore cilindrico: $t = \frac{A}{F} \sqrt{\frac{2h}{g}}$ è il tempo che divide l'energia potenziale gravitazionale: $E = \frac{\rho_s h^2 A}{2}$, ove ρ_s = peso specifico del fluido, h = altezza dell'acqua, A = Area della sezione cilindrica, F = area del foro, g = accelerazione di gravità.

si vedé meglio se pensiamo di dover sollevare
 75 Kg all'altezza di un metro, con un mo-
 tore della potenza di un cavallo (un CV =
 cavallo vapore = $75 \text{ Kg} \cdot \text{m} / \text{sec}$; nei paesi di lingua inglese,
 se si usa: HP = Horse - Power = 746 Watt = $76,04 \frac{\text{kgm}}{\text{sec}}$)
 il nostro motore impiegherà un secondo a solle-
 vare 75 Kg all'altezza di un metro. Se lo stesso
 lavoro volessimo utilizzare un comune motore da
 tavolo elettrico = 7,5 Watt = 0,765 $\frac{\text{kgm}}{\text{sec}}$ impiegheremo 100 sec
 teorici perché la coppia deve essere demoltiplicata
 con sistemi di ingranaggi che per attento
 amorbirebbero quasi l'intera potenza del mo-
 torino.

Occorre fare diverse osservazioni:

- 1) Nel recipiente da vuotare, la spinta ad usci-
 re diminuisce con l'altezza del livello del
 liquido, mentre la spinta dei motori,
 (coppia sull'albero) rimane costante perché
 l'energia viene amorbita all'esterno.
- 2) Analogo il problema dell'energia elastica
 un elastico per sollevare un peso si
 allunga di una certa lunghezza dipen-
 dente dal peso e dallo stato dell'elastico.
cioè l'elastico inizia a sollevare il peso

quando ha accumulato in se l'energia elastica sufficiente a produrre una azione che equilibra il peso. Tale azione cresce al crescere della deformazione e, come termine di comodo, è stata chiamata forza.

Supponiamo di avere un elastico che al più può sostenere 1 Kg e con esso di voler sollevare 75 Kg all'altezza di un metro, ciò è possibile con una leva in cui il rapporto dei bracci sia minore di $\frac{1}{75}$ e di disporre di un elastico così lungo che sia capace di accumulare l'energia di 75 Kg più quella necessaria alla iniziale deformazione per produrre l'azione equilibrante, che viene restituita se il peso, una volta sollevato, non è più sostenuto dall'elastico. Ma tutti i corpi sono elastici, sia quello che sosteneva il peso in basso, sia quello che sosterrà il peso in alto. Supponiamo che gli attacchi al peso siano puntiformi (carico concentrato) e l'energia elastica accumulata per il sostegno $\frac{Ph}{2}$ ove h è lo spostamento del punto di sostegno (deformazione elastica)

Se la struttura è astiforme sappiamo che:

$$h = \Delta l = \frac{Nl}{EA} = \boxed{h = \frac{P}{EA/l}}; \text{ poste le caratteri-}$$

stiche dell'asta: $(\frac{EA}{l}) = w = \text{rigidezza a sforzo normale}$

$$\boxed{h = \frac{P}{w}}$$

quindi l'energia elastica accumulata da P :

$$\text{Lavoro elastico} = \boxed{L = \frac{Ph}{2} = \frac{P^2}{2w}}$$

Noi cerchiamo di "vedere" come "nasce" in un corpo l'azione equilibratrice.

Un corpo, sotto l'azione di un peso, si deforma finché la deformazione ha accumulato una energia interna potenziale capace di equilibrare il peso stesso. $L = \frac{P^2 l}{2EA}$;

la variazione infinitesima: $dL = (\frac{l}{2EA}) P dP$;
ovvero integrando otteniamo: $L = \frac{P^2 l}{2EA}$ da cui:

$$P = \sqrt{\frac{2EA}{l} L} = \sqrt{2Lw}$$

Quindi l'azione disponibile è la radice quadrata di 2 volte il prodotto fra l'energia elastica potenziale e la rigidezza a sforzo normale, ciò vale per le strutture astiformi trascurando le contrazioni trasversali.

Per i fluidi: $pV = RT$ (Boyle) ovvero la pressione p moltiplicata per un'area dà una azione.

Le Forze

Cerchiamo di fissare i capisaldi della discussione su ciò che comunemente viene chiamata forza. ("azione sui vincoli di energia potenziale elastica")

1) La forza F applicata ad un corpo lo trasla sulla sua retta di azione, e lo ruota se la sua retta di azione non passa per il baricentro del corpo.

2) Il moto implica un rapporto spazio/tempo

$$\frac{\vec{F}}{m} = a = \text{accelerazione} \left(\frac{\text{lunghezza}}{(\text{tempo})^2} \right)$$

ove m è la massa del corpo.

ma:

$$\boxed{F = \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}}$$

Nel punto 1) abbiamo applicato ad un corpo un qualcosa chiamato "forza", senza sapere cos'è.

La domanda è:

"Cosa avete applicato?"

- un qualcosa che fa muovere il corpo.

Pensiamo di aver legato il corpo con una fune, all'altro estremo della fune, vi sarà un qualcosa che tira la fune stessa.

Questo qualcosa può essere un uomo, un cavallo, una macchina; può essere il vento su una vela, può essere l'azione attrattiva

(o repulsiva) di entità capaci di tali azioni.

Da tutto ciò emerge che "le forze" in se non esistono, esistono invece elementi capaci di compiere azioni, molto impropriamente chiamate forze.

Sono chiamate forze, sia quelle azioni che provocano il movimento di un corpo, sia quelle azioni che impediscono il movimento di un corpo.

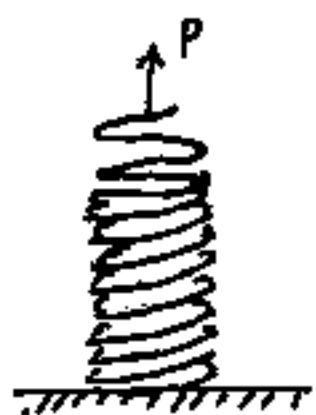
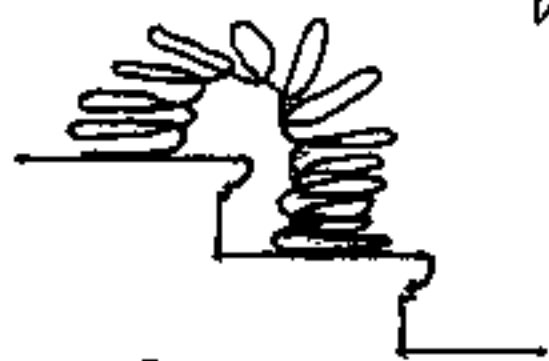
Si pensi al tiro alla fune, che resta ferma se le azioni delle due parti concorrenti si equivalgono.

Ma la fune (poco o molto) si è deformata. non solo, ma l'azione, per trasmettersi attraverso un corpo elastico, impiega un certo tempo.

Un corpo di massa "m", in moto, con velocità "v" dispone dell'energia cinetica $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, e, per la legge d'inerzia, mantiene il suo stato di quiete o di moto, se non intervengono azioni dall'esterno. (l'attrito con l'aria è già una azione dall'esterno, altra azione la gravità)

La trasmissione delle azioni dette forze.

Consideriamo quelle molle elicoidali, con rigidità molto bassa, e sono un gioco per bambini, perché messe le spire estreme su due gradini consecutivi, lasciata la molla discende tutta la scala, gradino per gradino.



Ma il fatto più interessante è porre, tale molla, in verticale appoggiata su un piano,

se cerchiamo di sollevarla prendendo la spira più alta notiamo che finché la nostra azione non è

pari al peso della molla, solo poche spire si muovono quelle che poggiano sul piano restano inalterate. . . . Ma allora, (in questo caso) l'azione di sollevamento interessa solo le spire che col proprio peso bilanciano l'azione.

Attenzione però a non lasciarsi ingannare da deduzioni troppo semplicistiche.

L'azione esterna P si attenua scendendo lungo la molla; noteremo che anche i passi fra le spire sono più deformati quelli vicini a P .

Se consideriamo la molla con le spire estreme poggiate sui due gradini consecutivi, notiamo che per portare la spira superiore ribaltata allo stesso livello di quella inferiore (già appoggiata), prima solleviamo la spira superiore ruotandola intorno ad un'ideale asse orizzontale, quando l'angolo di rotazione ha raggiunto $180^\circ = \pi \text{ rad.}$, cioè si è ribaltata, esistono spire intermedie ruotate di angoli maggiori di zero e minori di 180° , queste spire elasticamente sono richiamate da entrambi le parti di molla. Ma, se nel muovere la spira superiore, abbiamo attribuito un certo quoto di energia cinetica, queste spire intermedie si muoveranno nel verso di moto che gli abbiamo trasmesso, richiamando elasticamente altre spire e loro adagiandosi sulla seconda parte di molla. Se la seconda parte di molla è sul gradino inferiore, interviene anche il peso delle spire, il moto si accelera tanto che le ultime spire della prima parte, per elasticità sarebbero richiamate a ribaltare sulla seconda

parte di molla, ma l'energia cinetica di cui dispongono, le fa' continuare la rotazione fino a 360° e fa anche inclinare la molla nel verso del moto. Quando le ultime spire hanno subito il doppio battimento si trovano sopra un gradino ancora più basso, e, per gravità vanno su di esso, richiamando le spire adiacenti, ed il moto continua fino al fondo scala, e tal volta fanno ancora un passo o due sul pavimento piano di fondo scala, per esaurire in attenti l'energia cinetica accumulata.

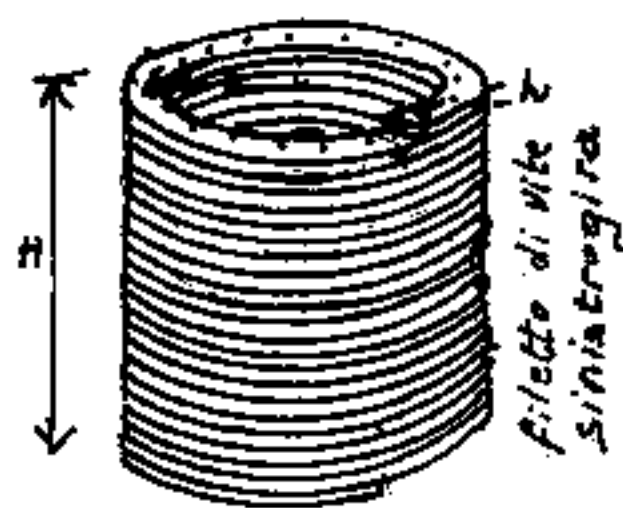
Abbiamo scelto questo "gioco", perché ci sembra che le azioni energetiche (forze) dovute all'energia cinetica, all'energia elastica, all'energia gravitazionale, tendano l'idea, in modo abbastanza significativo, di cosa intendiamo per "forze".

Nel fare calcoli pratici sulle molle elicoidali, è bene ricordare che le eliche possono essere:

destrogyre = orarie = sinistrorse. oppure: sinistrogyre = antiorarie = destrorse.



Consideriamo una molla elicoidale cilindrica, di sezione rettangolare: "b", "h", e raggio "r" medio,

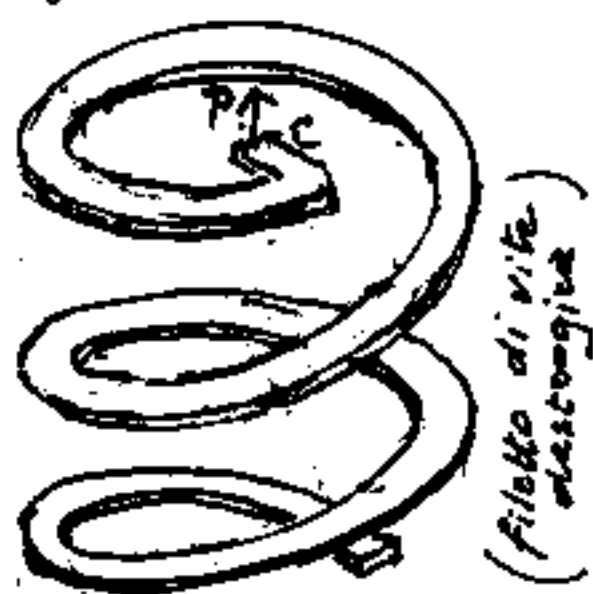


"m" è il numero delle spire, $m \cdot h = H$ è l'altezza del cilindro con spire a contatto.

Se γ è il peso specifico,

$2\pi b h \gamma \approx$ peso di una spira,

(per h piccolo). Se la spira più alta ha l'estremo collegato con l'asse del cilindro, sollevando



con intensità P in C, si ha un momento torcente nella spira pari a $P \cdot c = M_t$, l'azione di P, da cosa è equilibrata?

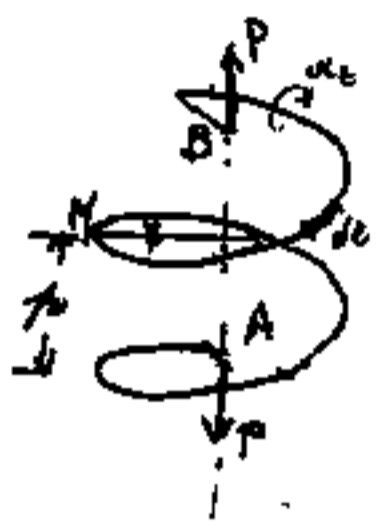
Per il calcolo delle eliche vedi:

"O. Belluzzi - Scienza delle Costruzioni - Vol. II pag. 535 e seg." che riporta anche le formule per le travi elicoidali pubblicate da O. Zanaboni sulla rivista il "Cemento Armato" 1939 - n° 2.

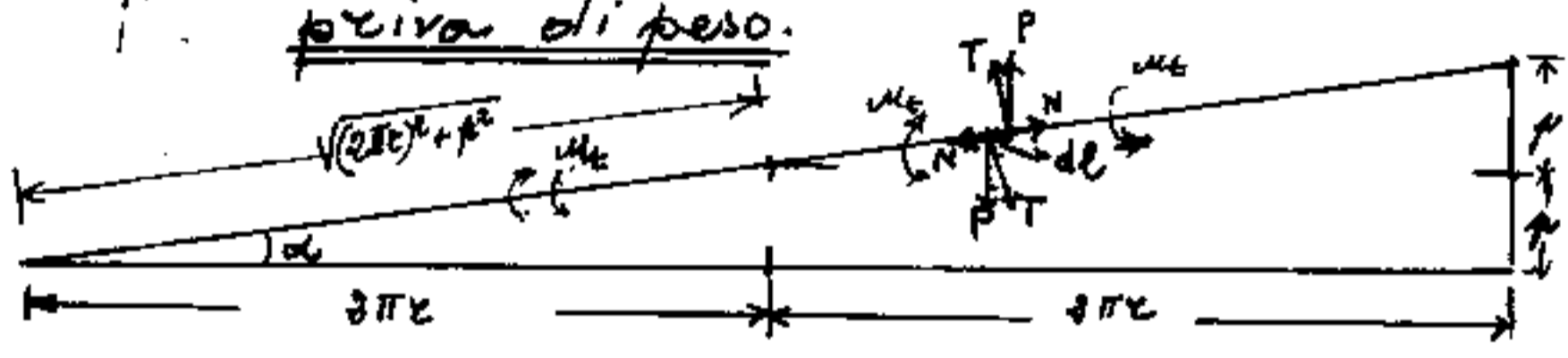
Noi cercheremo di chiarirci le idee con semplici ragionamenti.

Sappiamo che sviluppando il cilindro su cui giace l'elica si ha un triangolo rettangolo, l'altezza è il n° dei passi, la base il n° delle circonferenze e l'ipotenusa la lunghezza della curva elicoidale. (ovvero un triangolo rettangolo)

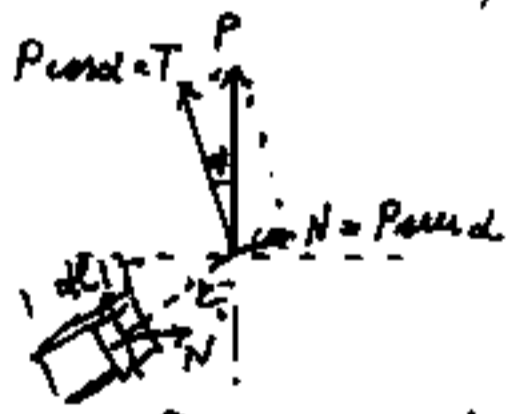
L'azione di P è un taglio per sezioni verticali, se l è la distanza dell'elementino dl dall'estremo, su tale elementino agisce l'azione verticale di P diminuita del peso delle spire per una lunghezza l , ma diminuita anche dalla azione elastica di richiamo.



Sviluppiamo in piano le due spire in figura ove l'elica è sollecitata solo agli estremi ed è considerata priva di peso.



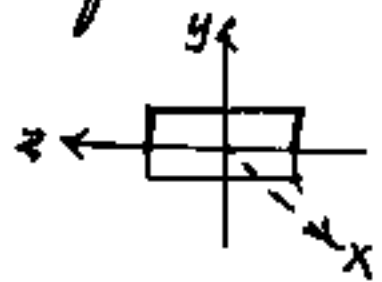
$T = P \cos \alpha$; $N = +P \sin \alpha$; $M_e = -Pr \cos \alpha$; (svitamento vite destragira)
 ove " α " è la pendenza degli elementi " dl " dell'elica.



Su un piano verticale passante per la retta di P, (asse del cilindro dell'elica) scomponiamo

P secondo le direzioni variate di (α) e $(90^\circ - \alpha)$ la normale τ a tale piano incontra il centro faccia delle sezioni normali all'elica, cioè la sezione ove si verificano T ed N paralleli a quelli ottenuti dalla scomposizione di P , e notiamo che $T \cdot r = M_e$, provoca il momento torcente nella

sezione, mentre N e T provoca un momento flettente ruotante sulla retta di T .



Se con x, y, z ; indichiamo gli assi della sezione normale dell'

elica (variabili da sezione a sezione) ove " x " è la normale alla sezione, cioè retta di N ; " y " è la retta di T ; e " z " normale ad xy coincide col raggio di quella sezione. Perciò avremo:

$$M_x = \tau P r \alpha = \text{momento torcente} = (M_t)$$

$$M_y = \tau P r \alpha \alpha = \text{momento flettente (per molle tese tende le fibre interne)}$$

$$M_z = 0 =$$

Il fatto che allungando la molla per effetto di P si veda ridurre il raggio in contrasto con M_y , e che apparirebbe inflettere l'elica tendendo le fibre interne; e la freccia verso l'alto che farebbe ritenere tese le fibre inferiori e quindi non nullo M_x .

In effetti lo sforzo normale che, per molle tese, tende ad allungarne lo sviluppo, ha Δl così piccoli che sono trascurabili rispetto alle deformazioni dovute ai momenti, pure trascurabili sono le deformazioni dovute al taglio.

Tenuto conto che $M_x = (M_t)$ ed M_y sono costanti

in tutte le sezioni dell'elica, (che abbiamo con- siderato priva di peso e di altre azioni escluso P) avremo che ogni elemento "dl" di elica è soggetto alle stesse sollecitazioni sulle sezioni estreme. Ogni elemento "dl" inclinato, (se la molla elicoi- dale è destrorotata, è tesa) è soggetto, sulle sezioni che lo delimitano, ad un momento torcente tale che gira come lo svitamento della vite destrorotata; perciò l'elemento "dl", adiacente la sezione più alta, tenderà ad alzarsi; e l'elemento dl, adiacente la sezione più bas- sa, tenderà ad abbassarsi. Abbiamo cercato



di riprodurre in figura il ra- gionamento, ove i versi di M_t sono quelli che gli elementi adiacenti trasmettono a dl. Cioè l'allungamento del cilindro eli- coidale è dovuto alla torsione, non al- la flessione (N e T trascurabili). Per N tra- scurabile facendo una trazione tale, da portare l'elica cilindrica alla stessa lunghezza "l" dell'elica, si ottiene un solido alto l, che per effetto di M_t , le sezioni terminali sono ruotate l'una rispetto

all'altra, di tanti "giri", quante erano le spire dell'elica.

Cio' vuol dire che, tenendo fissa una estremita' dell'elica, e sollevando, (con P), l'altra meta', si ha un immagazzinamento dell'energia elastica; se pensiamo di aver applicato " P " gradualmente (per evitare energia cinetica) il lavoro $L_e = \frac{Ph}{2}$, con " h " = spostamento degli estremi dell'elica.

Sappiamo che la lunghezza di una spira di raggio r e passo p , e' data: $l_s = \sqrt{(2\pi r)^2 + p^2}$.

Se q e' il fattore torsione (dipendente solo dalla forma della sezione) l'angolo di rotazione relativa fra due sezioni, distanti l in un solido prismatico e' dato da:

$$\theta = q \frac{M_t l}{G J_p}$$

Il lavoro elastico $L_e = q \frac{M_t^2 l}{2 G J_p}$.

uguagliando i lavori:

$$q \frac{(P l_s)^2 l}{2 G J_p} = \frac{Ph}{2}$$

cioe': $\frac{P}{h} = \frac{G J_p}{q l_s^2} = \text{costante della molla.}$

Energia - Lavoro - forze

Il "lavoro" è quell'azione che trasforma un quoto di energia potenziale in un altro quoto di energia potenziale.

L'energia non si crea, né si distrugge, ma può trasformarsi in forme diverse, per esempio: termica, meccanica, gravitazionale, elastica, elettrica, atomica, chimica, cinetica, ecc.

Per sollevare un peso P all'altezza h è stato speso il lavoro: $L = Ph$ ove Ph è anche l'energia potenziale gravitazionale ove $\underline{F} = mg = P$ è l'azione che si deve esercitare per conservare l'energia potenziale, ed evitare che il peso ricada.

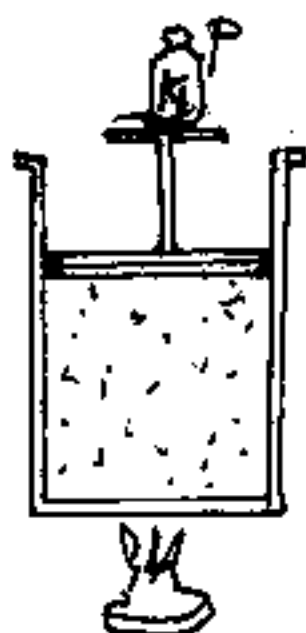
Ma in ogni punto dell'altezza h è stata necessaria l'azione statica $F = P$, però è occorso qualcosa di più cioè lo "spostamento" cioè il lavoro che avrà attinto ad altra forma energetica, l'incremento di energia potenziale gravitazionale: Ph .

Può essere un motore elettrico, può essere un motore termico, può essere lavoro umano, in ogni caso una parte

dell'energia spesa, si disperde in calore, e solo una parte compie il lavoro "Ph"; cioè ogni motore ha un rendimento minore del 100%. Partendo da unità convenzionali si sono confrontate varie unità energetiche:

Joule = Watt-sec; Cal = Kilocaloria; Kgm; KWh;
 R = costante dei gas, riferita alla grammomolecola.

	Joule	Cal	Kgm.	KWh	R
Joule	1	$2,38 \cdot 10^{-4}$	0,10203	$2,7778 \cdot 10^{-7}$	$1,8029 \cdot 10^{-8}$
Cal	4186	1	427	$1,162 \cdot 10^{-3}$	503,5
Kgm.	9,801	$2,342 \cdot 10^{-3}$	1	$2,722 \cdot 10^{-4}$	1,179
KWh	3600	860	$3,67 \cdot 10^5$	1	$4,33 \cdot 10^5$
R	8,309	$1,985 \cdot 10^3$	$8,48 \cdot 10^{-1}$	$2,309 \cdot 10^4$	1



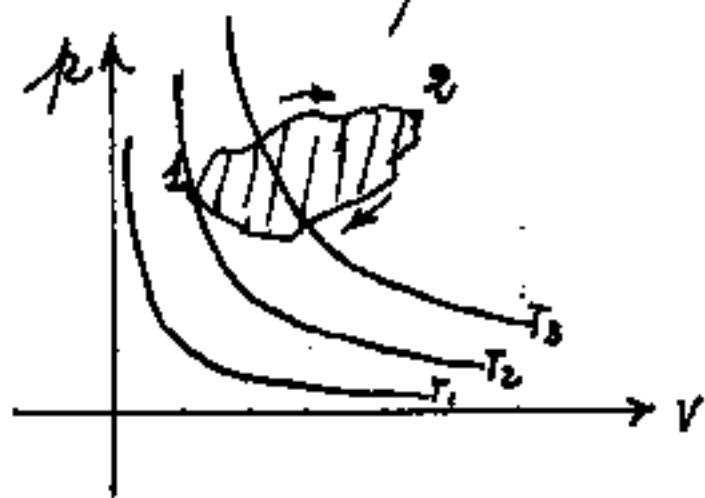
consideriamo un fluido entro un cilindro chiuso da un pistone che sostiene un peso: P .

Se A è l'area del pistone $\frac{P}{A} = p =$ pressione del fluido, $v =$ volume (dell'unità di massa) vale la legge di Boyle: $pv = RT$ con $T =$ temperatura assoluta.

Somministrando calore in genere si provoca

una dilatazione del fluido che farà sollevare P di "dh"; $A(dh) = (dV)$ è l'incremento di volume, $P(dh) = pA(dh) = p(dV)$ il lavoro compiuto

Però se riportiamo, su due assi cartesiani i valori di p . e di v , ove essendo costante R) pv , sono isoterme



che insistono su iperbole equilatera.

Sono isobare, le

trasformazioni o $p = \text{cost}$; isocore o $v = \text{cost}$;

adiabatiche o isoentropiche quando non v'è

scambio di calore (energia termica) con l'esterno.

isodinamica quando l'energia interna U ti

mane costante, cioè il calore Q dato dal

l'esterno equivale al lavoro L compiuto

all'esterno, se A è il rapporto: $Q = AL$.

Il fluido può passare dalla situazione nel

punto 1 alla situazione nel punto 2 in

infiniti modi diversi ed in altrettanti diversi

da 2 può tornare in 1. L'area della zona

delimitata da $\vec{12}$ e $\vec{21}$ è il lavoro compiuto

cioè essendo tornato in 1 non può aver restitui-

to tutto Q cioè il differenziale calore non è un

differenziale esatto.

Abbiamo scelto l'esempio di un fluido per cercare di determinare l'energia interna che, in questo caso è indicata con U e dipende solo dalla temperatura.

Ma a quella temperatura, la pressione del fluido, per il volume è ancora energia che moltiplicata per l'equivalente termico A diventa espresso in unità di calore.

Si ha così il calore totale o entalpia = \bar{I}
con: $\boxed{\bar{I} = U + A p V}$

Consideriamo gli scambi di energia termica (calorie) impropriamente chiamate quantità di calore (Q).

$$\boxed{dQ = d\bar{I} - A V dp}$$

$$\boxed{dQ = dU + A p dv}$$

differenziando \bar{I} si ha:

$$d\bar{I} = dU + A d(pV)$$

$$d\bar{I} = dU + A(pdv + vdp)$$

Avremo: per le isobare: $Q = I_2 - I_1$; ($dp = 0$)

" " isocore: $dQ = dU$; ($dv = 0$)

" " adiabatiche: $A \cdot L = (U_1 - U_2)$; ($\text{Lavoro} = A \cdot L$)

" " isodinamiche: $Q = A \cdot L$; (\bar{I} principio)

Scale termometriche

Lo stato termico di un corpo è determinato dalla sua temperatura, ed un corpo più caldo cede energia termica (calore) ad un corpo più freddo e non inversamente (secondo principio della termodinamica, o principio dell'impossibilità). (Il primo principio detto anche dell'equivalenza determina il rapporto fra lavoro meccanico ed energia termica (Q) = quantità di calore; nonché la costituzione dell'energia interna.

Per quanto concerne la "misura" della temperatura, anziché scegliere una unità di confronto, (come per le altre grandezze fisiche), fu scelta: "una scala delle temperature". Cercando di fissare due stati termici inequivocabili e dividendo quel salto termico in un certo numero di parti.

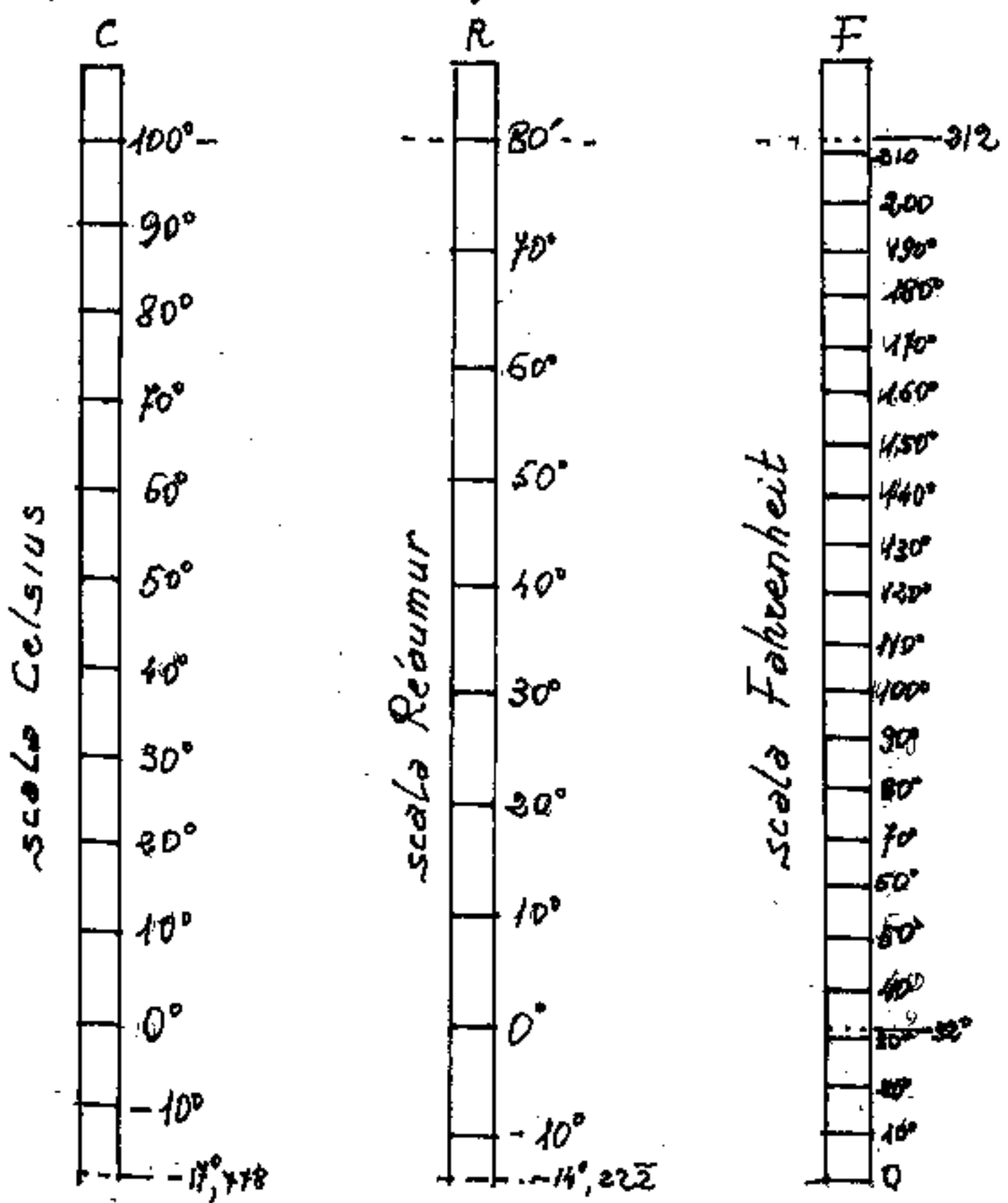
Nacquero così la scala "Celsius" ove lo zero è il punto termico del ghiaccio fondente, e l'ebollizione dell'acqua assunto come cento gradi con intervallo diviso in cento parti.

La scala "Réaumur" che ha lo zero coincidente con la "Celsius" ma l'ebollizione è

fissata ad 80° gradi e l'intervallo diviso in 80 parti.

La scala "Fahrenheit" pone invece 32° la temperatura del ghiaccio fondente, e 212 la temperatura di ebollizione dell'acqua: l'intervallo $(212^\circ - 32^\circ) = 180^\circ$ lo divide in 180 parti. $(\frac{C}{100} = \frac{R}{80} = \frac{F-32}{180})$

Riportiamo il confronto delle tre scale.



Però i cosiddetti punti fissi della temperatura in effetti debbono essere precisati con una molteplicità di altre condizioni, per esempio l'acqua in montagna bolle prima che al mare. Cioè la pressione influenza il punto di ebollizione. Intendendo per ebollizione il passaggio dallo stato liquido allo stato gassoso, si ha "evaporazione" per salto termico con la temperatura esterna, inoltre l'acqua distillata e la stessa forma del recipiente possono influenzare. Per la pressione è convenuto che sia di una atmosfera fisica cioè: $1,033\bar{3} \text{ Kg/cm}^2$.

Poiché sperimentalmente è accertato che un solido per passare allo stato liquido, mantiene costante la temperatura assorbendo una quantità di energia termica (calore di liquefazione); inversamente lo cede per solidificarsi. Analogamente un liquido per passare allo stato gassoso assorbe a temperatura costante il calore di vaporizzazione. Da ciò la scelta per le scale termometriche; da ciò la caloria,

come misura della quantità di calore, (energia termica) per far passare la temperatura di un Kg d'acqua distillata da $14,5$ a $15,5$ gradi Celsius. (cioè l'aumento di un grado Celsius) questa è detta più precisamente Kilocaloria: ($Kcal = Cal$); chiamano caloria una quantità di energia termica mille volte più piccola, (in disuso), detta piccola caloria. (cal)

Il secondo principio della termodinamica nella forma del postulato di Kelvin dice:

"È impossibile che l'unico risultato di una trasformazione termica sia quello di convertire in lavoro il calore sottratto ad una unica sorgente".

Il che vuol dire che il calore prodotto da una sorgente, solo in parte, si trasforma in lavoro, la restante parte sarà assorbita da un'altra sorgente.

(Occorre un salto termico, come occorre una differenza di potenziale in campo elettrico)

Questo implica un rendimento:

$$\varepsilon = \frac{AL}{Q}$$

Il termometro a gas

Torniamo al nostro cilindro chiuso da un pistone che sostiene il peso P , ove il fluido sia un gas (perfetto); fermo restando P e la pressione esterna, il gas ha trasformazioni isobare, se " V " è il volume del gas alla temperatura $t^{\circ}C$ e " V_0 " il volume a $0^{\circ}C$, se il volume specifico è sufficientemente grande (gas perfetto) V/V_0 è praticamente funzione solo della temperatura, indipendentemente dalla natura e massa del gas. Con ciò abbiamo definito un apparecchio che opportunamente tarato sui volumi determina la temperatura ($V_0 = \text{cost.}$)

$\frac{d(V/V_0)}{dt} = \alpha$ da cui: ($\alpha = \text{cost.}$) $\frac{V}{V_0} = \text{cost.} + \alpha t$
ma quando $V = V_0$ la $\text{cost.} = 1$ perciò:

$$V = V_0(1 + \alpha t) \quad (\text{Legge di Gay Lussac})$$

se consideriamo i volumi V_1 e V_2 occupati (a $p = \text{cost.}$) alle temperature t_1 e t_2 : $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1} = \frac{\frac{1}{\alpha} + t_2}{\frac{1}{\alpha} + t_1}$
ma V rappresenta una temperatura, nel rapporto si è eliminato V_0 potremo: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$

cioè: $T = \frac{1}{\alpha} + t$, ma t varia fra $0^{\circ} = 100^{\circ}C$.

Sperimentalmente $\frac{1}{\alpha} \cong 273$ perciò i punti fissi della temperatura Celsius diventano 273 e 373 in questa nuova temperatura detta assoluta.

Se Q_1 è il calore fornito e Q_2 il calore ceduto: $Q_1 - Q_2 = AL$, perciò:

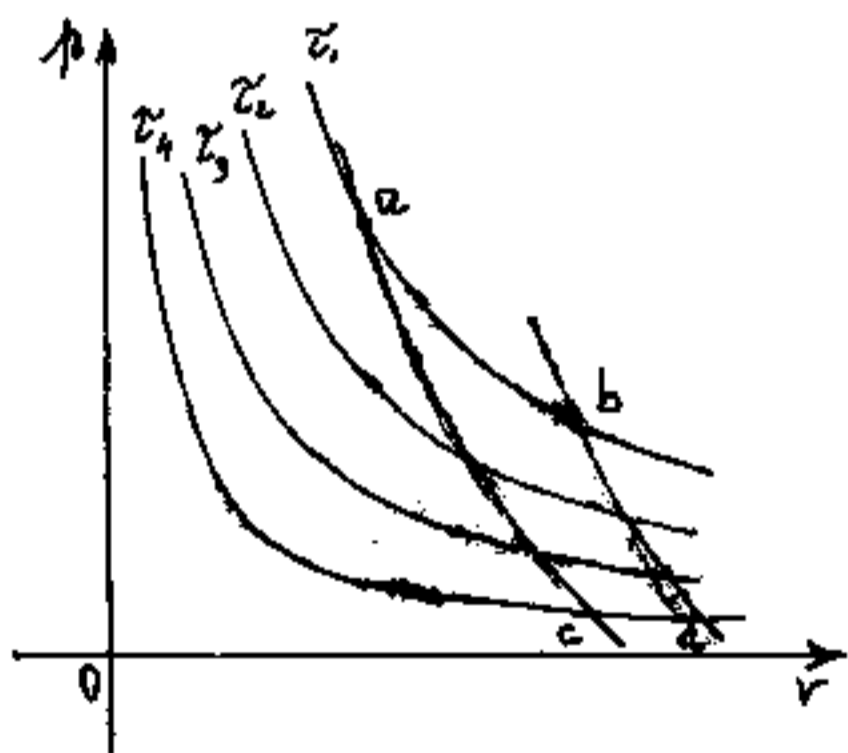
$$\varepsilon = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = (\text{rendimento})$$

Se le temperature delle sorgenti con le quali viene scambiato il calore, hanno temperature

$$T_1 \text{ e } T_2, \text{ e } \frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{Q_2}; \quad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{T_1 - T_2}{T_1}}$$

Il ciclo di Carnot.



Dati quattro punti a, b, c, d; ove:
ab e cd; sono isoterme
ac e bd; adiabatichhe.

Il percorso chiuso, fra due isoterme e due adiabatichhe è

detto: "Ciclo di Carnot".

Se il fluido agisce fra le temperature T_1 e T_2 e scambia calore lungo le isoterme, l'area delimitata dal ciclo è ancora il lavoro esterno, ed il rendimento $\varepsilon = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$.

Scala termodinamica della temperatura

Detta anche scala Kelvin dovuta a W. Thomson, (Lord Kelvin) (Si indicherà con la T maiuscola)

Consideriamo, (come si è già accennato) che le isoterme del ciclo di Carnot siano tali $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{K T'_1}{K T'_2} \Rightarrow T_1 = K T'_1$ indefinita dal solo rapporto K ; se poniamo la differenza 100 fra la T del ghiaccio fondente e la T dell'ebollizione (alla pressione di una atmosfera) la nuova scala risulta determinata.

Consideriamo che gli intervalli delle isoterme siano:

$$T_1 - T_2 = T_2 - T_3 = T_3 - T_4 = \dots$$

Consideriamo una serie di macchine termiche funzionanti secondo i cicli di Carnot fra due isoterme consecutive, cioè la I^a macchina riceve il calore Q_1 alla temperatura T_1 e cede alla seconda macchina il calore Q_2 alla temperatura T_2 , la II^a macchina che funziona fra T_2 e T_3 preso Q_2 cede Q_3 alla terza macchina alla temperatura T_3 ... e così via.

Ma dalla condizione:

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_3}{T_3} = \dots$$

si ha che i lavori compiuti dai cicli delle singole macchine, sono uguali

$$Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1} = Q_2 \frac{T_2 - T_3}{T_2} = Q_3 \frac{T_3 - T_4}{T_3} = \dots$$

e se il ciclo di una macchina fosse fra le temperature T_1 e T_0

$$AL = Q_1 - Q_0 = Q_1 \frac{T_1 - T_0}{T_1}$$

Se fosse $T_0 = 0$; $AL = Q_1$, contro il secondo principio nel postulato di Lord Kelvin che si avrebbe come unico risultato della trasformazione la produzione di lavoro sottraendo calore ad una unica sorgente.

Ciò implica che nella scala termodinamica esiste un T_0 (uno zero assoluto) che non si può raggiungere e tanto meno oltrepassare.

La scala termodinamica e la scala assoluta del termometro a gas coincidono avendo in comune l'intervallo fra 0° e 100° Celsius diviso in cento parti ed il limite inferiore a -273.15°C per lo zero assoluto, ove il gas deve essere un "ideale" gas perfetto.

Campi magnetici

Consideriamo una comune calamita, e riflettiamo un momento domandandoci:

"Cos'è che passa attraverso l'aria, tanto da generare una azione di sollevamento o attrazione di pezzetti di ferro?"

Se interponiamo un foglio di carta (anche impermeabile) l'azione passa ugualmente.

Anche se interponiamo una lastra di plastica l'azione passa ugualmente, quindi l'azione magnetica passa attraverso qualsiasi materiale cosiddetto isolante (stoffa ed altro).

Per i metalli si distinguono in due tipi: quelli che vengono attratti, (e sono detti ferromagnetici) come il ferro, la ghisa, l'acciaio, il nichel... ecc. L'altro tipo di metalli (detti: non ferro magnetici) che non vengono attratti: l'azione magnetica passa attraverso tutti. Se interponiamo una lastra di rame, o di alluminio, o di qualsiasi metallo non ferro-magnetico, l'azione della calamita passa. Se interponiamo metalli ferromagnetici essi stessi si magnetizzano e agiscono come nuove calamite, facendo una catena.

Se prendiamo due calamite astiformi (come l'ago delle bussole) e le poniamo su una lastra di sughero a galleggiare sull'acqua notiamo che un loro estremo andrà verso il nord terrestre, segniamo con una $N_{(+)}$ l'estremo che si dirigeva verso nord (e con una $S_{(-)}$ l'altro estremo che si dirigeva verso sud.)

Vogliamo ora vedere l'azione mutua fra le due calamite. Il N di una attrae molto vivacemente il S dell'altra, (poli opposti si attraggono), mentre i N fra loro, ed i S fra loro si respingono. (poli omonimi si respingono).

Ma allora l'azione non è soltanto attrattiva è anche repulsiva.

Le azioni attrattive - repulsive sono dette:

forze pondero-motrici esse si verificano:

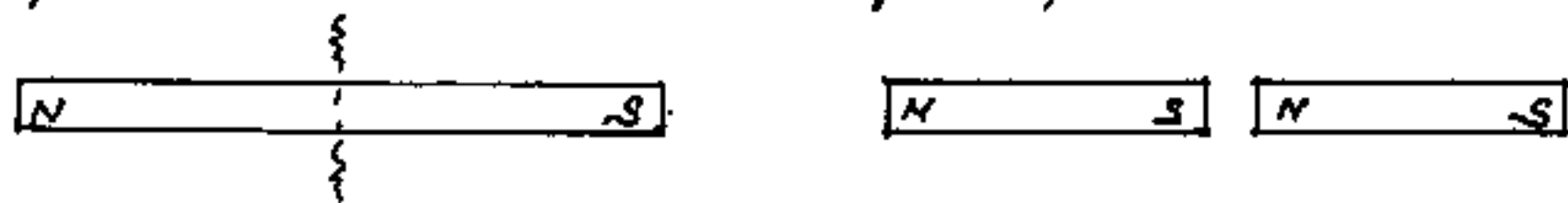
fra masse (si conoscono solo le attrattive);

fra cariche elettriche positive e negative;

fra poli magnetici.

Se cerchiamo di "separare" i poli magnetici (come si separano le cariche elettriche \pm)

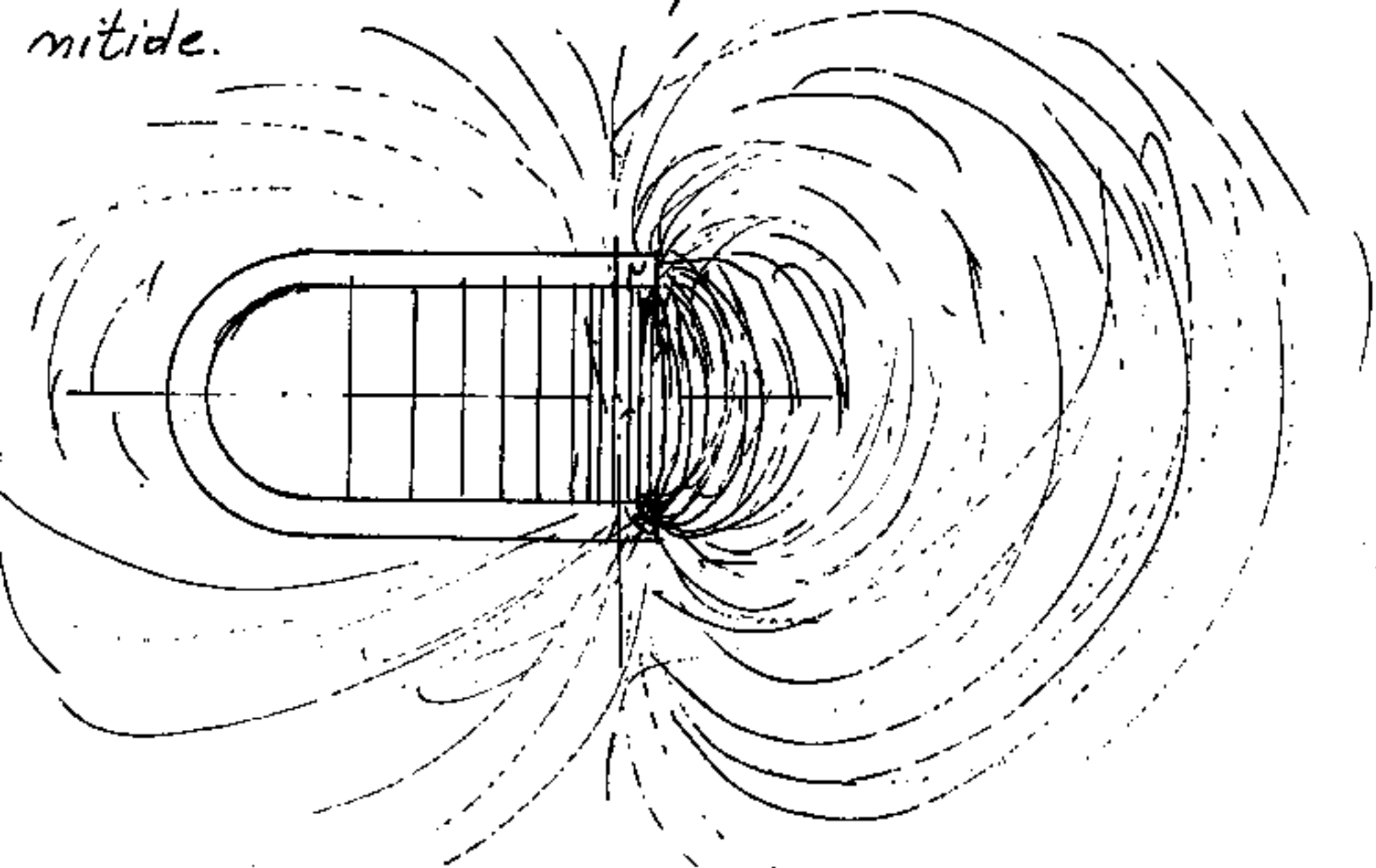
dividendo in due una calamita astiforme, si ottengono due nuove calamite astiformi (esperienza della calamita tagliata)



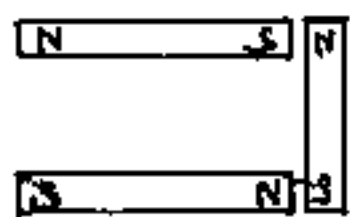
Cioè continuando a dividere fino a livello subatomico avremo dei magnetini elementari N-S detti magnetini di Barkhausen (dal nome del fisico tedesco 1881-1956). Questi magnetini nel ferro (e gli altri ferromagnetici) sarebbero disposti casualmente in tutte le direzioni come si trovavano all'atto della fusione (materiali non magnetizzati), ma strusciando, sempre nello stesso verso, uno stesso polo di una calamita (per esempio su un comune ago da cucire non magnetico) su materiali ferromagnetici, dopo pochi passaggi risulteranno magnetizzati e funzioneranno da calamite.

Volendo "vedere" questo flusso di azioni attrattive - repulsive emesse da una calamita (naturale o artificiale), basta spandere su un cartone della limatura di ferro, e quindi appoggiare il cartone su una calamita,

i singoli elementi di limatura diverranno tante micro-calamite artiformi e ciascuna di esse cercherà di unire il proprio N con l'S di un elemento vicino (o il S con N), si formeranno così delle lunghe file di elementini N S N S N S... che sono dette linee di forza del campo magnetico. Saranno più dense ove il campo magnetico è più intenso. (Amper propose di rappresentare l'intensità del campo magnetico con la densità delle linee di forza)
L'attrito della limatura di ferro sul piano di cartone, limita le linee di forza, ma se con un lapis, o biro, o bacchettina, diamo dei piccoli colpetti al cartone, la vibrazione fa diminuire l'attrito e le linee di forza saranno molto più nitide.

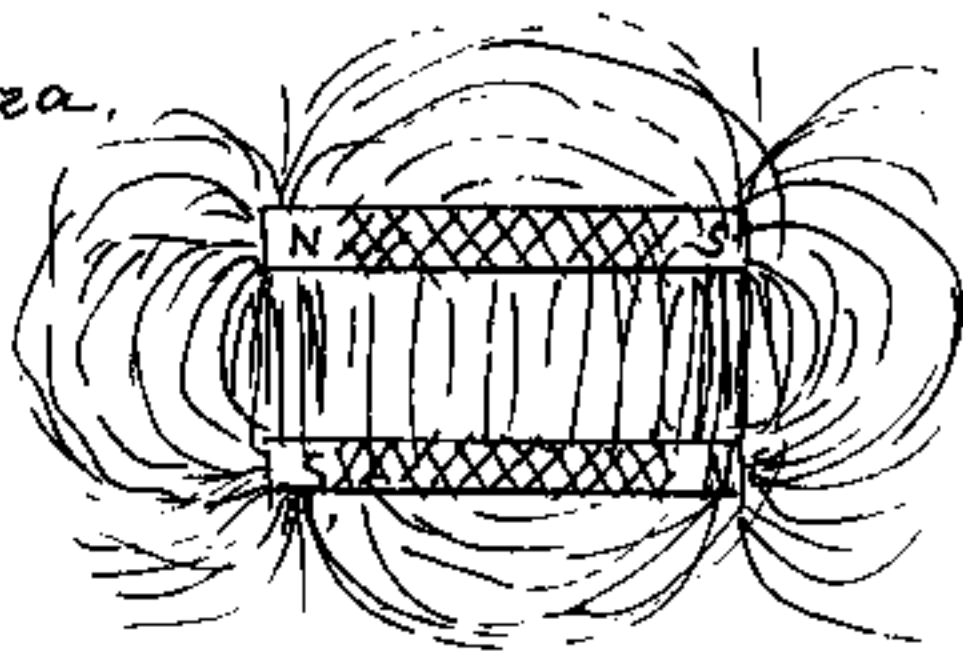
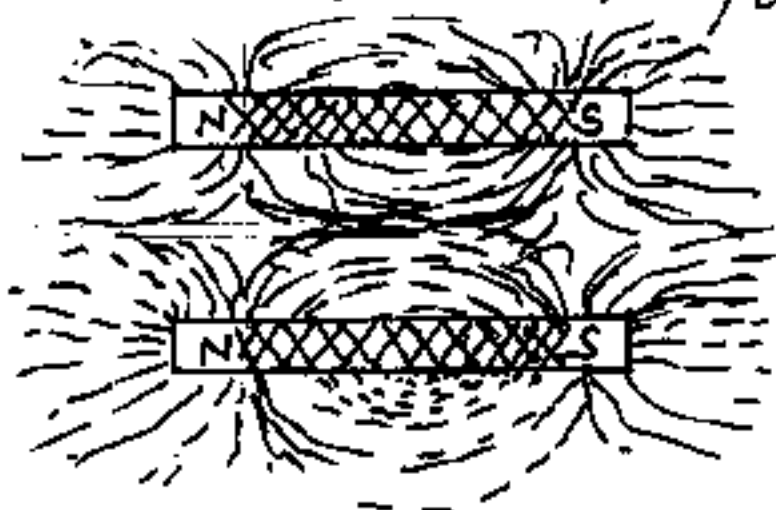


In figura abbiamo disegnato approssimativamente le linee di forza di un magnete permanente ad U. Un magnete ad U può ottenersi affiancando, con polarità opposte i due magneti astiformi e collegando gli estremi opposti con un terzo magnete astiforme o curvo: i poli opposti a contatto

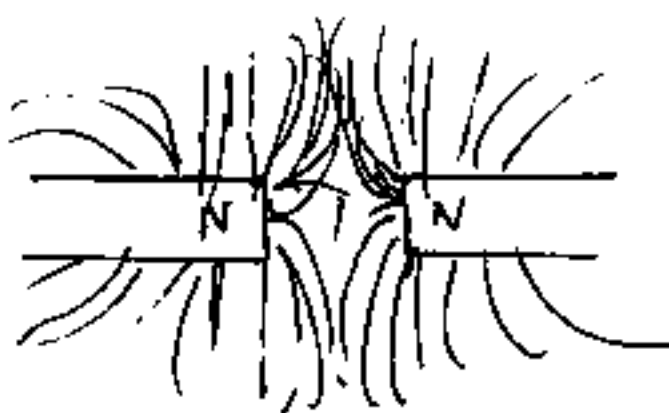
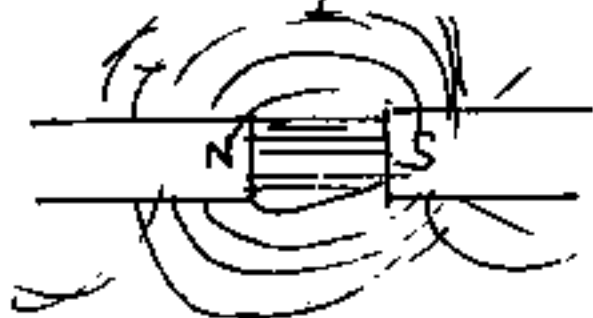


staranno saldamente uniti.

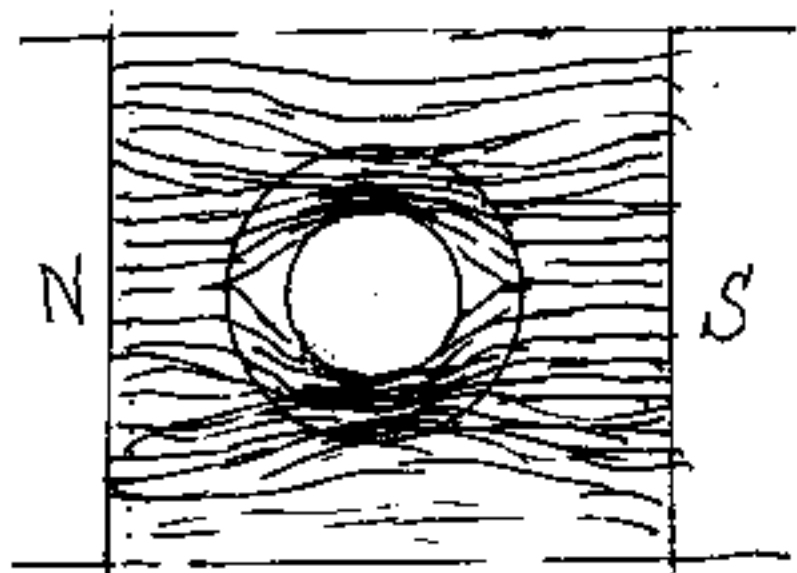
Ma se noi affianchiamo i nostri due magneti astiformi con i poli omonimi affiancati e con la limatura di ferro cerchiamo di visualizzare le linee di forza,



Possiamo notare le azioni attrattive e repulsive espresse dall'andamento delle linee di forza:



Se fra i poli N-S affacciati, di una potente calamita (o magnete permanente) introduciamo un pezzo di ferro dolce, le linee di forza che inizialmente rettilinee congiungevano i due poli, deviano, preferendo passare attraverso il ferro dolce anziché attraverso l'aria, anche se il percorso diventa più lungo. Interponendo un anello



cilindrico di ferro dolce, si nota che all'interno dell'anello non passa alcuna linea di forza, cioè

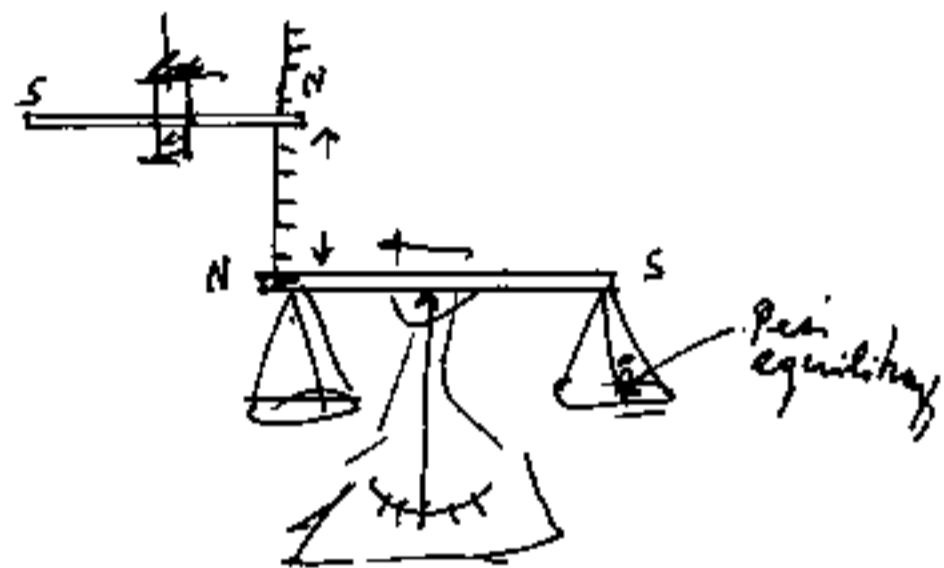
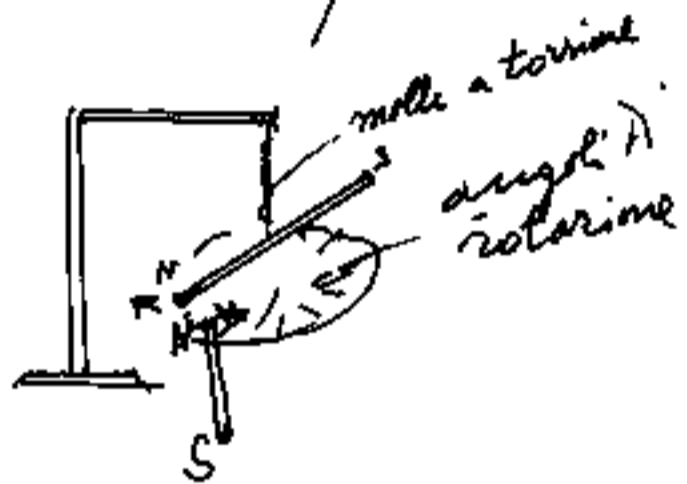
il ferro dolce opportunamente disposto può fare da schermo ai campi magnetici.

La forza con cui due poli magnetici di intensità m_1 ed m_2 si attraggono o si respingono, segue la legge di Coulomb: $F = K \frac{(m_1)(m_2)}{d^2}$, ma dipende anche dal mezzo interposto attraverso il quale fluiscono le linee di forza, perciò detta μ la permeabilità magnetica ed assunto un sistema di misure per cui sia $K=1$,

ovvero:

$$F = \frac{1}{\mu} \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

Per misurare le forze pondero-motrici il Coulomb, usò la bilancia di torsione, (data la notevole sensibilità), però è possibile "pesare" solo forze repulsive, perché l'azione contrastante dei pesi o della molla non è equilibrabile per forze attrattive che finirebbero per unirsi.



D'altra parte sappiamo che gli elementi magnetici sono sempre bipolari N-S cioè "dipoli" (due poli) e sappiamo che la intensità è m uguale nei due poli, quindi un polo P disposto affacciato al dipolo provocherà una coppia di forze (una attrattiva ed una repulsiva) nel dipolo e se il dipolo è lungo l , diremo: "momento magnetico il prodotto: $(m.l)$ ove m è l'intensità di ciascuno polo del dipolo.

Si noti che la permeabilità magnetica di una sostanza è data dal rapporto fra l'intensità

del campo magnetico in quella sostanza e l'intensità del campo magnetico nel cosiddetto vuoto cioè praticamente nell'aria.

L'esempio dell'anello di ferro dolce in cui si infittiscono le linee del campo magnetico ci dice che la permeabilità magnetica nel ferro è molto maggiore di quella dell'aria.

Se indichiamo con I la intensità di polarizzazione di un corpo immerso in un campo magnetico di intensità H avremo:

$$I = \chi H$$

ove χ è la suscettività magnetica di volume del corpo. di densità $\delta = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}$

la suscettività di massa (o momento magnetico per unità di massa) $\chi = \frac{\chi}{\delta}$.

abbiamo tre tipi di materiali

ferromagnetici $\chi > 0$ molto grande (ferro nichel ecc)

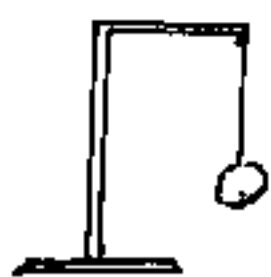
paramagnetici $\chi > 0$ molto piccolo (certi sali di ferro)

diamagnetici $\chi < 0$ molto piccolo (bismuto ed altri)

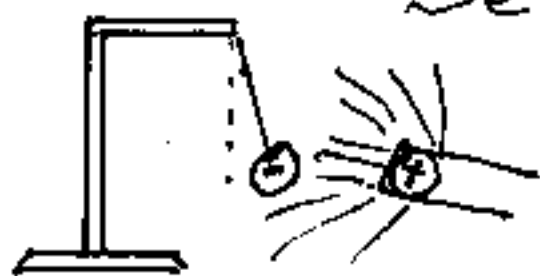
che presentano caratteristiche opposte.

I materiali diamagnetici, per induzione, si magnetizzano dello stesso segno del polo inducente. (per esempio il bismuto)

Lasciamo per un attimo il magnetismo per fare un parallelo con l'induzione elettrostatica.



Consideriamo una pallina di materia, sospesa ad un filo isolante e scarica elettricamente.

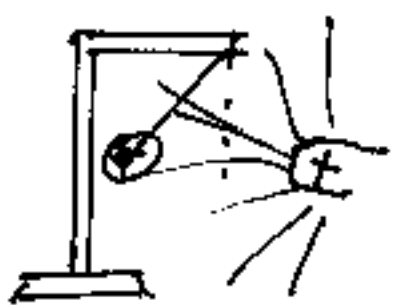


Se a tale pallina avviciniamo un corpo carico elettricamente (per esempio di cariche positive)

per induzione la pallina si carica di segno opposto (nel caso negativo) e verrà attratta verso il polo inducente. Ma se verrà a toccare il



polo inducente, la pallina si caricherà dello stesso segno del polo e sarà respinta dal corpo inducente.

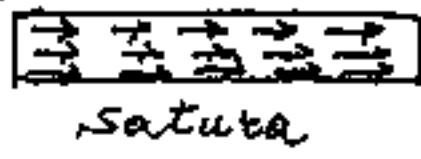
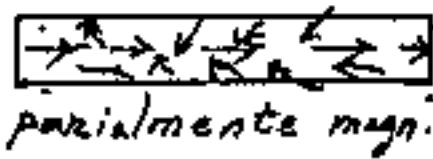
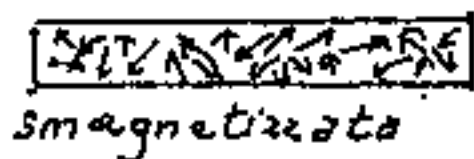


Poiché le polarità delle cariche elettriche sono separabili, notiamo che strofinando due corpi, uno si caricherà positivamente

(quello che nello strofinio ha perduto elettroni periferici.) L'altro si caricherà negativamente perché avrà una eccedenza di elettroni "fregati" (è il caso di diavolo) al primo

I fisici ancora raccontano che strofinando con un panno di lana, una lastra di vetro si ha elettricità positiva o vetrosa, mentre strofinando con un panno di lana una lastra di ambra si ha elettricità negativa o resinosa; ma spesso si dimenticano di dire che nel primo caso la lana asportando elettroni al vetro si è caricata negativamente, mentre nel secondo caso lo straccio di lana risulterà positivo perché ha ceduto all'ambra una parte dei suoi elettroni. (I miliardi di elettroni ceduti od acquisiti non provocano sensibili variazioni di massa dei corpi)

Tornando al magnetismo ove N e S non sono separabili e, pur attrandosi, finiscono per disporsi ai capi opposti della barra magnetizzata. Si ha che la barra può essere:

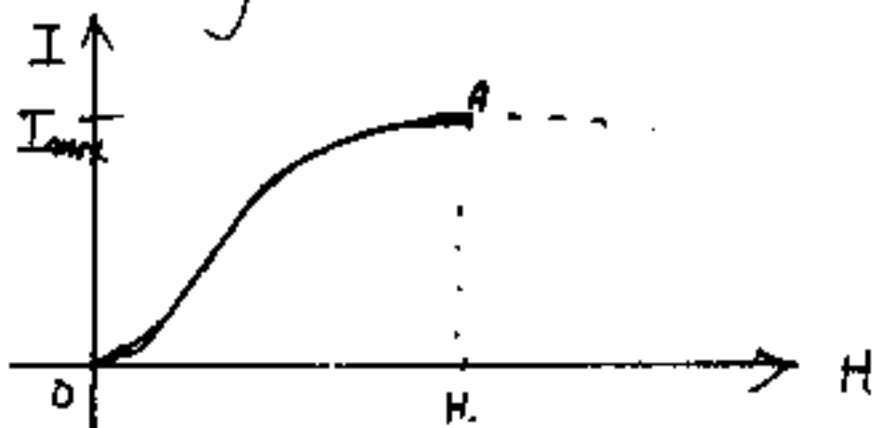


Sappiamo che un campo magnetico H può essere generato elettricamente e che l'intensità di H è proporzionale alla intensità di corrente, punto per punto, cioè possiamo variare H .

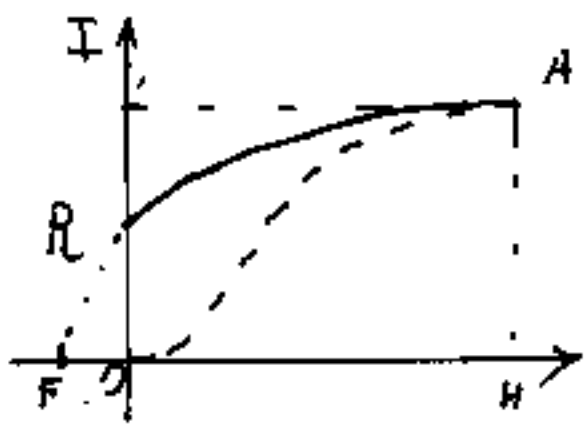
Supponiamo di porre un corpo di suscettività magnetica χ , ma completamente smagnetizzato, cioè sia nulla la sua intensità di magnetizzazione $I=0$ nel nostro campo magnetico variabile H ed inizialmente sia $H=0$.

Presi due assi cartesiani, poniamo in ascisse l'intensità del campo H ; ed in ordinate l'intensità di magnetizzazione I del corpo posto nel campo.

Al crescere di H notiamo l'accrescersi della intensità di magnetizzazione I del corpo, fino a raggiungere la saturazione oltre la quale è inutile aumentare H . I_{max} è la saturazione magnetica.



Se facciamo ora diminuire il campo H fino a ridurlo a zero la smagnetizzazione del corpo segue una linea diversa e quando H è tornato a zero, il corpo presenta la magnetizzazione residua R .

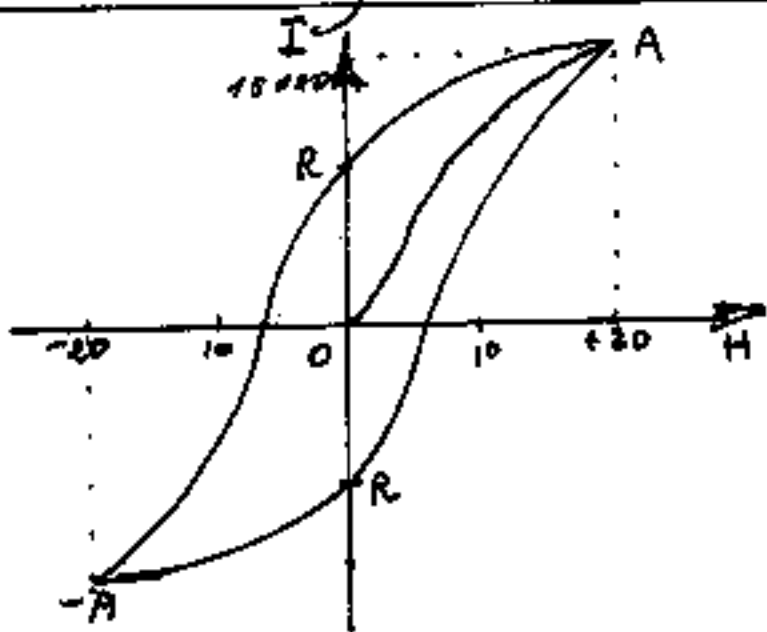


Tale magnetizzazione residua può essere vinta da una debole forza contraria che viene chiamata:

forza coercitiva \overline{OF} la cui intensità può essere presa come misura della stabilità della magnetizzazione.

Ciclo d'isteresi

Consideriamo ora un filo di acciaio in un campo magnetico variabile $+H, -H$, ove $+H$ e $-H$ sono le intensità di campo sufficienti a provocare la saturazione della magnetizzazione nei due sensi.



il ciclo si ripete indefinitamente, e' detto ciclo di isteresi ove \overline{OR} è il magnetismo residuo.

Connessioni fra forme energetiche.

Dicesi potenziale in un punto di un campo elettrico, il lavoro necessario per portare la carica positiva unitaria da quel punto fino all'infinito, o praticamente fuori dal campo.

Questa definizione connette l'energia elettrica con l'energia meccanica; consideriamo il campo ge-



nerato da Q cariche elettriche negative, ed in prossimità delle Q una carica elettrica

positiva unitaria, nel punto "A", che sarebbe vivamente attratta dalle Q , se non fosse impedito avvicinarsi, anzi venga allontanata fino a "B". Via via che la carica viene allontanata, l'attrazione, (forza attrattiva) diminuisce, ma lo spostamento di una "forza" è un lavoro, della stessa natura del sollevamento di un peso.

Il lavoro compiuto sarà la differenza di potenziali: $(V_A - V_B)$. Se il potenziale è misurato in Volt, la carica positiva unitaria in Coulomb ed il lavoro in Joule, avremo:

Volt = Joule/coulomb (che abbiamo teorato per altra via).

Ma allora, punto per punto, avremo il nostro potenziale, e vi saranno superfici equipotenziali, ove la carica elettrica può spostarsi senza dover compiere o ricevere lavoro.

La nostra d.d.p. è fra due punti di un campo spaziale geometrico elettrizzato dalle cariche Q . Ma la d.d.p., anziché fra punti spaziali geometrici, si verifica anche fra materiali, si hanno così ipotenziali elettrochimici dei vari elementi. Nasce così la serie elettrochimica degli elementi.

Poiché testi diversi trattano con diversa impostazione questo argomento, giungendo (circa) agli stessi valori assoluti, ma con segno opposto; noi preferiamo riportare quanto esposto dal Bruni: "Giuseppe Bruni" - "Chimica Generale e Inorganica", - con appendice di elementi di chimica organica a cura di M.A. Rollier" - Libreria Editrice Politecnica Cesare Tamburini - Milano 1945. (che spiega il perché dei segni)

Utilizzando i seguenti simboli:

E = differenza di potenziale fra un metallo e la soluzione di un suo sale. (in Volt)

R = costante dei gas (in 8,313 Volt-coulomb)

T = temperatura assoluta

n = valenza dello ione che si considera

F = valore unitario della legge di Faraday (96.500 coulomb)

P = pressione elettrolitica di soluzione

p = pressione osmotica.

Nernst propose la formula:

$$E = \frac{RT}{nF} \ln\left(\frac{P}{p}\right)$$

ove trasformando i logaritmi naturali in decimali: $\ln = \log / 0,43429448$

e considerando la temperatura $^{\circ}\text{C} = 25$ per cui

$$T = (273 + 25) = 298^{\circ}\text{K.},$$

avremo:

$$E = \frac{(8,313) \cdot 298}{(0,43429448) n (96.500)} \log\left(\frac{P}{p}\right)$$

$$E = \frac{0,0591}{n} \log\left(\frac{P}{p}\right)$$

Però: $\left(\frac{P}{p}\right)$ come $\left(\frac{p}{P}\right)$ il logaritmo cambia solo il segno.

Il Bruni avverte che $\frac{P}{p}$ non può essere misurato direttamente, ma viene ricavato dalla formula, determinando sperimentalmente E .

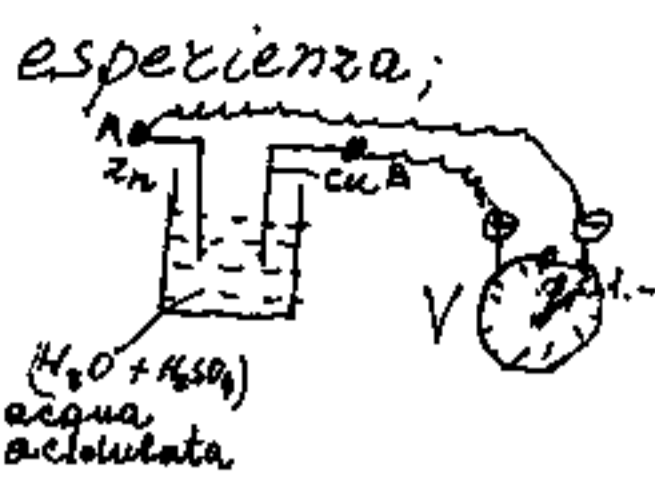
Il potenziale è riferito all'elettrodo ad idrogeno, per cui H_2 il cui ione H^+ avrà il potenziale uguale a zero. Alla temperatura di $25^\circ C$ cioè: $T = 298 K$, avremo la seguente serie elettrochimica degli ioni:

Elemento	Ione	$\overset{a\ 25^\circ C}{\text{Potenziale}}$	Elemento	Ione	$\overset{a\ 25^\circ C}{\text{Potenziale}}$	Elemento	Ione	$\overset{a\ 25^\circ C}{\text{Potenziale}}$
Rb	Rb^+	+ 2,9	Fe	Fe^{++}	+ 0,51	Sb	Sb^{3+}	- 0,10
K	K^+	+ 2,9	Cd	Cd^{++}	+ 0,40	Bi	Bi^{3+}	- 0,23
Ba	Ba^{++}	+ 2,9	Tl	Tl^+	+ 0,33	As	As^{3+}	- 0,30
Na	Na^+	+ 2,7	Co	Co^{++}	+ 0,29	Cu	Cu^{++}	- 0,35
Mg	Mg^{++}	+ 2,4	Ni	Ni^{++}	+ 0,25	Hg	Hg^{++}	- 0,86
Al	Al^{3+}	+ 1,7	Sm	Sm^{++}	+ 0,16	Ag	Ag^+	- 0,81
Mn	Mn^{++}	+ 1,1	Pb	Pb^{++}	+ 0,13	Pt	Pt^{4+}	- 0,86
Zn	Zn^{++}	+ 0,76	H_2	H^+	0,00	Au	Au^+	- 1,5
Cv	Cv^{++}	+ 0,56						

Elementi che vanno in soluzione come anioni

Elemento	Ione	$\overset{a\ 25^\circ C}{\text{Potenziale}}$	Elemento	Ione	$\overset{a\ 25^\circ C}{\text{Potenziale}}$	Elemento	Ione	$\overset{a\ 25^\circ C}{\text{Potenziale}}$
S	S^{--}	+ 0,51	I_2	I^-	- 0,58	Cl_2	Cl^-	- 1,36
O_2	OH^-	- 0,4	Br_2	Br^-	- 1,08	F_2	F^-	- 2,8

Consideriamo gli elementi della pila classica, cioè Rame e Zinco e facciamo una



Immergiamo in una vaschetta contenente acqua acidulata una lamina di rame ed una di zinco, dalla parte

emergente A e B colleghiamo un voltmetro V, si noter  che il voltmetro segna circa un volt.

Si nota che il polo positivo   il rame ed il polo negativo lo zinco ($Zn^{++} = +0,76$; $Cu^{++} = -0,35$
 $0,76 - (-0,35) = 1,11$ Volt.)

Cerchiamo di capire i segni.

Sappiamo che gli atomi, nei metalli, possono considerarsi composti da nuclei con cariche positive stabili, e da elettroni con cariche negative, mobili, nel senso che possono scambiarsi di posto con gli atomi adiacenti.

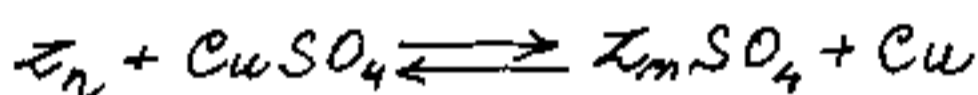
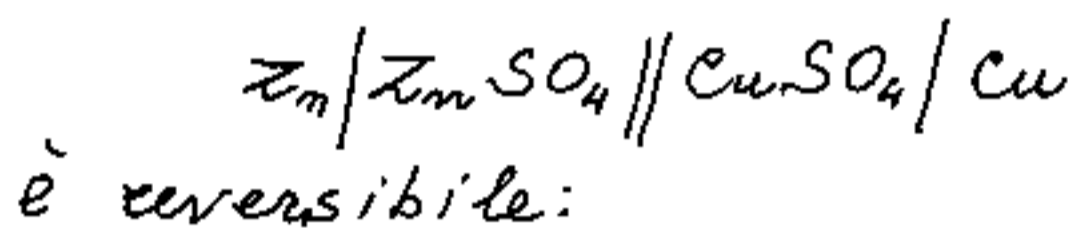
Quindi un conduttore \overline{AB} che riceve elettro-

ni (cariche negative) in A le riceve in B, in effetti quindi la corrente elettronica va da A a B;   stato per  convenuto che la corrente elettrica vada dal polo positivo al negativo.

I segni \oplus e \ominus delle cariche elettriche derivano dalla triboelettricit , cio  l'elettricit 

prodotta per strofinio con un panno di lana su un vetro fu chiamata positiva o vetrosa su una resina fu chiamata negativa o resinosa (abbiamo già detto come ciò avviene).

La pila bimetallica (Zn + Cu) è detta pila Daniell si indica con la notazione:



La sua forza elettromotrice : (f.e.m.)

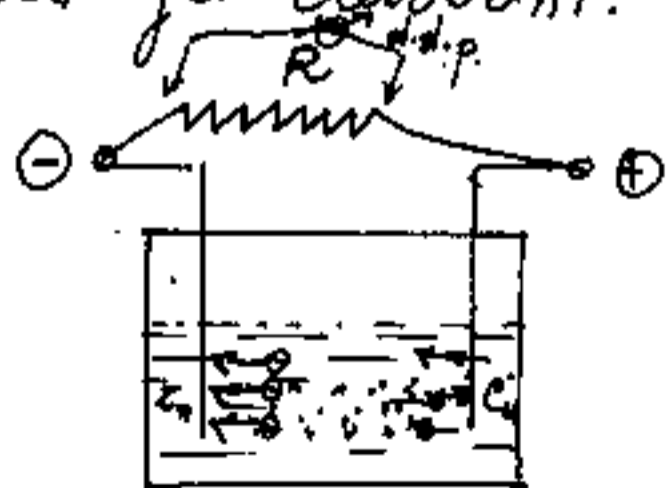
$$E = E_1 - E_2 = \frac{RT}{nF} \left(\ln\left(\frac{P_1}{P_1'}\right) - \ln\left(\frac{P_2}{P_2'}\right) \right)$$

(essendo n uguale.)

$$= \frac{RT}{nF} \left[\ln\left(\frac{P_1 P_2'}{P_2 P_1'}\right) \right]$$

$$E = \frac{RT}{nF} \ln\left(\frac{P_1 P_2'}{P_2 P_1'}\right)$$

Abbiamo introdotto un nuovo concetto: F.e.m. che è la spinta (in questo caso chimica) a far muovere gli elettroni.



Gli elettroni che nell'elettrolita vanno da $\text{Cu}^{++} (-0,35)$ a $\text{Zn}^{++} (+0,76)$ incontrano una certa resistenza interna

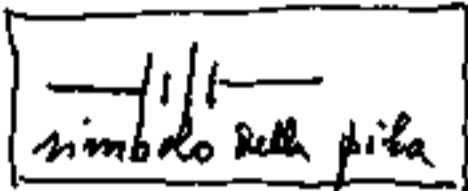
che indichiamo con ρ , se esternamente chiudiamo il circuito con una Resistenza R , il flusso di elettroni

ritorna al Cu con la stessa intensità I di corrente elettrica. (la resistenza totale sarà: $(\rho + R)$)

Poiché per la legge di Ohm ($V = IR$) estesa all'intero circuito diventa:

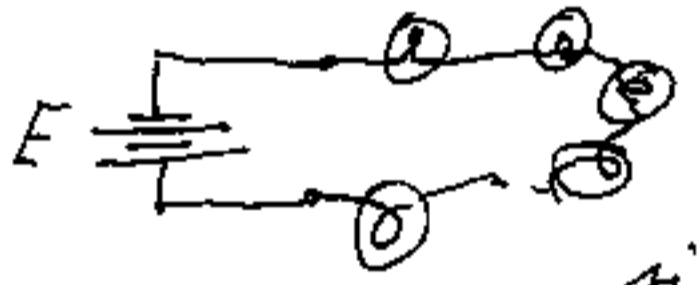
$$E = I(\rho + R) = I\rho + IR$$

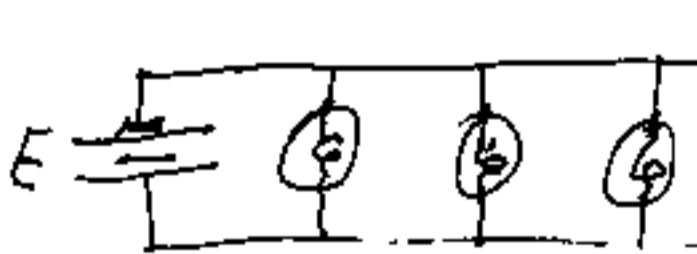
E
 (forza elettromotrice) = (ρI) + (IR)
 Caduta di Potenziale interna (d.d.p) differenza di potenziale ai capi della resistenza di utilizzazione



È ovvio, se con una comune pila accendiamo una lampadina la corrente: $I = \frac{E}{(\rho + R)}$

se cerchiamo di accendere più lampadine dipende da come le inseriamo


 in serie la resistenza è $n \cdot r = R$
 per cui diminuisce I e le lampadine si accendono sempre meno, mentre la caduta di potenziale interna diminuisce


 in parallelo: $R = \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \dots + \frac{1}{r}} = R = \frac{r}{n}$
 la resistenza R diminuisce al=

l'aumentare del n° di lampadine n , quindi la corrente I aumenta fino a far sì che la caduta di potenziale interno: ρI sia tale da impegnare pressoché interamente E (f.e.m.) mentre tende a zero d.d.p. e le lampadine non si accendono più.

Inversamente con un generatore esterno, applicato ad una soluzione possiamo avere la separazione dei componenti la soluzione. Si ha così l'elettrolisi che scinde l'acqua H_2O in H_2 ed O .

La galvanoplastica per depositare metalli su stampi conduttori fino a foggare oggetti, statue ecc.

La galvanostegia per ricoprire un metallo. (per es. nichelatura, cromatura, ecc)

Oppure per ricaricare batterie.

Sono questi scambi di energia elettro-chimica.

Un conduttore percorso da corrente genera un campo magnetico $H = \frac{I}{2\pi r}$ (Legge di Biot e Savart) ove r è il raggio o distanza dall'asse I .

Poiché lo spazio in cui si svolge H può avere permeabilità magnetiche diverse ($\mu =$ permeabilità magnetica) introduciamo il vettore: induzione magnetica: $B = \mu H$; $B = \frac{\mu I}{2\pi r}$

Il flusso induzione magnetica = $\phi = \int B \times dS$ ove S = area della superficie attraversata dal flusso.

Introduciamo ora il vettore intensità di corrente $G = \frac{dI}{dS_c}$ ove S_c = area normale

alla direzione del moto delle cariche elettriche, cioè.

$$G \times dS = dI = G \cdot dS \cos \alpha = G dS_e$$

$$(S_e) = (S \cos \alpha).$$

$$I = \int G \times dS$$

(alcuni autori)
simbolizzano $J = G$
 $I = \int J_n dS$

Nei dielettrici, (isolanti) le cariche elettriche negative, (elettroni), rimangono legate al nucleo di appartenenza; dispongono però di un possibile spostamento.

L'esperienza delle bottiglie di Leida (condensatori).
La definizione di condensatore elettrico è:
"Apparecchio costituito da due lamine metalliche separate da un dielettrico" nelle bottiglie di Leida il dielettrico è il vetro delle bottiglie, ma può essere aria, carta, mica ecc.
Se uniamo le due lamine ai poli di un generatore (Pila), noteremo un breve passaggio di corrente (fase di carica), tolta la pila il condensatore rimane carico ed ha ai capi una tensione dipendente dallo stato di carica (Q coulomb) e dalla capacità del condensatore (C farad), tensione (V volt)

$$Q = CV$$

Smontando il condensatore carico, cioè separando

le lamine metalliche dal dielettrico e cortocircuitando fra loro le lamine metalliche in modo da annullare ogni differenza di potenziale (V), rimontiamo il condensatore reinsertendo il dielettrico, le lamine metalliche presentano una d.d.p. "V", cio' vuol dire che il dielettrico era elettrizzato e cortocircuitando ora le lamine metalliche il condensatore restituisce la corrente di carica residua.

E' come se gli elettroni del dielettrico, spostati dal generatore, tornano al loro posto.

Questo moto di elettroni (nei due sensi) si dice corrente di spostamento.

Indicando con "D" il vettore spostamento o induzione dielettrica, dalla $dQ = C dV$

ove: $|dV| = K ds$ avremo: $\frac{dQ}{dS} = \frac{CK ds}{dS}$

posto: $D = \frac{dQ}{dS}$: ed anche: $C \frac{ds}{dS} = E$

$$\boxed{\vec{D} = \vec{K} E}$$

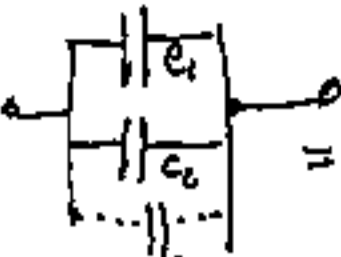
ove $\epsilon =$ costante dielettrica dell'isolante interposto:

$$\boxed{C = \epsilon \frac{dS}{d}}$$

$$\boxed{C = \epsilon \frac{S}{s}}$$

ove $S =$ area superfici affacciate; $s =$ spessore dielettrico
($C =$ capacitá, espressa in Farad = Coulomb/volt)

In serie $\frac{C_1}{C_1} \frac{C_2}{C_2} \dots \frac{C_n}{C_n} = C = \frac{1}{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}\right)}$

In parallelo  $= C = (C_1 + C_2 + C_n)$

La costante dielettrica ϵ (Farad/metro), per i vari materiali, ammette il limite:

$$\epsilon_0 = 8,859 \cdot 10^{-12} \text{ (F/m)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{nell'ipotetico} \\ \text{vuoto} \end{array} \right)$$

(dielettrico perfetto). Tale valore è molto vicino a quello dell'aria, i valori $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ sono relativi a tale valore (posto $\epsilon_0 = 1$)

valori di ϵ_r

Materiale	ϵ_r	Materiale	ϵ_r	Materiale	ϵ_r
Aria	1,0006	Ebanite	2,7 ÷ 2,9	Olio petrolifera	2,2
Bachelite	5,7 ÷ 7	Gommolacca	3 ÷ 3,7	Paraffina	2,3
Carta per cavi	3,2 ÷ 3,8	Guttaperca	3 ÷ 3,6	Porcellana	2,5
Cartone pressato	3	Mica	5,7 ÷ 6,5	Quarzo	4,5
Carta	2-2,5	Olio di Paraffina	2,5	Vetro	5 ÷ 7,6

Il Farad è una unità molto grande, per cui in radiotecnica si usa il picofarad = 10^{-12} farad e per il calcolo delle capacità:

$$C \text{ (in picofarad)} = 0,08859 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S \text{ (in cm}^2\text{)}}{d \text{ (in cm)}}$$

Un'altra caratteristica dei dielettrici (isolanti) è la rigidità dielettrica che è il valore della tensione capace di perforare lo spessore unitario di dielettrico.

Si hanno così i fulmini, l'arco voltaico, e le altre scariche elettriche che bruciano l'isolante.

Per alcuni materiali, in condizioni ordinarie di pressione, temperatura, umidità, ecc. approssimativamente il valore della rigidità dielettrica è:

aria	30 KV/cm
olio minerale	120 KV/cm
Porcellana	200 KV/cm
mica	500 KV/cm
Carta	60 KV/cm.

Anche i conduttori hanno caratteristiche dipendenti dai materiali. Infatti se indichiamo con "I" (Amper) l'intensità di corrente elettrica, (ove $\text{Amper} = \text{Coulomb/sec}$), per la legge di Ohm abbiamo: $I = V/R$ cioè I è direttamente proporzionale a "V" (tensione) ed inversamente proporzionale a "R" (resistenza).

In un conduttore lungo "l" con sezione di area "A" avremo:

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad \text{cioè la}$$

resistenza è direttamente proporzionale alla lunghezza, inversamente proporzionale

all'area della sezione e dipende da un coefficiente " ρ " detto resistività del materiale.

Al passaggio della corrente, in generale, il conduttore si riscalda ed i valori di ρ variano anche notevolmente con la temperatura.

Per le linee che trasportano energia elettrica il riscaldamento dei conduttori e la dispersione in calore è una perdita da limitare il più possibile, mentre le resistenze utilizzate per riscaldamento, (formelli, stufe, scaldabagni, ecc) il problema è l'opposto.

Sappiamo che la potenza ($\text{Watt} = \frac{\text{Joule}}{\text{sec}} \Rightarrow W = I V$)
che ($V = I R$) per cui $\boxed{W = I^2 R}$; $\text{Watt} = (2,38 \cdot 10^{-4}) \frac{\text{Cal}}{\text{sec}}$
 $(860 \text{ Cal}) = (1 \text{ kWh})$ Quindi se vogliamo bollire un litro d'acqua in un quarto d'ora, occorrono 400 Cal/ora
cioè $\approx 465 \text{ W}$, che $V = 220$; $W = VI$; $I = \frac{465}{220} = 2,114 \text{ ampere}$
cioè: $\frac{465}{2,114^2} = 104 \text{ ohm}$ di resistenza. Ma questa resistenza non deve raggiungere la temperatura di fusione del metallo cioè la sezione deve essere abbastanza ampia da non fondere ma abbastanza piccola da superare la temperatura di 100° di ebollizione dell'acqua.

L'esempio connette l'energia termica con l'energia elettrica.

Sia ρ_0 la resistività a 0°C di temperatura ed esprimiamola in ($\mu\Omega \cdot \text{cm}$)

alla temperatura t avremo: $\rho_t = (1 + \alpha_t t) \rho_0$ ove α_0 è il coeff. di variazione a partire da zero.

per il came si ha: $\rho_0 = \frac{1,6}{100}$ in ($\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$) a 0°C

a $20^\circ\text{C} \rightarrow (\mu\Omega) \rho_{20} = \frac{1,43}{100}$ ($\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$); a $75^\circ\text{C} \rho_{75} = \frac{2,11}{100}$ ($\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$)

(esprimendo la lunghezza in metri e la sezione in millimetri quadri)

Materiale	ρ_0	α_0 ($\frac{1}{1000}$) ^{di}	Peso specifico ($\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$) ($\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$)	Coef. dilat. termica ($\frac{1}{100}$) ^(medio) ($\frac{\text{mm}}{\text{dam}}$)	temperatura di fusione	NOTE
Rame elettrolitico	1,6	4,25	8,9	0,17	1083	alcuni valori dipendono dalla composizione dei materiali o da condizioni particolari
Alluminio	2,65	4,25	2,7	0,24	659	
Ferro	10,00	50,-	7,8	0,12	1530	
Bronzo fosforoso	1,7 ÷ 2,00	4,-	8,9	0,18	-	
Ottone	8,5	1,-	8,6	0,18	900 ÷ 1000	
Nichelina	40	0,1	-	-	1230	
Nichelcromo	106	0,1	8,4	0,14	1410	
Manganina	35 ÷ 50	$\frac{1}{100}$ (2 ÷ 5)	8,3	0,14	-	
Costantina	49	$\frac{1}{1000}$ (2)	8,4	0,18	1240	
Tungsteno	5,05	4,2	19,5	0,034	3370	
Mercurio	94,075	0,089	13,6	-	-38,03	
Aldrey	2,96	-	2,7	0,23	-	
Cobaltina	80	7,5	-	-	-	
Piombo	19,5	4,2	11,3	0,29	327	
Argento	1,5	4,-	10,5	0,18	960	

Per i calcoli si ricerca (se possibile) un regime stazionario, cioè il numero di calorie

prodotto dalla energia elettrica nel conduttore ed il numero di calorie disperso nell'ambiente. Abbiamo già vista la legge di Joule: $W = (I^2 R) (\text{coeff})$ il coeff. per ridurre $W = \text{Joule/m}^2 = \text{cal/ora}$.

Per la dispersione delle calorie nell'ambiente si procede come per gli impianti di riscaldamento, cioè considerando i tre tipi di trasmissione del calore:

conduzione

convezione

irradiazione

La conduzione avviene per contatto fra le parti dello stesso materiale o fra materiali diversi a diversa temperatura

La convezione è un caso particolare della conduzione ed avviene nello scambio fra un solido ed un fluido (generalmente gas) ove le particelle che per contatto avrebbero raggiunto o raggiungerebbero la temperatura del solido trasmittente si spostano (o si fanno spostare con ventilazione → convezione forzata) per fatto naturale → convezione naturale) lasciando il posto a particelle più fredde

L'irradiazione invece oltre che dal salto termico, dipende anche dalla forma della superficie; ricordando che l'energia termica sono onde-elettromagnetiche con lunghezza d'onda di oltre 8000 \AA (ottonila Aruntrony) raggi infrarossi ed oltre. La trasmissione ne segue le leggi.

Cioè il quantitativo di calorie trasmesso è proporzionale al salto termico. $(T_1 - T_2)$ è proporzionale alla superficie comune (area e forma) e dipende dai coefficienti di trasmissione, determinati sperimentalmente, fra i diversi materiali.

Ogni materiale ha una sua capacità termica, cioè ad un certa temperatura ha accumulato un certo numero di calorie, cioè immagazzina energia termica interna. Ma questa energia termica, che tende ad aumentare la temperatura, ha effetti collaterali quali la dilatazione termica, che, se impedita, si trasforma in energia interna potenziale elastica. Quindi se consideriamo un coefficiente che per kg di materiale

esprime il numero di calorie necessario ad aumentare di un grado la temperatura, ovvero due diversi coefficienti detti calore specifico a pressione costante C_p , e calore specifico a volume costante C_v .

Quindi richiandoci a quanto esposto al capitolo Energia - Lavoro - forze, l'energia interna

$$U = C (T_2 - T_1)$$

$$dU = c (dT)$$

ordinariamente si considera il calore specifico c per i vari materiali

Materiale	(Cal/Kg°C)	Materiale	(Cal/Kg°C)
Acciaio	0,12	Pietre	0,2
Alluminio	0,21	Piombo	0,031
Amianto	0,195	Platino	0,032
Argento	0,056	Porcellana	0,256
Calcestruzzo	0,21	Rame	0,093
Carta	0,32	Stagno	0,057
Ebanite	0,34	Sughero	0,49
Ferro	0,08	terra	0,3
Gesso	0,2	Vetro	0,2
legno	0,57	Zinco	0,094
Manghina	0,093	Acqua	1
Mattori	0,2	Petrolio	0,5

Notiamo che a volume costante non si ha lavoro esterno e tutto il calore somministrato $Q = C_v (T_2 - T_1)$ entra nel gas per cui

$$dU = C_v (dT)$$

a pressione costante il gas compie lavoro esterno per cui il

calore somministrato $dQ = C_v dT + A p dV$, se consideriamo il calore totale(I): $dQ = dI - A v dp$

$$dQ = C_p dT - A v dp$$

$$C_p dT = C_v dT + A R dT$$

da cui

$$C_p = C_v + AR$$

Poiché: C_p , C_v , R , sono determinabili sperimentalmente è possibile dedurre A od $\frac{1}{A}$ cioè l'equivalente meccanico del calore, ed è questa la strada seguita da Mayer per determinare:

$$\frac{1}{A} = 4186 \frac{\text{Joule}}{\text{Caloria}} = 427 \frac{\text{Kgm.}}{\text{Caloria}}$$

$$\text{ed anche: } 1 \text{ kWh} = 860 \text{ calorie} = 3600 \text{ Joule}$$

Con ciò si correlano le unità energetiche elettriche, meccaniche, termiche.

La connessione diretta fra energia chimica = (energia dei materiali) e l'energia termica è il potere calorifero dei combustibili, che è il numero di calorie (grandi calorie) per Kg di materiale

Materiale	cal/kg	Materiale	cal/kg	Materiale	Cal/kg
Carbonio puro	8140	Benzina	11000	Metano	8900
Carbone di legna	7000-8000	Petrolio	10800	Gas illuminante	(3500-5000)
Torba	3500	Olio Diesel	9800	Gas d'acqua	2500-2700
Lignite	4000-5000	Alcool metilico	5400	Gas misto	1200-1300
Litantrace	7500-8600	Alcool etilico	7000	Gas d'aria	800-1000
Antracite	8000-8500	Benzolo	10000	Gas d'alto forno	750-900
Coke	7100				

Il potere calorifero di un combustibile si distingue in superiore o inferiore a seconda che per

L'idrogeno si assuma il calore specifico di 31.460 calorie o 29006 calorie, cioè se si riferisce anche al calore dell'acqua di condensa o non si considera (come normalmente avviene) il calore di vaporizzazione dell'acqua, non recuperato in condensa.

Poiché la combustione è una ossidazione ogni reazione chimica può essere esoterma o endoterma a seconda che produce o assorbe calore.

L'esplosione è una combustione (ossidazione) veloce, ciò permette una connessione fra energia chimica ed energia meccanica.

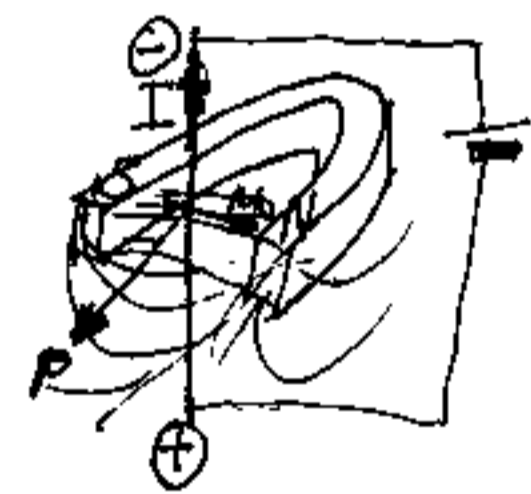
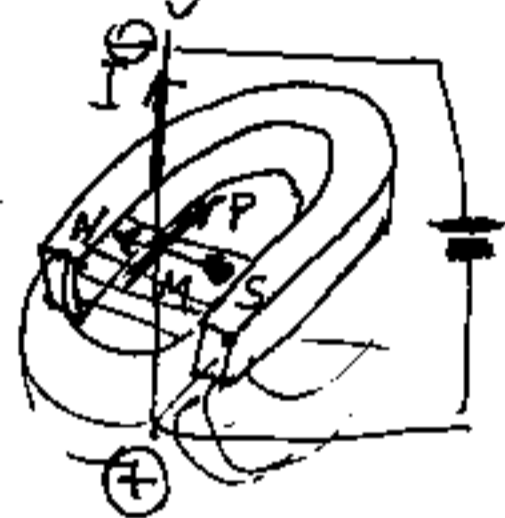
Consideriamo ora le tre dita della mano sinistra e della mano destra, nell'ordine: Pollice - Indice - Medio; disposti come tre assi cartesiani ortogonali; per la mano sinistra si ha una terna oraria; per la mano destra si ha una terna antioraria.

La direzione del Pollice (P come peso - forza) indica la direzione della forza che genera lo spostamento. La direzione dell'Indice (I come intensità di corrente) indica la direzione

della corrente elettrica dal polo \oplus (positivo) al polo \ominus negativo.

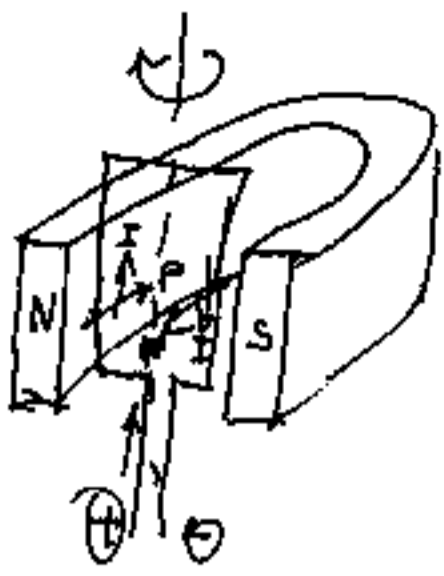
Il Medio (di cui come magnetico) indica la direzione delle linee di forza del campo da Sud verso Nord.

Ciò premesso, sia dato un campo magnetico per esempio fra i poli di un magnete a ferro di cavallo, e, perpendicolarmente alle linee di forza vi sia un conduttore percorso da corrente nei versi in figura notiamo che in entrambi i casi sono le direzioni delle dita della mano sinistra.



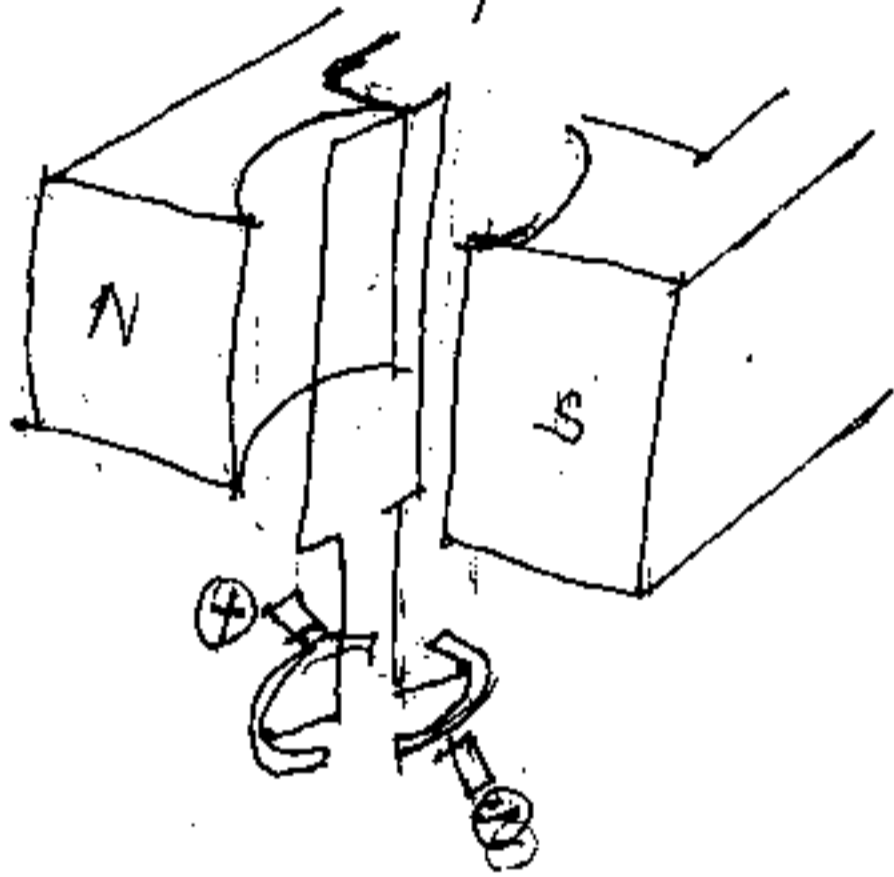
Se togliamo le pile e facciamo l'azione meccanica per spostare il conduttore, la corrente si genera nel conduttore e di verso opposto a quella in figura (valgono le direzioni delle dita della mano destra). (Alcuni testi danno significati diversi)

Questo semplice esperimento è la base degli apparecchi di misura, base dei motori elettrici, base dei generatori di elettricità.



Se poniamo una spira nel campo magnetico essa tenderà a ruotare fino ad essere attraversata dalle linee del campo.

quindi per provocare l'altro mezzo giro dovremo invertire la polarità del generatore.

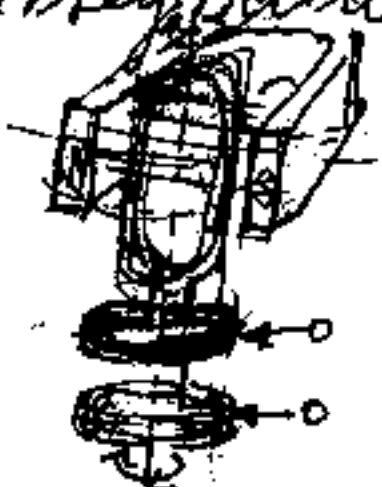


Miglioriamo il campo dando al magnete delle espansioni polari tali da generare uno spazio cilindrico in cui ruota la spira e poniamo alla spira

due contatti striscianti a semicerchio in modo che ad ogni mezzo giro cambi polarità. Ma per migliorare la permeabilità magnetica porremo coassiale al campo un cilindretto ferro magnetico su cui avvolgiamo diverse spire che vanno a due contatti striscianti (spazzole) e sono attivi quando le spire tagliano perpendicolarmente le linee del campo. Faremo diversi avvolgimenti via via spostati si essi esterni andranno al collettore dei contatti

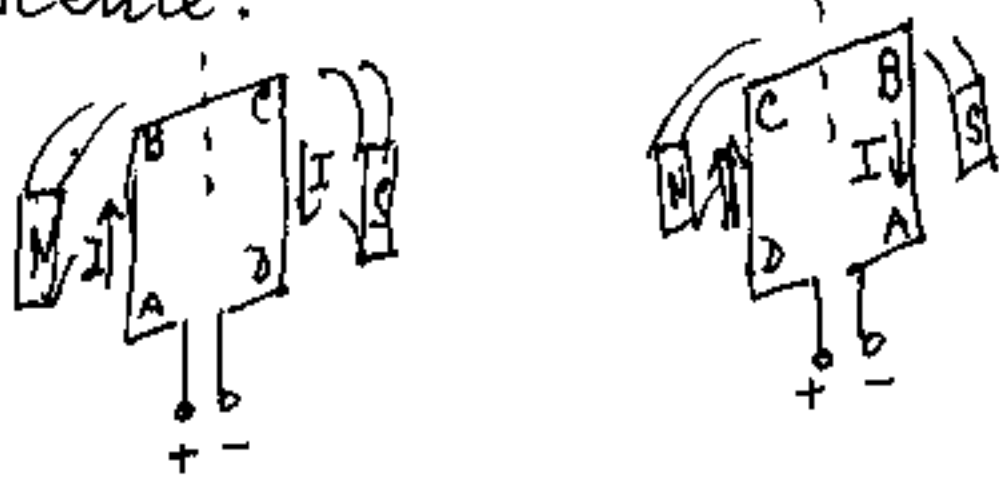
Abbiamo così costruito una macchina per corrente continua (Dinamo) che può funzionare sia come motore, (cioè trasformare energia elettrica in meccanica) sia come generatore (cioè trasformare energia meccanica in elettrica). (corrente continua)

Consideriamo ora che il rotore della nostra macchina non abbia tanti avvolgimenti sfalzati di un piccolo angolo ciascuno dei quali ha due lamette del collettore, ma sia un unico avvolgimento parallelo come la spira disegnata e gli estremi vadano a due anelli interi ciascuno col suo contatto strisciante.



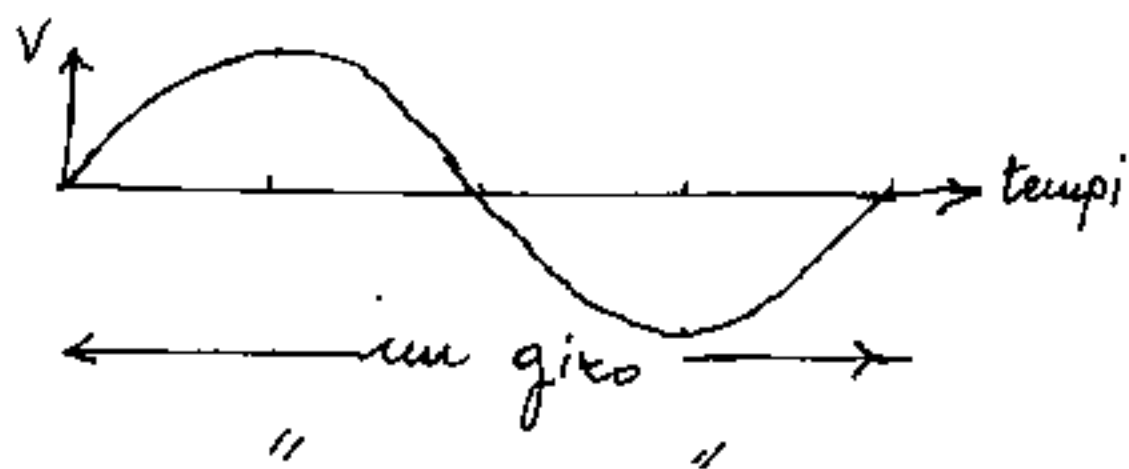
Facciamo meccanicamente ruotare la spira, partendo da posizione neutra. Via via che ruota i conduttori arriveranno a tagliare perpendicolarmente le linee del campo dando il massimo di tensione, poi torna a zero dopo mezzo giro ed inizia a generare tensione di segno opposto, col massimo quando

il gruppo di conduttori che tagliavamo perpendi-
colarmemente presso un polo con verso entrante
le tagliamo ora presso l'altro polo con verso
uscite.



cioè nel gruppo
di conduttori AB
si vede che la cor-
rente va prima da
A verso B poi da B verso A

Il diagramma della corrente o della tensio-
ne ha un andamento sinusoidale.



Dizemo frequenza il numero dei giri (o cicli)
nell'unità di tempo (1 ciclo/secondo) = (1 Herz)
Il tempo impiegato a compiere un ciclo si
chiama periodo (la corrente domestica è data
a 50 periodi al secondo (50 Herz = 50 cicli/sec) il
che, vuol dire, che in un secondo l'intensità
di corrente (nei due versi) raggiunge 100 massimi
Quindi una lampadina in un secondo rag-
giunge 100 massimi di intensità luminosa
intervallati da punti zero intensità.

Noi vediamo le cose quando sono sufficientemente illuminate, non le vediamo al buio perciò utilizzando un effetto detto stroboscopico sapendo la frequenza della sorgente illuminante è possibile misurare, per esempio la velocità di rotazione di un disco.

La nostra luce elettrica dà 100 massimi al secondo $(+50) + (-50)$, perciò considerando i dischi fonografici $(78 \text{ giri}/1')$; $(45 \text{ giri}/1')$; $(35 \text{ giri}/1')$ volendo verificare la velocità avremo che $n \text{ (giri}/1') = \frac{n}{60} \text{ (giri}/\text{sec})$ perciò l'angolo percorso in un secondo sarà $\alpha^\circ = \frac{n \cdot 360}{60} = (6n)^\circ$

ma noi abbiamo un massimo di luce ogni $\frac{1}{100}$ di sec, cioè l'angolo percorso dal disco in $\frac{1}{100}$ di sec sarà $\frac{\alpha^\circ}{100} = \left(\frac{6n}{100}\right)^\circ = \left(\frac{3n}{50}\right)^\circ$,

se dividiamo $\frac{360^\circ}{\alpha^\circ/100}$ avremo $\frac{18000}{3n} = \frac{6000}{n}$

per $n = 78 \text{ giri}/1'$ $\frac{6000}{78} = 76,923 \approx 77$ parti di giro

$n = 45 \text{ giri}/1'$ $\frac{6000}{45} = 133,33 \approx 133$ parti

$n = 35 \text{ giri}/1'$ $\frac{6000}{35} = 171,41$
 per 171 parti $\frac{6000}{171} = 35,08 \text{ giri}/1'$
 per 172 parti $\frac{6000}{172} = 34,88 \text{ giri}/1'$

Il cerchio va diviso in un numero intero di parti, in modo che nel tempo calcolato una lineetta di divisione vada a sovrapporsi esattamente sulla posizione della linea adiacente, che a sua volta è andata nella posizione di quella accanto, e poiché le divisioni sono tutte uguali se noi le riceviamo solo ai massimi di luce le vediamo sempre nella stessa posizione ed il disco ci appare fermo invece vediamo via via le linee adiacenti (che non possiamo distinguere). Se le divisioni sono su due circonferenze concentriche una inferiore ed una superiore al n° di giri noi vediamo le linee delle due circonferenze che ruotano in verso opposto. Anzi che le lineette, conviene



dividere la circonferenza in zone bianche e nere in

modo che si sovrappongono le zone bianche e le zone nere, poiché la luce non si verifica solo ai max, ma è graduale, con variazione sinusoidale. (In figura solo alcune delle 77 suddivisioni di una circonferenza di 10 cm. di diametro esterno, e si vede ferma a circa 78 giri/s)

Sappiamo che le grandezze sinusoidali

$$a = A_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right)$$

ove la velocità angolare $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ($\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$)

$$\omega = 2\pi f \text{ oppure: } f = \frac{1}{T}$$

$$a = A_m \sin(\omega t + \alpha)$$

ove α (spesso indicata con φ) è la fase.

La fase può considerarsi la variazione nell'origine dei tempi: $\omega\tau = \alpha$; $\tau = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{\alpha}{2\pi f}$

A_m è l'ampiezza massima della pulsazione

Se si hanno due grandezze sinusoidali di uguale periodo T ma di diversa pulsazione

$$b = B_m \sin(\omega t + \beta)$$

$(\alpha - \beta)$ è la variazione di fase: $(\alpha - \beta) = \varphi$

e se $\varphi \neq 0$ si dice che le due grandezze sono sfasate

Ciò premesso, (valido in generale), torniamo all'elettricità e confrontiamo la corrente alternata con la continua:

L'Amper = coulomb/sec = $\frac{\text{Volt}}{\Omega} = \text{Volt}/\text{ohm}$, è costante in continua, varia da zero ad un [massimo] in alternata.

$$\text{L'Amper medio} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} \text{Amper max}(\omega t) dt.$$

Abbiamo mediato in un semiperiodo,

L'ampere medio è quindi quella unità di corrente, (Coulomb/sec) che, nello spazio di tempo di un semiperiodo, fa passare, attraverso una sezione in corrente continua, lo stesso numero di Coulomb, che, per la stessa sezione, nel tempo dello stesso semiperiodo, passerebbero in alternata.

$$\frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} A_{max} \sin(\omega t) dt = \frac{A_{max}}{T/2} \int_0^{T/2} \sin\left(\frac{\pi}{T/2} t\right) dt = \frac{A_{max}}{\pi} \left[-\cos \omega t \right]_0^{T/2}$$

$$A_{media} = \frac{A_{max}}{\pi} \left[-\cos\left(\frac{\pi}{T/2} t\right) \right]_0^{T/2} = \frac{A_{max}}{\pi} (\cos \pi + \cos 0)$$

$$A_{media} = \frac{2}{\pi} A_{max}$$

$$A_{media} = 0,63661977 A_{max}$$

Poiché vale: $V = IR$ (ohm)

anche il

$$V_{media} = 0,63661977 V_{max}$$

Dicesi valore efficace di una grandezza sinusoidale, il valore medio quadratico di un periodo: (in tal modo il segno sparisce col quadrato)

$$A_{efficace} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T A_{max}^2 \sin^2(\omega t) dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} \left[\frac{-\frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t) \cos(2\omega t) + t}{2} \right]_0^T} = \sqrt{\frac{1}{2} A_{max}^2} = \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$A_{efficace} = 0,70710678 A_{max}$$

Il rapporto fra valore efficace e valore medio
(in un semiperiodo)

$$\frac{A_{\text{efficace}}}{A_{\text{medio}}} = \frac{(\frac{1}{2}) \frac{A_{\text{max}}}{\sqrt{2}}}{\frac{A_{\text{max}}}{\pi}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,107207.$$

Tale rapporto relativo ad un semiperiodo
si chiama: "fattore forma" = 1,11

Operazioni Aritmetiche Sulle grandezze sinusoidali (aventi la stessa frequenza)

Somma: (e sottrazione)

$$A_M \text{sen}(\omega t + \alpha) + B_M \text{sen}(\omega t + \beta) = C_M \text{sen}(\omega t + \gamma)$$

Infatti sviluppando si ha:

$$A_M \text{sen} \omega t \cos \alpha + A_M \cos \omega t \text{sen} \alpha + B_M \text{sen} \omega t \cos \beta + B_M \cos \omega t \text{sen} \beta$$

$$(A_M \cos \alpha + B_M \cos \beta) \text{sen} \omega t + (A_M \text{sen} \alpha + B_M \text{sen} \beta) \cos \omega t =$$

$$= C_M \text{sen}(\omega t) \cos \gamma + C_M \cos \omega t \text{sen} \gamma$$

$$\cos \gamma = \frac{A_M \cos \alpha + B_M \cos \beta}{C_M} ; \text{sen} \gamma = \frac{A_M \text{sen} \alpha + B_M \text{sen} \beta}{C_M}$$

elevando a quadrato e sommando: $\cos^2 \gamma + \text{sen}^2 \gamma = 1$

$$C_M = \sqrt{A_M^2 + B_M^2 + 2 A_M B_M \cos(\alpha - \beta)}$$

$$\gamma = \arctg \frac{A_M \text{sen} \alpha + B_M \text{sen} \beta}{A_M \cos \alpha + B_M \cos \beta}$$

Prodotto:

per uno scalare n : (si moltiplica il coefficiente o modulo)

$$m c = n C_n \sin(\omega t + \gamma)$$

Prodotto fra due grandezze sinusoidali della stessa frequenza:

$$(A_M \sin(\omega t + \alpha)) (B_M \sin(\omega t + \beta)) = c = \frac{A_M B_M}{2}$$

In fatti ricordando che per le formule di prostaferesi

(val 1) $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ cioè:

$$\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) = -\frac{1}{2} (\cos(p) - \cos(q)) = -\frac{1}{2} \left[\cos\left[\frac{(p+q)}{2} + \frac{(p-q)}{2}\right] - \cos\left[\frac{(p+q)}{2} - \frac{(p-q)}{2}\right] \right]$$

$$A_M (\sin \omega t + \alpha) B_M (\sin(\omega t + \beta)) =$$

$$= \frac{A_M B_M}{2} \left[\cos[(\omega t + \beta) + (\omega t + \alpha)] - \cos[(\omega t + \beta) - (\omega t + \alpha)] \right]$$

$$= (A_M B_M) \cdot \frac{1}{2} \left[\cos(2\omega t + (\alpha + \beta)) - \cos(\beta - \alpha) \right]$$

$$= \frac{A_M B_M}{2} \left(\cos(\beta - \alpha) - \cos(2\omega t + (\alpha + \beta)) \right)$$

Ciò è importante perché si applica per calcolare la potenza delle correnti alternate: $W_{att} = (\text{Volt})(\text{Ampere})$

È bisogna fare attenzione ai segni delle fasi. ($\cos(x) = \cos(-x)$)

Derivata di una grandezza sinusoidale

$$D_M = \frac{d(A_M \sin(\omega t + \alpha))}{dt} = \omega A_M \cos(\omega t + \alpha) =$$

$$D_M = \omega A_M \sin(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}) = \omega A_M \sin(\omega t + \alpha_1)$$

$$\boxed{D_M = \omega A_M}$$

La derivata di una grandezza sinusoidale A_M è ancora una grandezza sinusoidale della stessa frequenza, di modulo ω volte A_M e sfasata di $\frac{\pi}{2}$ rispetto ad essa.

Variabili dimensionali (sinusoidali)

una grandezza sinusoidale, ha come variabile indipendente il tempo "t", poiché l'angolo $(\omega t + \varphi)$ essendo costante la frequenza "f" anche la velocità angolare: $\omega = 2\pi f$ ove: $f = (\text{cicli/sec})$; $\omega = (\text{rad/sec})$; sono costanti con φ .

Il modulo (A_M), della variabile dipendente a, può avere dimensioni diverse, per esempio (Amper; Volt; Watt; ecc) fuori del campo geometrico, siamo in coordinate dello spazio euclideo dimensionale, che solo convenzionalmente possiamo rappresentare

nello spazio geometrico. (In generale l'asse $x =$ ascisse diventa l'asse tempi, mentre l'asse $y = f(x) =$ ordinate diventa rappresentativo di una delle grandezze citate: (intensità di corrente; tensione; potenza elettrica; ecc).

In campo vettoriale, le direzioni, $x, y, z,$ sono individuate dai vettori: $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k};$

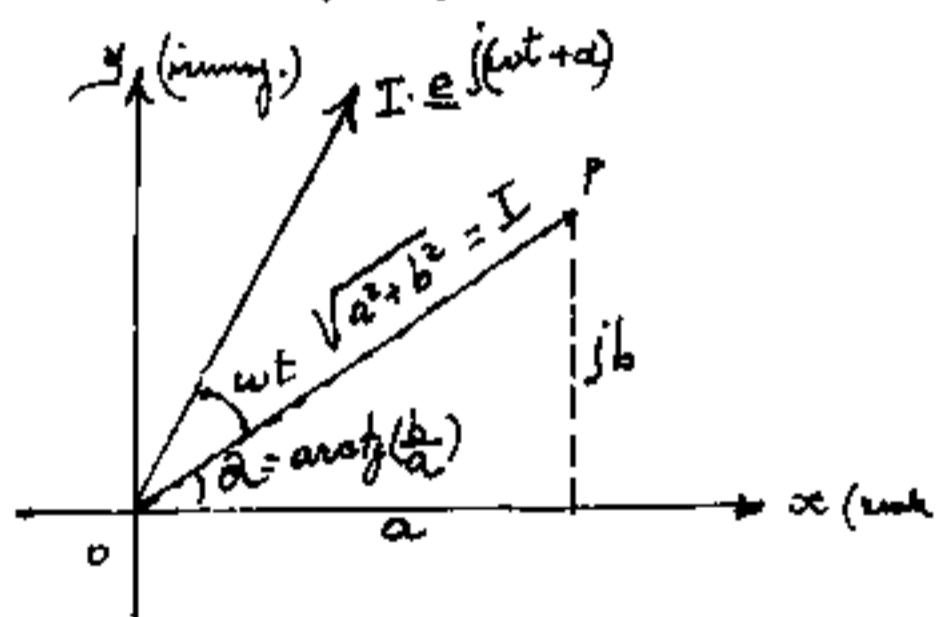
Le nostre rappresentazioni grafiche, sono piatte, quindi, visioni spaziali tridimensionali è possibile eseguirle con la fotografia (prospettiva) o con l'assonometria. Riusciamo anche a dare la visione tetradimensionale col cinematografo cioè sequenze di fotogrammi che si susseguono nel tempo, e ci danno la sensazione del movimento. Ciò permette anche di giocare sulla variabile tempo; infatti ponendo una cinepresa (in posizione fissa) e facendole scattare un fotogramma a intervalli piuttosto lunghi di tempo, proiettando la pellicola ai normali $18 \div 24$ fotogrammi/sec si può vedere un fenomeno in breve. (Per esempio lo sbocciare di un fiore, il formarsi di un cristallo, le luci di un'alba). Inversamente si può rallentare un fenomeno (per es. il tuffo di un atleta).

Rappresentazione Simbolica

Ma quanto detto sui fenomeni ottici, non possiamo estenderlo alle grandezze sinusoidali che ci interessano perché i "vettori" rappresentati di queste non sono vettori fisici.

Ricordando quanto esposto sui numeri immaginari complessi.

Siano le ascisse un'asse reale, e siano le ordinate un'asse fuori del campo geometrico tridimensionale (asse immaginario) ove il coefficiente immaginario lo indichiamo con "j" per distinguerlo da "i" che viene usato come intensità di corrente.



Indicheremo con I il vettore rappresentato dal segmento $\overline{OP} = |I|$ con $|I| = \text{modulo}$.

Le tre espressioni rappresentative di I , sono:

$$I = (a + jb) \quad \text{forma binomiale}$$

Per evidenziare che il vettore ruota intorno ad O con velocità angolare costante ω

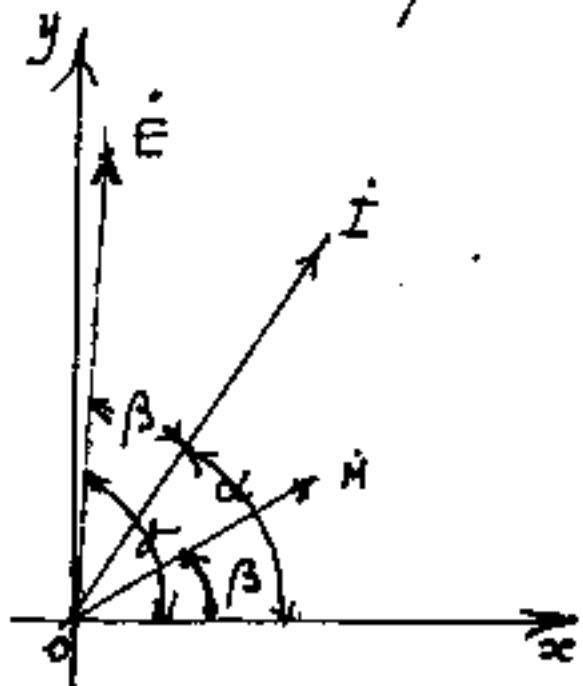
$$I = I (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) \quad \text{forma trigonometrica}$$

$$I = I e^{j(\omega t + \alpha)} \quad \text{forma esponenziale}$$

Possiamo comprendere la fase α scrivendo:

$$\underline{I} = (a + jb)(e^{j\omega t})$$

Prodotto del vettore ruotante \underline{I} per un numero complesso (vettore fisso) $\underline{M} = (m + jn)$



$$\underline{E} = \underline{M} \underline{I}$$

$$\underline{E} = (m + jn)(a + jb)e^{j\omega t}$$

$$\underline{E} = [(ma - nb) + j(na + mb)]e^{j\omega t}$$

Si nota: $|E| = |I| \cdot |M|$

$$|E| = \sqrt{(ma - nb)^2 + (na + mb)^2} = \sqrt{(m^2 + n^2)(a^2 + b^2)}$$

sia γ la fase di E ;

$$\text{tang } \gamma = \frac{(na + mb)}{(ma - nb)}$$

dividendo ambo i termini della frazione per (ma)

si ha
$$\text{tang } \gamma = \frac{\frac{n}{m} + \frac{b}{a}}{1 - (\frac{n}{m})(\frac{b}{a})} = \frac{\text{tg}(\beta) + \text{tg}(\alpha)}{1 - \text{tg}(\beta) \cdot \text{tg}(\alpha)} = \text{tg}(\alpha + \beta)$$

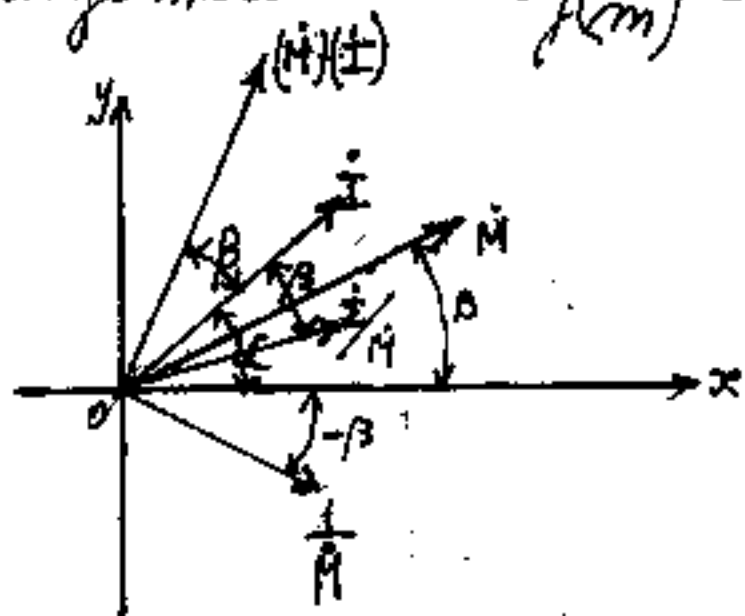
quindi la fase di E è la somma della fase α di I e dell'argomento β di M , mentre il modulo di E è il prodotto dei moduli di I e M .

(M è fisso, ha solo l'argomento $\beta = \arctg(\frac{n}{m})$ non ha la fase, non dipendendo da t .)

Se l'operatore complesso \dot{M} , anziché moltiplicare, divide il vettore I , coi considereremo il prodotto dell'operatore $\frac{1}{\dot{M}}$, avvalendoci di quanto già ricavato

$$\frac{1}{\dot{M}} = \frac{1}{(m + nj)} = \frac{(m - nj)}{(m^2 + n^2)} = \frac{1}{|\dot{M}|} (m - nj)$$

$\frac{1}{\dot{M}} \Rightarrow$ è un vettore che ha per modulo $\frac{1}{|\dot{M}|}$ e per argomento $-\text{tg}\left(\frac{n}{m}\right) = -\beta$.



Si deduce quindi che il rapporto fra un vettore e l'operatore complesso \dot{M} è un nuovo vettore che ha per modulo il

rapporto dei moduli e per fase la differenza fra la fase α e l'argomento di (\dot{M}) $(\gamma_1) = (\alpha - \beta)$

Abbiamo visto come le correnti alterna-
te sono generate da spire che ruotano
in un campo magnetico, queste onde
elettromagnetiche, sono fondamentali
sono della stessa natura delle radiazioni
dei corpi radioattivi ove l'elevatissima fre-
quenza, spostandosi alla velocità della luce

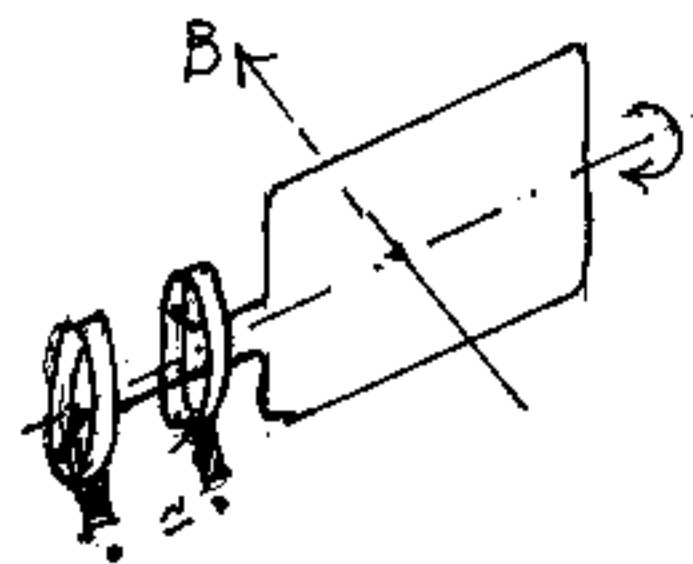
($\approx 300\,000\text{ Km/sec}$) ha una lunghezza d'onda da centesimi di Ångström a qualche Ångström.

(un Ångström (Å); ($1\text{ Å} = 10^{-8}\text{ cm} = 10^{-7}\text{ mm} = 10^{-4}\mu$) cioè la decimillesima parte del millimetro di millimetro).

I raggi X hanno λ da 1 Å a 12 Å .

la luce nei vari colori varia da 4000 Å per l'ultravioletto ad 8000 Å per l'estremo rosso; i raggi infrarossi da $10000\text{ Å} = (1\mu\text{ (microm)})$ a 300μ .

poi si entra nelle onde Herziane che variano da pochi millimetri, a centimetri; "radari", "micro onde", onde ultra corte, (come quelle della televisione), onde corte da qualche metro a circa 150 metri , le onde medie da $600\text{ metri} = 500\text{ Kilocicli/sec}$ a $1500\text{ metri} = 200\text{ Kc/sec}$; onde lunghe fino a diversi chilometri; fino ad arrivare alle frequenze industriali ove si notici $50\text{ Hz} = 50\text{ Cicli/sec}$ avrete una lunghezza d'onda di 6000 Km . ($50 \times 6000 = 300000\text{ Km/sec}$)



Torniamo alla nostra spira
che ruota in un campo
magnetico con vettore indu-
zione B (Weber/m²) con
velocità angolare ω ($\frac{rad}{sec}$)

($\omega = 2\pi f$ ove: $f = \text{cicli/sec.}$); $\boxed{\omega/f = 2\pi = \text{costante}};$

Consideriamo che la spira abbia ruotato
per un angolo infinitesimo: $d\alpha = \omega dt$, si
nota che, se il flusso di B che l'attraversa
è normale al piano della spira, la variazione
angolare infinitesima non varia il flusso
 $B \cdot A = \varphi_{\text{max}}$ (ove $A = \text{area della spira}$), mentre
quando il flusso di B è parallelo al piano
della spira non attraversa la spira (i cui
lati tagliano le linee di forza di B) e basta
un piccolo angolo per ottenere l'attraversa-
mento di un piccolo flusso.

Chiameremo la forza elettro-motrice
(f.e.m) con la lettera "e", e misuriamo
in "volt" l'intensità di "e" (tensione che
varia sinusoidalmente).

$$\boxed{e = \frac{-d\varphi}{dt}}$$

Potenza di una corrente elettrica

In corrente continua.

$$\boxed{P = VI} \quad (\text{Watt}) = (\text{Volt})(\text{Ampere})$$

$$(\text{potenza}) = (\text{tensione}) (\text{intensità di corrente})$$

$$\text{Lavoro / tempo} = (\text{tensione}) (\text{carica elettrica / tempo})$$

$$\text{Joule} = \underline{(\text{Volt})(\text{Coulomb})} = (\text{Watt})(\text{sec})$$

In corrente alternata (sinusoidale)

Istante per istante vale ancora:

$$\boxed{p = v \cdot i}$$

Abbiamo visto che la tensione (qui indicata con la lettera v (d.d.p) era dovuta alla

$$(\text{f. e. m}) \quad \boxed{e = \frac{d\varphi}{dt}}$$

ove φ era il flusso magnetico del vettore B

(vettore induzione $B = \mu H = \text{Weber}/\text{m}^2$) connesso con l'area della spira od n volte se le spire sono n .

Ma la spira (o le n spire), ruotando nel campo magnetico costante, presentano un'area variabile alle linee del campo, che va da un massimo A quando il piano delle spire è perpendicolare alle linee del campo; a zero quando

il piano delle spire è parallelo alle linee di forza del campo. Se consideriamo l'angolo formato dalla direzione di B e la retta di giacitura del piano delle spire, considerando l'origine dei tempi variata di α (fase) avremo che istante per istante il flusso magnetico sarà

$$\varphi = (B \cdot A) \cos(\omega t + \alpha)$$

(con ω = velocità angolare di rotazione delle spire)

$$(B \cdot A) = \text{flusso massimo} = \bar{\Phi}_{\perp H}$$

$$\varphi = \bar{\Phi}_{\perp H} \cos(\omega t + \alpha)$$

derivando:

$$e = \frac{-d\varphi}{dt} = + \bar{\Phi}_{\perp H} \cdot \omega \sin(\omega t + \alpha)$$

se indichiamo con E_H il valore massimo della forza elettromotrice: $(E_H = \bar{\Phi}_{\perp H} \omega)$ $\mu \alpha = 0$ si ha quando il piano delle spire è parallelo alle linee di forza del campo, cioè la retta di giacitura è normale alle linee di forza del campo cioè quando i conduttori delle spire paralleli all'asse di rotazione tagliano le linee del campo.

$$e = E_H \sin(\omega t + \alpha)$$

Questa f.e.m. sinusoidale, applicata ad apparecchiature elettriche, si comporta in modo singolare, tanto che la corrente "i" generata può essere sfasata rispetto a "v" d.d.p ai capi dell'apparecchiatura.

In altre parole, pur essendo "v" ed "i" sinusoidali sono sfasati di un angolo ordinarimente indicato con φ (da non confondere con φ _(weber) flusso del vettore B)

Poniamo quindi:

$$v = V_M \sin(\omega t)$$

$$i = I_M \sin(\omega t - \varphi) \quad \left(\begin{array}{l} \text{corrente in} \\ \text{ritardo} \\ \text{rispetto a } v \end{array} \right)$$

perciò:

$$p = (V_M I_M) (\sin(\omega t)) (\sin(\omega t - \varphi))$$

ricordando dalla trigonometria che:

$$(\sin \alpha)(\sin \beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$p = \left(\frac{V_M I_M}{2} \right) [\cos(\omega t - \omega t + \varphi) - \cos(2\omega t - \varphi)]$$

ed anche:

$$p = \left(\frac{V_M I_M}{2} \right) \left[(\cos \varphi) + \sin(2\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}) \right]$$

posti i valori efficaci: $V = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$; $I = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$

avremo:

$$p = (VI) \sin(2\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}) + (VI) \cos \varphi$$

La potenza istantanea si scinde così in due valori: uno costante $(VI)\cos\varphi$, ed uno fluttuante sinusoidalmente:

$(VI)\sin(2\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})$ il cui valore medio in un periodo T è dato da:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}) dt = \text{zero}$$

quindi la potenza media in un periodo resta il valore costante:

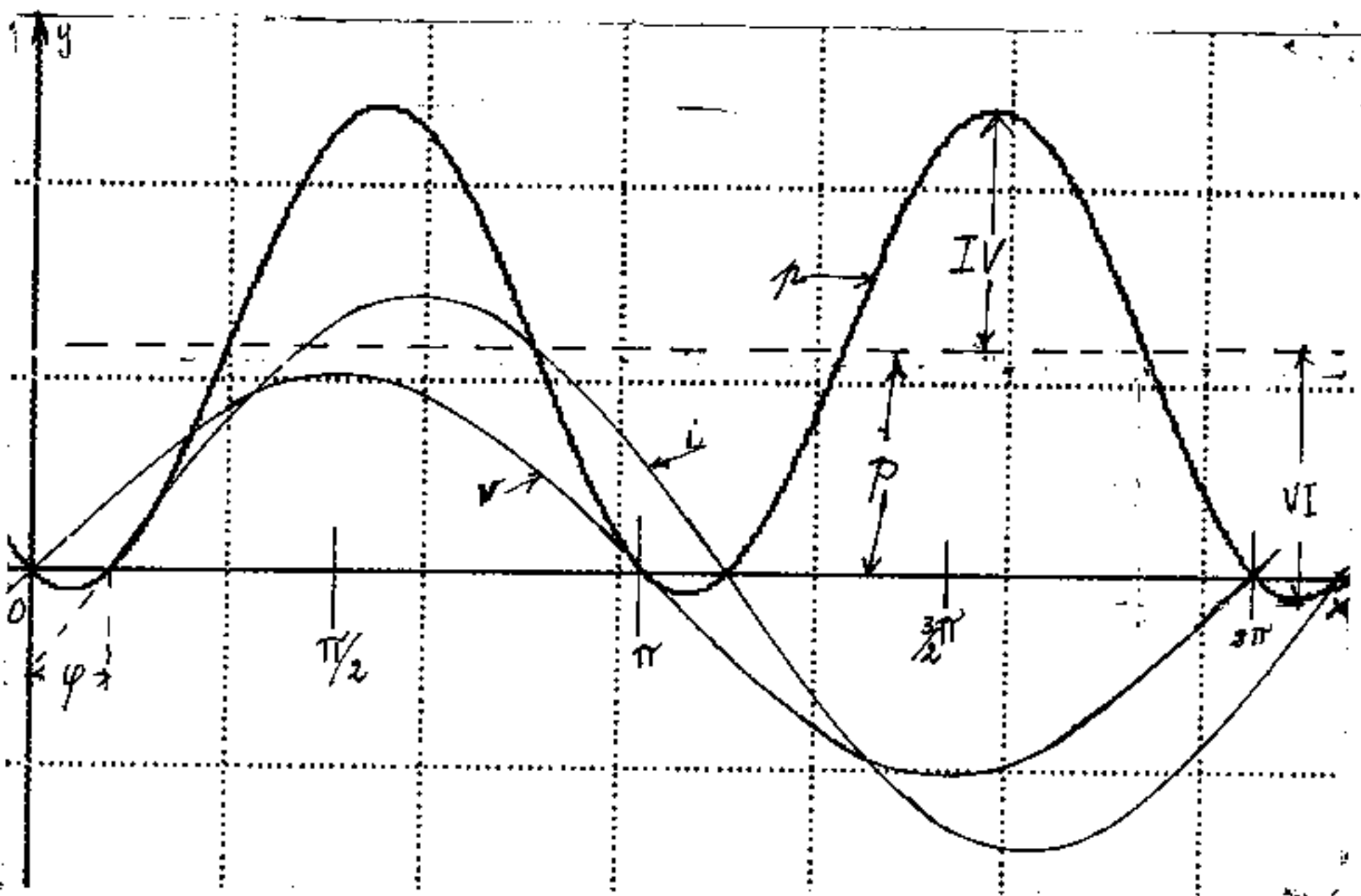
$$P = (VI)\cos\varphi$$

che è detta anche potenza reale o potenza attiva che è data dal prodotto dei valori efficaci per il coseno del loro sfasamento, ove $\cos(\varphi)$ è anche detto fattore di potenza.

Come in continua, invertendo i poli varia il verso della corrente, ma la potenza rimane la stessa, così in alternata i valori efficaci del semiperiodo positivo, e quelli negativi del successivo semiperiodo, danno la stessa potenza media, ma la frequenza è doppia perché varia per semiperiodi

$$P = (VI) = (-V)(-I)$$

Riportiamo l'andamento grafico di:
 $v, i, p,$



L'ampiezza della sinusoidale di frequenza doppia è VI , indipendente dal fattore potenza " φ ", tale sinusoidale ha lo stesso asse x di v e di i quando ($\varphi = \frac{\pi}{2}$); mentre per: ($\varphi = 0$) la sinusoidale di p a frequenza doppia è tutta sopra l'asse x , è tutta positiva restando tangente l'asse x nei punti: zero, π , 2π .

In ogni condizione: $VI = P_a$ è detta potenza apparente; mentre: $Q = (VI) \sin \varphi$ è detta potenza reattiva o Varpotenza

Le tre forme di potenza, tutte misurabili in volt-ampere, sono connesse fra loro:

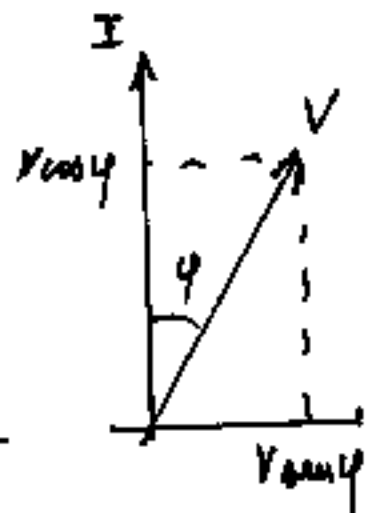
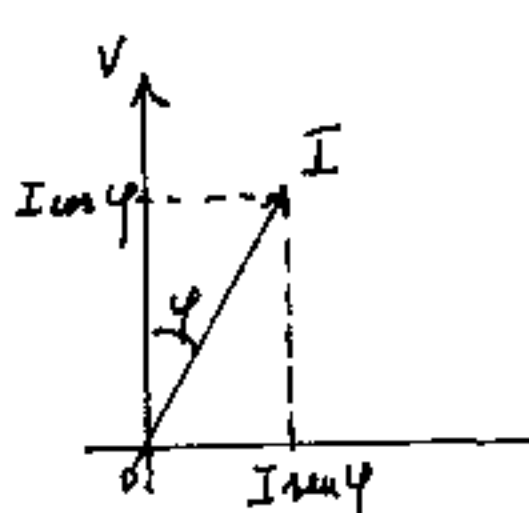
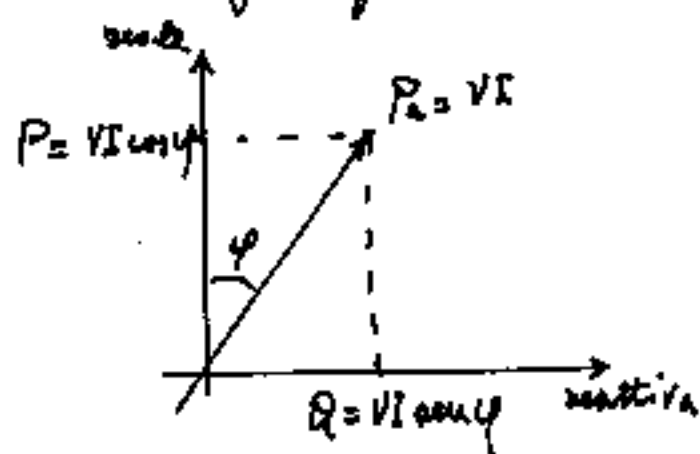
$$VI = Pa = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

si può esprimere:

La potenza reale o attiva $P = Pa \cos \varphi$

La potenza reattiva o varpotenza $Q = Pa \sin \varphi$

Ciò porta a diverse possibili rappresentazioni grafiche:



La potenza reale è positiva per: $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

" " è negativa per: $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$

L'energia reattiva (integrale nel tempo della potenza reattiva) assume per ogni semiperiodo sia il segno positivo, che negativo, per cui il segno della energia reattiva è convenzionale. Se la corrente I è in ritardo rispetto a V , assegneremo Q positiva ($Q > 0$); se la corrente I è in anticipo rispetto a V , assegneremo $Q < 0$ (negativa).
 I in ritardo su $V \rightarrow \varphi < 0 \rightarrow \sin \varphi < 0 \rightarrow Q > 0$ (come nell'esempio)

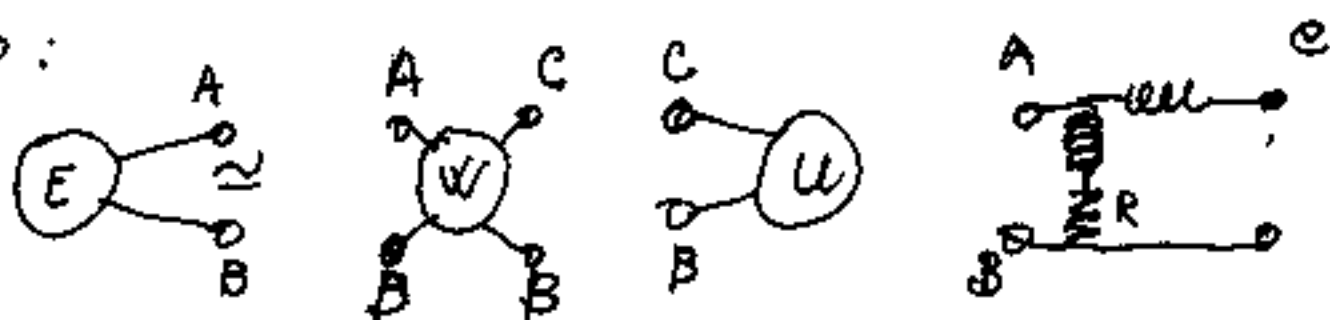
Trattandosi di valori alternati nel segno, la misura di V e di I con strumenti per corrente continua, sarebbe impossibile perché ogni semiperiodo l'indice dello strumento sarebbe sollecitato a muoversi con versi opposti e lo vedremmo praticamente fermo sullo zero. Sono invece adeguati per misure in continua ed in alternata gli strumenti termici che non sono influenzati dal verso di I . Oppure elettrodinamici ed elettrostatici con particolari avvertenze.

Per tener conto dei valori efficaci, poiché hanno rapporto costante coi massimi, basta la graduazione dello strumento.

Il valore: $P = VI \cos \varphi$
può determinarsi anche misurando V ed I come sopra e φ con cosfinometri, ma non si usa, si costruiscono invece particolari strumenti chiamati Wattmetri capaci di indicare direttamente P .

Vediamo come ciò sia possibile:
si abbia un generatore (E) ed
una utilizzazione (U) e sia (W) lo

strumento:



Per fissare le idee consideriamo nel polo A un potenziale alternato (f.m.) ed in B un neutro.

Internamente al Wattmetro poniamo fra A e C una bobina (avvolgimento solenoide) amperometrica, e fra A e B una bobina (avvolgimento solenoide) voltmetrica in serie ad una resistenza R per limitare il flusso di corrente.

La bobina amperometrica sia fissa e se fosse posta su un amperometro elettrodinamico misurerebbe:

$$i = I_M \sin(\omega t - \varphi)$$

La bobina voltmetrica sia mobile (cioè connessa con l'indice esterno) e se fosse posta in un voltmetro elettrodinamico misurerebbe:

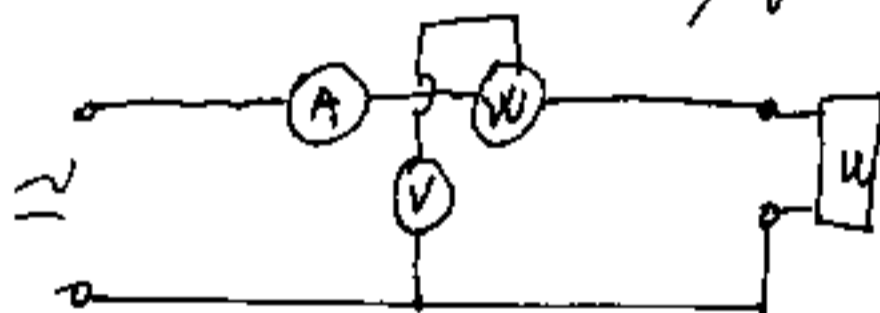
$$V = V_M \sin(\omega t)$$

Chi genera il campo magnetico per far girare

la bobina voltmetrica è la: $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$
della amperometrica; la notevole resistenza
posta in serie alla voltmetrica limita la
corrente i_v che la percorre e pertanto il
campo magnetico da essa prodotto è trascu-
rabile rispetto a quello della i , la coppia
che fa ruotare la voltmetrica (l'indice
dello strumento) è: $c = K i i_v$. ed indica

$$P = \boxed{VI \cos \varphi} = W. \quad (\text{Watt})$$

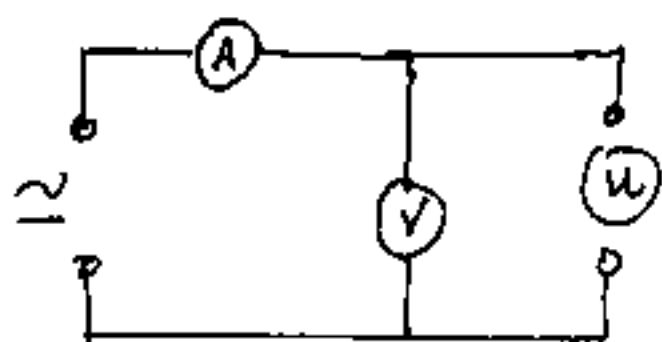
Volendo misurare $\cos \varphi$ occorrono tre strumen-
ti: un voltmetro V , un amperometro A , un Wattmetro
 W disposti come in figura:



$$\boxed{\cos \varphi = \frac{W}{VI}}$$

Sulle misure elettriche è bene ricordare
che lo strumento deve consumare il mi-
nimo possibile di energia; infatti
un amperometro di resistenza interna R_n
su una utilizzazione di resistenza R
assorbe la potenza $i^2 R_n$ rispetto ad $i^2 R$ utilizzata,

Un Voltmetro di resistenza R_V sarà attraversato dalla corrente $i_V = \frac{V}{R_V}$ e la potenza assorbita $\frac{V^2}{R_V}$. Se poniamo:



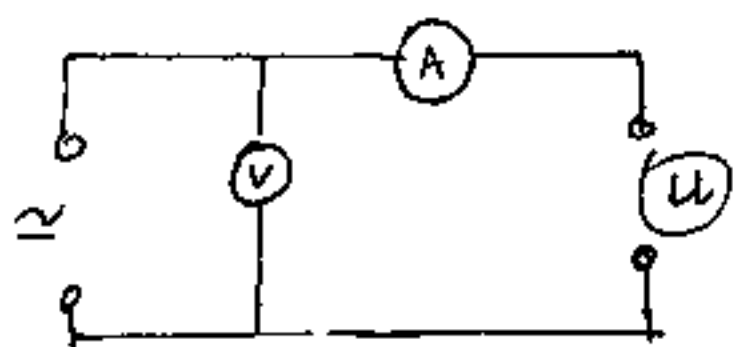
l'ampmetro segna la somma delle correnti che attraversano U e V ,

mentre il voltmetro segna

la tensione diminuita dalla caduta di tensione:

$\Delta V = i_A R_A$ che si verifica in A . Si usa per correnti intense e tensioni relativamente deboli.

Invece:




si usa per tensioni elevate e correnti relativamente deboli

perché la tensione misurata è la somma delle tensioni ($V_A + V_U$)


Le utilizzazioni

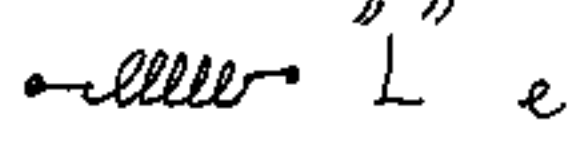
Importanza fondamentale è conoscere cosa avviene in un circuito applicato ad un generatore di f.e.m. continue o alternate.


considereremo tre tipi elementari di utilizzazione:

1) Resistenza ohmica pura:  "R" che al passaggio della corrente disperde in calore l'energia assorbita e provoca la caduta di potenziale $V = IR$

V (Volt); I (Ampere); R (ohm).

In effetti salvo particolari accorgimenti le resistenze non sono "pure" ma presentano anche autoinduzione il simbolo è 

2) Induttanza si indica:  "L" e si misura in Henry.

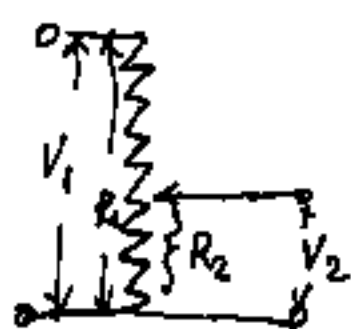
3) Capacità si indica:  "C" e si misura in Farad.

Per le resistenze vale la legge di Ohm

$V = IR$ sia in continua che in alternata

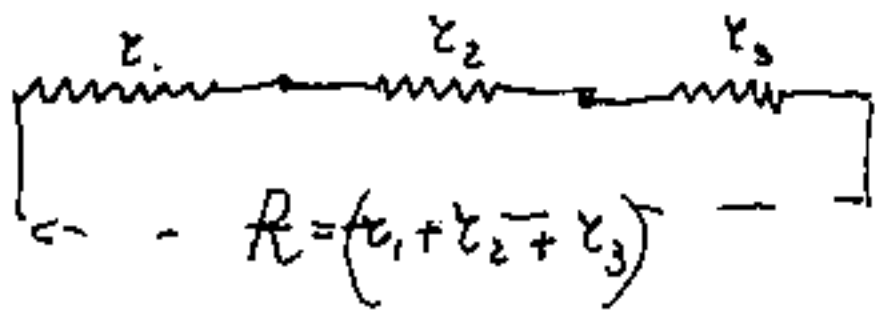
$W = \frac{V^2}{R} = I^2 R$ ove V ed I sono valori efficaci

si può usare come potenziometro

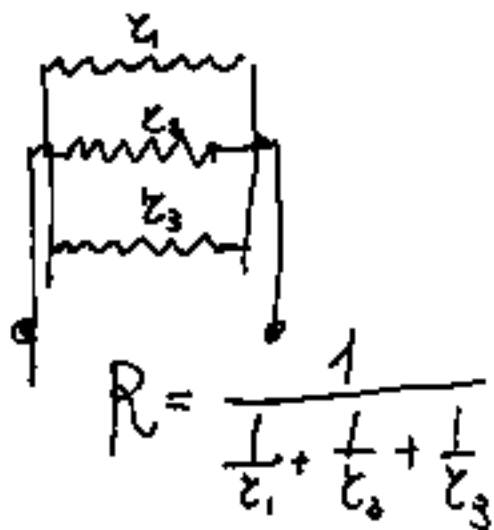


$$V_2 = V_1 \frac{R_2}{R_1}$$

$$R = \rho \frac{l}{A} = \left(\begin{array}{c} \text{resistività} \\ \text{ohm.cm.} \end{array} \right) \frac{(\text{lunghezza}) (\text{cm})}{(\text{Area}) (\text{cm}^2)} = \text{ohm.}$$



resistenze in serie



resistenze in parallelo:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

Per le correnti alternate su resistenze
il fattore potenza : $(\varphi = 0)$; $\cos \varphi = 1$

la potenza reattiva $Q = 0$ essendo $(\sin \varphi = 0)$

la potenza apparente $P_a = VI$

Per le induttanze

Abbiamo visto, in corrente continua, la generazione di un campo magnetico e la costituzione di una elettrocalamita mediante un avvolgimento (solenoidale), se

nel solenoide circola una corrente variabile, ai capi si verifica una forza elettromotrice:

$$f.e.m. = e = -L \frac{di}{dt}$$

ove L è il coeff. di autoinduzione del solenoide

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_n = \frac{\mu \mu_0 N^2 l}{L_1} + \frac{\mu \mu_0 N^2 l}{L_2} + \dots + \frac{\mu \mu_0 N^2 l}{L_n} \text{ solenoidi in serie}$$

$$L = \frac{1}{\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}\right)} \text{ solenoidi in parallelo}$$

Poiché (in via teorica) consideriamo il conduttore, che costituisce il solenoide, privo di \vec{e} sistema ohmico (sarebbe meglio dire trascurabile), avendo che la tensione V agli estremi sarà:

$$(V+e)=0; \quad (V=-e)$$

$$V = L \frac{di}{dt}; \quad di = \frac{V}{L} dt$$

$$V = V_m \sin(\omega t); \quad i = \int \frac{V_m \sin(\omega t)}{L} dt =$$

$$i = \left| \frac{V_m}{\omega L} \right| \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ in ritardo}$$

la fase di i rispetto a V ; $(-\varphi) = \left(-\frac{\pi}{2}\right)$ " i " e " V " sono in quadratura

$$I = \frac{V}{\omega L} \text{ (valori efficaci)}$$

Il prodotto (ωL), che tiene il posto di R nella legge di ohm, si chiama: reattanza induttiva o reattanza magnetica si esprime in (ohm) quando L è in (Henry) e si simboleggia con $X_H = \omega L$

con la notazione simbolica:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{j\omega L} = \frac{\dot{V}}{jX_H} = -j\frac{\dot{V}}{X_H}$$

La potenza istantanea: $p = v \cdot i$

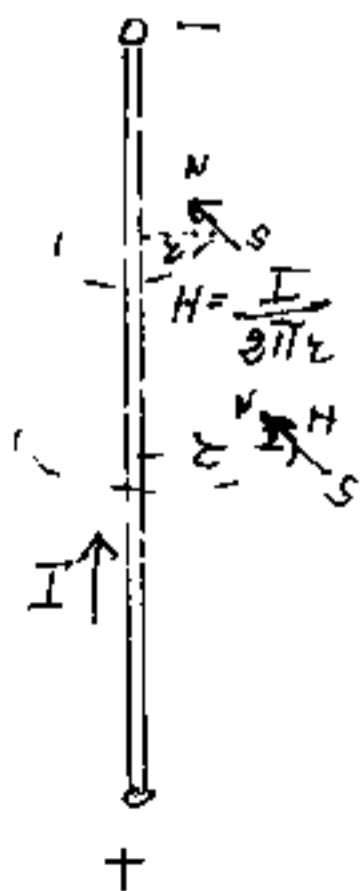
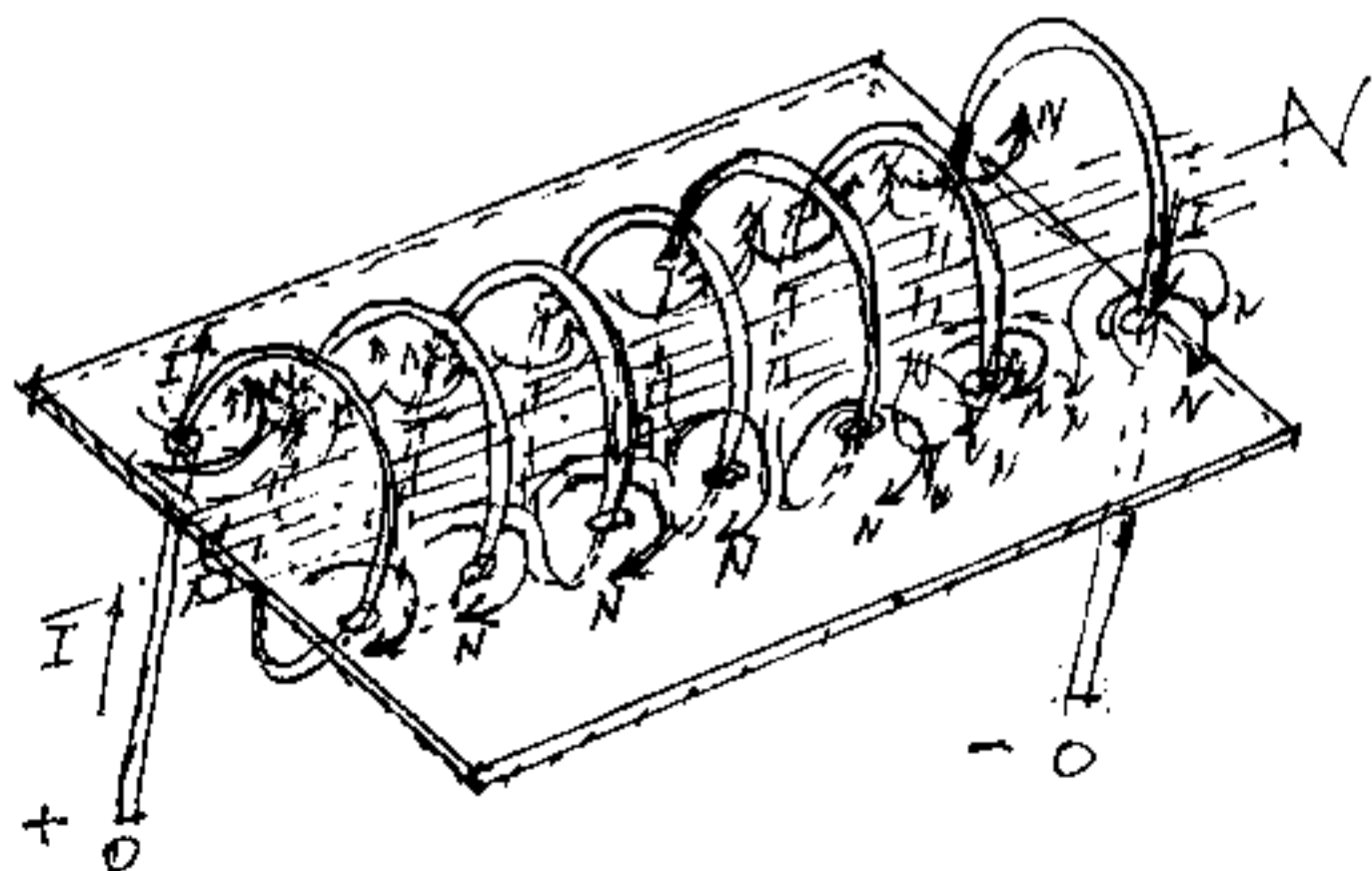
" reale $P = 0$

fattore potenza: $\cos(\varphi) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

potenza reattiva $Q = VI = \frac{V^2}{X_H}$ ($\sin \varphi = 1$)

potenza apparente $P_a = VI = Q$

la potenza apparente uguaglia la reattiva.



La f.e.m.

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

consideriamo il flusso generato da un solenoide percorso dalla corrente "i" e supponiamo di concatenare con quel flusso, il solenoide stesso avremo che:

$$\Phi = Li$$

ove L è il coefficiente di autoinduzione. (induttanza).

Quindi il flusso Φ è proporzionale ad "i" e ad "L".


$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{\text{(Weber)}}{\text{(Ampere)}} = \frac{\text{Volt-sec}}{\text{ampere}} = (\text{ohm-sec}) = \text{henry}$$

$$\text{avremo } d\Phi = L di$$

$$e = -L \frac{di}{dt}$$

"L" dipende dalle caratteristiche del solenoide, che può essere un avvolgimento toroidale, o cilindrico, può essere corto o lungo: internamente alla spirale cilindrica o toroidale, si possono avere materiali diversi, aria, oppure ferro dolce;

il diametro delle spire, (che possono essere affiancate o disoste), ecc sono tutti elementi che influenzano il valore di "L".

Facciamo una esperienza prendiamo un cilindro di cartone ed avvolgiamoci molte spire di filo di rame isolato, poniamo in serie una lampadina elettrica e inseriamo la spina  la lampadina si accende.

Iniziamo ora a porre ferri rettilinei, fili di ferro, o ferri da calza, dentro il cilindro via via che aumenta il quantitativo di ferro dolce nel cilindro (nel solenoide) la lampadina si accende sempre meno fino a ridursi ad un filamento appena arrossato.

La $I = \frac{V}{WL}$ ci dice che anche il materiale del nucleo del solenoide ha grande importanza su L

È logico che l'alternarsi della tensione (e quindi della corrente) alterna il campo magnetico dell'elettrocalamita, e il lavoro per orientare i magnetini elementari è impedimento al libero passaggio della corrente.

L'impedimento è anche tanto maggiore quanto maggiore è la frequenza: ($\omega = 2\pi f$)

A questo punto dobbiamo dimensionare L.

Abbiamo visto che il flusso magnetico Φ del vettore B è: ($H = \frac{Ni}{l_0}$)

$$\Phi = BA = \mu HA = \mu \frac{Ni}{l_0} A$$

ma questo flusso si concatena con ciascuna spira di area A del solenoide, per cui

$$\Phi_N = L I = \frac{\mu A N^2 i}{l_0}$$

coeff. di autoinduzione $L = \frac{\mu A N^2}{l_0}$ (induttanza)

Ma il flusso Φ potrebbe concatenarsi con un'altro solenoide, ove N_1 ed N_2 sono il numero delle spire dei due solenoidi, indicando con M_{12} il coefficiente di mutua induzione fra i due solenoidi avremo:

$$M_{12} = \frac{\mu A}{l_0} (N_1 N_2)$$

A = area costante delle spire; l_0 lunghezza $2\pi R$ di un avvolgimento toroidale, ma valido anche come lunghezza del solenoide cilindrico quando sia sufficientemente lungo per solenoidi cilindrici corti o con spire

a più strati, valgono ancora formule del tipo:

$$L = K \mu N^2$$

ove "K" dipende dalla configurazione geometrica del solenoide.

Poiché il calcolo dell'induttanza "L" è fondamentale nello studio delle onde elettromagnetiche, (radio in particolare), diamo alcuni cenni sulle induttanze.

Le bobine (per radio) erano, almeno nei primi tempi, di vario tipo: (cilindriche, a nido d'api, a fondo di panierino, ecc), noi ci limitiamo ad esaminare le bobine cilindriche, cioè avvolte su tubi isolanti, all'interno dei quali possono esserci nuclei ferromagnetici mobili (per variare L). =; D = diametro = 2R

Sia R, il raggio esterno del tubo isolante -

$$A = R^2 \pi \approx \text{area di una spira} = \left(\frac{D^2 \pi}{4} \right)$$

l = lunghezza del tubo cilindrico

N = numero delle spire

$$\delta = \text{passo delle spire} = \left(\frac{l}{N} \right) \left(\begin{array}{l} \text{se affiancate} \\ = \text{diametro filo} \end{array} \right)$$

$$\frac{N}{l} = \text{spire per centimetro} = \frac{1}{\delta}$$

$$h = \text{lunghezza del conduttore} = \left((2R\pi)^2 + \delta^2 \right)^{1/2} \cdot N$$

Consideriamo ($\mu=1$) nucleo ad aria secca materiale ferromagnetico.

in microhenry

$$L = \frac{\pi^2 N^2 D^2}{l \cdot 10^3}$$

$$L \cong \frac{l \pi N D}{l \cdot 10^3}$$

in funzione della lunghezza del filo quando D sia piccolo

$$L \cong \frac{l \cdot D}{\delta} \cdot 0,00314$$

"

Capacità:

C (in farad)

$$C = \epsilon \frac{S}{d}$$

(in picofarad)

$$C = 0,08859 \cdot \epsilon_r \frac{S(\text{cm}^2)}{d(\text{cm})}$$

Consideriamo un generatore di corrente continua, per esempio una pila di f.e.m. "E", ed applichiamo un condensatore di Capacità "C" alla chiusura del circuito, indicando con "V" la ddp ai capi del condensatore avremo: $i = \frac{E-V}{R}$ ove R è la resistenza del circuito al passaggio della corrente. (R comprende la r interna della pila, la r del circuito e la resistenza del condensatore)



$$(E - V) = Ri ;$$

$$q = CV = (\text{coulomb})$$

$$\frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dV}{dt} = (i)$$

$$(E - V)RC \frac{dV}{dt}$$

separando le variabili:

$$\frac{dt}{RC} = \frac{dV}{(E - V)} = - \frac{d(E - V)}{(E - V)}$$

e integrando:

$$\frac{t}{RC} = -\ln(E - V) + h'$$

(sia e base dei \ln) $(E - V) = e^{-\frac{t}{RC} + h'} = h e^{-\frac{t}{RC}}$

Inizialmente per $t = 0$; $V = 0$ per cui:

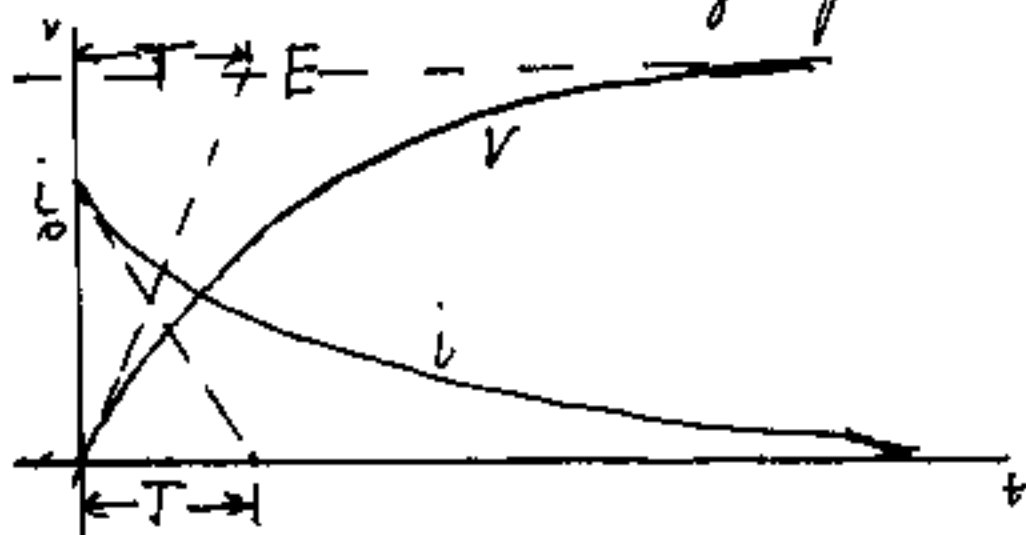
$$h = E$$

$$V = E - h e^{-\frac{t}{RC}} ; \quad V = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$q = CE \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

Se poniamo in ascisse i tempi ed in ordinate le tensioni avremo il grafico del fenomeno



transitorio di carica di un condensatore ($i_0 = E/R$)

La tensione v ai capi del condensatore tende asintoticamente ad E , al limite

$$\boxed{Q = CE} \quad (\text{coulomb})$$

Il prodotto: $(RC) = T$ è detto costante tempo (ohm.farad) = sec. per $R = 1 \text{ ohm}$; $C = 1 \text{ picofarad}$;

$T = 1 \text{ picosecondo} = (\text{un milionesimo di secondo} = 10^{-6} \text{ sec})$

Inversamente il periodo di scarica ove $E = 0$ per cui:

$$-v = RC \frac{dv}{dt}$$

supponendo che la carica iniziale del condensatore fosse E , integrando: (per $t = 0 \rightarrow v = E$) per cui:

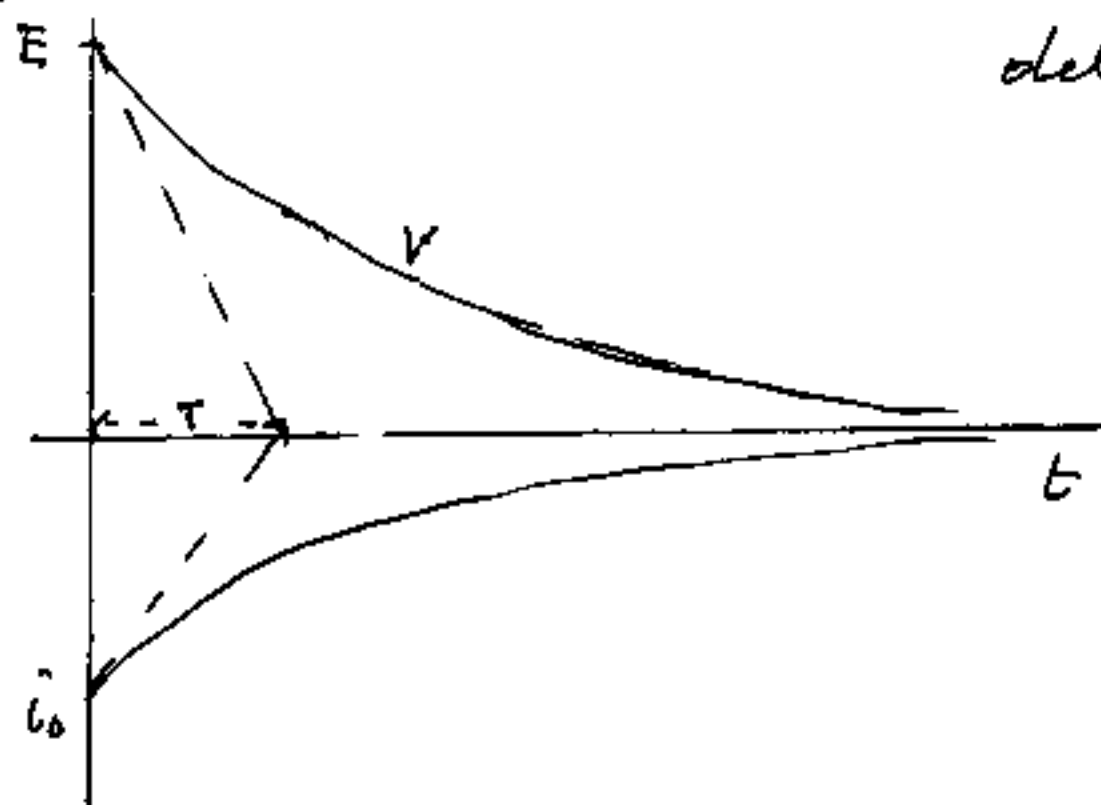
$$\boxed{v = E e^{-t/RC}}$$

$$\boxed{q = CE e^{-t/RC}}$$

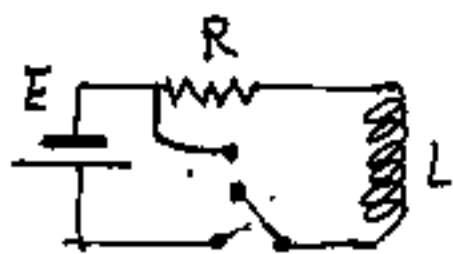
$$\boxed{i = -\frac{E}{R} e^{-t/RC}}$$

tenuto conto che "i" ha verso opposto rispetto alla fase di carica si ha il grafico di scarica

del condensatore



Formule analoghe si hanno se consideriamo le correnti di avviamento e di estinzione di un solenoide applicato ad una pila.



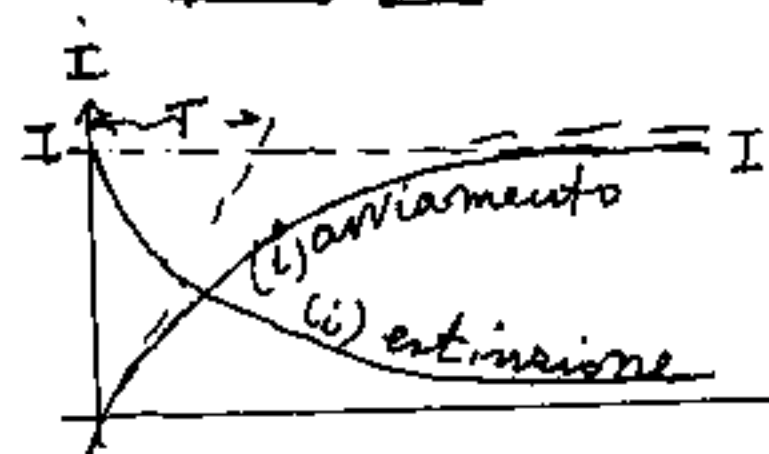
$$E - L \frac{di}{dt} = Ri$$

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

$$T = \left(\frac{R}{L} \right) \text{ costante di tempo}$$

(al limite)

$$\boxed{I = \frac{E}{R}}$$



Togliendo E e cortocircuitando su R avremo

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

Mentre la sorgente continua E una volta caricato il condensatore estingue la corrente (le lamine sono isolate) la sorgente alternata applicata al condensatore con la semiperiodo positiva lo carica in un verso con la semiperiodo negativa ne accelera lo scarico e lo ricarica con verso opposto:

$$q = cv$$

$$i = \frac{dq}{dt} = c \frac{dv}{dt}$$

ma v è sinusoidale: $v = V_m \cdot \sin(\omega t)$

$$i = \omega c V_m \left(\sin \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$I = (\omega c) V$$

cioè confrontando la legge di ohm.

abbiamo la reattanza capacitiva $\chi_c = \frac{1}{\omega c}$

$$I = \left(\frac{1}{\chi_c}\right) V$$

e con le notazioni simboliche:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\frac{-j}{\omega c}} = \boxed{j \frac{\dot{V}}{\chi_c} = \dot{I}}$$

La potenza istantanea $p = v i$

" Reale $P = 0$

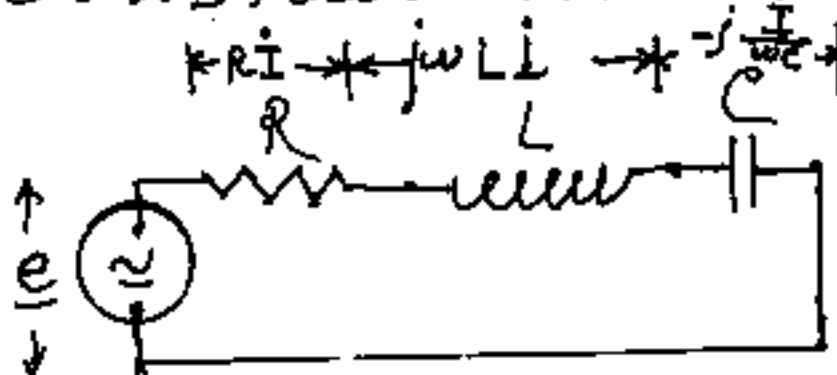
La potenza reattiva: $Q = -VI = \frac{I^2}{\omega c} = -\omega c V^2$

La potenza apparente $P_a = VI$

L'energia immagazzinata nel condensatore

$$W = \frac{1}{2} c V^2$$

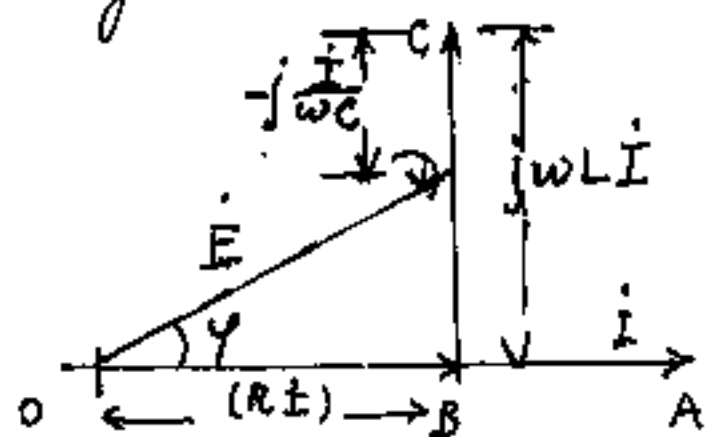
Consideriamo ora il circuito corti-



tuito da una sorgente alternata su una resistenza

ohmica R , in serie con una induttanza L , in serie con una capacità c , la corrente i che circola nel circuito è comune I

Per cui, sommando le d.d.p ai capi delle singole utilizzazioni e riportandole sul diagramma a notazione simbolica si ha:



$$\overline{OB} = RI$$

$$\overline{BC} = j\omega LI$$

$$\overline{CD} = -j\frac{I}{\omega C}$$

perciò:

$$\overline{OD} = \boxed{\dot{E} = \dot{I} \left(R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right)}$$

Introduciamo così il concetto di

Impedenza =
$$\boxed{\dot{Z} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]}$$

e possiamo scrivere la relazione simbolica

$$\boxed{\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}}}$$

la relazione fra i moduli:

$$\boxed{I = \frac{E}{Z}}$$

e l'angolo di sfasamento φ

$$\boxed{\tan(\varphi) = \frac{(\omega L) - (\frac{1}{\omega C})}{R} = \frac{X}{R}}$$

Il modulo di \dot{z} è

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\boxed{Z = \frac{V}{I}}$$

Il modulo di Z non potrà mai essere nullo, perché radice quadrata di somma di quadrati, però può minimizzarsi quando:

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0$$

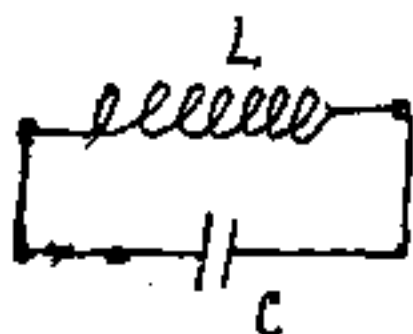
cioè:

$$\omega L C = 1$$

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \left(\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right); \quad (\omega = 2\pi f)$$

La frequenza: $\boxed{f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} \quad \left(\frac{\text{cicli}}{\text{sec}}\right)$

In via teorica consideriamo il circuito:



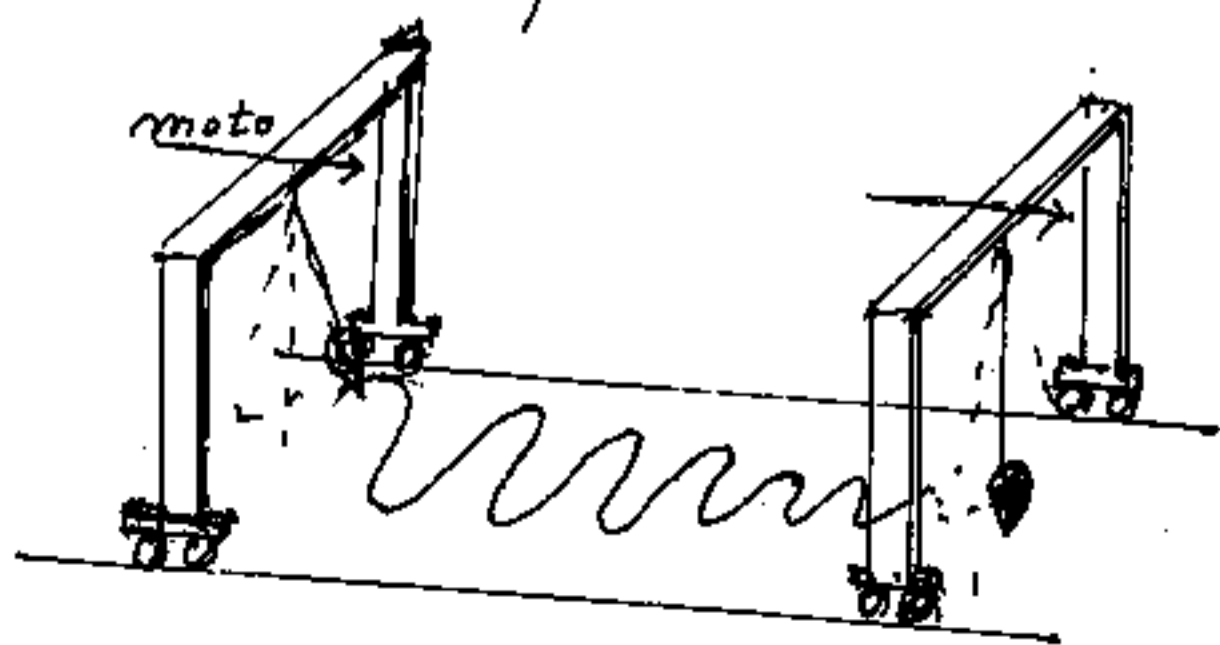
ed iniziamo da un certo istante in cui il condensatore sia carico, esso possiede una certa energia potenziale: $Q = CV$; $W = \frac{V^2 C}{2}$ che scaricherà sull'induttanza L la quale nel produrre il suo campo magnetico assumerà l'energia $W = \frac{1}{2} LI^2$, uguagliando le due energie potenziali:

$$\boxed{\frac{V}{I} = \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

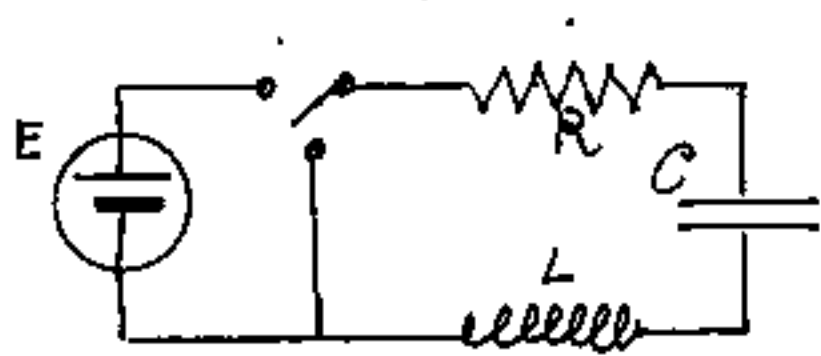
Il circuito si scambia energia (elettrica \leftrightarrow magnetica)

con inversione di corrente e di polarità, si è quindi in presenza di correnti alternate che risulteranno sinusoidali, la cui frequenza: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ è detta frequenza di risonanza per quei valori di L e di C.

Come un pendolo che scambia energia gravitazionale con energia cinetica, e viceversa, e continuerebbe indefinitamente se non vi fossero attriti; anche la nostra onda elettromagnetica proseguirebbe indefinitamente, però la concezione è puramente teorica, perché gli attriti esistono anche per la "i" e quindi avremo una oscillazione sinusoidale smorzata esattamente rappresentata da un pendolo di uguale periodo che spostandosi perpendicolarmente all'oscillazione traccia sul piano della sua traiettoria.



Data l'importanza dell'argomento cerchiamo di capire meglio, studiando il transitorio del circuito in figura:



$E =$ f.e.m. continua (pila)

$V =$ tensione variabile ai capi del condensatore C .

$(L \frac{di}{dt}) =$ f.e.m. di autoinduzione dell'induttanza L .

$$E - V - L \frac{di}{dt} = Ri$$

Si noti come la corrente "i" che la f.e.m. E della pila spingerebbe nel circuito, sia ostacolata dalla carica del condensatore, $v = \frac{Q}{C} = \frac{it}{C}$ e dalla f.e.m. di L dovuta alla variazione: $\frac{di}{dt}$ che è una variazione di corrente che genera una variazione di flusso magnetico, che genera una contro f.e.m.

$$i = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} \quad \text{ed anche:} \quad \left(di = C \frac{d^2V}{dt^2} \right)$$

sostituendolo:

$$(E - V) - LC \frac{d^2V}{dt^2} = RC \frac{dV}{dt}$$

dividiamo per LC : portando al secondo membro

$$\left(\frac{d^2V}{dt^2} \right) + \frac{R}{L} \left(\frac{dV}{dt} \right) + \frac{(V - E)}{LC} = 0$$

equazione differenziale del secondo ordine,

Poiché: $(dv) = d(v-E)$ se poniamo $(v-E) = y$
e $t = x$ l'equazione diventa:

$$y'' + \left(\frac{R}{L}\right)y' + \left(\frac{1}{LC}\right)y = 0$$

Per risolverla consideriamo l'eq. caratteristica

(vedi III vol.)

$$z^2 + \left(\frac{R}{L}\right)z + \left(\frac{1}{LC}\right) = 0$$

le cui radici:

$$\alpha_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$
$$\alpha_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

risolvono l'integrale generale:

$$(v-E) = \alpha e^{\alpha_1 t} + \beta e^{\alpha_2 t}$$

ove α, β , sono le costanti d'integrazione.

Esaminiamo le radici: α_1 e α_2 esponenti,
della base "e" dei logaritmi naturali.

Vi sono tre casi:

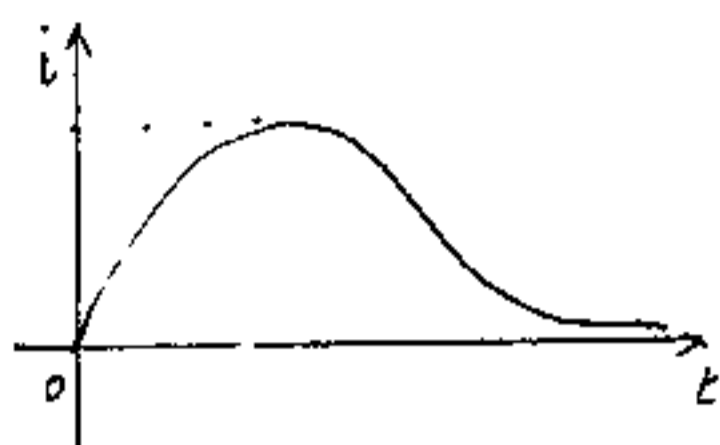
$$\Delta \text{ (discriminante)} = \left(\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}\right) \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0$$

I) Se il discriminante è positivo, si hanno
due radici reali, dovrà essere:

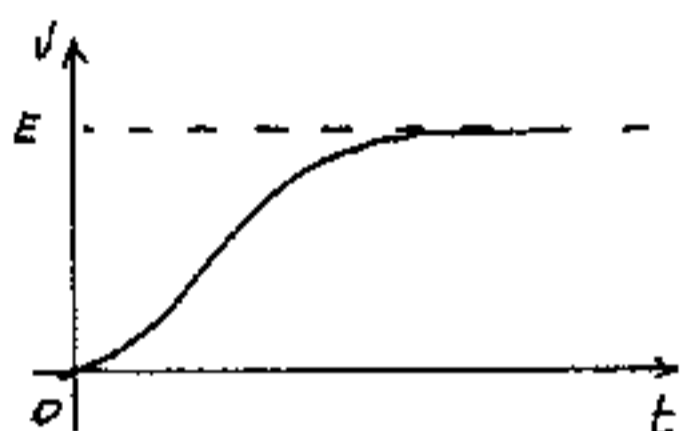
$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

ove: $(2\sqrt{\frac{L}{C}})$ è detta resistenza critica

I diagrammi di i e v in funzione di t sono:



" i " cresce da zero ad un massimo e torna a zero quando C è carico.



" v " ai capi del condensatore C parte da zero e tende asintoticamente ad E .

II) $(\Delta = 0)$ sia: $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ $(\Delta = 0)$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\left(\frac{R}{2L}\right)$$

$$(v - E) = A e^{-\frac{R}{2L}t} + \beta t e^{-\frac{R}{2L}t}$$

III) $(\Delta < 0)$ è il caso di radici immaginarie nell'equazione caratteristica, in questo caso (vedi vol. III) si opera una trasformazione sostituendo i coefficienti A e β otteniamo una forma trigonometrica.

Infatti ricordiamo (dalla trigonometria

complessa di Eulero) che:

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} &= \cos(x) \\ \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} &= \sin(x) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} e^{ix} &= \cos(x) + i \sin(x) \\ e^{-ix} &= \cos(x) - i \sin(x) \end{aligned}$$

Nel nostro caso poniamo:

$$\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = \sqrt{(-1)\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}\right)} = (\sqrt{-1})\omega = j\omega$$

notare che: $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 2\pi f^0$ (frequenza di risonanza f)

qui il valore di ω è variato non essendo $R=0$.

Le radici dell'equazione caratteristica diventano:

$$\left(\frac{-R}{2L} + j\omega\right)t \quad ; \quad \left(\frac{-R}{2L} - j\omega\right)t$$

avremo:

$$(V-E) = e^{-\frac{Rt}{2L}} \left[A e^{+j\omega t} + B e^{-j\omega t} \right]$$

Consideriamo due diverse costanti di integrazione:

$$M = (A + B) \quad ; \quad N = j(A - B)$$

cioè:

$$A = \left(\frac{M + N/i}{2}\right) \quad ; \quad B = \left(\frac{M - N/i}{2}\right)$$

sostituendo:

$$(V-E) = e^{-\frac{Rt}{2L}} \left[\left(\frac{M + N/i}{2}\right) e^{+j\omega t} + \left(\frac{M - N/i}{2}\right) e^{-j\omega t} \right]$$

$$(V-E) = e^{-\frac{Rt}{2L}} \left[\mathcal{M} \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) + \mathcal{N} \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right) \right]$$

$$(V-E) = e^{-\frac{Rt}{2L}} \left[\mathcal{M} \cos(\omega t) + \mathcal{N} \sin(\omega t) \right]$$

Cerchiamo di definire le costanti di integrazione con condizioni limite.

per $t=0$; $V=0$; $e^{-\frac{Rt}{2L}} = 1$;

$$-E = \left[\mathcal{M} \cos(0) + \mathcal{N} \sin(0) \right]$$

$$\mathcal{M} = -E$$

Per trovare \mathcal{N} facciamo la derivata: $\frac{dV}{dt} C$ moltiplicata "C" perché l'intensità di corrente $i = C \frac{dV}{dt}$ infatti $dQ = i dt = C dV = (\text{variazione di carica})$.

$$\frac{d(V-E)}{dt} C = \frac{dV}{dt} C = i = -\frac{R}{2L} e^{-\frac{Rt}{2L}} \left[\mathcal{M} \cos(\omega t) + \mathcal{N} \sin(\omega t) \right] + e^{-\frac{Rt}{2L}} \left[-\omega \mathcal{M} \sin(\omega t) + \omega \mathcal{N} \cos(\omega t) \right]$$

per: $t=0$ si ha: $i=0$ $e^{-\frac{Rt}{2L}} = 1$

$$0 = -\frac{R}{2L} (\mathcal{M}) + \omega (\mathcal{N}) \quad \text{ma: } \mathcal{M} = -E$$

$$\mathcal{N} = \frac{-RE}{2L\omega}$$

$$(V-E) = e^{-\frac{Rt}{2L}} \left[-E \cos(\omega t) + E \left(\frac{-R}{2L\omega} \right) \sin(\omega t) \right]$$

$$V = E \left[1 - e^{-\frac{Rt}{2L}} \left(\cos(\omega t) + \left(\frac{R}{2\omega L} \right) \sin(\omega t) \right) \right]$$

$$C \left(\frac{dV}{dt} \right) = i = CE \left[+ \frac{R}{2L} e^{-\frac{Rt}{2L}} \left(\cos(\omega t) + \frac{R}{2\omega L} \sin(\omega t) \right) + \right. \\ \left. - e^{-\frac{Rt}{2L}} \left(-\omega \sin(\omega t) + \frac{R}{2\omega L} \omega \cos(\omega t) \right) \right]$$

$$i = CE e^{-\frac{Rt}{2L}} \left[+ \frac{R}{2L} \left(\cancel{\cos(\omega t)} \right) - \frac{R}{2L} \cancel{\cos(\omega t)} + \left(\frac{R^2}{4L^2} \omega + \omega \right) \sin(\omega t) \right]$$

$$i = \frac{CE e^{-\frac{Rt}{2L}}}{\omega} \left[\left(\left(\frac{R}{2L} \right)^2 + \omega^2 \right) \sin(\omega t) \right]$$

$$\left(\left(\frac{R}{2L} \right)^2 + \omega^2 \right) = \left(\frac{R}{2L} \right)^2 \pm \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L} \right)^2 + \frac{1}{LC}} \right)^2$$

$$= \left(\frac{R}{2L} \right)^2 - \left(\frac{R}{2L} \right)^2 = \frac{1}{LC}$$

$$i = \frac{CE}{\omega} e^{-\frac{Rt}{2L}} \frac{\sin(\omega t)}{LC}$$

$$i = \frac{E}{\omega L} e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin(\omega t)$$

$$i = E \left(\frac{\sin(\omega t)}{(\omega L) e^{\frac{+Rt}{2L}}} \right)$$

è meglio scrivere:

$$i = \left[\frac{E}{\omega L} \sin(\omega t) \right] \left[e^{-\frac{Rt}{2L}} \right]$$

sinusoide fattore smorzante

fattore smorzante: $(e^{-\frac{Rt}{2L}} = 0)$ per $(t = \infty)$

Abbiamo già trattato lo smorzamento sul moto armonico, comunque ripetiamo le "dizioni".

$$y = a \cos(\omega t)$$

espressione di funzione sinusoidale: "a" = ampiezza massima della elongazione ($t=0$ $+2k\pi$)
 $0 \leq k \leq \infty$

che nel caso coseno per $t=0$; $y=a$

$$y = a \cos(\omega t) (e^{-\kappa(\omega t)})$$

ove: $e^{-\kappa(\omega t)}$ = fattore smorzante

κ = coefficiente di smorzamento

$2\pi\kappa$ = decremento logaritmico

$$(T = \text{periodo} = \frac{2\pi}{\omega})$$

$\frac{y_n - y_{n+1}}{y_n}$ = smorzamento, da alcuni detto fattore di smorzamento

Si noti che se facciamo variare (ωt) di 2π in 2π

avremo la serie:

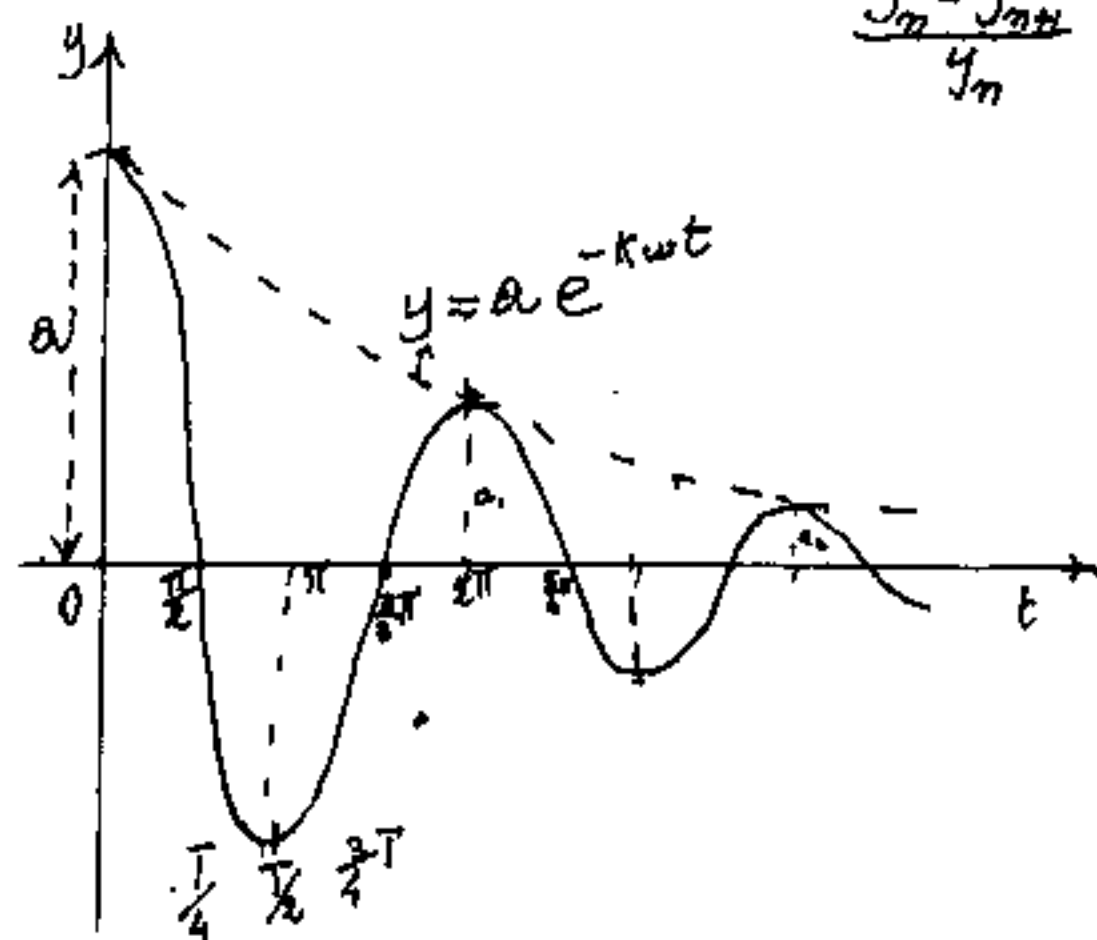
$$a e^0; a e^{+2\pi\kappa}; a e^{+4\pi\kappa}$$

$$\text{ma, } a e^{-2\pi\kappa} = a (e^{2\pi\kappa})^{-1};$$

$$a e^{-4\pi\kappa} = a (e^{2\pi\kappa})^{-2} \dots$$

Ciò si ha una progressione geometrica la cui ragione è: $e^{2\pi\kappa}$ che rappresenta "a" volte i massimi positivi decrescenti da "a" ($t=0$) a zero per $t = \infty$. Siano a_1 ed a_2 due massimi positivi,

$$a_1 e^{-2\pi\kappa} = \frac{a_1}{e^{2\pi\kappa}} = a_2; \quad \frac{a_1}{a_2} = e^{2\pi\kappa}; \quad \text{prendiamo i}$$



logaritmi naturali dell'espressione:

$$\ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = \ln(e^{2K\pi})$$

$$\ln(a_1) - \ln(a_2) = 2K\pi$$

diminuzione dei valori Logaritmici
di due massimi positivi consecutivi} = {decremento
logaritmico

Ciò giustifica la definizione di

$2\pi K =$ decremento logaritmico

attenzione: non è $(a_1 - a_2)$ che sarebbe la
diminuzione dei valori delle ampiezze a_1 e a_2 ,
abbiamo dimostrato che il loro rapporto

$$\frac{a_m}{a_{m+1}} = e^{2K\pi} \quad (\text{progressione geometrica})$$

quindi essendo variabile il decremento delle
ampiezze si è trovato costante il
decremento del loro logaritmo.

La Risonanza

La risonanza si verifica fra le apparecchiature capaci di emettere vibrazioni della stessa specie e della stessa frequenza.

Nei suoni (da cui la parola risonanza), gli esempi sono molteplici: due diapason ove eccitando uno entra in vibrazione anche il secondo. Caratteristica l'esperienza di porre cavallucci di carta sulle corde di



una chitarra, se un altro strumento fa la nota di una delle corde della chitarra, questa entrando in vibrazione fa saltar via il cavalluccio di carta mentre le altre corde sono rimaste ferme.

Ma a noi interessa la risonanza nelle onde elettromagnetiche, ove il circuito generatore ed il circuito ricevente debbono avere la stessa fre-

quenza: $f = \frac{\omega}{2\pi}$; ($\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$); $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ L_1 e C_1 ; L_2 e C_2 possono essere diversi, ma

$L_1 C_1 = L_2 C_2$ ciò porta: $\frac{L_1}{L_2} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{1/C_1}{1/C_2}$

Le induttanze stanno fra loro come gli inversi delle capacità. (Nei circuiti in risonanza)

Dobbiamo riprendere due tipi di circuito che abbiamo già visti.

Superato il periodo transitorio, di apertura o di chiusura di un circuito reattivo sotto corrente continua si ha che, per un condensatore, non passa corrente, essendo le due lammine separate da un dielettrico (isolante). Per un solenoide, una volta costituita l'elettrocalamita, la corrente circola nel solenoide soggetta alla resistenza ohmica del solenoide stesso.

Una corrente alternata attraversa tanto più facilmente un condensatore, quanto più alta è la frequenza e quanto maggiore è la capacità. L'impedimento si chiama reattanza capacitiva, si indica con $\chi_c = \frac{1}{\omega C}$

In un solenoide invece, oltre la resistenza ohmica, l'alternarsi del campo magnetico genera un impedimento che si chiama reattanza induttiva, si indica con $\chi_L = \omega L$ ed è tanto maggiore quando maggiore è la frequenza e tanto maggiore quanto maggiore è il coefficiente di autoinduzione "L" del solenoide.

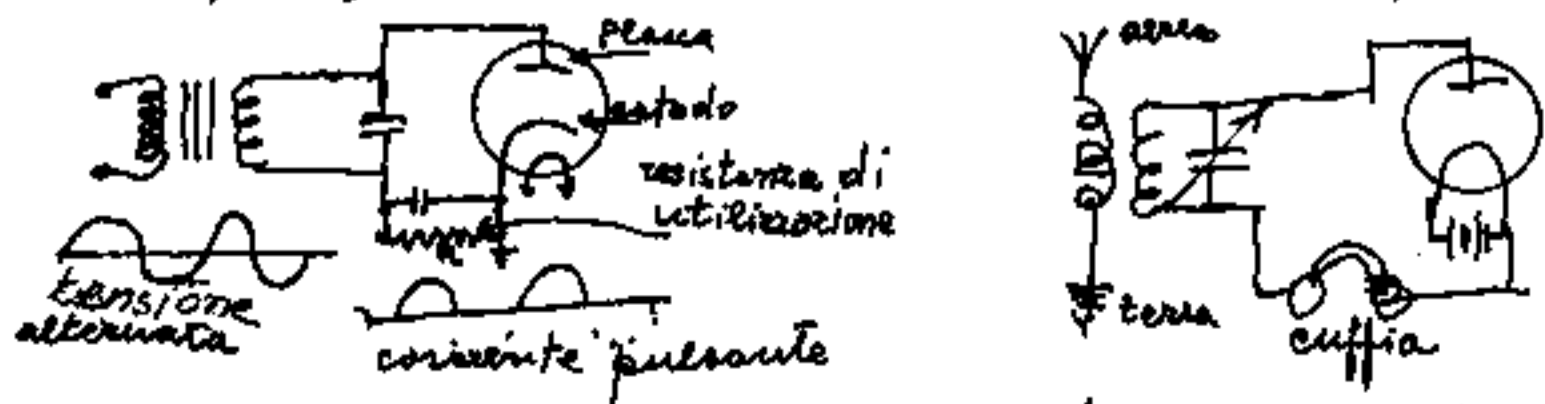
Mentre una resistenza ohmica trasforma l'energia elettrica in energia termica, (effetto Joule) un condensatore accumula cariche elettriche, (che restituisce), un solenoide produce un campo magnetico, che restituisce in energia elettrica. Cioè, mentre le resistenze ohmiche disperdono in calore l'energia elettrica, le reattanze (capacitiva e induttiva) accumulano energia potenziale che restituiscono in energia elettrica.

Abbiamo già dato le equazioni di Maxwell, e da esse il vettore di Poynting, sulla potenza irradiata. Le onde radio sono state scoperte da Hertz, ispirato dal trattato di elettricità scritto dal Maxwell, quest'ultimo, si dice, che avendo matematicamente rilevato che in casi particolari la corrente elettrica si trasmetteva senza fili e senza conduttori, ne faceva una battuta accademica. Hertz, rilevato che la scintilla che scocca fra i poli di un generatore non ha conduttori metallici, fece delle esperienze con oscillatori e risonatori,

producendo onde elettromagnetiche che poi furono chiamate onde hertziane. e possono trasmettersi a distanza senza conduttori metallici. Hertz fece anche studi notevoli sulla luce violetta e sulla velocità dell'induzione magnetica, morì ancora giovane (1857 - 1894). Le onde radio furono studiate dal Righi (1850 - 1921), eminente fisico che portò il suo contributo geniale nei vari campi della fisica, continuò le ricerche di Hertz, il suo oscillatore a sfere per dimostrare come nelle scintille elettriche si producevano onde elettromagnetiche di onda cortissima. Diede una veste sperimentale alle teorie di Maxwell, precorse l'invenzione di Marconi suo allievo. Marconi con l'applicazione dell'antenna rese praticamente possibile la trasmissione anche a distanza notevole, e dal telegrafo al telefono senza fili, l'interesse produsse un rapido sviluppo. Il primo ricevitore utilizzato da Marconi fu quello inventato da Galvani-Oresti, dieci anni prima, e sperimentato al Liceo di Fermo.

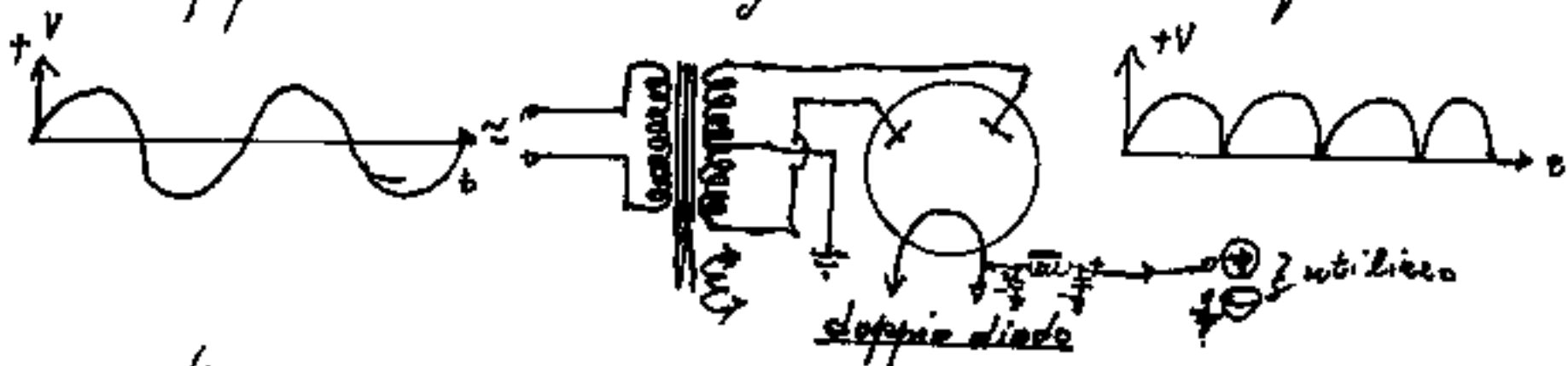
La Tecnologia

Le applicazioni si evolvono rapidissimamente, dalla pila di Volta alla lampadina di Edison, con la scoperta che il filamento della lampadina emette elettroni, (Effetto Edison) detto anche effetto termoionico o termoelettronico. L'effetto fu interpretato da G. Fleming, che costruì la prima valvola radio, aggiungendo una placca conduttrice nella lampadina. (Anodo positivo destinato ad attrarre e captare gli elettroni emessi dal filamento). La valvola fu detta "diodo" (due elettrodi) uno che emette elettroni, cioè il filamento, poi sostituito con conduttore detto "catodo"; l'altro elettrodo, la "placca", anodo, che se positiva attira gli elettroni, se negativa li respinge. La valvola fu usata come raddrizzatrice di tensioni alternate poste in placca, o come rivelatrice delle onde elettromagnetiche provenienti dallo spazio. In entrambi i casi, però, restituisce solo la semionda positiva.



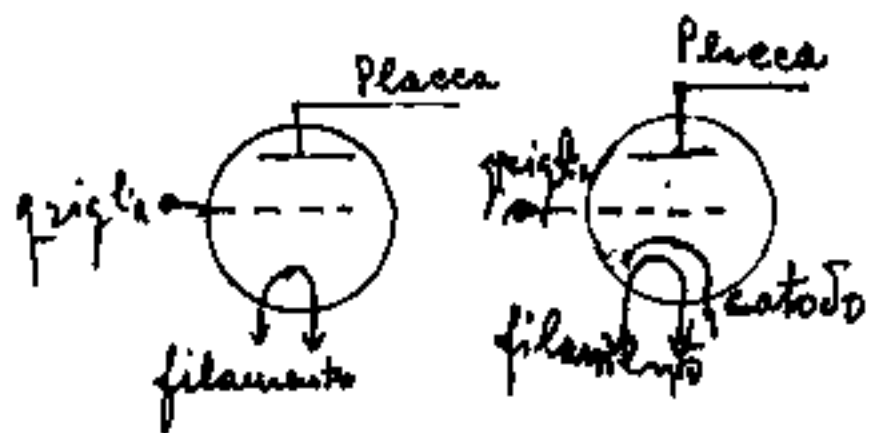
avremo quindi una corrente pulsante.

Volendo raddrizzare le due semionde, si usa il doppio diodo collegato con un trasformatore



opportuno, e si cerca con condensatori e impedenze induttive di limitare l'ondulorità della tensione positiva.

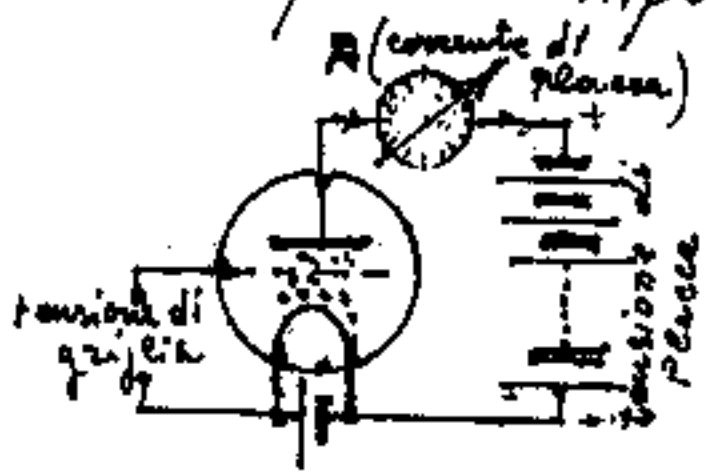
Lee DeForest perfezionò la valvola "diodo" introducendo, fra filamento e placca un terzo elettrodo (la valvola è detta triodo) il terzo elettrodo detto "griglia", perché costituito da una specie di spirale o rete metallica che, se positiva, accelera gli elettroni verso la placca; se negativa, ne diminuisce il flusso fino a respingerli. Fu introdotto un nuovo elettrodo detto "catodo" che



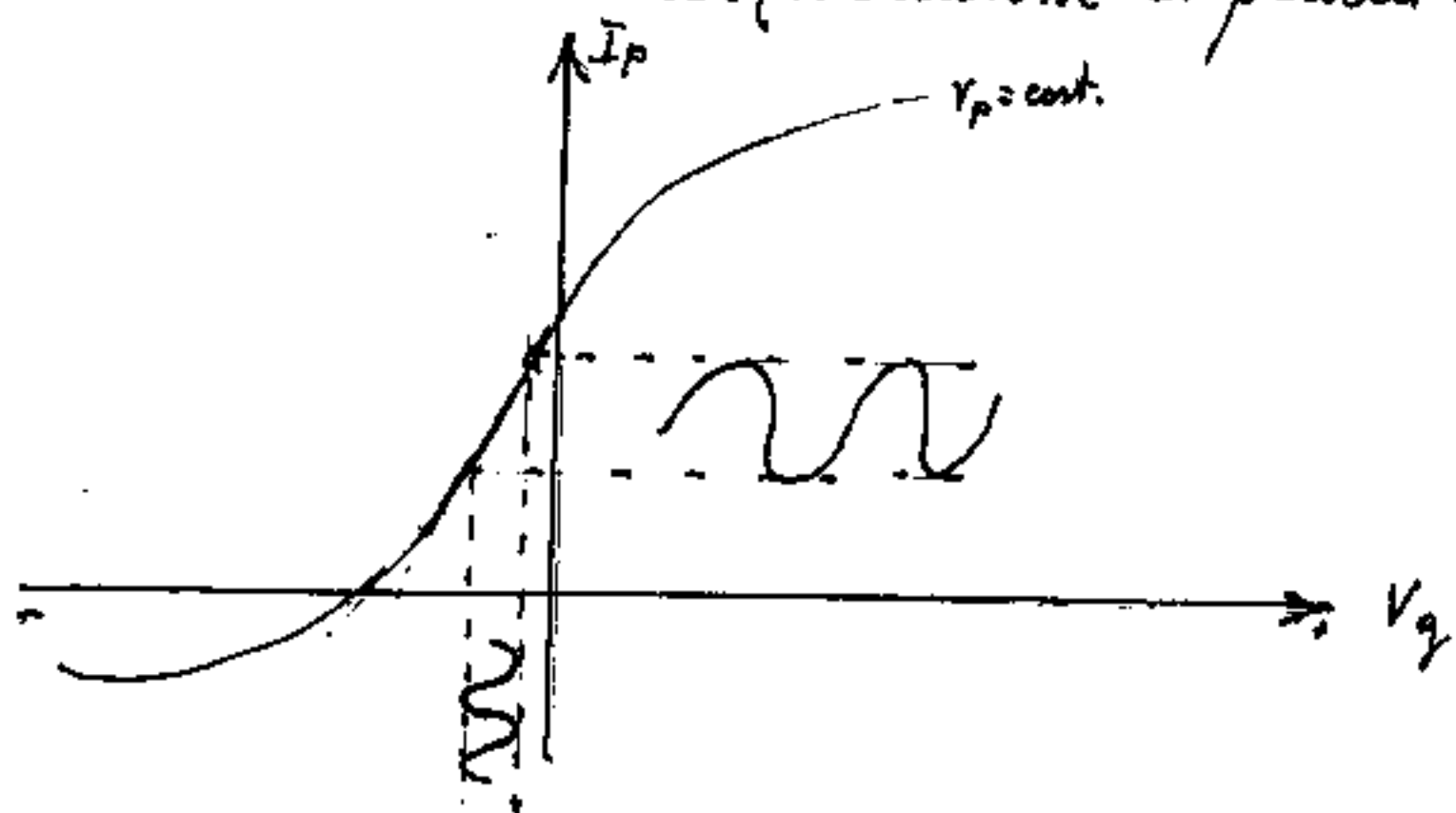
riscaldato dal filamento produceva più elettroni. La valvola "triodo"

può avere come produttore di elettroni il filamento o il catodo, la griglia ha una funzione delicatissima e la placca la consideriamo a tensione costante.

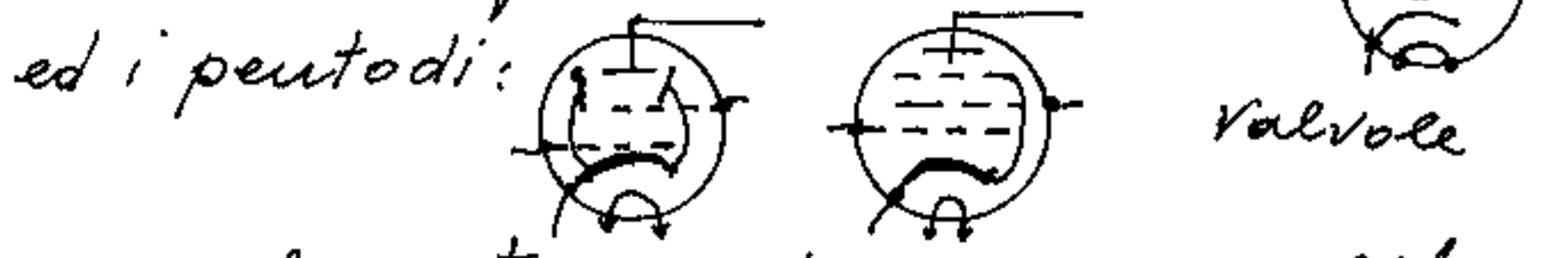
Per capire l'importante funzione della griglia è opportuno fare un dia-



gramma: V_g = tensione di griglia, I_p = corrente di placca. (a tensione di placca costante)

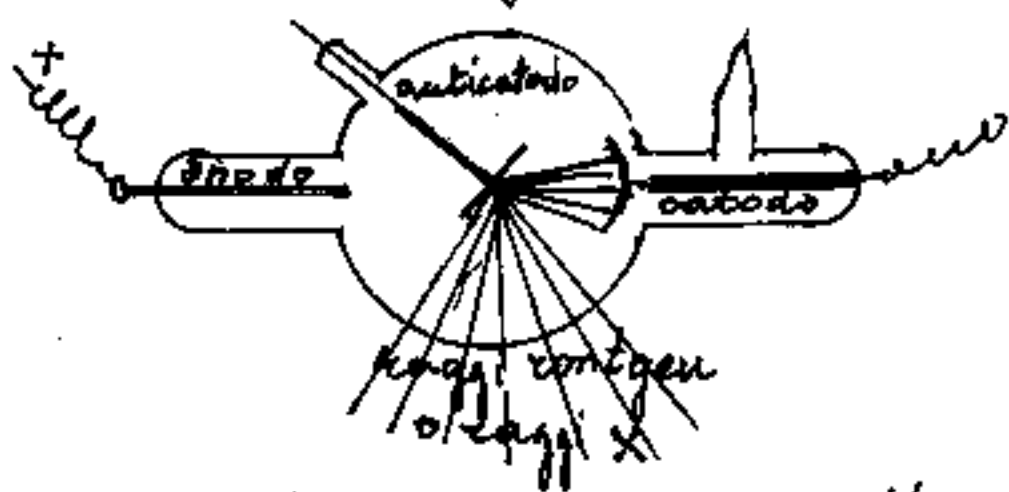


Si chiama "pendenza" l'inclinazione del tratto rettilineo del grafico e rappresenta il coefficiente di amplificazione dato dal rapporto fra la variazione di corrente di placca e la corrispondente variazione di tensione di griglia. Successivamente le griglie sono aumentate formando i tetrodi:



generalmente usate come amplificatrici, lasciando ai diodi la rivelazione, e indirizzando l'onda portante la modulazione.

L'applicazione di questi fenomeni non è limitata alla valvola elettronica per la radio; un tubo a vuoto spinto, che abbia un elettrodo positivo (anodo); ed un elettrodo negativo (catodo) presenta un caso interessantissimo quando il flusso elettronico emesso dal catodo ed attratto dall'anodo, viene riflesso da un "anticatodo" che impedisce l'arrivo all'anodo ed i raggi riflessi o raggi X o raggi "Röntgen" (dal suo scopritore) hanno una minima lunghezza d'onda ($\frac{1}{10000}$ delle onde luce) ed hanno la caratteristica di attraversare i corpi, da cui le radiografie.



Il campo delle lunghezze d'onda delle onde elettromagnetiche è così vasto che non è rappresentabile in unica scala. Si va da frazioni di Ångström per i raggi gamma, ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ metri} = 10^{-8} \text{ cm.} = 10^{-7} \text{ mm}$) ai 4000 Å per i raggi violetti della luce agli 8000 Å per i raggi rossi, alle onde herztiane da pochi millimetri a chilometri.

Che il raddrizzamento delle onde elettromagnetiche, potesse farsi anche con mezzi diversi dalle valvole termoioniche, era noto da tempo. Per esempio la "galena" (solfo di piombo) ha poteri di raddrizzatore (rivelatore) di onde elettromagnetiche.

L'apparecchiatura che rivela le onde elettromagnetiche ordinariamente è chiamata: "detector" (parola inglese che significa rivelatore).

Il raddrizzatore a cristallo (galena) è costituito

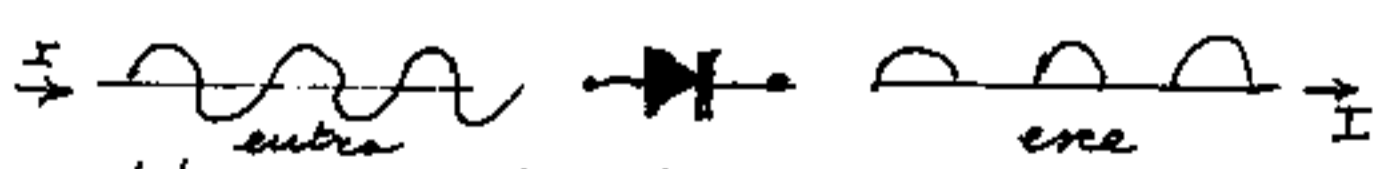


da un alloggiamento metallico ove viene fissato il cristallo (PbS) e che termina con uno spinotto, l'altro spinotto, ha uno snodo che

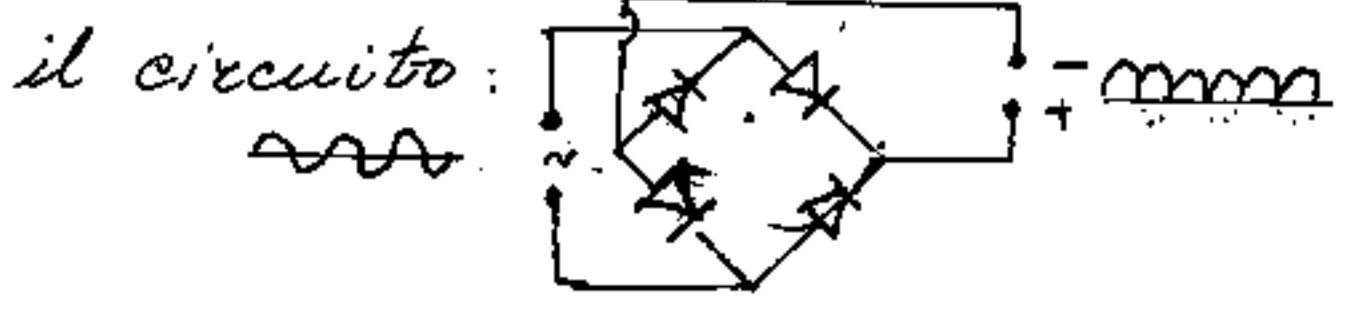
termina in una spirulina metallica che poggia sul cristallo. Nei circuiti, il raddrizzatore si simboleggia con:



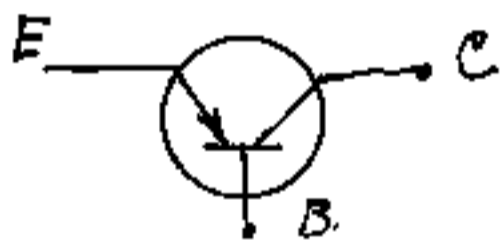
(raddrizza una semionda) cioè ottiene una corrente pulsante da una corrente alternata:



Per raddrizzare le due semionde si può fare il circuito:



Lo studio dei semiconduttori portò alla scoperta dei transistori che potevano sostituire il triodo. (i transistori furono detti triodi a cristallo). Lo spazio occupato da un transistor è molto minore della valvola elettronica, le sue dimensioni sono circa la punta di un lapis. Il transistor è costituito dall'affiancamento di semiconduttori e può avere come successione pnp oppure npn. questi cristalli di germanio e di silicio corrispondono ai tre elettrodi che escono dal transistor. il primo è detto "emettitore" (E) quello centrale "base" (B) ed il terzo è detto "collettore" (C). Lo schema nei circuiti elettronici è:



L'elettronica ha fatto

piani da gigante; i circuiti prestampati si prestano a confezionare apparecchi sempre più piccoli, addirittura si prefabbricano microcircuiti contenenti anche centinaia di transistor. Le applicazioni sono ormai numerosissime dagli orologi ai computer, accelerando il progresso scientifico.

Analisi Armonica

La ricerca delle funzioni sinusoidali che in numero finito, od infinito, compongono ogni funzione periodica, dicesi: "analisi armonica".

Avvalendosi del teorema di Fourier che dice: "Ogni funzione periodica di frequenza ν può essere espresso in modo univoco mediante serie di funzioni trigonometriche con frequenze: $\nu, 2\nu, 3\nu, \dots, m\nu, \dots$ "

Ciò porta alla serie di Fourier:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

per $n=1$, si ha la prima armonica; per $n=2$, la seconda armonica, e così via.

I coefficienti dello sviluppo, sono dati:

$$a_0 = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^{2\pi} f(\alpha) d\alpha$$

$$a_n = \left(\frac{1}{\pi}\right) \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos(n\alpha) d\alpha$$

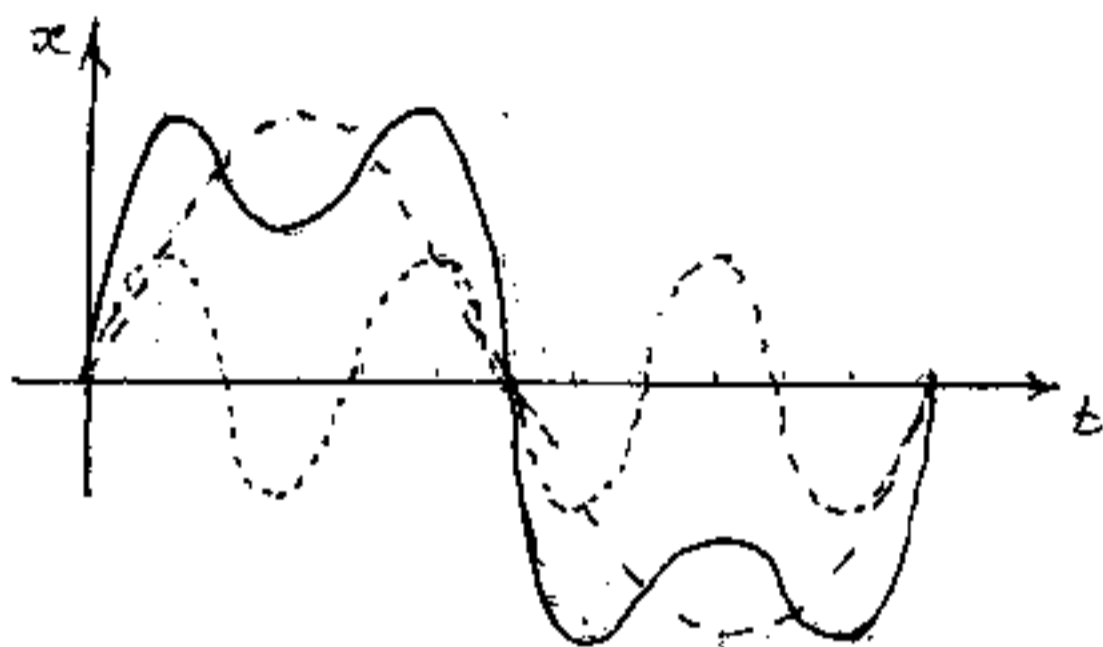
$$b_n = \left(\frac{1}{\pi}\right) \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin(n\alpha) d\alpha$$

ore le grandezze alternate, (fenomeni ciclici), sono esprimibili:

$$\underline{f(\alpha) = f(\alpha + 2k\pi)}$$

Supponiamo di voler rappresentare una funzione abbastanza semplice: $x = 2\sin(\omega t) + \sin(3\omega t)$

(per ora in fase)

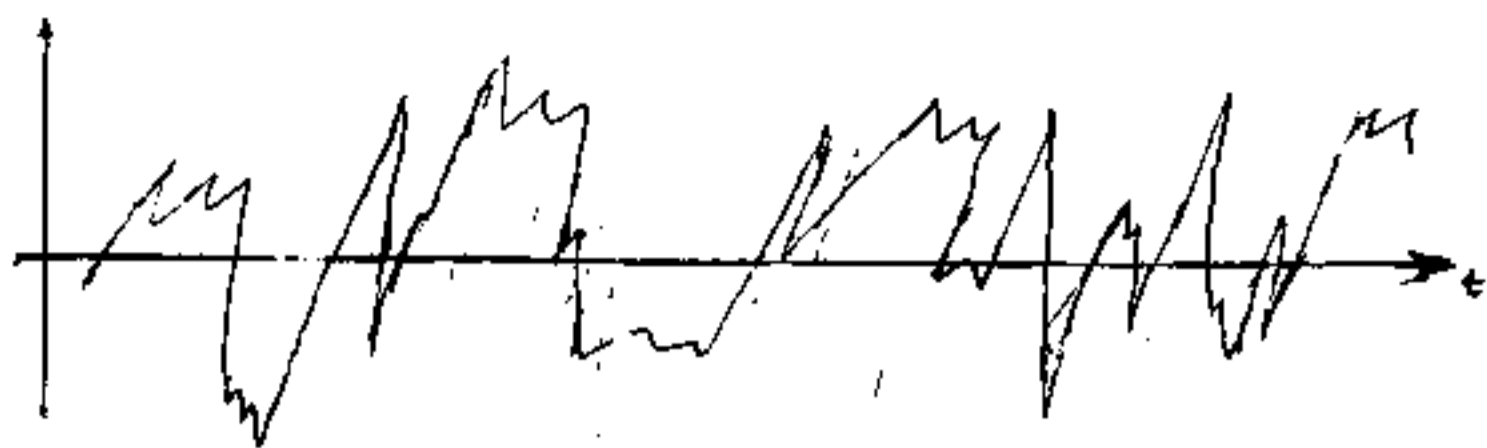


Dalla rappresentazione si nota come la simmetria dell'onda positiva con l'onda negativa di $2\sin(\omega t)$, si conservi nella curva risultante, e come le simmetrie delle onde positive e negative di $\sin(3\omega t)$ si conservano nella modulazione della risultante.

Il fenomeno vale per ogni tipo di frequenza; in acustica, il fonografo di Edison ove una puntina costrutta a percorrere il solco delle vibrazioni incise da apparecchi agenti per effetto di suoni, riproduce, (opportunamente collegata), i suoni stessi.

Visivamente, se amplifichiamo le vibrazioni sonore di una membrana acustica in grafico

tracciato sul nastro scorrevole, sarà del tipo:



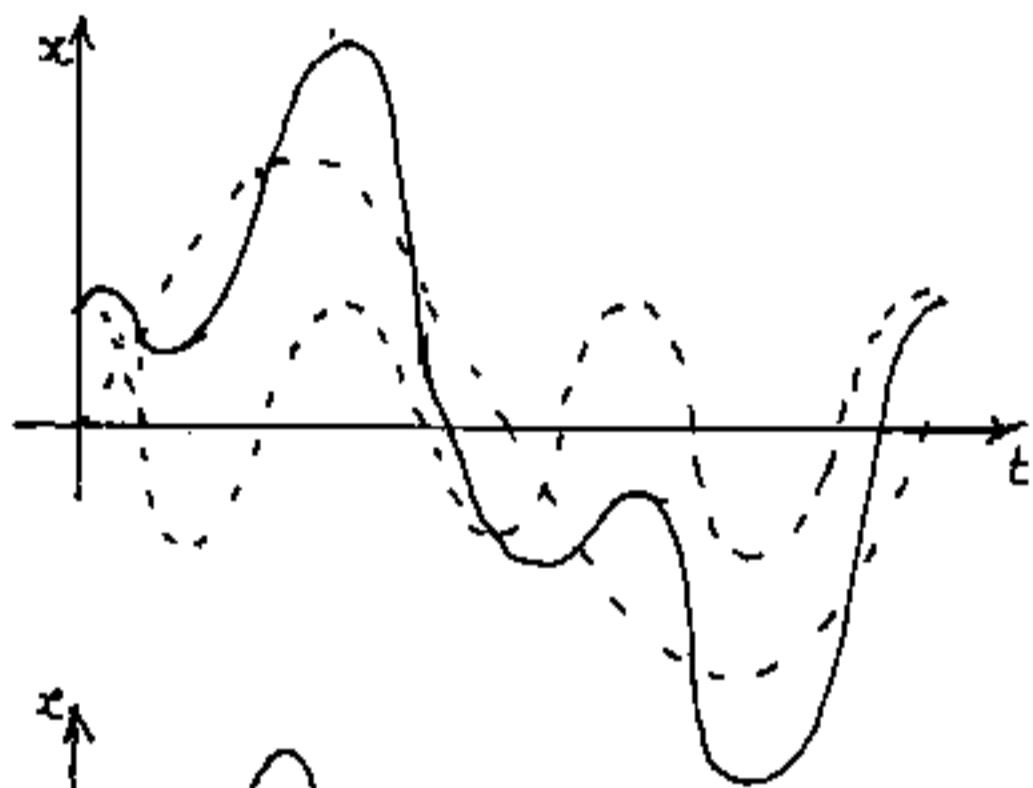
ove in ascisse sono i tempi sincronizzati con lo scorrimento del nastro, in ordinate l'intensità; ma, l'intensità è dovuta alla maggiore o minore pressione sulla membrana, cioè alle vibrazioni elastiche. La frequenza della vibrazione ci dà l'altezza del suono, ma è sempre la somma di molte frequenze, per esempio il la_3 di un violino stradivarius, ha la vibrazione fondamentale a 435 vibrazioni al secondo, alla quale si aggiungono una vibrazione di frequenza 870 (2^a armonica) ampia $\frac{1}{4}$ della fondamentale, una vibrazione di frequenza 1305, ampia $\frac{1}{2}$ della fondamentale, oltre questa 3^a armonica si aggiungono anche la 4^a , 5^a , 6^a , 7^a , 8^a , 9^a tutte ampie circa $\frac{1}{10}$ o meno della fondamentale.

Il la_3 di un violino comune ha la fondamentale a 435 di frequenza ampia 0,8 la 2^a armonica ampia $\frac{1}{2}$, la 3^a , 0,8; la 4^a , $\frac{1}{4}$; la 5^a , $\frac{1}{4}$; la 6^a , $\frac{1}{4}$, la 7^a , 0,4; la 8^a e la 9^a , $\frac{1}{10}$. Ciò ci chiarisce quello che viene

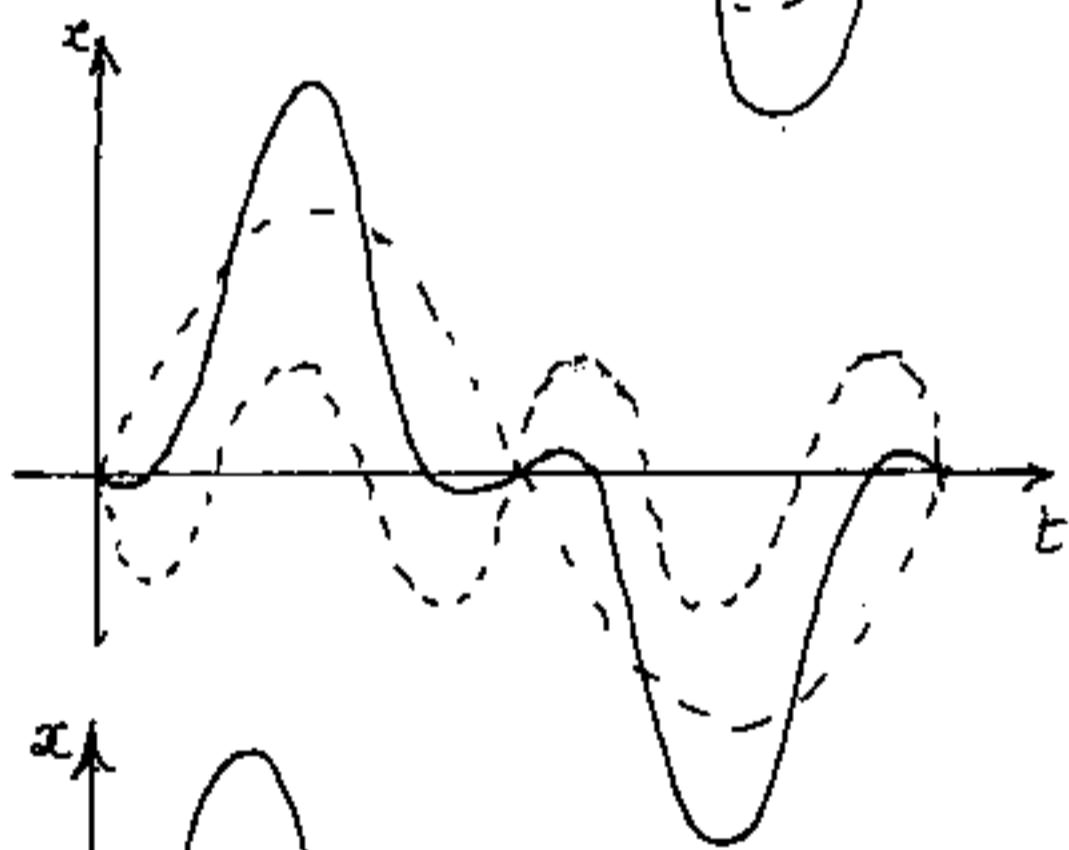
chiamato nei suoni: "il timbro o metallo", cioè come la stessa nota musicale, prodotta da strumenti diversi, sia diversa.

Ma nella composizione delle armoniche occorre anche tener conto della loro fase. Nel grafico: $x = 2\sin(\omega t) + \sin(3\omega t)$ non abbiamo considerato la fase, cioè abbiamo posto: $\varphi = 0$.

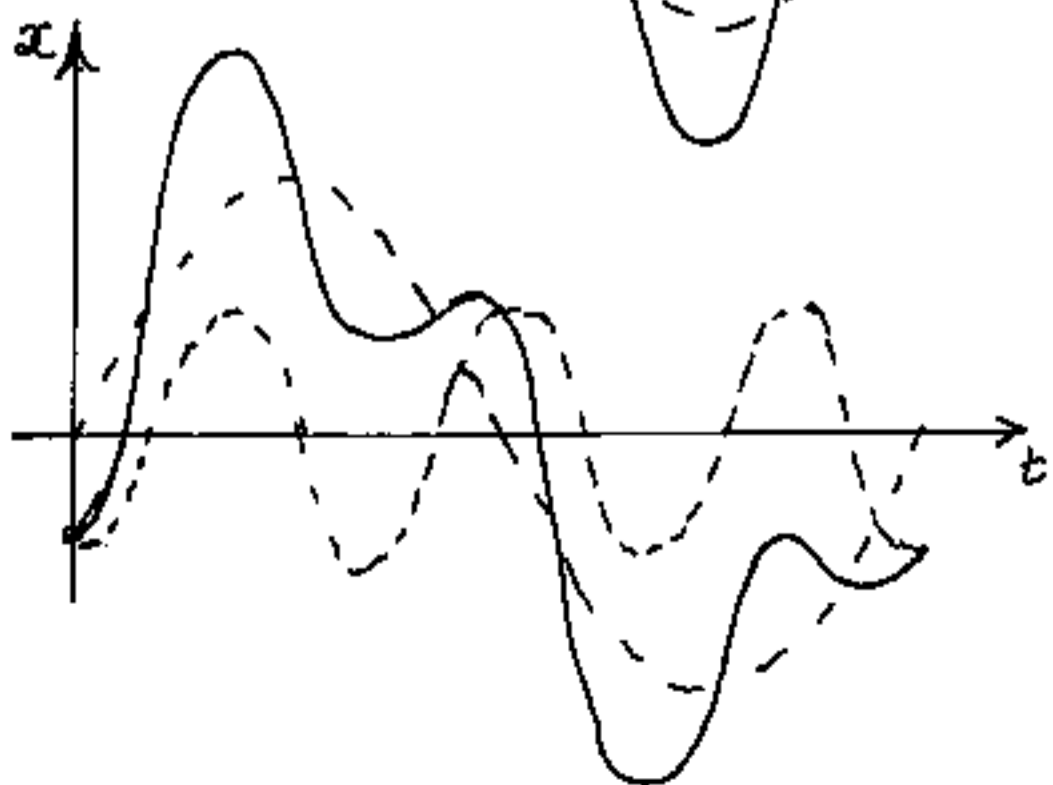
Consideriamo ora: $x = 2\sin(\omega t) + \sin(3\omega t + \varphi)$.



$$\varphi = \pi/2$$



$$\varphi = \pi$$



$$\varphi = \frac{3}{2}\pi$$

Nel nostro esempio abbiamo considerato tre fasi caratteristiche della terza armonica, prima che ritorni la figura iniziale ($\varphi=0$) = ($\varphi=2\pi$). Poiché ciascuna armonica può avere una fase diversa, consideriamo un'armonica generica (per es. l' m^{esima}) che addiziona $\dots + K_m \sin(m\omega t + \varphi_m) + \dots$ sviluppando si ha:

$$K_m \left[\sin(m\omega t) \cos(\varphi_m) + \cos(m\omega t) \sin(\varphi_m) \right]$$

posto:

$a_m = K_m \sin(\varphi_m)$; $b_m = K_m \cos(\varphi_m)$; avendo, ad-
dizionando le varie armoniche:

$$f(\omega) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + a_3 \cos(3\omega t) + \dots + a_n \cos(n\omega t) + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin(2\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) + \dots + b_n \sin(n\omega t)$$

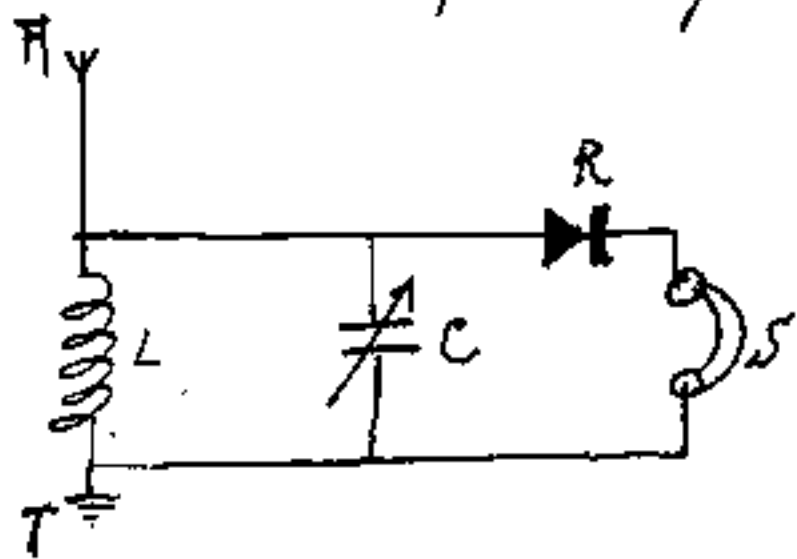
che possiamo sintetizzare:

$$f(\omega) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{=n} a_i \cos(i\omega t) + b_i \sin(i\omega t)$$

È questa la serie di Fourier, dove si nota che i singoli coefficienti sono funzione delle fasi delle singole armoniche, e quindi di non facile determinazione. Con i risonatori si può determinare l'intensità delle singole armoniche, meno facile determinare la loro fase.

Apparecchi riceventi

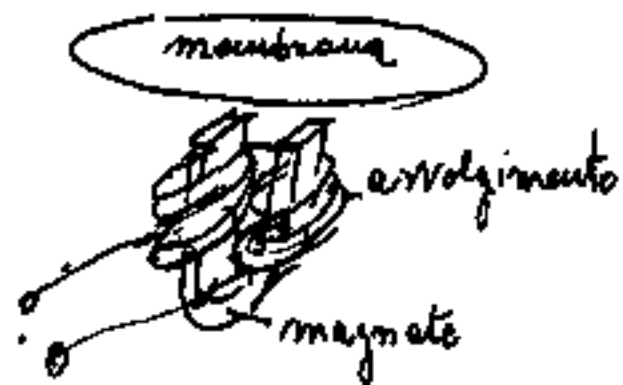
Consideriamo un ricevitore di onde Hertziane, tale ricevitore può essere calcolato per ricevere una particolare frequenza, ma può avere il suo analizzatore per scegliere la frequenza in un certo campo di frequenze (C-variabile).



I poli di arrivo sono l'aereo (o antenna) A, e la terra T.

Il circuito di risonanza è dato dall'induttanza L

e dal condensatore C. L'onda hertziana sinusoidale, modulata è rivelata dal raddrizzatore R, che raddrizza una sola semionda, e lascia inalterata la modulazione. La restituzione sonora su altoparlante o cuffia S è data dalla modulazione della corrente che passando attraverso l'avvolgimento di una elettrocalamita fa vibrare una membrana che riproduce il suono.



Per induttanza intendiamo quella parte di circuito elettrico caratterizzata dal coefficiente

di mutua induzione che si misura in Henry.

In genere l'induttanza è un avvolgimento

di filo conduttore elettrico. Se l'avvolgimento avviene su un cilindro di raggio costante di lunghezza molto maggiore del raggio di sezione, tale avvolgimento (induttanza) si chiama solenoidale. (Il solenoide può essere a più strati di spire, come nel caso di certe elettrocalamite ove il solenoide è avvolto su materiali ferromagnetici; ma può avere anche un solo strato di spire addirittura non affiancate fra loro lasciando aria all'interno del solenoide come avviene per le indutture radio per alta frequenza) Il solenoide può essere torico anziché rettilineo, oppure può avere le spire non parallele, ed altri artifici nell'avvolgimento, ed in questo caso le indutture si chiamano bobine, termine talvolta usato anche per solenoidi rettilinei.

Per il solenoide cilindrico rettilineo, costituito di N spire di raggio r e lungo l con $l \gg r$, il coefficiente di autoinduzione è:

$$L = \frac{4\pi^2 N^2 r^2}{l}$$

se il nucleo, anziché aria, è materiale ferromagnetico di permeabilità μ e sezione S ,

$$L = \frac{4\pi^2 N^2 S}{l} \mu$$

Il condensatore è invece costituito da lamine metalliche conduttrici, separate da un dielettrico (che può essere anche aria).

La capacità "C" di un condensatore è data da:

$$(capacità \text{ in picofarad}) = C = (0,0885) \epsilon_r \frac{S \text{ (cm}^2\text{)}}{d \text{ (cm)}} \quad \begin{matrix} \text{(area affacciata)} \\ \text{(distanza)} \end{matrix}$$

ove "S" è l'area delle superfici affacciate delle lamine, "d" è la distanza fra le lamine affacciate (è anche lo spessore del dielettrico interposto), " ϵ_r " la costante dielettrica relativa del dielettrico interposto (per l'aria $\epsilon_r = 1$). L'unità di misura è il "Farad" (troppo grande, per cui praticamente si usa il microfarad = 10^{-6} Farad, o il Picofarad = 10^{-12} Farad). (Due lamine metalliche parallele nell'aria, distanti 1mm., che si affacciano per 1 cm², hanno una capacità di 0,885 picofarad, quasi un picofarad).

Variando la superficie affacciata delle lamine si ha un condensatore di capacità variabile e quindi potrà essere il variatore di un circuito oscillante per sintonizzarsi su una particolare frequenza (in quel campo di frequenze).

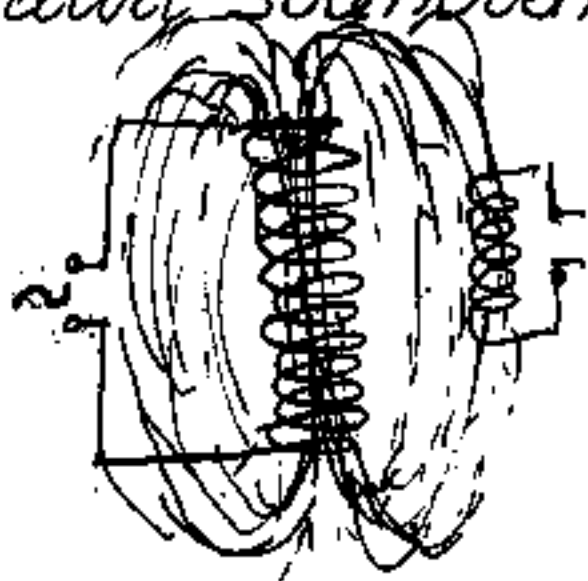
$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

I simboli di condensatore variabile (\overleftrightarrow{C}),
 e di induttanza variabile (\overleftrightarrow{L} oppure \overleftrightarrow{L}),
 consentono di distinguere, in un circuito, le
 parti che consentono di sintonizzarsi.

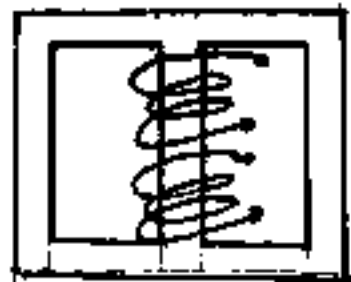
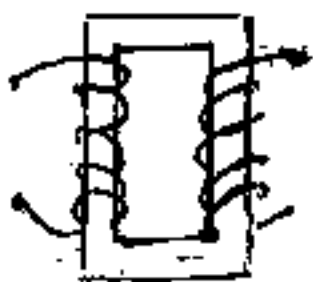
Per l'induttanza, la variazione è dovuta
 all'inserimento nel solenoide di nuclei ferro-
 magnetici, oppure alla variazione del numero di spire.

I. Trasformatori

I solenoidi attraversati da correnti alter-
 nate, generano, al loro intorno, un campo
 magnetico variabile, capace di influenzare
 altri solenoidi esistenti in quell campo.

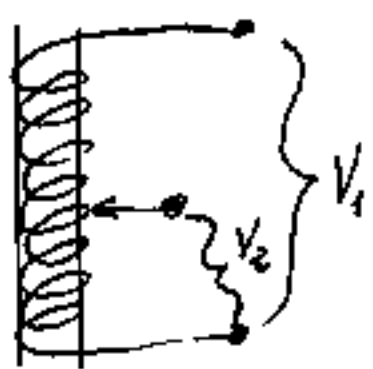


In genere però si cerca
 di convogliare il campo
 magnetico mediante la-
 micini di materiale ferro-
 magnetico, o di avvolgere i solenoidi
 sullo stesso nucleo, anche con solenoidi



sovrapposti.
 Questi avvol-
 gimenti,

sono detti trasformatori, il circuito in cui si immette corrente è detto primario, mentre il circuito da cui si preleva corrente è detto secondario. Le tensioni al primario, e secondario stanno fra loro come il numero delle spire del primario ed il numero delle spire del secondario. ($V_1 : V_2 = n_1 : n_2$)



Se l'avvolgimento è unico in figura, esso è detto: autotrasformatore

Senza entrare nel merito della teoria e calcolo dei trasformatori, con i rispettivi rendimenti e perdite, poiché la potenza (e quindi l'energia) immessa nel primario, salvo le perdite per dispersione in calore, è uguale a quella presa nel secondario, cioè: $W_1 \cong W_2$

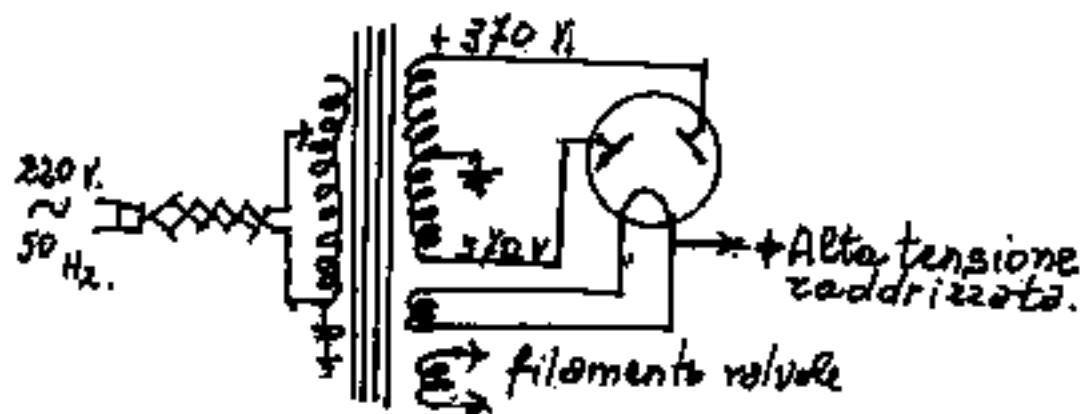
$V_1 I_1 \cong V_2 I_2$, e poiché la dispersione in calore è proporzionale al quadrato delle correnti;

$W = V \cdot I$; $V = IR$; $W = RI^2$; il circuito ad alta tensione (piccola corrente) avrà un avvolgimento fatto di molte spire di filo sottile, mentre il circuito a bassa tensione (corrente intensa) sarà costituito di poche spire di filo di grande sezione essendo: ($R = \rho \frac{l}{S}$).

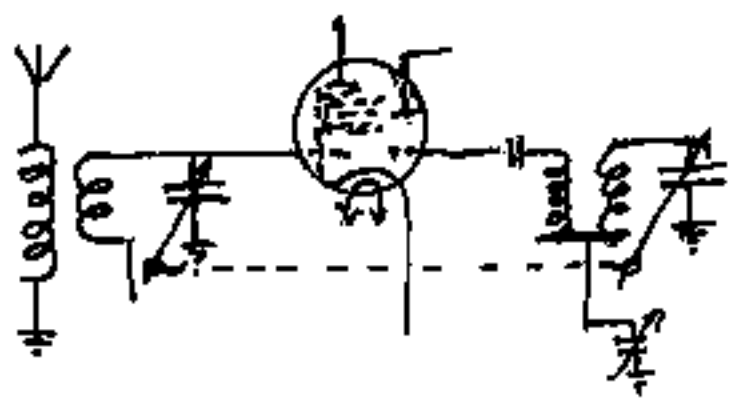
Al variare della frequenza alternata, varia l'impedimento che l'induttanza esercita al passaggio di energia dal primario al secondario. Essendo la forza elettromotrice: $f.e.m. = e = \frac{d\psi}{dt}$, per alte frequenze bastano piccole impedenze per generare un campo elettromagnetico capace di connettere i circuiti: primario e secondario. (Poche spire avvolte su un nucleo ferromagnetico). Per basse frequenze invece, occorrono alte impedenze, costituite da avvolgimenti con moltissime spire, su nuclei ferromagnetici opportunamente dimensionati. (È il caso degli ordinari trasformatori per la tensione domestica, 50 Hz.)

Per avere l'idea della molteplicità di condizioni in cui può essere impiegato un trasformatore, possiamo osservare lo schema di una supereterodina (cioè un circuito radio che addiziona la frequenza di antenna con una frequenza autogenerata al fine di produrre una media frequenza costante che amplificata e raddrizzata, dà la frequenza fonica per l'altoparlante). I circuiti sono molteplici, in dipendenza delle valvole o dei transistor impiegati, noi diamo

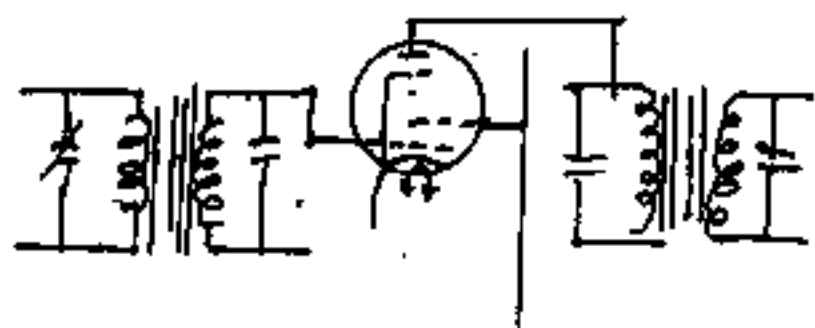
uno schema base per indicare i vari trasformatori.



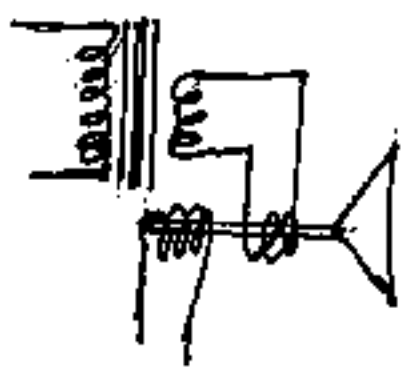
Trasformatore di alimentazione con valvola raddrizzatrice.



Trasformatore di antenna (alta frequenza) e trasformatore di oscillatore con valvola addizionale per avere medie frequenze costanti.



Trasformatori a media frequenza e valvola amplificatrice a media frequenza



trasformatore in bassa frequenza, con l'altoparlante per la riproduzione sonora.

Ricordando che la lunghezza d'onda di una stazione trasmittente è data dalla velocità della luce ($300.000.000 \text{ m/sec}$) divisa per la frequenza, avremo:

per $\lambda = 50 \text{ m}$.	$\nu = 6000 \text{ Ke/sec} = 6 \cdot 10^6 \text{ Hz}$
200 m.	$\nu = 1500 \text{ Ke/sec} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ Hz}$
600 m.	$\nu = 500 \text{ Ke/sec} = 0,5 \cdot 10^6 \text{ Hz}$

Mentre le onde radio sono dell'ordine dei megahertz, ($10^6 \text{ Hz} = 10^3 \text{ Kc/sec} \Rightarrow \lambda = 300 \text{ m}$), la frequenza delle onde acustiche varia notevolmente da persona a persona, grosso modo si dice varia da 16 a 16000 Hz (il La_3 , nelle note musicali, ha 435 vibrazioni al secondo). Però le onde sonore non sono paragonabili con le onde elettromagnetiche, soprattutto per il diverso modo di trasmettersi e la conseguente diversa velocità.

($300.000.000 \text{ m/sec}$ le prime; varia con la temperatura e pressione dell'aria la velocità delle vibrazioni sonore. A 10°C è circa 340 m/sec)

È possibile trovare suoni ed onde elettromagnetiche, che hanno la stessa lunghezza d'onda anche se le frequenze sono così diverse: $\frac{340}{435} = 0,78 \text{ m} = \lambda$ del La_3 ; occorre una frequenza di 384,6 megacicli per avere la stessa lunghezza d'onda in onde elettromagnetiche. (siamo nell'ordine di RAIUNO in televisione).

Le vibrazioni elastiche cominciano ad emettere suono udibile nell'aria verso 16 periodi al secondo, ed il suono è udibile circa fino a 16000 periodi al secondo, poi si entra nel campo ultrasuoni

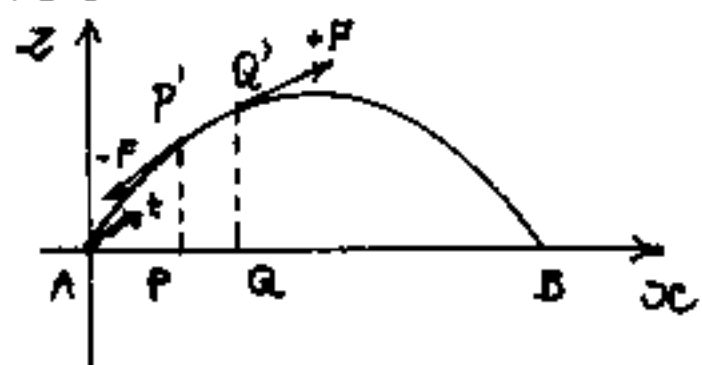
non più udibili per l'uomo, ma ancora udibili per animali (esistono fischi per cani non udibili dall'uomo). Anche le onde luminose (onde elettromagnetiche) sollecitano la vista umana in un certo campo (da circa 4000 \AA nell'ultravioletto a 8000 \AA nell'infrarosso), ma l'uomo ha costruito apparecchiature per rilevare un campo ben maggiore, basti pensare alla lunghezza d'onda delle "radiazioni gamma" ove $\lambda \cong 0,02 \div 1 \text{ \AA}$ (Angström = 10^{-8} cm) $1 \text{ \AA} = 10^{-4} \mu$ (micron). Ed oltre il campo visibile, i raggi infrarossi $\lambda \cong 10000 \text{ \AA} = 1 \mu \div 300 \mu$ (micron); quindi si entra nel campo delle onde Hertziiane. $\lambda \cong 1 \text{ mm} \div 10 \text{ Km}$.

Nel campo delle vibrazioni, abbiamo considerato le onde acustiche (vibrazioni elastiche) e le vibrazioni elettromagnetiche, Ci domandiamo quali altri tipi di vibrazioni è possibile trattare.

Per vibrazione, generalizzando, possiamo intendere ogni fenomeno che compie un certo numero di cicli all'secondo, (nell'unità di tempo).

L'equazione delle corde vibranti

Consideriamo una corda, perfettamente flessibile, tesa fra due punti fissi A e B. Per fissare le idee, consideriamo le corde degli strumenti musicali, ma lo studio ha carattere più generale. La vibrazione di tale corda, nello spa-



zio geometrico è piana, cioè bidimensionale, e la posizione dei singoli

punti, è variabile nel tempo. Se consideriamo il tempo rappresentato sulla y di un sistema di assi cartesiani $x, y, z \equiv x, t, z$, avremo in generale: $z = f(x, t)$ ove la corda vibra nel piano verticale xz .

Gli spostamenti dei singoli punti (spostamenti piccolissimi), avvengono normalmente all'asse x , su cui giace il segmento \overline{AB} , ed A sia nell'origine degli assi.

Consideriamo il segmento infinitesimo di corda \overline{PQ} su \overline{AB} ; ove: $\overline{PQ} = dx = ds$; sia $\overline{P'Q'}$ lo stesso tratto di corda al tempo t .

Data la piccolezza degli spostamenti, possiamo considerare costante, anche nel tempo, la tensione della corda. Rappresentiamo la tensione stessa con due forze tangenziali in P' e Q' , di uguale modulo, con F in P' verso A ed in Q' verso B : ($-F$ e $+F$ in figura), la loro risultante è diversa da zero. Se proiettiamo tali forze sull'asse z la differenza delle componenti secondo z (risultante in z) è la forza agente il movimento, ed è pari alla massa di $\overline{P'Q'}$ per l'accelerazione secondo z , cioè: $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$.

L'ascissa di P e di P' è " x ", l'ascissa di Q e di Q' è " $x + dx$ ".

Il coefficiente angolare $\operatorname{tg} \alpha$, della retta tangente in P' è $\operatorname{tg} \alpha_{P'} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_x$.

Il coefficiente angolare della retta tangente in Q' è $\operatorname{tg} \alpha_{Q'} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x+dx} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_x + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx$,

Per la piccolezza degli spostamenti, anche α è piccola: ($\operatorname{tg}(\alpha) \approx \operatorname{sen}(\alpha)$), proiettando le due forze su l'asse z , si hanno le componenti secondo z :

$$-F \frac{\partial z}{\partial x} \quad ; \quad F \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx \right) ;$$

La loro somma, che è la risultante secondo z sarà: $F \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx$; dovrà uguagliare la massa per l'accelerazione del tratto di fune $PQ = ds =$
 $= P'Q'$ cioè:

$$F \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx = m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

se ρ è la densità della fune per unità di lunghezza avremo:

$$\rho \cdot dx = \rho ds = m = (\text{massa del tratto } dx)$$

$$F \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx = \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} dx$$

$$\boxed{\frac{F}{\rho} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}}$$

posto: $v = \sqrt{\frac{F}{\rho}}$ = (velocità di propagazione dell'onda lungo la corda), cioè: $v^2 = \frac{F}{\rho}$, sostituendo si ha:

l'equazione delle corde vibranti:

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}$$

che possiamo scrivere:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(v^2 \frac{\partial z}{\partial x} \right)}$$

che è l'equazione di D'Alembert, o della propagazione delle onde, il cui integrale

generale è: $\boxed{z = \varphi_1(x+vt) + \varphi_2(x-vt)}$ infatti:

L'espressione:

$$\frac{\partial z}{\partial t} dx + v^2 \frac{\partial z}{\partial x} dt$$

è il differenziale esatto di una funzione "u" ore:

$$\left. \begin{aligned} du &= \frac{\partial z}{\partial t} dx + v^2 \frac{\partial z}{\partial x} dt \\ v dz = d(vz) &= v \frac{\partial z}{\partial x} dx + v \frac{\partial z}{\partial t} dt \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{sommando} \\ \text{e} \\ \text{sottraendo:} \end{array}$$

$$\begin{aligned} d(vz + u) &= \left(\frac{v \partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t} \right) dx + v \left(\frac{v \partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t} \right) dt \\ &= \left(v \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t} \right) (v dt + dx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(vz + u) &= \left(\frac{\partial z}{\partial t} + v \frac{\partial z}{\partial x} \right) d(x + vt) \\ d(vz - u) &= \left(\frac{-\partial z}{\partial t} + v \frac{\partial z}{\partial x} \right) d(x - vt) \end{aligned} \quad (*)$$

Se u_1 ed u_2 sono due funzioni di x e di t , legate dalla relazione: $du_1 = \alpha_{(x,t)} du_2$, segue:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \alpha \frac{\partial u_2}{\partial x} ; \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \alpha \frac{\partial u_2}{\partial t} ;$$

quindi la derivata di una funzione in "u", "u'" eseguita rispetto ad "x" ed a "t" è nulla:

$$\frac{d(u_1, u_2)}{d(x, t)} = 0 ; \quad (u_1 = u(u_2))$$

perciò integrando le (*)

$$\begin{cases} (Vz + u) = 2\varphi_1 V(x + vt) \\ (Vz - u) = 2\varphi_2 V(x - vt) \end{cases}$$

sommando e risolvendo z :

$$z = \varphi_1(x + vt) + \varphi_2(x - vt) \quad (\text{e.v.o.})$$

Se $\varphi_1(x + vt)$ e $\varphi_2(x - vt)$ sono continue e derivabili, la z da esse definita soddisfa l'equazione dell'integrale della formula delle corde vibranti:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

cioè nell'integrale di questa figurano le due funzioni arbitrarie φ_1 e φ_2 , da determinarsi per le condizioni iniziali.

Inizialmente sia: ($t = 0$).

$$z(x, 0) = (\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = f_1(x)$$

Al ($t = 0$) la:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{t=0} = f_2(x) \quad \text{è l'equazione di una}$$

linea piana.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{t=0} = v (\varphi_1'(x) - \varphi_2'(x)) = f_2(x) \quad \text{①}$$

Integrando questa equazione nei limiti: $x \in (0 \div l)$

ove "l" è la lunghezza della corda,
 cioè implica: $z_{(0)} = 0$; $z_{(l)} = 0$; (inizialmente la
 corda giacerebbe sull'asse x , fissa nei punti: $x=0$;
 $x=l$. Nel vibrare, i punti intermedi della corda si
 staccano dall'asse x , ma lo spostamento è così pic-
 colo che non fa variare la lunghezza della corda)
 Integrando l'equazione sopraindicata (1)

$$V \left(\varphi_1(x) - \varphi_2(x) \right) = \int_0^x f_2(x) dx + C$$

sommando e sottraendo con la z_2 moltiplicata per V ,

$$\text{cioè con: } V z_2 = V \left(\varphi_1(x) + \varphi_2(x) \right) = V f_1(x)$$

abbiamo:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2} f_1(x) + \frac{1}{2V} \int_0^x f_2(x) dx + \frac{e}{2V}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2} f_2(x) - \frac{1}{2V} \int_0^x f_2(x) dx - \frac{e}{2V}$$

La costante "c" non influenza z , posto: $e = 0$

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \frac{1}{2} f_1(x) + \frac{1}{2V} \int_0^x f_2(x) dx \\ \varphi_2(x) = \frac{1}{2} f_2(x) - \frac{1}{2V} \int_0^x f_2(x) dx \end{cases}$$

Definite così le $\varphi_1(x)$ ed $\varphi_2(x)$ per tutti i valori
 di: $x \in [0, l]$. Notiamo che gli estremi della corda
 $A \equiv (0, 0)$; $B(l, 0)$; sono fissi (indipendenti dal
 tempo t) cioè:

$$z_{(0,t)} = 0 \quad ; \quad z_{(l,t)} = 0$$

sostituendo: ($x=0$), nell'espressione di:

$$z = \varphi_1(x+vt) + \varphi_2(x-vt),$$

abbiamo: ($z=0$) cioè:

$$z = \varphi_1(vt) - \varphi_2(vt) = 0$$

sostituendo: ($x=l$) nell'espressione di z

abbiamo: ($z=0$) cioè

$$z = \varphi_1(l+vt) + \varphi_2(l-vt) = 0$$

ovvero cambiando vt in x :

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(-x) = 0$$

$$\varphi_1(l+x) + \varphi_2(l-x) = 0$$

equazione che dà i valori di φ_1 quando il suo argomento varia da l a $2l$. Cambiando x in $-x$, si hanno i valori di φ_2 nello stesso intervallo.

Cambiando ancora x in $(l+x)$:

$$\varphi_1(2l+x) + \varphi_2(-x) = 0$$

da cui: $\varphi_1(2l+x) = \varphi_2(x)$

ma: $\varphi_2(x) = \varphi_1(x)$

$$\varphi_1(2l+x) = \varphi_1(x)$$

ossia φ_1 ha periodo $2l$, ed uguale periodo

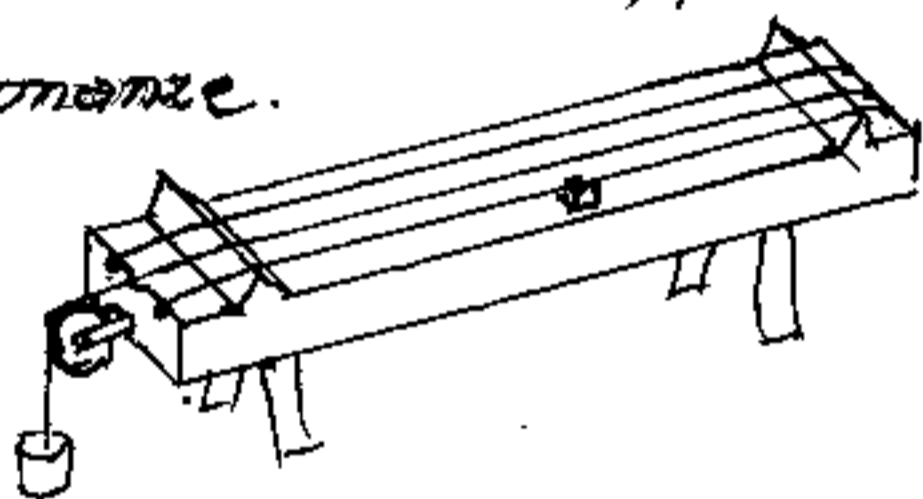
da funzione φ_2 : $\varphi_2(x) = -\varphi_1(-x)$ (note per ogni valore di x nell'intervallo $0, 2l$)

Il sonometro

Il sonometro è un apparecchio destinato alla vibrazione delle corde sonore; è costituito da una cassa armonica su cui è tesa una corda sottile, la tensione (variabile) è dovuta ad un peso posto all'estremità. Sulla cassa sonora possono esservi anche altre corde tese, per verificare le eventuali risonanze.

Se l = lunghezza della corda;

λ = lunghezza d'onda, si ha



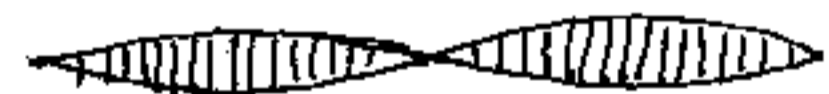
$$l = N \frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda = \frac{2l}{N}$$

l



$$l = \lambda/2 \quad ; \quad \lambda = 2l$$



$$l = 2 \cdot \lambda/2 \quad ; \quad \lambda = l$$



$$l = 3 \cdot \lambda/2 \quad ; \quad \lambda = \frac{2}{3} l$$

La frequenza:
$$v = \frac{N}{2l} \sqrt{\frac{gP}{\pi r^2 \rho}} = \frac{N}{2lr} \sqrt{\frac{P}{\pi r}}$$

ove: $N = 1, 2, 3, \dots, n$ (armoniche);

P = peso tensore;

l = lunghezza della corda; r = raggio della corda;

ρ = peso specifico; $\gamma = \rho/g$ = densità della corda;

g = accelerazione di gravità.

L'Informatica

L'informatica è una nuova disciplina che, si può dire, sia nata coi computer. Non è, che prima, implicitamente, non esistesse come problematica di tutte le lingue, per evitare doppi sensi, o imprecisione nell'esporre una "informazione". Infatti, nelle varie lingue, vi sono espressioni ambigue, che possono anche essere utilizzate come battute di spirito, ma non accettabili in campo scientifico-matematico. Anche l'algebra è linguaggio.

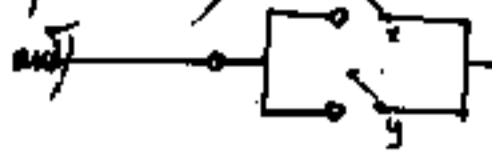
È interessante notare che il "linguaggio" dei computer deriva dal linguaggio dell'insieme degli interruttori: (acceso; spento), al quale corrisponde il sistema binario nei numeri: $(0, 1)$; (zero, uno); e trova invito nell'evangelico: "Ma il vostro linguaggio sia: - sì, sì, no, no." (S. Matteo 5, 37).

Abbiamo già trattato le operazioni aritmetiche in binario ed esadecimale, ma può essere interessante vedere, come sia possibile esprimere dei concetti mediante il linguaggio degli interruttori.

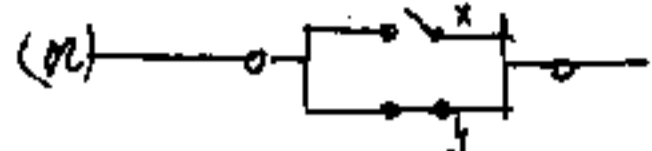
Per un interruttore è banale il: "sì"; "No".

Per due interruttori si hanno tre casi principali:

(in parallelo) (somma logica) $\begin{matrix} x & y & v \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$ (and) inglese

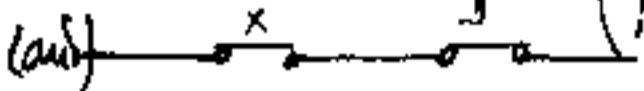


entrambi per il no! (l'uno e l'altro)
o l'uno o l'altro per il si!

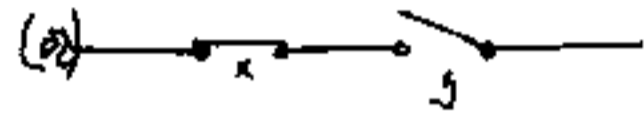


(non necessario entrambi si!)
(basta sia chiuso uno per il si!)

(in serie) (prodotto logica) $\begin{matrix} x & y & v \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$ (or) inglese

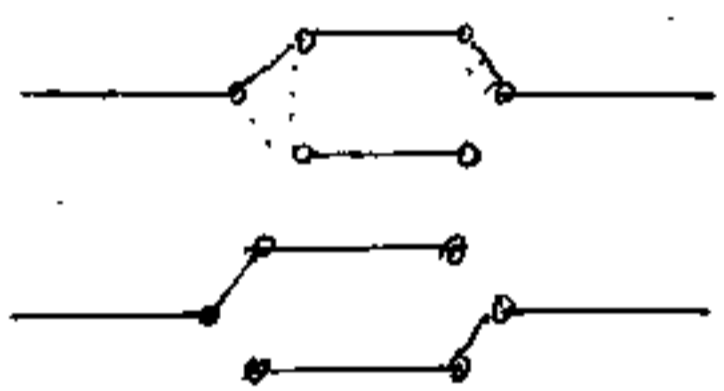


entrambi per il si! (l'uno o l'altro)



o l'uno o l'altro per il no!
(non necessario entrambi il No)
(basta sia aperto uno per il no!)

(indipendenti)



ciascuno può decidere per il si o per il no cambiando lo stato iniziale.
(Per il si occorre che i due rami coordinino su quale intermedio)

Se consideriamo una molteplicità di interruttori connessi a grandezze numeriche, si può capire come funzionano le calcolatrici elettriche.

All'inizio del primo volume abbiamo già accennato al problema intestando: "La memoria, - la comunicabilità - i linguaggi."

Per comunicare, dobbiamo avvalerci della memoria e di ciò che è noto a chi vogliamo comunicare. (Avere un linguaggio comune)

Cibernetica - Teoria dell'informazione Informatica

La parola: "Cibernetica", deriva dal Greco: "κυβερνητική" che significa "arte del timoniere" ed è normalmente interpretata come: "scienza dell'informazione".

L'americano Norber Wiener (1894-1964), pubblicò nel 1948 l'opera: "Introduzione alla Cibernetica" una macque per studi sul contenuto di informazione su messaggi trasmessi da una emittente in alfabeto morse. Il Wiener, a cui si deve la parola "cibernetica" è ritenuto il fondatore di questa scienza, col suo allievo Shannon.

La teoria dell'informazione considera tre fasi: "l'emissione, la trasmissione, la ricezione" ed occorre un codice convenuto fra emittente e ricevente, costituito di simboli, e l'insieme dei quali è detto "alfabeto". Una sequenza di simboli opportunamente disposti costituisce un messaggio che contiene una certa quantità d'informazione.

Nelle tre fasi di emissione, trasmissione, e ricezione possono esservi: disturbi, distorsioni, ed

errori, capaci d'invalidare il contenuto di informazione.

L'insieme dei simboli fonetici, possono dare luogo a linguaggi diversi, non solo, ma i simboli stessi possono essere graficizzati in modo diverso. Si dice che i Fenici siano stati i primi a rappresentare un alfabeto fonetico. La parola "alfabeto" deriva dalle prime due lettere dell'alfabeto greco: α = alfa; β = beta; come in italiano la parola "abecedario".

La storia dell'alfabeto implica la storia della scrittura. Certamente la scrittura ideografica e pittografica, precedette come forma di comunicazione che, schematizzandosi, dette luogo ai geroglifici. Per semplificare la rappresentazione grafica si ebbe l'alfabeto cuneiforme. È interessante notare come, la sequenza dei simboli, delle parole, sia la chiave iniziale per "leggere" una scrittura. La sequenza può essere per righe orizzontali oppure verticali, o sequenti in tracciato. può avere un verso; da sinistra a destra o da destra a sinistra; dall'alto al

Riportiamo ancora alcuni alfabeti antichi e moderni, per avere un confronto diretto sugli elementi delle prime forme di comunicazione scritta.

Alfabeti

Aramaico antico	Papiro	Palmireno	Ebraico quadrato	Rabbinico	Corsivo moderno	
					Italiano (XV-XVI secolo)	Polacco (XIX-XX secolo)
𐤀	𐤁𐤂𐤃	Ⲁ	א א א א א	א	א	א
𐤄	𐤅𐤆𐤇	Ⲅ	ב ב ב ב ב	ב	ב	ב
𐤈	𐤉𐤊	Ⲉ	ג ג ג ג ג	ג	ג	ג
𐤌	𐤍𐤎	Ⲍ	ד ד ד ד ד	ד	ד	ד
𐤐	𐤑𐤒𐤓	Ⲑ	ה ה ה ה ה	ה	ה	ה
𐤕	𐤖𐤗	Ⲕ	ו ו ו ו ו	ו	ו	ו
𐤙	𐤚𐤛	Ⲙ	ז ז ז ז ז	ז	ז	ז
𐤞	𐤟𐤠	Ⲟ	ח ח ח ח ח	ח	ח	ח
𐤛	𐤜𐤝	Ⲣ	ט ט ט ט ט	ט	ט	ט
𐤟	𐤠𐤡	Ⲥ	י י י י י	י	י	י
𐤥	𐤦𐤧𐤨	Ⲙ	כ כ כ כ כ	כ	כ	כ
𐤫	𐤬𐤭	Ⲛ	ל ל ל ל ל	ל	ל	ל
𐤯	𐤰𐤱	Ⲟ	מ מ מ מ מ	מ	מ	מ
𐤳	𐤴𐤵	Ⲣ	נ נ נ נ נ	נ	נ	נ
𐤿	𐀀𐀁	Ⲥ	ס ס ס ס ס	ס	ס	ס
𐀄	𐀅𐀆	Ⲙ	ע ע ע ע ע	ע	ע	ע
𐀈	𐀉𐀊	Ⲛ	פ פ פ פ פ	פ	פ	פ
𐀌	𐀍𐀎	Ⲟ	צ צ צ צ צ	צ	צ	צ
𐀐	𐀑𐀒	Ⲣ	ק ק ק ק ק	ק	ק	ק
𐀔	𐀕𐀖	Ⲥ	ר ר ר ר ר	ר	ר	ר
𐀘	𐀙𐀚	Ⲙ	ש ש ש ש ש	ש	ש	ש
𐀜	𐀝𐀞	Ⲛ	ת ת ת ת ת	ת	ת	ת

scritture

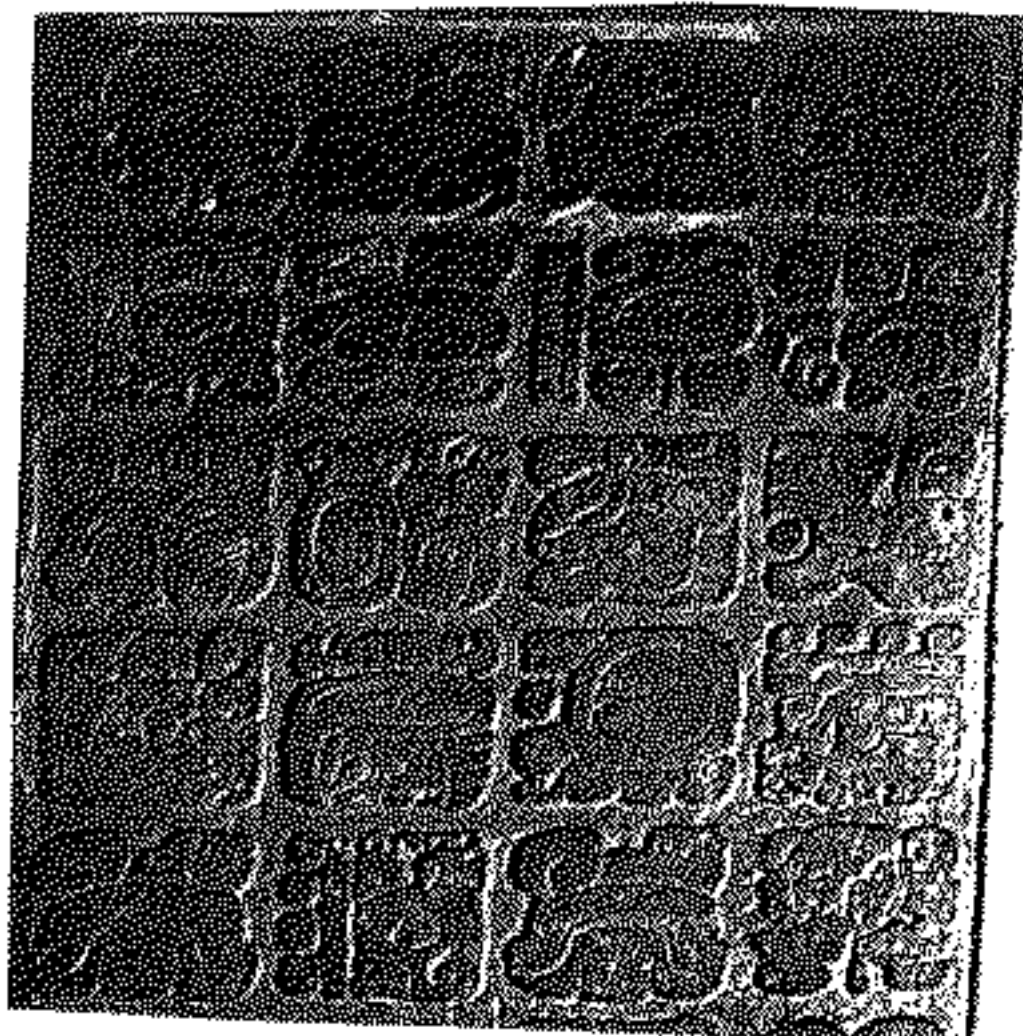
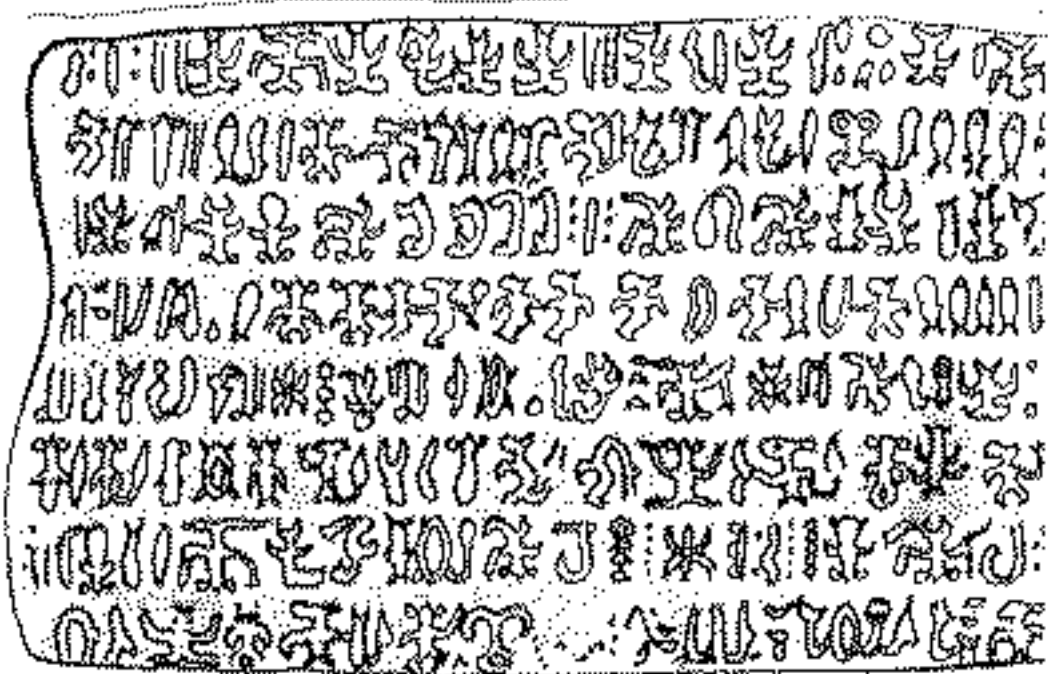


Tavola di scrittura

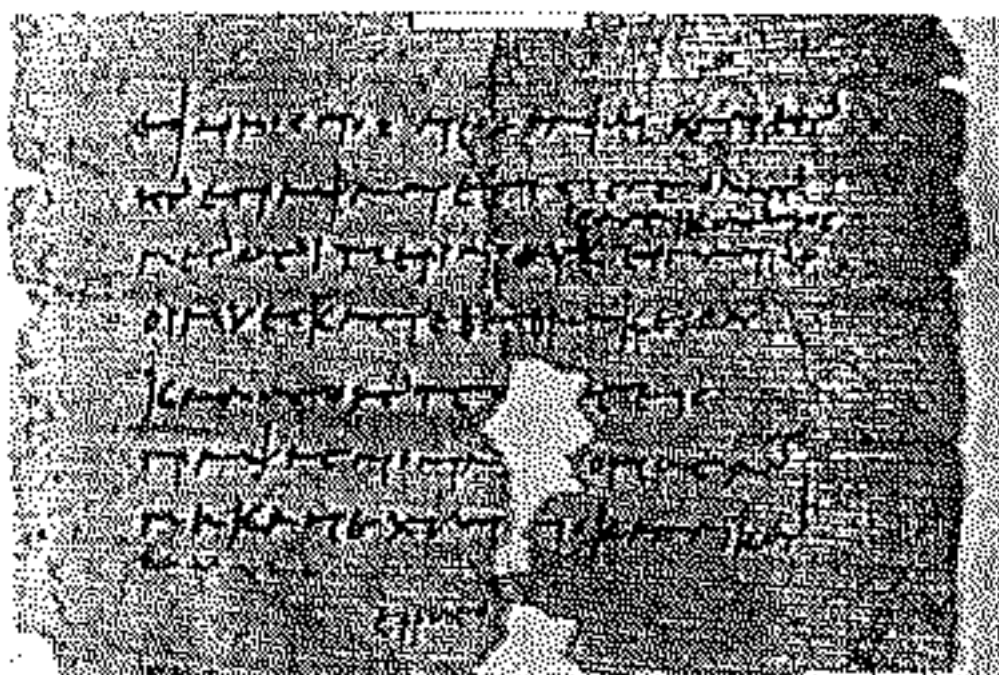
Maia

(purtroppo quasi tutti
gli scritti furono distrutti
dagli spagnoli)



Scrittura dell'isola
di Pasqua (indecifrate)

(incisa su legno con
denti di pescecaru)
(si confronti i geroglifici)



Lettera su rotolo
di papiro. (III sec a.C.)

Alfabeti

nordsemítico		greco		etrusco	ielino		maiuscole moderne
fenicio primitivo	fenicio	primitivo	classico	classico	primitivo	classico	romano
𐤀 𐤁 𐤂 𐤃 𐤄 𐤅 𐤆 𐤇 𐤈 𐤉 𐤊 𐤋 𐤌 𐤍 𐤎 𐤏 𐤐 𐤑 𐤒 𐤓 𐤔 𐤕 𐤖 𐤗 𐤘 𐤙 𐤚 𐤛 𐤜 𐤝 𐤞 𐤟 𐤠 𐤡 𐤢 𐤣 𐤤 𐤥 𐤦 𐤧 𐤨 𐤩 𐤪 𐤫 𐤬 𐤭 𐤮 𐤯 𐤰 𐤱 𐤲 𐤳 𐤴 𐤵 𐤶 𐤷 𐤸 𐤹 𐤺 𐤻 𐤼 𐤽 𐤾 𐤿	א ב ג ד ה ו ז ח ט י כ ל מ נ ס ע פ צ ק ר ש ת	Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π Ρ Σ Τ Χ	Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π Ρ Σ Τ Χ	Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π Ρ Σ Τ Χ	Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π Ρ Σ Τ Χ	Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π Ρ Σ Τ Χ	A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

ebraico arcaico	fenicio	etrusco classica	greco classico	ielino classico	arabico	italiano moderno
𐤀 𐤁 𐤂 𐤃 𐤄 𐤅 𐤆 𐤇 𐤈 𐤉 𐤊 𐤋 𐤌 𐤍 𐤎 𐤏 𐤐 𐤑 𐤒 𐤓 𐤔 𐤕 𐤖 𐤗 𐤘 𐤙 𐤚 𐤛 𐤜 𐤝 𐤞 𐤟 𐤠 𐤡 𐤢 𐤣 𐤤 𐤥 𐤦 𐤧 𐤨 𐤩 𐤪 𐤫 𐤬 𐤭 𐤮 𐤯 𐤰 𐤱 𐤲 𐤳 𐤴 𐤵 𐤶 𐤷 𐤸 𐤹 𐤺 𐤻 𐤼 𐤽 𐤾 𐤿	א ב ג ד ה ו ז ח ט י כ ל מ נ ס ע פ צ ק ר ש ת	Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π Ρ Σ Τ Χ	Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π Ρ Σ Τ Χ	Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π Ρ Σ Τ Χ	ا ب ج د ه و ز ح ط ي ك ل م ن س ع ف ق ر ش ت	A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

	FENICIO	GRECO arcaico	GRECO classico	ETRUSCO	OSCO	LATINO arcaico	LATINO classico
a	𐤀	Α Α	Α α	Α Α	𐌀	Α Α Α	A
b	𐤁	Β Β	Β β	Β Β	𐌁	Β Β Β	B
c	𐤂	Γ Γ	Γ γ	𐌂	𐌂	Γ Γ Γ	C
d	𐤃	Δ Δ	Δ δ	𐌃	𐌃	Δ Δ Δ	D
e	𐤄	Ε Ε	Ε ε	𐌄	𐌄	Ε Ε Ε	E
f	𐤅	Ϝ Ϝ		𐌅	𐌅	Ϝ Ϝ Ϝ	F
g	𐤆	Ζ Ζ	Ζ ζ	𐌆	𐌆	Ζ Ζ Ζ	G
h	𐤇	Η Η	Η η	𐌇	𐌇	Η Η Η	H
i	𐤈	Θ Θ	Θ θ	𐌈	𐌈	Θ Θ Θ	I
k	𐤉	Κ Κ	Κ κ	𐌉	𐌉	Κ Κ Κ	K
l	𐤊	Λ Λ	Λ λ	𐌊	𐌊	Λ Λ Λ	L
m	𐤋	Μ Μ	Μ μ	𐌋	𐌋	Μ Μ Μ	M
n	𐤌	Ν Ν	Ν ν	𐌌	𐌌	Ν Ν Ν	N
o	𐤍	Ξ Ξ	Ξ ξ	𐌍	𐌍	Ξ Ξ Ξ	O
p	𐤎	Ο Ο	Ο ο	𐌎	𐌎	Ο Ο Ο	P
q	𐤏	Π Π	Π π	𐌏	𐌏	Π Π Π	Q
r	𐤐	Ρ Ρ	Ρ ρ	𐌐	𐌐	Ρ Ρ Ρ	R
s	𐤑	Σ Σ	Σ σ	𐌑	𐌑	Σ Σ Σ	S
t	𐤒	Τ Τ	Τ τ	𐌒	𐌒	Τ Τ Τ	T

EBRAICO	
א ב ג ד ה ו ז ח ט י כ ל מ נ ס ע פ צ ק ר ש ת	א ב ג ד ה ו ז ח ט י כ ל מ נ ס ע פ צ ק ר ש ת

* e' sono due aspirazioni gutturali: debole e forte. Le vocali sono trascurate o puntiformi.

1 I cinesi del periodo Han (206 a.C.-220 d.C.) conoscevano le numerose società che vivevano alle frontiere del paese. La loro visione di questi "barbari" era espressa dal modo con cui li chiamavano. I nomi dei popoli tenuti in alta considerazione erano combinati con la forma "jen", che significa essere umano (A); quelli dei popoli con scarse relazioni o poco stimati con "ch'uan", cane (B). Ai nomi dei popoli culturalmente molto differenti ed i cui costumi erano ripugnanti veniva aggiunto il carattere "ch'ung" o insetto (C).

A
人
犬
虫
C

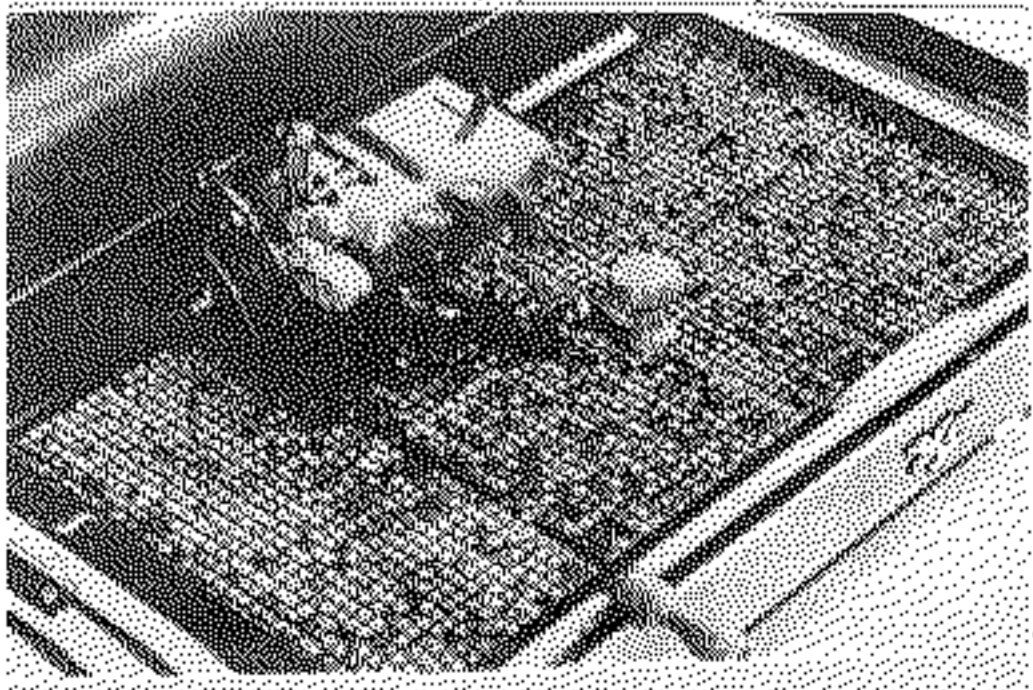
cinese
是

情況都還不錯的商舖們所開張的中國
停業。光是倫敦一地，過去一年來停

帶所及，使英國人的生活習慣也起了變化。餚子吃一頓的，現在大多數改為吃自助餐，習慣，一星期中，除了幾天牛油麵包或三文魚被追查生的節約風氣所造成的後果是帶來不至殃及學生們在假期中找臨時工作的出路。貶值以來，英國的經濟衰退情形更嚴重。入

La scrittura cinese non è alfabetica o sillabica, usa un segno diverso per ogni parola. Tuttavia i caratteri cinesi sono composti da otto segni base tutti riferibili al segno yung che vuol dire: "eternità". La scrittura è eseguita con pennello su seta, e liberabile dai caratteri a fianco. La macchina per scriverli è complicata, è un rotolo con 2000 segni sovrapporribili o affiancabili.

永
永
永



Per completezza riportiamo anche altri esempi di scritture.

عبد الإله الرحمن الرحيم
ووالله أعلم بالصواب
على من أخذوا من كتابه

Arabo classico, sillabico, scritto da sinistra a destra.

^{sanskrito}
प्राकृतकम् ॥ आभोगदिगिरः काम्यध्वपभ्रंश इति स्मृतः ॥ शास्त्रे तु संस्कृताद्
अन्यद् अग्रजंवनयोदितम् ॥ अनेयः प्रमादः ममता माधुर्यं मुकुमारता । अर्धव्यपितर्

Sanskrito

^{Birman}
ပဝ္ဗည်းကရိယာများ ရှိပြီးဖြစ်လေသည်။ အလယ်
ဇွန်မှာ ပုဂ္ဂိုလ်များအတွက် အထူးသင့်တန်းများ

Birman

^{greco}
λ 'Ο 'Οδυσσεύς και οι σύντροφοι αὐτοῦ
πλοῖα, τὰ ὁποῖα ἦσαν πλήρη λαφύρων, ἄι
Τρωάδος, ἐπιθυμοῦντες νὰ φθάσωσιν ὄσο

Greco

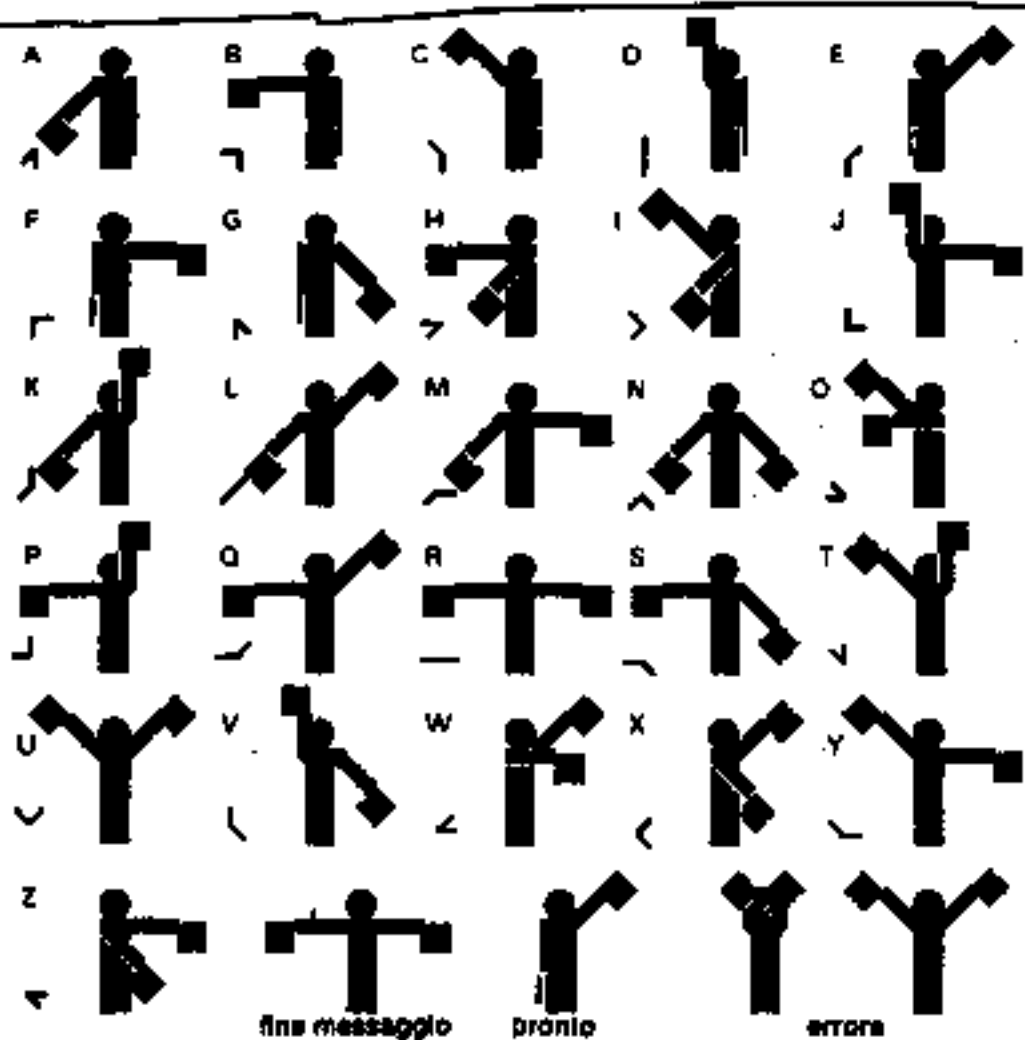
^{russo}
Л Идея использования квантовых систем для ге
радиоволн оказалась весьма плодотворной и
каждостижимые для обычной радиотехники резу.

Russo

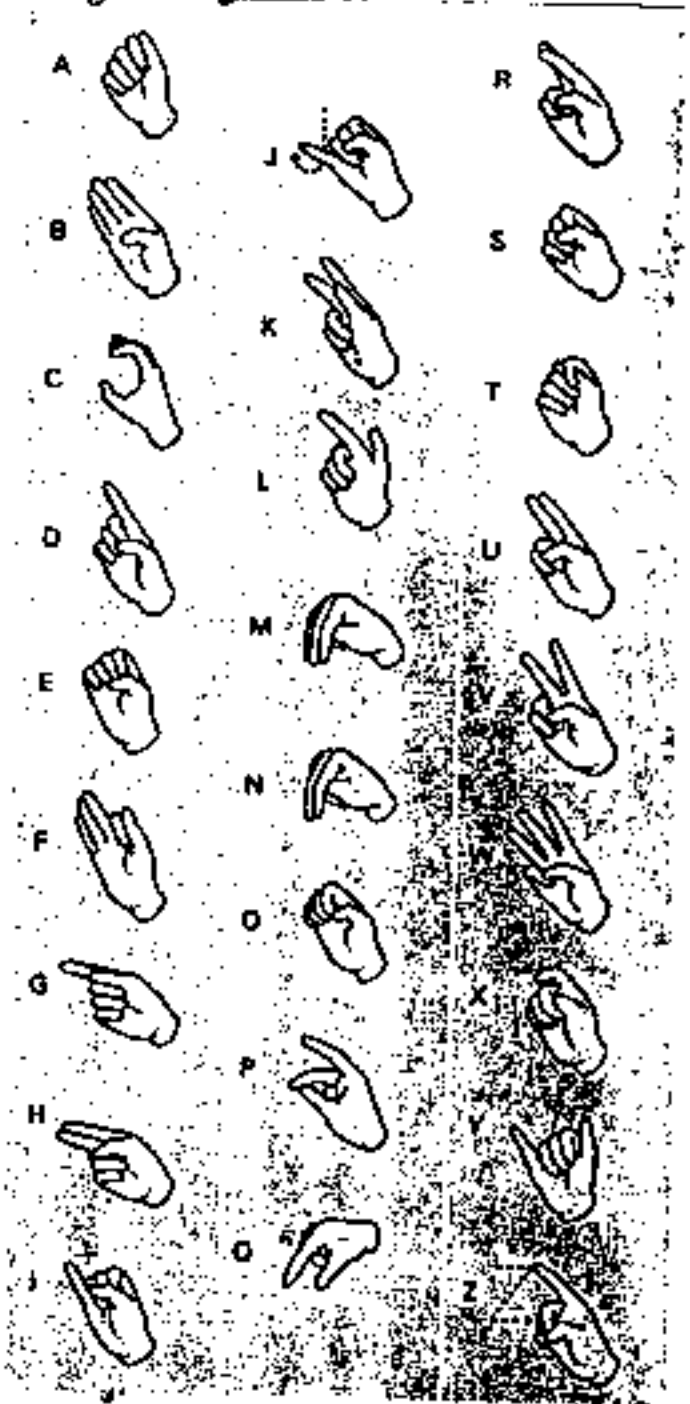
^{ebraico}
תהיה עתה יחד עם כל
העושים ואלוהים יתברך

Ebraico

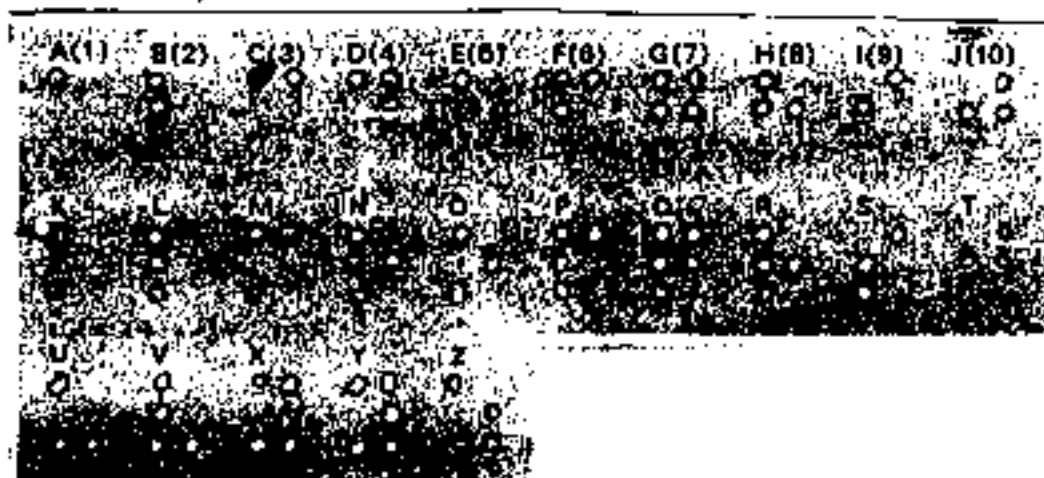
Alfabeto semaforico



Linguaggio dei sordomuti



Alfabeto Braille



L'alfabeto Braille per non vedenti è composto di punti sporgenti individuali

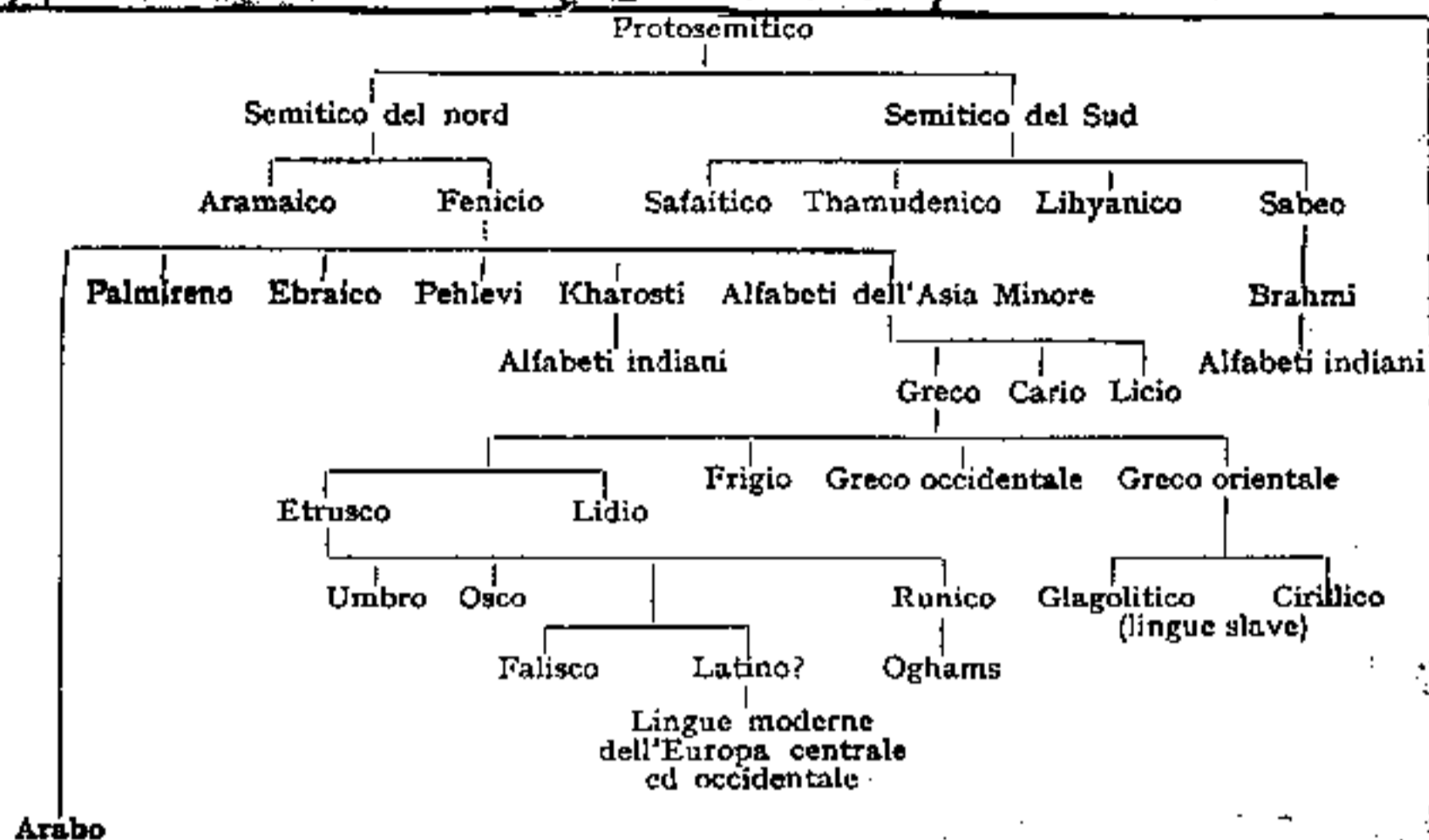
al tatto. Ogni lettera copre parte di un rettangolino diviso in 6 parti o sei punti occupati da una delle 6 parti

1	2
3	4
5	6

Poiché i numeri (cifre da 1 a 10) corrispondono alle prime 10 lettere per distinguere sono preceduti da:



Rileviamo dal Dizionario Enciclopedico U.T.E.T. uno schema di derivazione degli alfabeti, che non ci appare concorde con gli alfabeti presentati.



In telegrafia si usa l'alfabeto Morse composto di punti e di linee, che, oltreché graficamente, può essere usato anche foneticamente.

Si noti l'importanza di differenziare gli intervalli fra simboli (punti e linee), fra lettere dell'alfabeto, e fra parole.

Alfabeto Morse.		
A	· —	oh
B	···· —	1
C	···· — ···	2
D	···· — ···	3
E	····	4
F	···· — ···	5
G	···· — ···	6
H	···· — ···	7
I	····	8
J	···· — ···	9
K	···· — ···	0
L	···· — ···	punto
M	···· — ···	
N	···· —	
O	····	
P	···· — ···	
Q	···· — ···	
R	···· — ···	
S	····	
T	····	
U	····	
V	···· — ···	
W	···· — ···	
X	···· — ···	
Y	···· — ···	
Z	···· — ···	
punto e virgola	···· — ···	
virgola	···· — ···	
due punti	···· — ···	
punto interrogativo	···· — ···	
punto esclamativo	···· — ···	

Cenni introduttivi ai personal computer

Il problema di comunicare è evidenziato nella trattazione dei P.C.

Definiamo il "BIT" termine ottenuto dalla contrazione di: Binary digit ed indica ciascuno dei due simboli 0; 1; in binario. Cioè, possiamo dire che il "bit" è l'unità della quantità d'informazione. Otto bit affiancati formano un "byte". Il "byte", è l'elemento di memoria del p.c. Ricordiamo il sistema binario, ove ad ogni casello corrisponde una potenza del 2 iniziando con esponente zero, da

destra a sinistra, il numero memorizzato è:

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
0	1	1	0	0	1	0	1

=

$= 1 + 4 + 32 + 64 = 101$. Però analogamente occorre

fare con le lettere:

0	1	0	0	0	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---

 = lettera A che numericamente corrisponde a 65.

È stata codificata una tabella "ASCII", (American Standard Code International interchange) in modo che un "byte" corrisponde ad un carattere alfanumerico. ($2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 = 255$)

Riportiamo i 255 segni e caratteri della tabella ASCII. Ove ritroviamo A \equiv 065.

TABELLA dei Caratteri ASCII.

ASCII value	Character	ASCII value	Character	ASCII value	Character
000	(null)	043	+	086	V
001	☺	044	,	087	W
002	●	045	-	088	X
003	♥	046	.	089	Y
004	♦	047	/	090	Z
005	♣	048	0	091	{
006	♠	049	1	092	\
007	(beep)	050	2	093	}
008	■	051	3	094	^
009	(tab)	052	4	095	_
010	(line feed)	053	5	096	`
011	(home)	054	6	097	a
012	(form feed)	055	7	098	b
013	(carriage return)	056	8	099	c
014	🎵	057	9	100	d
015	☼	058	:	101	e
016	▶	059	:	102	f
017	◀	060	<	103	g
018	↕	061	=	104	h
019	!!	062	>	105	i
020	π	063	?	106	j
021	5	064	@	107	k
022	—	065	A	108	l
023	⊥	066	B	109	m
024	↑	067	C	110	n
025	↓	068	D	111	o
026	→	069	E	112	p
027	←	070	F	113	q
028	(cursor right)	071	G	114	r
029	(cursor left)	072	H	115	s
030	(cursor up)	073	I	116	t
031	(cursor down)	074	J	117	u
032	(space)	075	K	118	v
033	!	076	L	119	w
034	"	077	M	120	x
035	#	078	N	121	y
036	\$	079	O	122	z
037	%	080	P	123	[
038	&	081	Q	124]
039	'	082	R	125	~
040	(083	S	126	}
041)	084	T	127	␣
042	*	085	U		

(segue) TABELLA ASCII

ASCII value	Character	ASCII value	Character	ASCII value	Character
128	Ç	170	┌	213	ƒ
129	ü	171	½	214	ƒ
130	é	172	¼	215	#
131	â	173	ı	216	+
132	ä	174	«	217	└
133	å	175	»	218	┐
134	à	176	☼	219	■
135	ç	177	☼	220	■
136	ê	178	☼	221	■
137	ë	179	└	222	■
138	è	180	└	223	■
139	ï	181	└	224	α
140	ı	182	└	225	β
141	ı	183	└	226	┐
142	Ä	184	└	227	π
143	Λ	185	└	228	Σ
144	É	186	└	229	σ
145	æ	187	└	230	μ
146	Æ	188	└	231	τ
147	ô	189	└	232	ϕ
148	ö	190	└	233	ϕ
149	ò	191	└	234	Ω
150	û	192	└	235	δ
151	ü	193	└	236	∞
152	ÿ	194	└	237	∅
153	Ö	195	└	238	€
154	Ü	196	└	239	∩
155	•	197	+	240	≡
156	£	198	└	241	±
157	₣	199	└	242	≥
158	₤	200	└	243	≤
159	ƒ	201	└	244	┐
160	á	202	└	245	└
161	í	203	└	246	÷
162	ó	204	└	247	≈
163	ú	205	└	248	°
164	ñ	206	└	249	•
165	Ñ	207	└	250	•
166	æ	208	└	251	√
167	ø	209	└	252	n
168	ç	210	└	253	z
169	┌	211	└	254	■
		212	└	255	(blank 'FF')

I due elementi: "1"; "0"; oppure: "acceso"; "spento";
sinteticamente: "si"; "no"; vengono posti nel
byte di otto caselle, avremo così delle
disposizioni con ripetizione, cioè il numero
delle disposizioni con ripetizione di due ele-
menti (1;0) di classe otto è: $2^8 = 256$.
che sono gli elementi della tabella ASCII.
È bene notare che, ad ogni disposizione, si può
far corrispondere elementi diversi da quelli
della tabella ASCII; per esempio l'alfa-
beto arabo o greco, o caratteri cinesi.
La tabella A.S.C.I.I. contiene simboli di
comando grafico, l'alfabeto latino minu-
scolo e maiuscolo, le lettere accentate, le
cifre numeriche, le parentesi, i segni delle
operazioni aritmetiche, altri segni matematici,
alcune lettere dell'alfabeto greco, nonché una
serie di angolature di segmenti e piccoli seg-
menti diversamente posizionati, in modo da
rendere facili certe rappresentazioni geome-
triche e scrivere certe formule matema-
tiche.

Da queste impostazioni primordiali, l'uso dei computer si è evoluto, sono nati linguaggi di programmazione, sempre più evoluti.

È importantissimo rendersi pratici della "numerazione binaria" sia come impostazione sia come operazioni ed elaborazioni anche complesse.

La sequenza dei comandi e delle esecuzioni, (su cui abbiamo già accennato), implica programmazioni diverse.

Facciamo un esempio semplicissimo: a, b, c sono tre numeri tali che $a + b = c$.

Supponiamo di voler fare l'operazione $a + b = c$.

Nei calcolatori ordinari si batte il n° "a" poi si batte il simbolo + poi si batte il n° "b" ed infine battendo = appare "c".

Nei calcolatori con notazione inversa polacca si batte "a" e si batte "entra" ("a" va in una memoria), si batte "b" (che resta in memoria operativa) all'atto del + appare "c".

Ordinariamente, la sequenza delle azioni per eseguire una operazione fra due numeri è:

- 1) immissione di un numero in memoria
- 2) immissione dell'operazione da effettuare
- 3) immissione del numero "operatore"
- 4) col segno: "=" si ottiene il risultato.

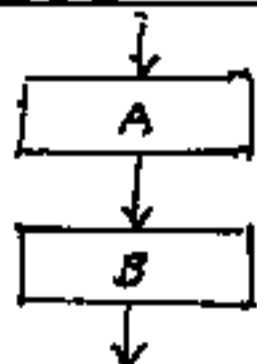
Nel procedimento inverso polacco, immessi i due numeri, ove il secondo è l'operatore, si immette l'operazione da effettuare e ciò dà subito il risultato.

Tutte le operazioni possono registrarsi in stampante in modo da avere un documento permanente di ciò che si è eseguito.

La sequenza delle varie operazioni può essere programmata sia su dischetti, sia nella memoria del computer, in tal modo fornendo al computer gli elementi base di un certo procedimento di calcolo (opportunosamente richiamato), il computer fornisce il risultato, senza bisogno di altri interventi dell'operatore, anche se il procedimento di calcolo è lunghissimo.

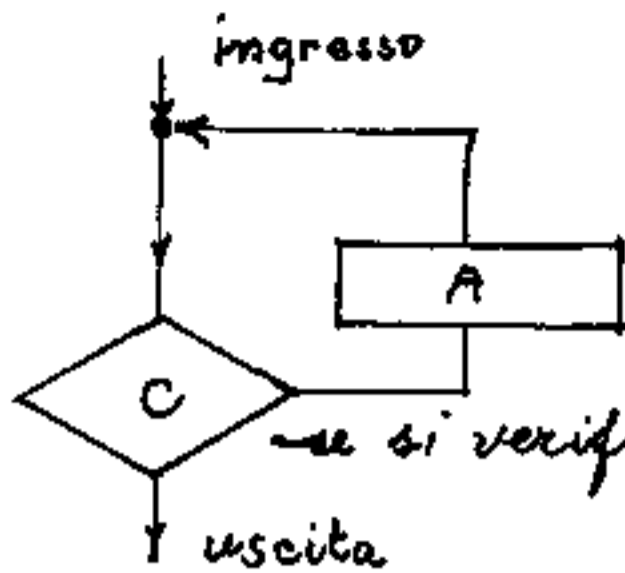
dal primo linguaggio di programmazione (1952), seguirono nel 1954 il Fortran (FORmula TRANsactor), nel 1958 l'Algol (ALGOritm Language), nel 1950 il Cobol (COmmon Business Oriented Language). Nel 1964 il PL/1 (Programming Language number 1) il Basic (Beginners All-purpose Symbolic Instruction Code) fu introdotto nel 1964. Il Pascal nasce nel 1973 nel politecnico di Zurigo. $\bar{\epsilon}$ è particolarmente adatto per la programmazione strutturata.

La programmazione strutturata ha le sue basi nel teorema di Böhm-Jacopini;
Tale teorema afferma che qualsiasi algoritmo rappresentabile con un diagramma di flusso può essere espresso con tre sole strutture, tutte con un ingresso ed una uscita: sequenza, ripetizione, selezione.



La sequenza
 ①

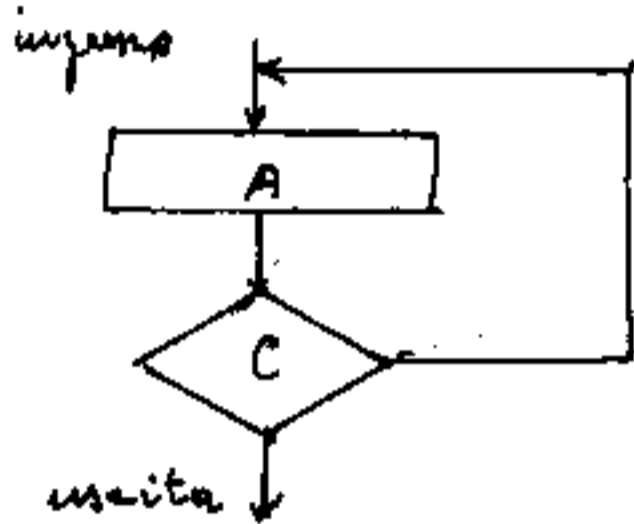
Begin (inizio) (ingresso)
 Processo A
 Collegamento (uscita-ingresso)
 Processo B
 End (FINE) (uscita)



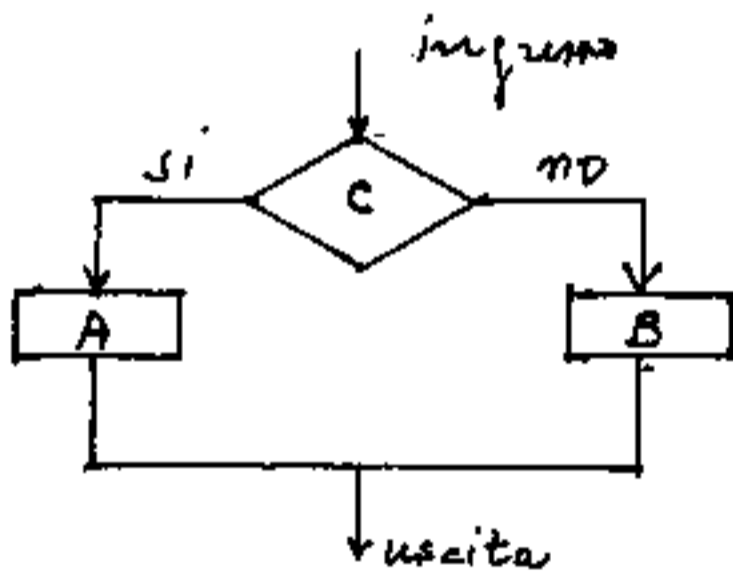
se si verifica la condizione C ripete per A
(A subentra in caso di ripetizione)

La ripetizione

②



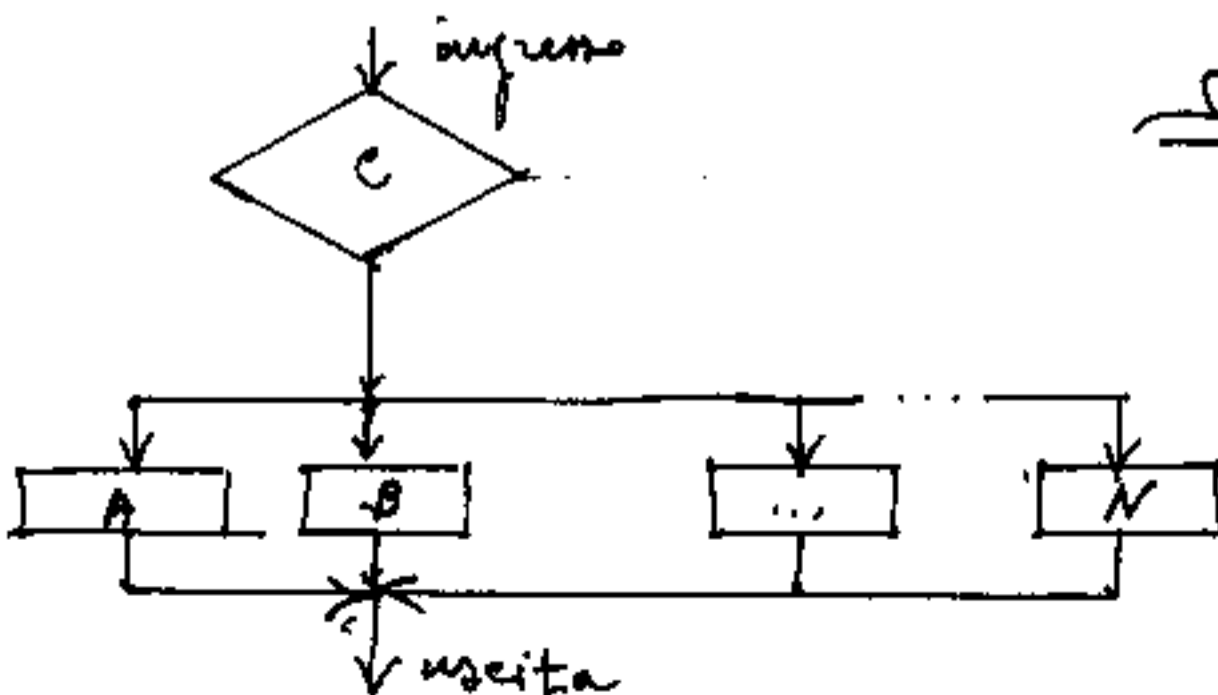
La ripetizione
(A e C sono sempre eseguiti)



Selezione alternativa

(C condiziona)

③



Selezione multipla

(C condiziona)

Le tre strutture: sequenza, ripetizione, e selezione, (sopra schematizzate) consentono la costruzione di qualsiasi diagramma di flusso.

Le regole grammaticali dei linguaggi di programmazione sono espresse in modo conciso dalla notazione simbolica di Backus-Naur (BNF - Backus Naur Form)

$\langle S \rangle$ si legge: "struttura S del linguaggio"

$:: =$ " : " è definita come"

| " : " oppure"

Per esempio, per definire una cifra si scriverei:

$\langle \text{cifra} \rangle :: = 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$

che si legge:

"La struttura cifra, è definita come: zero oppure uno oppure due, ... oppure nove".

Vi sono valori o procedimenti di calcolo che non mutano, sono costanti anche nei diversi programmi: per es:

$\pi = 3,1415926535897932384626 \dots$

$e = 2,71828182845904523536028 \dots$

sono costanti numeriche,

Tali costanti non saranno più variate, (è ovvio che trattandosi in genere di infinite cifre, la costante è definita dal grado di precisione richiesto)

Anche le operazioni aritmetiche, gli algoritmi o procedimenti di calcolo sono costanti e possono memorizzarsi, e nella memorizzazione possono avvenire semplificazioni, per es. il volume della sfera: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4,18879020478639...R^3$
 $V = \frac{\pi}{6}D^3 = \frac{\pi}{6}(2R)^3 = 0,523598775.D^3$

Comunque i coefficienti numerici, quando sono di infinite cifre, sono memorizzati nel grado di precisione richiesto.

Poiché i valori numerici (approssimati) sono ugualizzati a lettere, (e viceversa); le formule letterarie, assumendo i valori numerici memorizzati, avranno il grado di precisione fissato. Può avvenire che due procedimenti di calcolo che dovrebbero dare lo stesso valore, differiscano nelle ultime cifre, l'approssimazione dipende dalla precisione dei dati.

L'approssimazione di un numero può essere per difetto o per eccesso. Se il numero è minore del valore che vuol rappresentare, l'approssimazione è per difetto, se maggiore del valore, l'approssimazione è per eccesso.

Per riconoscere se l'approssimazione è per difetto o per eccesso, in genere si opera sull'ultima cifra: se per difetto sarà seguita da puntini, se esatta o per eccesso non sarà seguita da puntini.

$$3,1415 < \pi < 3,1416 \quad \text{cioè: } \dots \pi \approx 3,1415\dots ;$$

$$\pi \approx 3,1416. \quad \text{Sarebbe meglio scrivere: } \pi \approx 3,1415$$

$\pi \approx 3,1416$. L'arrotondamento di un valore porta un "errore" che è lo scostamento dal vero valore. Per esempio 3,1415 si scosta per difetto di $\Delta = -0,00009265358979\dots$

mentre 3,1416 ha un eccesso $\Delta = +0,000007346\dots$

Cioè è più approssimato il valore in eccesso che il valore in difetto.

L'uomo, quando cercò di affrontare la fenomenologia che ci circonda, data la complessità, cercò di semplificare,

linearizzando le espressioni algebriche del fenomeno. Le espressioni divennero: $a = k \cdot b$ ove k è un coefficiente numerico, oppure un'altra grandezza dimensionale; per es: tensione = (intensità di corrente)(resistenza); ($V = I \cdot R$)
Nell'espressione non appaiono i campi magnetici e le forze ponderomotrici.

Questo (forse troppo lungo) discorso ci avverte che l'approssimazione l'abbiamo già nella formula fisica, e che non possiamo inseguire una precisione già mancante nei dati di partenza. È assurdo scrivere numeri ineccezionali lunghezze fino al decimo di millimetro, quando tali lunghezze sono misurate con una comune rotella metrica graduata in centimetri.

Le formule linearizzate sono valide in campi ristrettissimi, ove sia possibile sostituire un tratto di segmento lineare ad un tratto curvo, e gli scostamenti non superino l'errore ammissibile. L'approssimazione deve essere accettabile.