

I Riferimenti

Il problema che cerchiamo di trattare, è forse il più sottile, acuto e fondamentale di tutta la scienza.

Abbiamo considerato il punto (cio' che non ha parti) come una localizzazione nello spazio ennedimensionale; con ciò il punto diventa origine od arrivo di tutte le dimensioni.

Per avere le dimensioni, di punti ne occorrono almeno due, cioè una variazione della localizzazione. La variazione può riguardare una sola dimensione, per esempio il tempo, a cui si abbina il concetto di "prima o dopo".

La variazione può riguardare il potenziale elettrico, o l'energia potenziale connessa ad un campo qualsiasi, anche fuori del nostro spazio tridimensionale.

Sempre considerando il punto, l'emissione o l'assorbimento, l'attrazione o la repulsione, ci danno la visione delle infinite direzioni uscenti o convergenti in quel punto.

Basta scegliere una direzione per aver il primo riferimento base dello spazio.

Siamo abituati a considerare la parola "punto" limitatamente allo spazio geometrico tri-dimensionale. Nel tempo ci è più familiare la parola istante. Eppure la determinazione di un certo stato termico, rispetto ad uno zero convenzionale o rispetto allo zero assoluto, è sempre un punto di quella dimensione, (in questo caso la temperatura a quel punto) ciò vale per la pressione, per il potenziale elettrico, per la densità; vale in genere per tutte le dimensioni. Abbiamo evidenziato questa generalizzazione della parola "punto", per rendere più accessibile il concetto "euclidimensionale".

Consideriamo di aver fissato il centro "0" degli assi; (sappiamo trasformare le relazioni ad assi traslati ed assi ruotati, o viceversa); detta x_p una coordinata di un punto, la successiva coordinata y_p è connessa alla prima dal fatto di dover insistere sulla retta $x = x_p$, analogamente z_p dovrà essere sulla retta (x_p, y_p) . Analogamente la 4^a coordinata tempo è riferita alle precedenti tre, non solo, ma la successiva coordinata è riferita alle quattro precedenti.

Il problema dell'equilibrio

Equilibrio si ha quando due agenti contrapposti si equivalgono. (Ogni espressione matematica in cui figurì il segno "uguale": (=))

Abbiamo già trattato nel I volume il paragone fra una espressione algebrica ed una bilancia; sempre nel I volume si è accennato all'equilibrio come simmetria; nel III volume il problema è emerso nel calcolo dei baricentri.

Generalizziamo: "una espressione algebrica può contenere variabili nello spazio enne dimensionale", in tal senso l'equilibrio oltreché statico, e dinamico, può considerarsi termico, elastico, elettrico, ecc in generale energetico."

Questa impostazione è veramente feconda, e supera diversi anacronismi e contraddizioni della fisica classica.

L'azione gravitazionale terrestre ha portato al concetto di "peso" ed alla definizione dell'unità di misura dei pesi, sulle cui incongruenze abbiamo già trattato nel I volume. Due corpi, due cariche elettriche, o magnetiche

possono attrarsi o respingersi, questa azione attrattiva o repulsiva che per i corpi sulla superficie terrestre è il peso ed il senso di fatica che si ha nel sollevare pesi, portò a considerare più forte chi sollevava pesi maggiori, nacque la parola forza per definire le azioni pondero-motrici di attrazione o repulsione.

Indicando con F queste azioni fu rilevato che $F = \frac{m_1 m_2}{d^2}$ queste azioni erano proporzionali alle due masse (quantità di materia, o quantità di carica elettrica o magnetica) ed inversamente proporzionali al quadrato delle distanze.

Quindi l'azione "Forza" era relativa ad un certo istante in un certo punto dello spazio geometrico ed inerente a dimensioni fisiche di massa o carica elettrica o magnetica od altro che può anche ridursi a deformazioni elastiche (estremi di una molla compressa o tesa, però con impostazione diversa.)

Diremo "Lavoro" il sollevamento di un peso ad una certa altezza, e si estenderà tale termine all'azione detta forza quando variando la distanza "d" si pensi F invariata. Ma anche il peso

varia con la gravità, e tale variazione non è rilevabile se la pesata avviene per confronto con pesi campione, cioè con bilance che utilizzano il principio della leva (stadere od altre).

Cioè un Kg di materiale prestare in equilibrio la bilancia a due piatti, anche sulla luna, quando sull'altro vi sia un peso campione.

Se invece la pesata avviene con un dinamometro (bilancia a molla), o con una bilancia di torsione (bilancia di Coulomb), la deformazione elastica sarà molto minore se il Kg di materiale sarà pesato sulla luna, perché la gravità è minore.

I fisici, che dopo aver definito "massa" la quantità di materia, e definito il Kg-massa; definita la velocità (media ed istantanea) come variazione dello spazio nel tempo, e definita l'accelerazione come variazione della velocità nel tempo. Fu studiata la velocità di un corpo soggetto alla gravità terrestre, classici gli esperimenti di Galileo (un piano inclinato è conservato al Museo delle Scienze di Firenze). Fu detta: Q "quantità di moto" il prodotto di una massa "m" per una velocità "u"; ove: $Q = mu$.

Fu detto impulso il prodotto di una forza F per un

tempo: cioè: $\int_{t_1}^{t_2} F dt$ ed essendo uguale l'impulso alla quantità di moto Q , avremo cioè, in termini finiti, il valore della forza media $\bar{F}_m = \frac{m \cdot u}{(t_2 - t_1)}$; dimensionalmente $F = (M \cdot L \cdot T^{-2})$ ed anche essendo l'accelerazione: $a = (L \cdot T^{-2})$, si ha: $F = m \cdot a$

Ma un sistema di unità di misura non risulta definito dalla sola indicazione delle unità fondamentali, (cfr. E. FOA' - Lezioni di Fisica Tecnica, ed. Cedam - Padova - 1947. Cap I). Alle unità fondamentali occorre aggiungere il complesso di convenzioni che definiscono le unità derivate.

Per esempio la grande discussione fra i fisici se scegliere per l'unità di forza la relazione: $F = ma$ (dimensionalmente: MLT^{-2}), oppure scegliere la relazione: $F = \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$ (dimensionalmente $M^2 L^{-2}$); fu scelta: $F = ma$ e, per far tornare le cose agguisero alla seconda formula un K dimensionale ($M^{-1} L^3 T^{-2}$) e questo appiccicotto lo chiamarono pomposamente: "Costante di gravitazione universale" e la formula divenne: $F = K \frac{m_1 m_2}{d^2}$ cioè dimensionalmente: $(M^{-1} L^3 T^{-2} M^2 L^{-2}) = (MLT^{-2})$.

Uguagliando le azioni: $MLT^{-2} = M^2 L^{-2}$ si ha $\frac{M}{L^3} = \frac{1}{T^2} = \nu^2$; $\frac{\text{massa}}{\text{volume}} = \text{densità} = \text{prodotto di frequenza}$.

Radianti

Il radiante è una dimensione "geometrica"

Il problema delle dimensioni, impropriamente qualificate come "fisiche", è annoso, e purtroppo per quel poco che so' a tutt'oggi, non solo non è risolto, ma si continua ad insegnare cose assurde.

La verità in sé, è fuori delle capacità intellettuali di tutta la generazione umana, e se crediamo in un Ente Supremo, cerchiamolo con amore e gratitudine nel nostro animo e non andiamo a sbaudierare: "Dio lo detto, Dio ha fatto, Dio vuole, ... noi siamo il popolo eletto" Ci sono uomini che lo fanno, come avessero Dio nella tasca dei pantaloni.

Noi ci sentiamo immersi in questo universo che ci circonda; l'esperienza dei nostri sensi è assolutamente individuale per cui l'immagine, "quella immagine" che è stata captata dalla nostra retina, ovviamente non può aver eccitato, in quell'istante, un'altra retina. Così il suono, così tutti i sensi.

Notiamo che una immagine, un suono, un flusso termico, una spinta, noi li connettiamo subito con una dizione.

E ciò consciamente o inconsciamente: una perso-
sa si volta verso chi l'ha chiamata.

Abbiamo già scritto qualcosa sul concetto:
"direzione", sulla sua importanza, sulla
sua connessione con le misure angolari,
che secondo i fisici attuali "non hanno
dimensioni fisiche. (Il radiante non
è una dimensione fisica!... insegnano!!!)

Questo nostro studio tende a dimostra-
re che:

la dimensione lineare e la dimensione
angolare sono fondamentali ed impli-
citamente connesse con la dimensione
tempo.

Occorre ripartire da zero, e
non possiamo accettare leggi ipotizzate dall'uomo,
cioè infaccite di convenzioni di comodo. Accettia-
mo invece l'esperienza dei fenomeni.

Ma l'acquisizione dei fenomeni avvie-
ne attraverso i sensi e non è detto che i sensi
rispondano esattamente nello stesso modo, nei singoli
individui, e tal volta nello stesso individuo in tempi
diversi.

È quindi molto difficile descrivere fenomeni, o forse affermazioni che siano universalmente accettate.

L'individuo, una volta raggiunta la consapevolezza dell'io, fissa un centro e ciò che lo circonda in tutte le direzioni.

È praticamente immediato il concetto di lontananza, di vicinanza, di sequenza, di verso, di moto, e quindi di tempo.

Il concetto: "verso" è delicatissimo ed occorre analizzarlo subito.

Allontanarsi o avvicinarsi all'osservatore ci dà il concetto di "verso" su una linea. Ma altri due osservatori posti lateralmente alla linea e da banda opposta affermerebbero uno: "è un moto verso destra", l'altro: "è un moto verso sinistra". Ci vuol poco a metterli d'accordo dicendo: "è un moto che va da A verso B."

Questa banalissima osservazione ha portato grandi discussioni soprattutto sul verso nei moti circolari. Infatti consideriamo un corpo che ruoti intorno ad un osservatore uomo, (che "in sé" ha già il verso

della sua vista, del suo modo di procedere, ed ortogonalmente a ciò sua destra e sua sinistra); egli vedendosi passare davanti il corpo mobile, che gli ruotava intorno, notava, se il corpo proveniva dalla sua sinistra, lo diceva sinistrotorso od anche destrotorio perché andava verso la sua destra. Se invece proveniva dalla sua destra veniva chiamato destrotorso e siccome procedeva verso sinistra era anche detto sinistrotorio. Però: (cfr. Lexi Cirita Amaldi \rightarrow Compendio di meccanica razionale - parte I pag. 5 - ed. Zanichelli)

Certi geni, confondendo sinistrotorso con sinistrotorio si giustificarono dicendo che la desinenza orso - orsa non deriva dal verbo latino "ortus", ma da adrorus cioè che si muove verso,..... e quindi destrotorso equivale destrotorio e sinistrotorso equivale sinistrotorio. Sembrano favole, per questo abbiamo fatta la citazione di un'opera illustre. Ma questo non basta; se guardiamo le lancette dell'orologio, noi diciamo moto orario oppure, come prima, "moto destrotorio o sinistrotorso" (Lucifer ortus erat, dice Ovidio nei Tristia) però se guardiamo l'orologio in trasparenza dal di sotto, il moto orario lo vediamo antiorario.

È questo un primo impatto con la relatività, è una relatività Galileiana che Einstein estese alle onde elettromagnetiche. A noi occorre una definizione di "verso" che non dipenda dalla posizione dell'osservatore.

Ogni punto indefinitamente lontano determina la direzione di tutte le rette parallele che puntano verso di esso. La definizione è lecita perché dati due punti distinti A, B , con \overline{AB} reale e finita e sia P il punto indefinitamente lontano, è sempre possibile determinare una distanza $\overline{PA} = \overline{PB}$ tale che l'angolo \hat{APB} sia minore di un angolo piccolo a piacere cioè al limite $\hat{APB} \rightarrow 0$ con $\overline{PA} = \overline{PB} \rightarrow \infty$.

Cioè tutte le direzioni possibili sono le direzioni dei raggi uscenti da un centro sfera che puntano la superficie sferica. Quindi se in modo inequivocabile definiamo il centro C ed il punto P sulla superficie sferica resta definita la direzione \overrightarrow{CP} e la direzione di verso opposto \overrightarrow{PC} che più propriamente è indicata con \overrightarrow{CQ} ove: $|PQ| = |QP| = \text{diametro della sfera}$.

Meno facile è la determinazione del verso di un moto circolare.

Consideriamo il moto circolare piano.

Occorre prima di tutto orientare il piano, ciò è possibile con le rette di giacitura che sono normali all'insieme di piani paralleli, (sappiamo orientare le rette). In toscana, si suol dire, per le cave di pietra serena, che: "la pietra guarda il levar del sole"

Ciò vuol dire che le stratificazioni di pietra serena, definite da piani paralleli, hanno rette di giacitura che vanno dalla cava verso un punto ad est sopraelevato sulla superficie terrestre. Cioè le lastre di pietra formano piani inclinati ed è facile portare in cava grandi lastre se la cava è aperta da est.

Definita la direzione della retta di giacitura del piano su cui avviene la rotazione diremo positivo quel moto circolare che un uomo in piedi secondo la retta di giacitura vedrebbe antiorario, dextrorso, o sinistrogira. È la direzione della rotazione del campo magnetico intorno ad un conduttore in cui si consideri il verso della corrente dal polo positivo al polo negativo; è il moto di svitamento della vite destrorigira. ↗

Tutto ciò è indipendente dall'osservatore e dalla posizione nello spazio.

Il verso può essere invertibile come il moto in un pendolo, ma può anche essere non invertibile, come in certi fenomeni di emissione. Per esempio il secondo principio della termodinamica ci dice: "è impossibile che l'unico risultato di una trasformazione termodinamica sia il passaggio di calore (energia termica) da un corpo più freddo ad uno più caldo.

Si può generalizzare dicendo: È impossibile che l'unico risultato di qualunque trasformazione energetica sia il passaggio di energia da un corpo avente livello energetico minore ad un corpo avente livello energetico superiore.

Il concetto di sequenza implica l'ordinato susseguirsi di elementi, implica un "prima" ed un "dopo" ed in ciò implica un tempo.

Non entriamo, per ora, in merito al concetto "tempo"; consideriamo invece due modi di essere delle cose; e cioè: ferme \rightarrow statiche, in moto \rightarrow dinamiche. Purtroppo, la relatività galileiana, interviene chiedendo la precisazione: "rispetto a cosa?" In un treno in corsa sui binari, vi sono persone sedute, vi sono persone che camminano nel verso del treno vi sono persone che camminano in verso opposto;

Se poi pensiamo che anche la terra "si muove", che anche il sistema solare "si muove" e poiché il moto è una relatività, e poiché non esiste alcun sistema da considerare fermo. Non diciamo "le stelle fisse" perché non lo sono.

Ma, in tutto ciò, cosa c'entra la direzione, e quindi il radiante?

Supponiamo di essere in un treno in corsa e osserviamo il paesaggio attraverso il finestrino.

Gli alberi, i pali, le siepi, vicine ai binari del treno ci passano velocissime davanti, tanto che la direzione del nostro sguardo devia di $180^\circ = \pi \text{ rad}$ in un attimo. Invece quella torre in cima al monte, distante molti chilometri dai binari, la vediamo praticamente ferma, la direzione del nostro sguardo varia pochissimo, e non varia affatto se i binari formano un arco di cerchio avente per centro la torre. Le stelle, cosiddette fisse, sono molto, molto più distanti di quella torre.

Rilevata la relatività del moto notiamo che, affinché avvenga una mutazione occorre una azione che lo provochi. (Attenzione questa affermazione è più estesa della legge d'inercia)

Per non voler entrare nella legge d'inertzia, consideriamo due cartoncini affiancati, di uguali dimensioni e diverso colore. La mutazione fra il cartellino bianco ed il cartellino verde rilevata dai nostri occhi, ha due azioni diverse: Una azione è l'emissione o riflessione cromatica che dipende dalla cosa. L'altra azione è quella che compiamo noi variando la direzione del nostro sguardo. Ma noi cerchiamo ciò che è indipendente dall'osservatore.

Facciamo una esperienza, per cercare di chiarire cosa intendiamo per "azione" (non accettiamo il concetto di forza). Ricordiamo Archimede:

Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria.

Se si verifica l'azione di qualcosa su altro qualcosa, l'agente deve disporre di qualcosa capace di esercitare l'azione. Chiameremo energia questo qualcosa che potrà presentarsi in infinite forme diverse.

L'energia per sua natura espliciterrebbe la sua azione indipendentemente se non esistessero vincoli capaci di bloccarne l'azione che comunque il vincolo subisce, sia pure in modo meno appariscente.

L'energia bloccata è spesso chiamata: "energia potenziale" a cui si aggiunge una qualificazione: "elastica, elettrica, gravitazionale, chimica, termica, cinetica, molecolare, atomica, nucleare, ecc. ecc." (Tutta la materia è energia)

Il pendolo riceve una certa quantità di energia si diverte a trasmutarla da gravitazionale a cinetica e viceversa ed il suo moto sarebbe perpetuo se non vi fossero varie specie di attriti, con l'aria esterna e col perno intorno al quale oscilla.

L'attrito trasforma l'energia in altre forme, normalmente in calore, (energia termica), ma può essere elettrica o anche forme diverse. Se non vi fossero attriti, la posizione del pendolo fermo in equilibrio, sarebbe una sola ed è la direzione della gravità che passerebbe per il centro di oscillazione e per il baricentro del sistema.

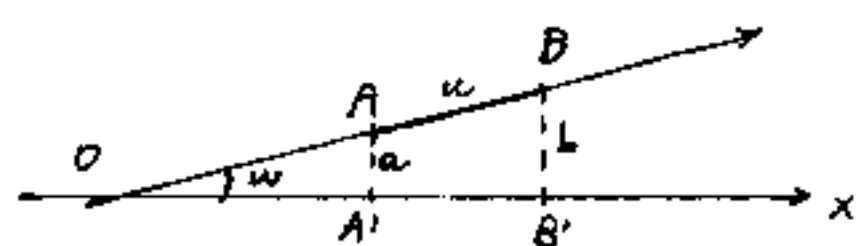
Invece all'intorno di questa posizione vi sono infinite posizioni in cui il pendolo non si muove e sono le direzioni che dirergono dalla direzione della gravità di un angolo inferiore o tutt'al più uguale all'angolo di attrito.

Non si può quindi pensare ad un punto, ma ad un intorno più o meno piccolo dipendente dall'attrito.

Abbiamo già definito l'angolo piano nel I vol e lo spazio angolare solido nel IV volume; consideriamo qui un punto che si muova di moto uniforme su una circonferenza, (vedi IV volume); il suo moto, visto dalle due facce del piano su cui giace la circonferenza, appare di verso opposto: (orario o antiorario), però se proiettiamo il punto mobile su un diametro, il moto è quello di un pendolo, ed è identico sia che la circonferenza sia percorsa in senso orario ed antiorario, (non dipende dall'osservatore).

Ma il pendolo ha una frequenza e se si muove ortogonalmente al piano di oscillazione si ha una sinusoidale ed una lunghezza d'onda; (vedi IV vol. cap. lo spazio angolare solido) si ha cioè il modo di trasmettere delle sorgenti energetiche, la oscillazione non è più legata ad un piano, non solo, ma può vibrare sia nelle direzioni di emissione (come i suoni), sia ortogonalmente alle direzioni di emissione (come le onde elettromagnetiche). Il verso è una emissione ed è indipendente dall'osservatore, supponendo relativamente fermi sorgente e osservatore.

Supponiamo di aver fissata una direzione (per esempio una retta orientata), e di aver presa in quella direzione una unità di misura lineare, $u = \overline{OB} - \overline{OA} = \overline{AB}$, si



proietti il segmento \overline{AB} su un'altra direzione x

uscente da O e formante con \overline{AB} l'angolo $|\omega|$, e siano A' e B' le proiezioni, avremo $\overline{A'B'} = \cos(\omega) \cdot \overline{AB} = u \cdot \cos \omega$

Se $\omega = 90^\circ = \pi/2$, $\cos \omega = 0$ e quindi $\overline{A'B'} = 0$

Detti: $a = \overline{AA'}$; $b = \overline{BB'}$ gli spostamenti di A e di B per cadere in $A'B'$ avremo che l'area del trapezio descritto nel moto dai punti di $\overline{AB} = u$ è $Area_{ABB'A'} = \frac{a+b}{2} \cdot u \cos(\omega)$ e diventa nulla per $\omega = \pi/2$.

Ma se il segmento \overline{AB} ruota intorno all'asse x , i punti A e B nel loro moto non compiono segmenti rettilinei, ma archi di cerchio, il cui raggio è la distanza dall'asse cioè la lunghezza di tali archi raddrizzata è pari alla lunghezza del raggio in unità di lunghezza fatto radiante per l'angolo in radianti.

Perciò $\left(\frac{a+b}{2}\right) \overline{AB} 2\pi = \left(\frac{u_a + u_b}{2}\right) \overline{AB} (u) 2\pi \text{ rad} = \left(\frac{a+b}{2}\right) \overline{AB} \cdot 2\pi = S_l$
 = Superficie laterale del tronco di cono. —

Si verificano cioè i seguenti casi:

- 1) L'azione è tale da spostare l'oggetto di una lunghezza nella direzione dell'azione, si ha che lo spostamento si misura semplicemente in unità di lunghezza.
 - a) Se l'oggetto è un punto si ha la lunghezza della linea (se il punto è libero)
 - b) Se l'oggetto è un segmento e l'azione è perpendicolare al segmento, il segmento descrive un'area data dal prodotto del segmento per lo spostamento entrambe in unità di misura lineare di lunghezza, cioè l'area è misurato in unità di lunghezza al quadrato.
 - c) Se l'oggetto è un'area e l'azione è perpendicolare all'area; il prodotto dello spostamento in unità di lunghezza, per l'area in unità di lunghezza al quadrato è un volume in unità di lunghezza al cubo
 - d) Se l'oggetto è una massa in campo gravitazionale e l'azione ha la direzione del campo, il prodotto della massa in unità di massa, per lo spostamento in unità di lunghezza è un lavoro. (es. Kg.m).

e) Se il punto P è vincolato ad avere distanza $r =$
 = costante da un asse fisso. ($r = \overline{PO} \perp$ all'asse), e
 l'azione è perpendicolare al piano determi-
 nato da P e dall'asse, il moto di P è un arco
 di circonferenza, ma anche tutti i punti della
 distanza $r = \overline{PO}$ descrivono archi di circonferenza;
 l'azione quindi non agisce sull'asse, ma fa
 descrivere al segmento \overline{PO} l'angolo: $\widehat{PO}(P)$
 cioè provoca una rotazione.

Le azioni che provocano rotazioni, sono
 dette momenti. La lunghezza $\overline{OP} = r$
 deve essere misurata in unità di lunghezza/radiante.

Se l'azione su $\overline{OP} = r$ ha provocato l'angolo α (rad)
 $r\alpha = \frac{\text{lunghezza}}{\text{rad}}$ rad. = lunghezza dell'arco r addezzato
 percorso da P .

f) quindi il momento statico di una linea è
 un'area per unità di radiante della
 superficie generata dalla linea ruotando
 intorno all'asse. (v. teoremi Pappo e Guldino)

g) Il momento statico di un'area rispetto
 ad un asse è un volume per unità di
 radiante, ed è il volume di rotazione di tale
 area. (per es. $(\text{cm}^2 \times \frac{\text{cm}}{\text{rad}}) \cdot \text{rad} = \text{cm}^3$) (v. Pappo e Guldino)

b) Il momento statico di una massa rispetto ad un asse, in campo gravitazionale è quindi un lavoro per unità di radiante.

Se la massa è espressa in Kg e la sua azione dista "r" (in metri/radiante) $M = \frac{\text{Kg metri}}{\text{rad.}}$

ed il prodotto di un momento per l'angolo è un lavoro. Sia l'angolo = α (rad)

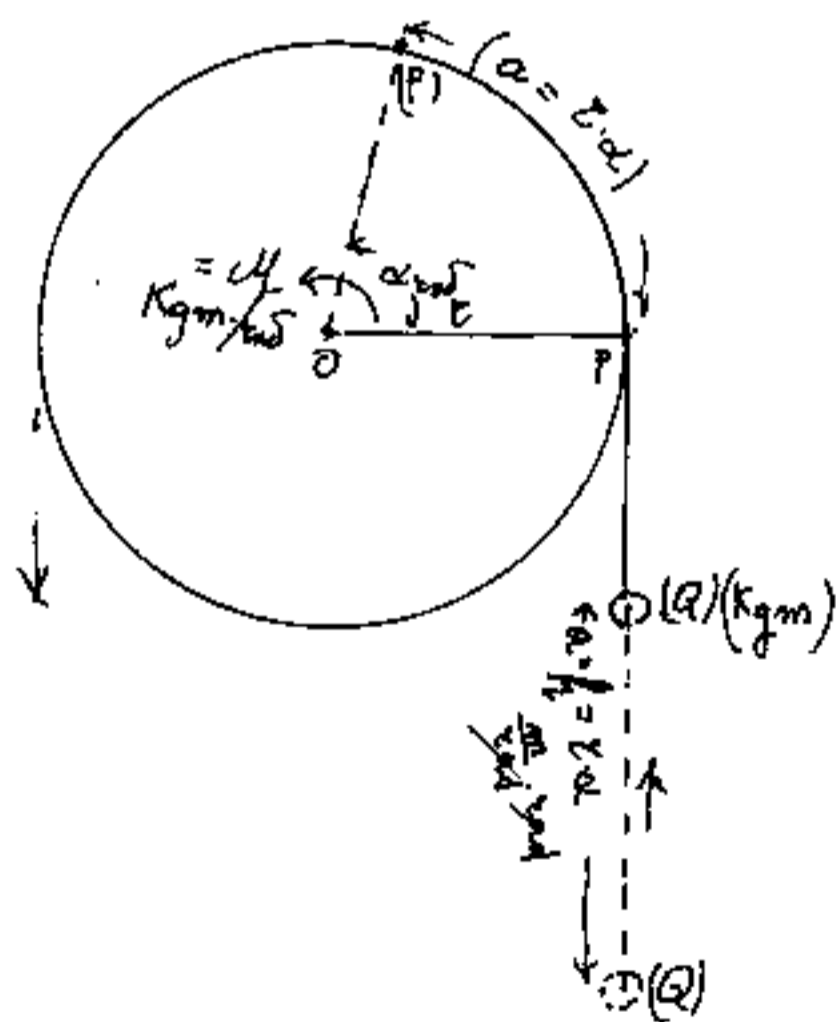
Il lavoro torna $L = M\alpha = \left(\frac{\text{Kg metri}}{\text{rad.}}\right) \text{rad} = \text{Kg m.}$

Ciò toglie l'incongruenza che un lavoro ed un momento abbiano le stesse dimensioni fisiche come vorrebbe la fisica classica.

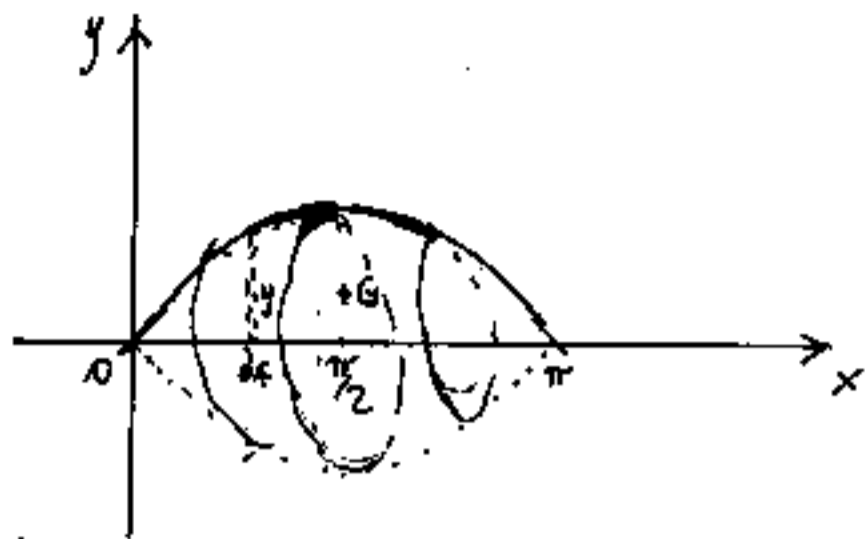
La figura a fianco evidenzia come il momento M facendo ruotare la puleggia dell'angolo α sollevi il peso Q di una altezza pari all'arco descritto dalla fune sull'arco.

Poiché abbiamo già trattato il momento sta-

tico nel calcolo dei baricentri; ed i solidi di rotazione col teorema di Pappo e Guldino,



Dimostriamo che: Momento di un'area = Volume/radiante



Trovare il volume del solido di rotazione generato da un arco di sinusoidale ruotante

intorno all'asse x e sia: $y = \sin(x)$; $dA = y dx$;

$$\int_0^{\pi} dS_x = \frac{y}{2} dA = \int_0^{\pi} \frac{y^2}{2} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin x \cos x + x}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}$$

$$S_x \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi^2}{2} = 4,934802 = \text{volume di una rotazione completa di un giro.}$$

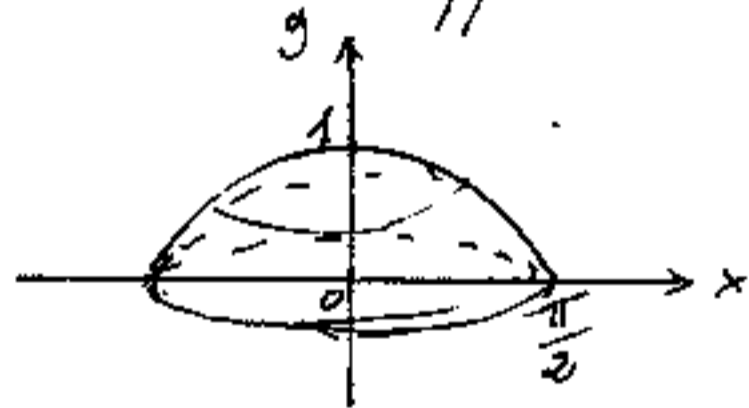
L'area è $\int y dx = \int \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2$ $A = 2$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\pi/4}{2} = \pi/8 = 0,392699081 \text{ (ordinata del baricentro)}$$

$$2\pi y_G = 2,467401 = \text{circonferenza descritta dal baricentro}$$

$$(A)(2\pi y_G) = 2(2,467401) = 4,934802 = \text{volume del solido per il}$$

teorema di Pappo e Guldino: $V = A \cdot 2\pi y_G = \frac{A \cdot 2\pi S_x}{A} = S_x \cdot 2\pi$



Consideriamo il solido ottenuto facendo ruotare l'arco di cosinusoidale

da 0 a $\pi/2$ intorno l'asse y : $y = \cos x$

$$dA = \cos(x) dx \quad \int dS_y = \int_0^{\pi/2} x \cos(x) dx = \int_0^{\pi/2} x d(\sin x) = \text{per parti:}$$

$$(x \sin x - \int \sin x dx)_0^{\pi/2} = (x \sin x + \cos x)_0^{\pi/2} = \frac{1}{2\pi}$$

$$[(1,570795) \cdot 1 + 0 - (0 + 1)] \cdot 2\pi = 3,585419094 = \text{volume del solido.}$$

I due volumi potevano ricavarsi da: $\int_0^{\pi} (\sin x)^2 \pi \cdot dx$ e da $\int_0^{\pi/2} x^2 \pi \cdot dx$.

La Geometria delle Masse

Abbiamo già dato un cenno al concetto di massa. Mentre in fisica per massa si intende: la quantità di materia, che il volume non poteva dare perché variabile con la temperatura e pressione, e che il peso non poteva dare perché variabile con l'accelerazione di gravità. Per noi "massa" è ciò che ha importanza nel problema trattato.

In analisi matematica si dicono: "coordinate baricentriche" di un insieme di punti ciascuno dei quali ha una massa: $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$, le medie ponderate: $x_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$; $y_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$; ... ecc. per quante sono le coordinate di uno spazio pluridimensionale. Abbiamo visto (vol III) le coordinate proiettive quando si riducono a coordinate baricentriche; abbiamo visto il baricentro (vol I) come centro di pressione; nel vol III la definizione di momento statico, il calcolo dei baricentri con esempi; e l'applicazione ai teoremi di Pappo e Guldino sui solidi di rotazione con l'importante corollario:
"Il volume del solido generato da un'area che ruota intorno ad un asse è dato dal momento statico di quell'area rispetto a quell'asse moltiplicato per l'angolo in rad."

Ma è nel nostro proposito di voler "esportare da zero"
Abbiamo già avvertito che il numero non qualifica la quantità: 3 cosa? 3 millimetri o 3 chilometri?, tre grammi o tre tonnellate?, tre secondi o tre secoli?, si nota che occorrono almeno due specificazioni; e cioè: la natura della quantità: "lunghezze, pesi, tempi.... ecc." e l'unità arbitraria di quella specie: "per esempio per le lunghezze: metri, piedi, centimetri, pollici, passi, come metri-
che, la lunghezza d'onda della riga rossa del cadmio a 15°C e 760 mm.Hg $\lambda_{\text{cd}} = 0,00000054384696$ metri; da cui $1\text{ metro} = 1.553164,13 \lambda_{\text{cd}}$, l'anno luce, che è la distanza coperta dalla luce in un anno alla velocità di 299792458 metri al secondo (circa 300000 Km/sec)"
 $9450.528.436.000.\text{Km}$. circa.

Facciamo una osservazione:

I valori delle funzioni trigonometriche che nascono come rapporto di due lunghezze, possono riguardarsi come numeri puri cioè privi di attributi dimensionali. Ciò premesso consideriamo un triangolo ABC ove un lato sia espresso col teorema dei seni avremo:

$a = b \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \beta}$; se $\text{sen} \alpha$ e $\text{sen} \beta$ possono considerarsi numeri puri, a maggior ragione il loro rapporto; per cui il lato "a" del triangolo assumerà l'unità dimensionale del lato "b"; cioè se b è in centimetri anche "a" risulterà in centimetri, se "b" è in pollici anche "a" risulterà in pollici, ... ecc., ma "b" può essere espresso in unità dimensionali diverse da "lunghezza", ed il segmento $\overline{AC} = "b"$ che graficamente lo rappresenta può essere una grandezza elettrica, magnetica, in generale anche non fisica, nascono così quelle "geometrie" fuori del nostro spazio tridimensionale, di cui qualche esempio si trova in elettrotecnica, in scienza delle costruzioni, in economia, ecc.

Abbiamo detto che per noi "massa" è "ciò che ha importanza nel nostro problema", ma è ambientata nello spazio tridimensionale per cui: "la distanza" ha importanza quanto la "quantità di massa".

La statica è il problema dell'equilibrio che noi vogliamo trattare in generale, oltre il comune equilibrio meccanico.

Consideriamo di dover progettare una centrale termica che produca vapore, per una industria che dispone di diversi capannoni, fra loro separati, ciascuno dei quali consumi una certa quantità di vapore.

Le quantità di vapore sono le nostre "masse"
La posizione dei capannoni la loro ubicazione

Il baricentro di queste masse è la migliore e più economicamente conveniente posizione della centrale, sia come costo d'impianto (i tubi più grandi sono più corti, ed il maggior flusso di vapore ha minore dispersione).

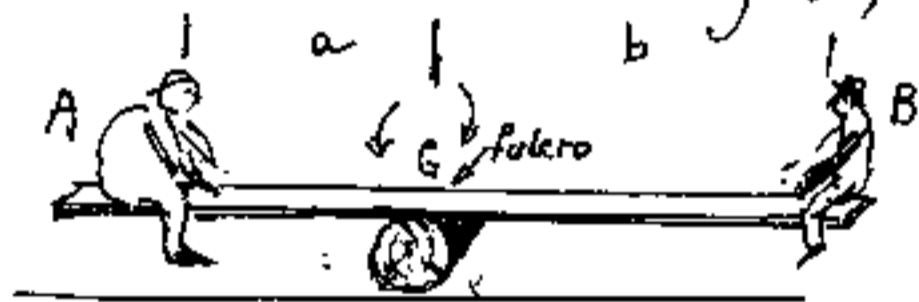
Consideriamo di dover progettare l'ubicazione di una casa colonica, per la lavorazione di un podere costituito da un appezzamento ad orto, un appezzamento a frutteto, un appezzamento a seminativo, un appezzamento a bosco.

Rilevato che nel corso dell'anno il colono va al bosco un certo numero di giorni ed all'orto praticamente tutti i giorni, le giornate lavorative sono le nostre masse che ubicate negli appezzamenti relativi,

porteranno il loro baricentro in prossimità dell'orto, ove va costruita la casa.

Analogamente una scuola o una stazione di trasporti destinate a servire borgate diverse, il numero degli allievi, o dei passeggeri, di ciascuna borgata saranno le nostre "masse".

Dalla prima visione dei due bambini, uno grasso ed uno magro, che fanno l'altalema



su una tavola oscillante su un fulcro,

e ciò è possibile, se il fulcro è nel baricentro delle due masse - peso dei due bambini, tanto che basta un leggero inclinarsi in avanti ed in dietro per ottenere l'oscillazione della tavola.

Visivamente il concetto di "equilibrio" è palese. Il fulcro sostiene la somma dei pesi.

Quindi la risultante di un sistema di forze, e quindi l'equilibrante dovrà passare per il baricentro, considerando le forze "masse" ed i punti di applicazione, la loro localizzazione.

Il baricentro diventa quel punto ove posso considerare la somma delle masse, per ottenere gli stessi risultati.

Un altro aspetto di cose equiparabili a masse sono le frequenze, per vedere una applicazione di questo concetto, consideriamo un negozio che abbia in vendita vari articoli, alcuni dei quali sono venduti con notevole frequenza altri sono venduti più raramente, è ovvio che il banco di vendita sia il baricentro delle frequenze. Questo è solo un esempio, ma il baricentro delle frequenze ha applicazioni veramente notevoli sia in campo economico, che in campo fisico, ed il discorso diventa ancora più complesso se consideriamo la frequenza una probabilità a posteriori.

Per le aree assunte come masse abbiamo già dimostrato che per una lastra piana di spessore costante in materiale omogeneo di densità costante, le aree sono proporzionali alle masse ed hanno lo stesso baricentro.

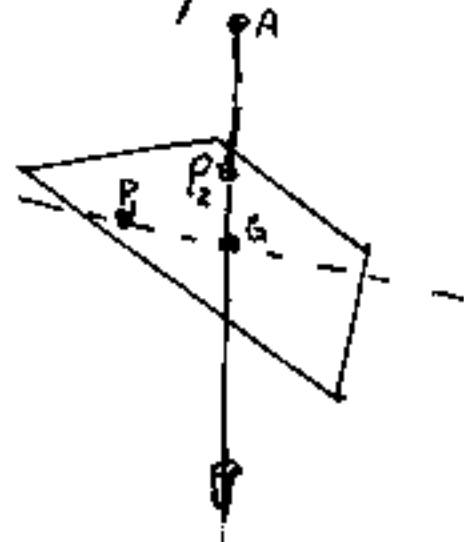
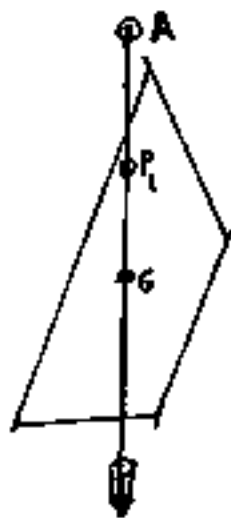
Se disegniamo su cartone una figura qualsiasi e ne calcoliamo il baricentro G , e tagliata la figura e posta in G (a metà spessore) sulla punta di uno spillo, essa starà in equilibrio perché la somma dei momenti statici rispetto ad assi

baricentrici è nulla, qualunque direzione abbia l'asse, ed è la verifica che i calcoli sono giusti e che, per quel punto, passa la risultante dei carichi (peso del cartone).

Il baricentro è quindi un centro di simmetria rispetto alle azioni di rotazione dei momenti statici relativi ad ogni asse passante per G .

Poiché la massa-peso di un corpo solido è pensabile concentrata nel suo baricentro sospendendolo per un suo punto il corpo solido esso si dispone in modo che il baricentro occupi la posizione più bassa possibile compatibile col vincolo.

Se nel punto di sospensione poniamo anche un filo a piombo, il baricentro G è certamente sul filo a piombo; e bastano per una lastra due punti di sospensione per definirne il baricentro



È un metodo pratico per determinare il baricentro.

Abbiamo già dato alcuni esempi di calcolo di baricentri (vol. III) per l'applicazione dei teoremi di Pappo e Guldino. Per la continuità dell'esposizione riportiamo il calcolo dei baricentri anche se in parte sarà ripetitiva.

Distinguiamo, prima di tutto, le masse discontinue (puntiformi), dalle masse continue.

masse discontinue

Se riferite ad un sistema di assi cartesiani valgono le coordinate baricentriche:

$$x_G = \frac{\sum_1^n m_i x_i}{\sum_1^n m_i} ; \quad y_G = \frac{\sum_1^n m_i y_i}{\sum_1^n m_i} ;$$

Se non sono riferite ad un sistema di assi cartesiani, si possono considerare a due a due e per ogni coppia, trovata la posizione del loro baricentro, vi si riporta la somma delle due masse. Ciò può ripetersi indefinitamente fino all'ultima coppia che darà il baricentro del sistema comunque disposto nello spazio.

È quindi importantissimo conoscere i modi analitici e grafici per determinare

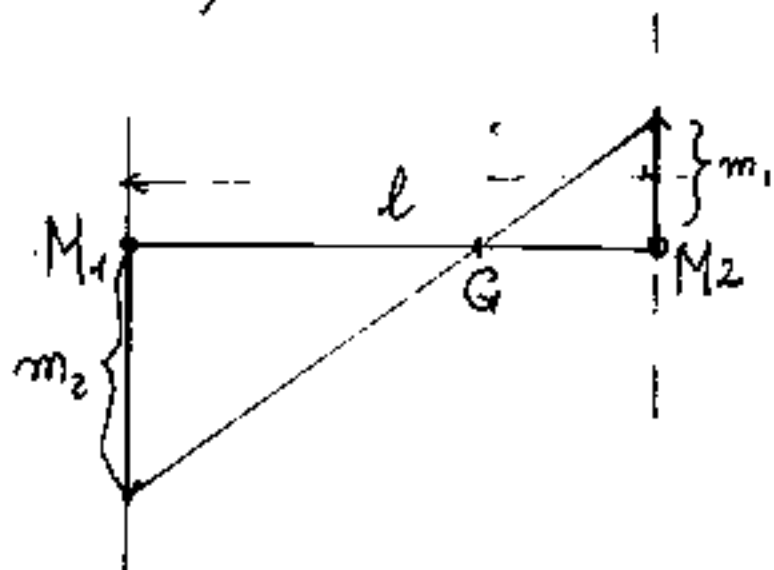
il baricentro di una coppia di masse: " M_1 " ed " M_2 " distanti " l ", di valore: m_1 ed m_2 .

Il baricentro G si trova sulla congiungente le due masse puntiformi, ad una distanza da esse che è inversamente proporzionale alle masse stesse. Cioè:

$$\overline{M_1 G} = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} l$$

$$\overline{M_2 G} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} l$$

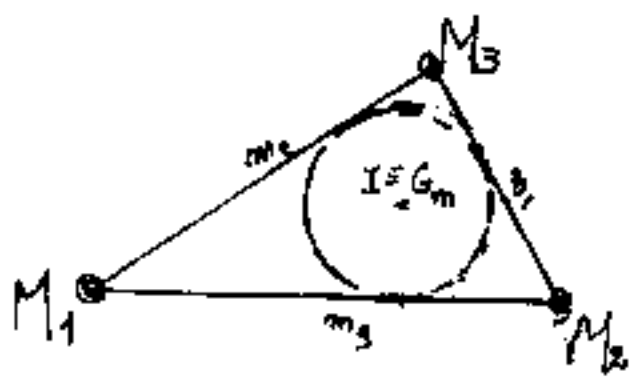
Cio' può realizzarsi graficamente:



Si riportano, perpendicolarmente ad l , su M_1 un segmento proporzionale ad m_2 ; e su M_2 , con verso opposto, un segmento proporzionale ad m_1 ;

congiungendo gli estremi di questi due segmenti si incontra G sulla congiungente.

Se tre masse ai vertici di un triangolo sono proporzionali ai lati opposti, il loro baricentro coincide con l'incentro del triangolo, infatti le bisettrici dai vertici di un triangolo dividono il lato opposto in due parti proporzionali ai lati adiacenti.

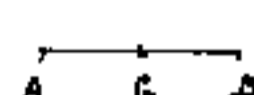


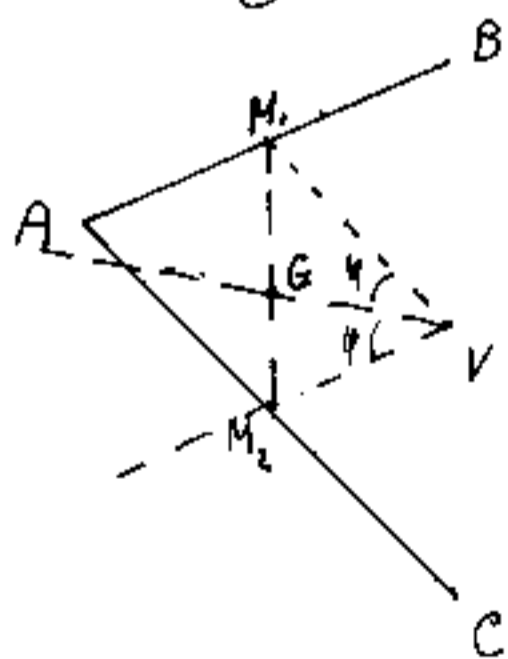
Se tre masse ai vertici di un triangolo sono proporzionali ai lati opposti, il loro baricentro coincide con l'incentro del triangolo, infatti le bisettrici dai vertici di un triangolo dividono il lato opposto in due parti proporzionali ai lati adiacenti.

Abbiamo già visto vol I come la simmetria del baricentro sia sui momenti statici. Solo se le due masse M_1 ed M_2 sono uguali il baricentro è a metà distanza: ($\overline{M_1 G} = \overline{G M_2}$).

Supponiamo ora di distribuire la massa uniformemente su un segmento lungo "a", la quantità "m" sarà proporzionale ad "a", e possiamo pensarla concentrata in "a/2", ove è $G =$ baricentro del segmento.

Quindi calcolare il baricentro di una spezzata, può farsi in più modi: sia riferendo la spezzata ad un sistema di assi; sia graficamente. Occorre vedere la lunghezza dei segmenti sia come distanza, sia come massa.

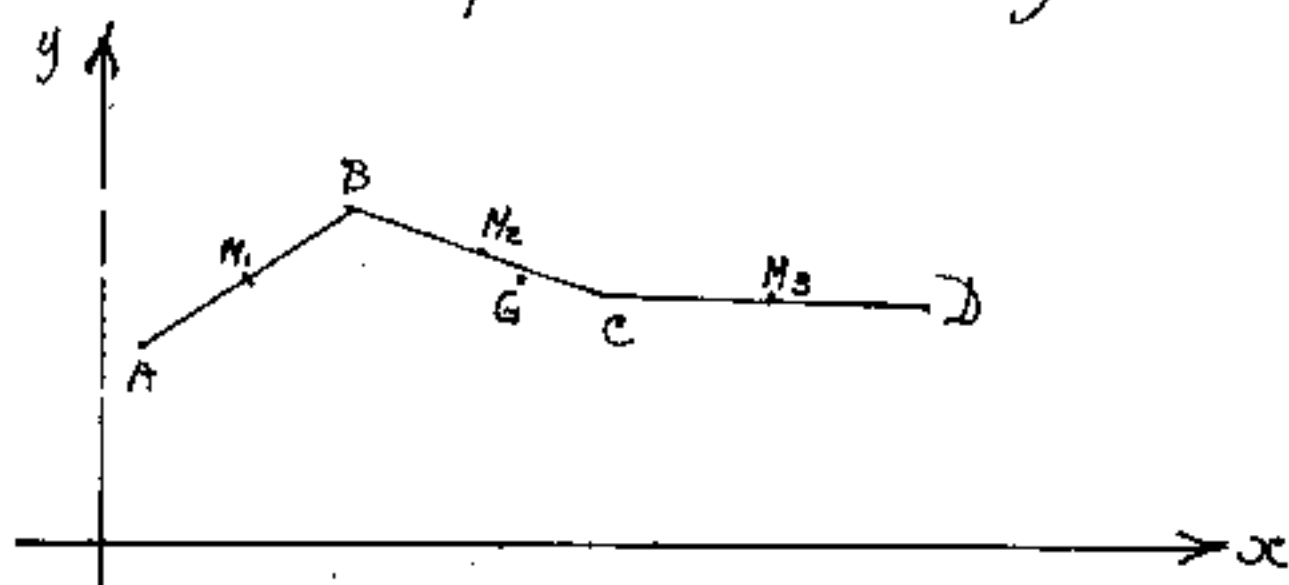
Di un segmento G è nel punto di mezzo: 



Di due segmenti G è sulla congiungente i punti di mezzo M_1 ed M_2 , e sulla bisettrice dell'angolo $M_1 \hat{V} M_2$ ove V è il vertice opposto del parallelogramma dei

segmenti, se i segmenti sono consecutivi; o del triangolo $M_1 V M_2$ ove $\overline{M_1 V} = k m_2$; $\overline{M_2 V} = k m_1$, se disgiunti.

Se tre o più segmenti formano una spezzata continua, riferita ad un generico sistema di



di assi cartesiani possiamo utilizzare le coordinate baricentriche dei punti di mezzo.

$$x_{M_1} = \frac{x_A + x_B}{2} ; \quad x_{M_2} = \frac{x_B + x_C}{2} ; \quad x_{M_3} = \frac{x_C + x_D}{2}$$

$$m_1 = \overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} ;$$

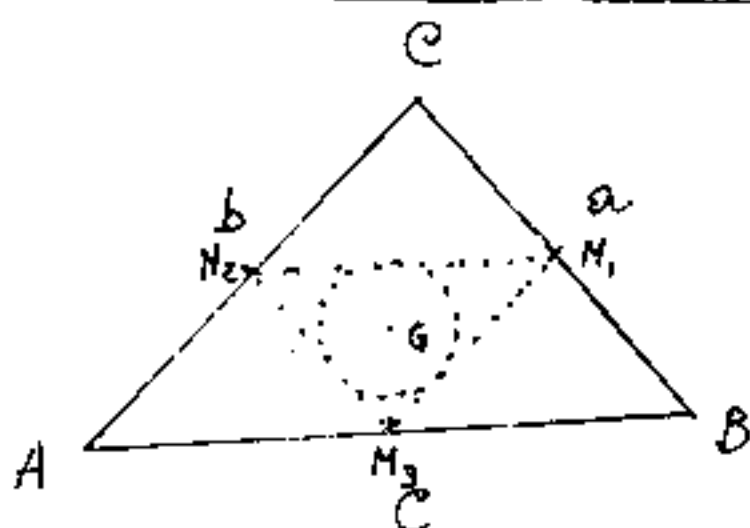
$$m_2 = \overline{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

$$m_3 = \overline{CD} = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2}$$

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n x_{M_i} \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} ; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_{M_i} \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

È più comodo il metodo grafico.

Se tre segmenti costituiscono il perimetro di un triangolo ABC, poiché i



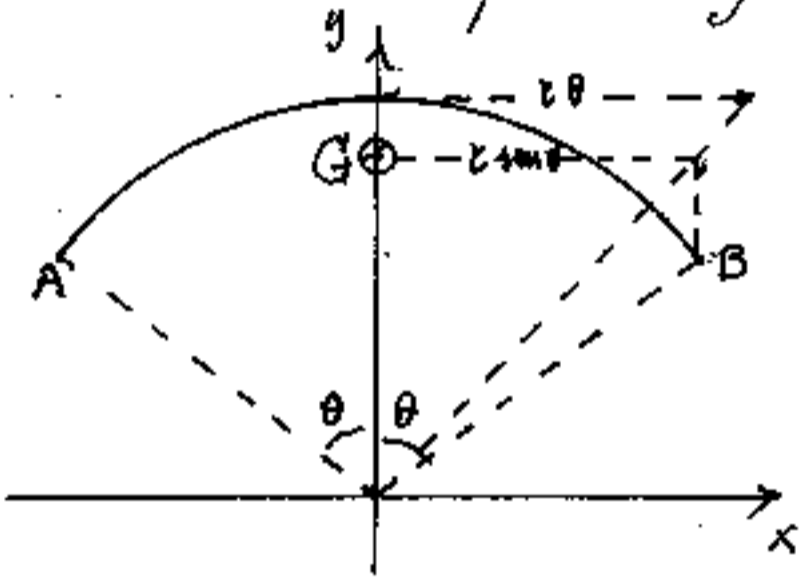
lati opposti del triangolo che ha per vertici i punti di mezzo dei lati di ABC sono proporzionali alle masse G è l'incastro di M_1, M_2, M_3

Il baricentro del perimetro di un quadrilatero, è l'incontro delle mediane.

Baricentro di linee continue

Se la linea è simmetrica rispetto ad un asse, il baricentro è sull'asse di simmetria e basta una sola coordinata per individuarlo.

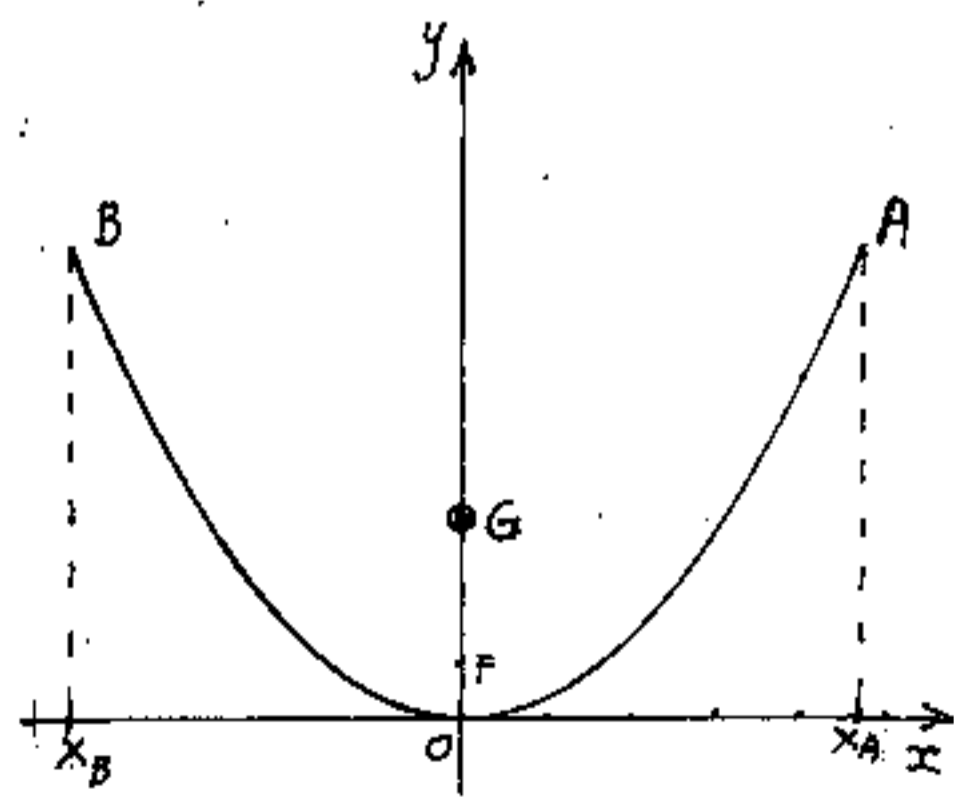
Per esempio: Arco di circonferenza di raggio "r" ed ampio angularmente 2θ



lunghezza della linea = $L = 2r\theta$
 momento statico $S_x = 2 \int_0^\theta r \cdot r \cos\theta d\theta$
 $y_G = \frac{S_x}{L} = \frac{2r^2 \text{sen}\theta}{2r\theta} = \left(r \frac{\text{sen}\theta}{\theta} \right)$

$y_G = r \left(\frac{\text{sen}\theta}{\theta} \right)$

Arco di Parabola simmetrica rispetto ad y.



$y = mx^2$; $y' = 2mx$; ($m = \frac{1}{4a}$)

lunghezza $\overline{OA} = \int_0^{x_A} \sqrt{1 + 4m^2x^2} dx$

$\overline{OA} = \frac{1}{2m} \int_0^{x_A} \sqrt{1 + (2mx)^2} d(2mx)$

posto: $2mx = \text{senh}(t)$

$\overline{OA} = \frac{1}{2m} \int \cosh^2(t) dt =$

$\overline{OA} = \frac{1}{2m} \left[\frac{\text{senh}(t) \cosh(t) + t}{2} \right] =$

$\overline{OA} = \left[\frac{1}{2m} \frac{2mx \sqrt{1 + (2mx)^2} + \text{arcsenh}(\sqrt{1 + (2mx)^2})}{2} \right]_0^{x_A} =$

(lunghezza) $\overline{OA} = \left[\frac{x}{2} \sqrt{1 + (2mx)^2} + \left(\frac{1}{4m} \right) \ln |2mx + \sqrt{(2mx)^2 + 1}| \right]_0^{x_A}$

Il momento statico rispetto ad x $S_x = \int y \, dl =$
 $S_x = \int \left(\frac{x^2}{4a}\right) \left(\sqrt{1 + \left(\frac{x}{2a}\right)^2}\right) dx = 2a \int \frac{x^2}{4a} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2a}\right)^2} d\left(\frac{x}{2a}\right) =$

$$S_x = 2a^3 \int \left(\frac{x}{2a}\right)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2a}\right)^2} d\left(\frac{x}{2a}\right) \quad \text{ove posto: } \boxed{\frac{x}{2a} = \operatorname{senh}(t)}$$

$$S_x = 2a^3 \int \operatorname{senh}^2(t) \cosh(t) d \operatorname{senh}(t)$$

$$S_x = 2a^3 \int \operatorname{senh}^2(t) \cosh^2(t) dt = \frac{a^2}{4} \int \operatorname{senh}^2(2t) d(2t) =$$

$$\boxed{S_x = \frac{a^2}{4} \left(\frac{\operatorname{senh}(4t) - 4t}{4} \right)}$$

conviene mantenere questa espressione sintetica

e ponendo: $\boxed{l = \frac{a}{2} (\operatorname{senh}(2t) + 2t)} = \overline{OA}$

l'ordinata del baricentro della linea della

parabola $y_G = \frac{S_x}{l}$;

$$\boxed{y_G = \frac{a}{8} \left(\frac{\operatorname{senh}(4t) - 4t}{\operatorname{senh}(2t) + 2t} \right)}$$

ove: $t = \operatorname{argsenh}\left(\frac{x}{2a}\right)$; $\operatorname{senh}(t) = \frac{x}{2a}$

In figura: (misure in cm.)

$$y = (0,4)x^2 : a = 0,625 : 2a = 1,25 ; x_A = 3 ; \frac{x}{2a} = 2,4 ;$$

$$\operatorname{senh}(t) = 2,4 \rightarrow t = 1,609437912$$

$$2t = 3,218875825 \rightarrow \operatorname{senh}(2t) = 12,48$$

$$4t = 6,43775165 \rightarrow \operatorname{senh}(4t) = 312,4992$$

$$l = \overline{OA} = \frac{0,625}{2} (12,48 + 3,218875825) ; \quad \underline{l = 4,905898695 \text{ cm}}$$

$$S_x = \left(\frac{0,625}{2}\right)^2 \left(\frac{312,4992 - 6,43775165}{4}\right) = \underline{7,472203329 \text{ cm}} ; \quad y_G = \underline{1,52310917 \text{ cm}}$$

Nell'esempio abbiamo trovato il baricentro della
 linea parabolica \overline{BA} simmetrica rispetto all'asse
 y . Vogliamo ora trovare il baricentro di
 un tratto generico \overline{AC} di parabola.

In questo caso occorre trovare anche il
 momento statico rispetto ad y ed avremo:

$$S_y = \int x dl = \int x \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2a}\right)^2} dx = 2a \int \sqrt{1 + \frac{x^2}{4a^2}} d\left(\frac{x^2}{4a^2}\right) =$$

$$S_y = 2a^2 \int \left(1 + \left(\frac{x}{2a}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + \left(\frac{x}{2a}\right)^2\right) = 2a^2 \left(1 + \left(\frac{x}{2a}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3}$$

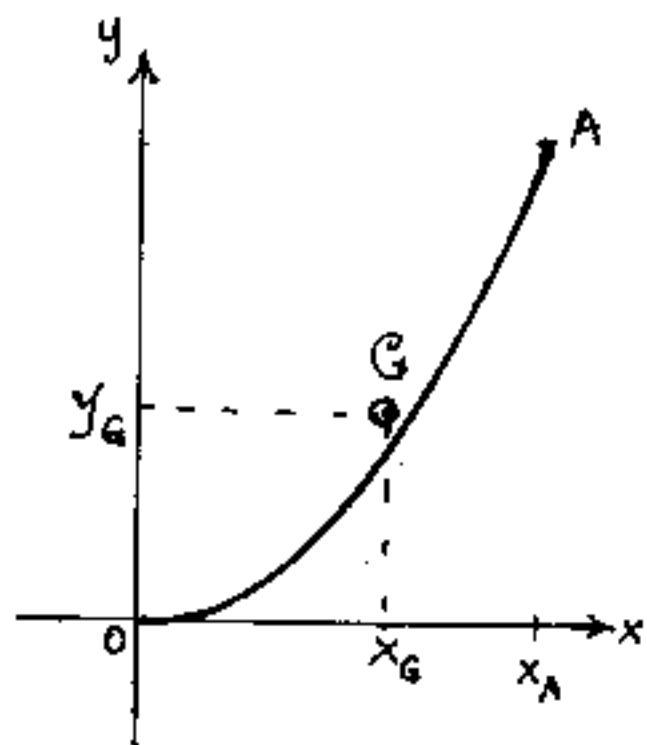
$$S_y = \frac{4}{3} a^2 \left(1 + \left(\frac{x}{2a}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

e sostituendo $\frac{x}{2a} = \sinh(t)$

$$S_y = \frac{(2a)^2 \cosh^3(t)}{3}$$

Nella figura abbiamo: $S_y = \frac{(1,25)^2}{3} (17,576) = 9,154166\bar{6}$

$$x_G = \frac{S_y}{l} = \frac{9,154166\bar{6}}{4,905898695} = 1,8659510$$



Il procedimento è estensibile
 a tratti qualsiasi di
 linea parabolica ove: $PQ =$
 lunghezza = $(l_{AQ} - l_{AP}) = l$

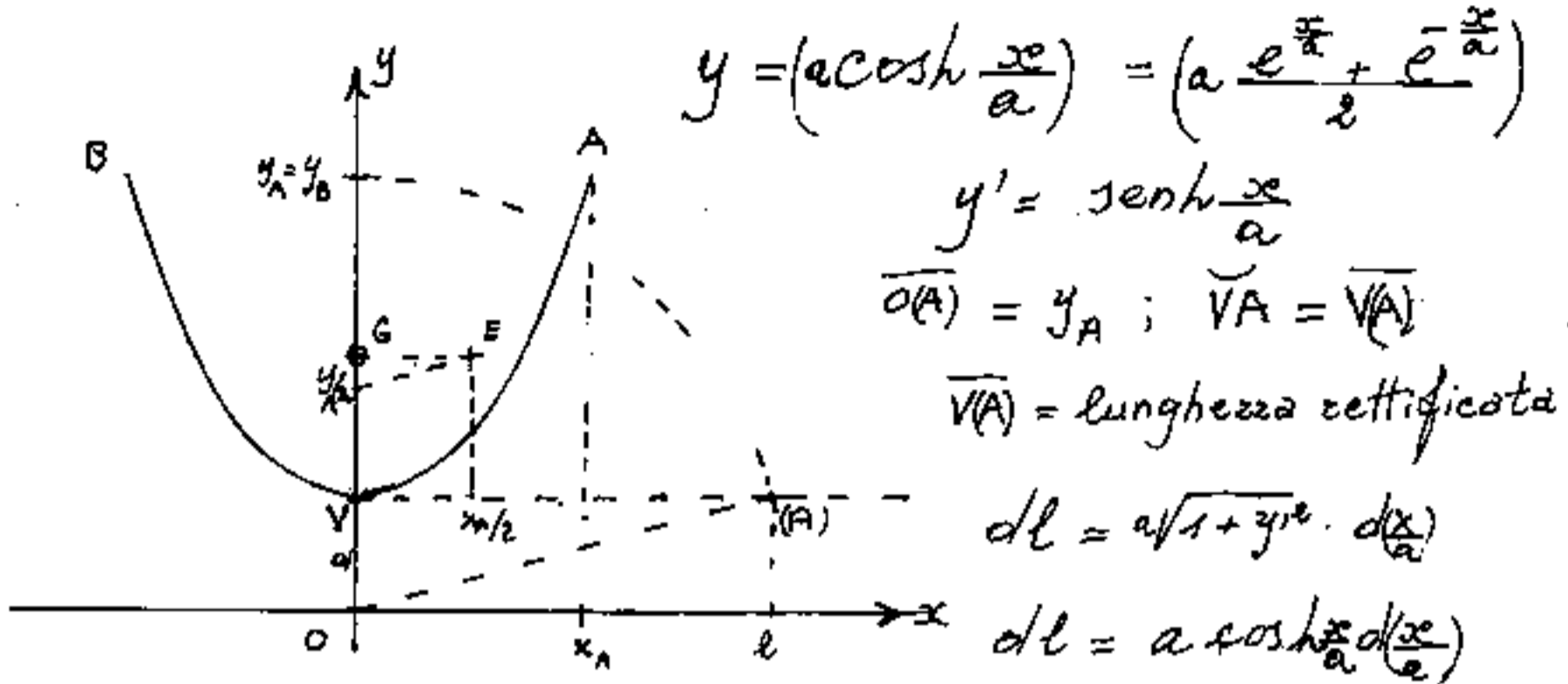
Momenti statici: $(S_{yP} - S_{yQ}) = S_x$

$$" (S_{yP} - S_{yQ}) = S_y$$

$$x_G = \frac{(S_{yP} - S_{yQ})}{(l_{AQ} - l_{AP})}$$

$$y_G = \frac{(S_{xP} - S_{xQ})}{(l_{AQ} - l_{AP})}$$

Arco di Catenaria



$$y = \left(a \cosh \frac{x}{a} \right) = \left(a \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} \right)$$

$$y' = \sinh \frac{x}{a}$$

$$\overline{O(A)} = y_A; \quad \overline{VA} = \overline{V(A)}$$

$\overline{V(A)}$ = lunghezza rettificata

$$dl = a \sqrt{1 + y'^2} \cdot d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$dl = a \cosh \frac{x}{a} d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$dl = a y d\left(\frac{x}{a}\right); \quad \frac{l}{\overline{VA}} = a \sinh\left(\frac{x_A}{a}\right);$$

$$S_x = \int y dl = a^2 \int \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right) d\left(\frac{x}{a}\right) = \boxed{a^2 \frac{\sinh \frac{x}{a} \cosh \frac{x}{a} + \frac{x}{a}}{2}}$$

$$y_G = \frac{S_x}{l} = \frac{a}{2} \left(\cosh \frac{x}{a} - \frac{x}{\sinh\left(\frac{x}{a}\right)} \right)$$

$$\boxed{y_G = \frac{y}{2} + a \frac{x/2}{l}}$$

$$\frac{a}{l} = \operatorname{tg} \hat{V}AO = \operatorname{tg} \hat{E}$$

Ciò consente una facile costruzione grafica di

G: da $\frac{y_A}{2}$ la // ad $\overline{O(A)}$ fino ad incontrare in E la $x = \frac{x_A}{2}$

da E la // a \overline{VA} .

$$S_y = \int x dl = a \int x \cosh \frac{x}{a} d\frac{x}{a} = a^2 \int \left(\frac{x}{a}\right) d \sinh\left(\frac{x}{a}\right); =$$

per parti.

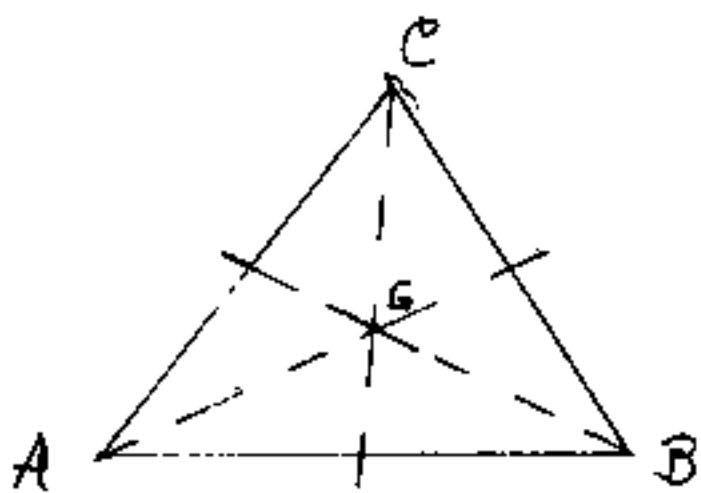
$$S_y = a^2 \left(\frac{x}{a} \sinh\left(\frac{x}{a}\right) - \int \sinh\left(\frac{x}{a}\right) d\frac{x}{a} \right)$$

$$\frac{S_y}{l} = x_G = a^2 \frac{\frac{x}{a} \sinh\left(\frac{x}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x}{a}\right)}{a \sinh\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$$\boxed{x_G = x_A - \frac{a y}{l}}$$

Baricentri di Aree

Aree delimitate da una spezzata chiusa.



triangolo:

baricentro G = punto co-

mune delle mediane che le

divide in due parti una

doppia dell'altra. (ogni mediana di un lato

è il luogo dei baricentri dei segmenti inter-

ni al triangolo e paralleli a quel lato)

In un triangolo rettangolo

il baricentro dista da ogni cate-

to, un terzo dell'altro, $\left[\left(\frac{a}{3}; \frac{b}{3}\right)$ coordinate

a partire dall'angolo retto].

Poiché un quadrilatero ha due diago-

nali che lo scompongono in due triangoli ciascu-

na; il punto comune dei due segmenti unio-

ne dei baricentri delle coppie di triangoli è

il baricentro del quadrilatero.

Se il quadrilatero è

un trapezio (due lati

sono paralleli) prolun-

gando i lati obliqui si

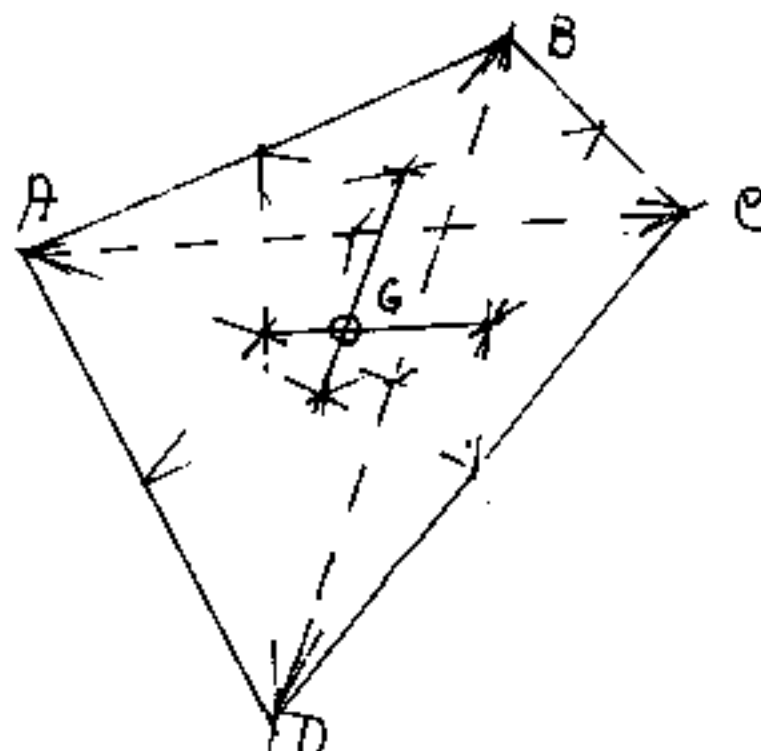
ottiene un triangolo

grande, al quale si

...

...

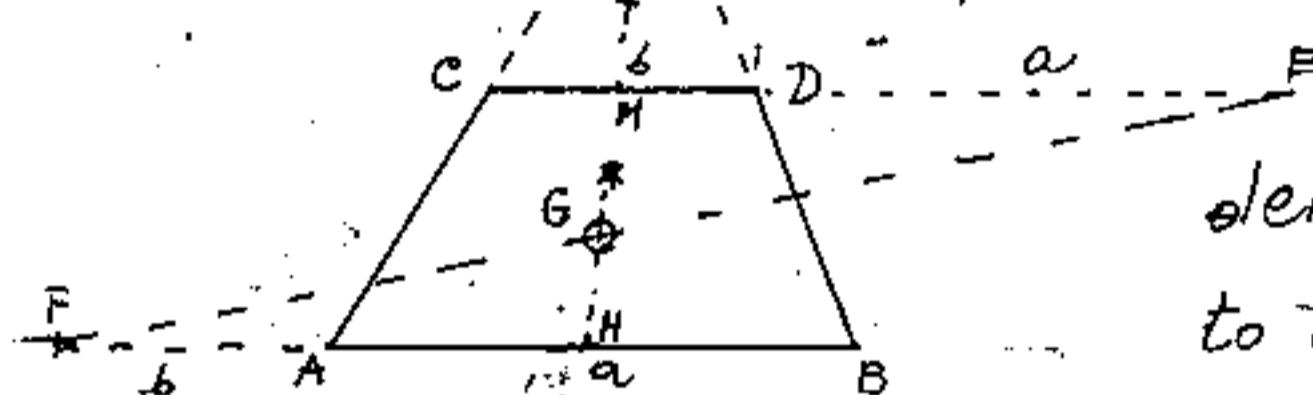
...



Se il quadrilatero è un trapezio (due lati sono paralleli) prolungando i lati obliqui si ottiene un triangolo grande, al quale si

sottrae il triangolo che ha per base la base minore per ottenere il trapezio. Quindi

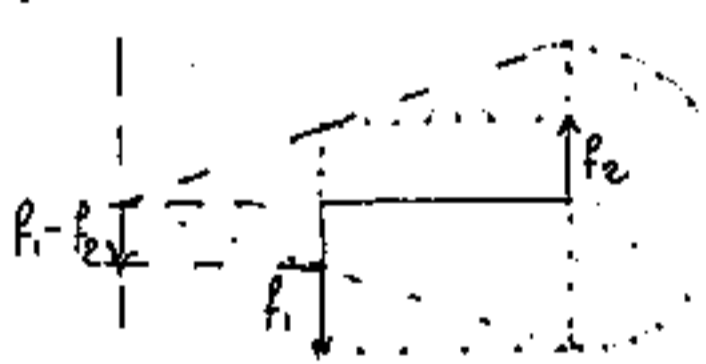
il baricentro del trapezio è sulla mediana



delle basi, in quanto deve congiungere

i baricentri dei due triangoli.

Nasce qui il problema del baricentro della differenza di due masse che trova il suo analogo nel cercare la risultante di due forze parallele di verso contrario. Ricordiamo



la costruzione (a fianco).

Nel nostro caso, le masse sono le aree che sono pro-

porzionali alle basi ed alle rispettive altezze,

e le altezze pure proporzionali alle basi. $h_a = 2K \cdot a$;

$h_b = 2Kb$; $A_{AVB} = Ka^2$; $A_{CVD} = Kb^2$; $A_{ABCD} = K(a^2 - b^2) =$

area trapezio = $K(a-b)(a+b) = (h_a - h_b)(a+b) \frac{1}{2}$ ove

$(h_a - h_b)$ è l'altezza del trapezio. Se riportiamo in

\overline{DE} la base "a" ed in \overline{AF} la base "b" i triangoli CFE

e BFE sono uguali perché hanno per base la

stessa base $(a+b)$ e per altezza la stessa altezza, e di

hanno la stessa area del trapezio, il lato comune \overline{EF} taglia in G il baricentro del trapezio. La distanza di G dalle basi, si ha con la proporzione: $\overline{MG} : (\frac{b}{2} + a) = \overline{GH} : (\frac{a}{2} + b)$

se $\overline{HG} + \overline{MG} = \overline{HM}$: $\overline{MG} (\frac{a}{2} + b) = (\overline{HM} - \overline{MG}) (\frac{b}{2} + a)$

$$\overline{MG} \left(\frac{3}{2}(a+b) \right) = \overline{HM} \left(\frac{b}{2} + a \right) \quad \overline{MG} = \left(\frac{(b+2a)}{3(b+a)} \right) \overline{HM}$$

$$\boxed{\overline{MG} = \frac{\overline{HM}}{3} \left(1 + \frac{2a}{a+b} \right)}; \quad (\overline{HM} - \overline{MG}) = \frac{1}{3} \left(3\overline{HM} - \overline{HM} - \overline{HM} \frac{2a}{a+b} \right)$$

$$\overline{HG} = \frac{\overline{HM}}{3} \left(2 - \frac{2a}{a+b} \right) = \frac{\overline{HM}}{3} \left(\frac{2a+2b-a}{a+b} \right) = \overline{HG} \frac{\overline{HM}}{3} \left(1 + \frac{b}{a+b} \right)$$

$$\boxed{\overline{HG} = \frac{\overline{HM}}{3} \left(1 + \frac{b}{a+b} \right)}$$

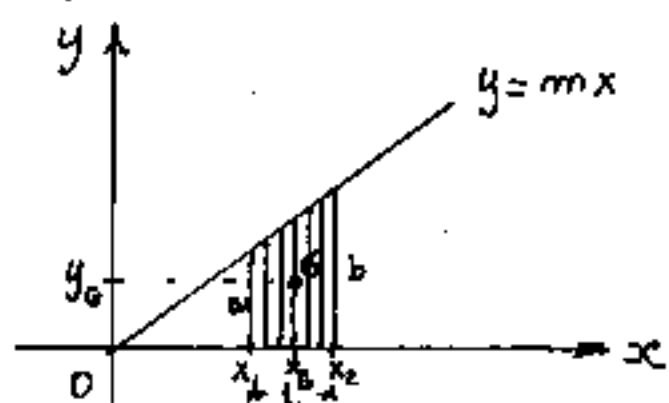
$$\overline{MG} + \overline{HG} = (\overline{HM}) \frac{1}{3} \left(\frac{a+b+a+a+b+b}{a+b} \right) = \overline{HM}$$

Si poteva arrivare più velocemente alla dimostrazione utilizzando il metodo del quadrilatero diviso dalle diagonali.

Si noti dalla figura che con asterisco si sono indicati i baricentri dei due triangoli, e come G si trovi esterno al segmento che li congiunge sulla mediana, ciò avviene sempre quando si cerca il baricentro della differenza di masse, che si troverà sempre esterno al segmento che congiunge i baricentri delle due masse, e dalla parte della maggiore di esse

Baricentri di trapezoidi retti aventi il lato obliquo: $y=f(x)$. (funzione di una variabile).

Questo genere di figure si ha quando una: $y=f(x)$ rappresentata su assi cartesiani delimita l'area coperta dalle ordinate comprese fra due limiti.



L'esempio più semplice è quello del trapezio (ora trattato).

In questo caso il trapezio è rettangolo: $y=mx$;

$$h = (x_2 - x_1); \quad b = mx_2; \quad a = mx_1; \quad \int A = \int_{x_1}^{x_2} y dx = \int_{x_1}^{x_2} mx dx =$$

$$\left[A = \frac{mx^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{m}{2}(x_2^2 - x_1^2) = \frac{m}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1);$$

$$A = \frac{h}{2}(a+b)$$

$$S_x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{y}{2} dA = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx = \frac{m^2}{2} \int_{x_1}^{x_2} x^2 dx = \left[\frac{m^2 x^3}{6} \right]_{x_1}^{x_2} =$$

$$S_x = \frac{m^2}{6}(x_2^3 - x_1^3) = \frac{m^2}{6}(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1^2 + x_1 x_2) = \frac{m^2 h}{6} [(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2]$$

$$S_x = \frac{h}{6} [(a+b)^2 - ab]$$

$$y_G = \frac{S_x}{A}$$

$$y_G = \frac{1}{3} \left((a+b) - \frac{ab}{(a+b)} \right) =$$

$$y_G = \frac{1}{3} \left((a+b) - \frac{1}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \right)$$

L'ordinata di G è data dalla terza parte, della somma delle basi diminuita del reciproco della somma dei reciproci della base.

$$S_y = \int_{x_1}^{x_2} x dA = \int_{x_1}^{x_2} mx^2 dx = \left[\frac{mx^3}{3} \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{m}{3} [x_2^3 - x_1^3] =$$

$$S_y = \frac{m}{3} (x_2 - x_1) (x_2^2 + x_1^2 + x_1 x_2) = \frac{h}{3m} [(a+b)^2 - ab];$$

$$m = \frac{(b-a)}{h};$$

$$S_y = \frac{h^2}{3(b-a)} [(a+b)^2 - ab]$$

$$x_G = \frac{S_y}{A};$$

$$x_G = \frac{2}{3} \frac{h}{(b-a)} \left(a+b - \frac{ab}{a+b} \right) = \left(\frac{2h}{(b-a)} \right) y_G$$

Mentre y_G è la distanza di G dall'alterza del trapezio x_G è la distanza di G dall'asse y , perciò conviene riferire la distanza di G da una delle basi, per esempio la base minore a e sia \overline{MG}

$$\overline{MG} = (x_G - x_1) = \left[\left(\frac{2}{3} \frac{h}{(b-a)} \right) \left((a+b) - \left(\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \right) \right) - \frac{a}{m} \right]$$

$$\overline{MG} = \left(\frac{2}{3} \frac{h}{(b-a)} \right) \frac{3ha}{3(b-a)} + \left(\frac{2}{3} \frac{h}{(b-a)} \right) \left(b - \frac{ab}{(a+b)} \right)$$

$$\overline{MG} = \frac{ha}{3(b-a)} + \left(\frac{2}{3} \frac{h}{(b-a)} \right) \left(b - \frac{ab}{(a+b)} \right)$$

$$\overline{MG} = \frac{h}{3(b-a)} \left((b-a) + b - \frac{ab}{(a+b)} - \frac{ab}{(a+b)} \right) = \frac{h}{3} \left(1 + \frac{ab + b^2 - ab - ab}{(b^2 - a^2)} \right)$$

$$\overline{MG} = \frac{h}{3} \left(1 + \frac{b(b-a)}{(a+b)(b-a)} \right)$$

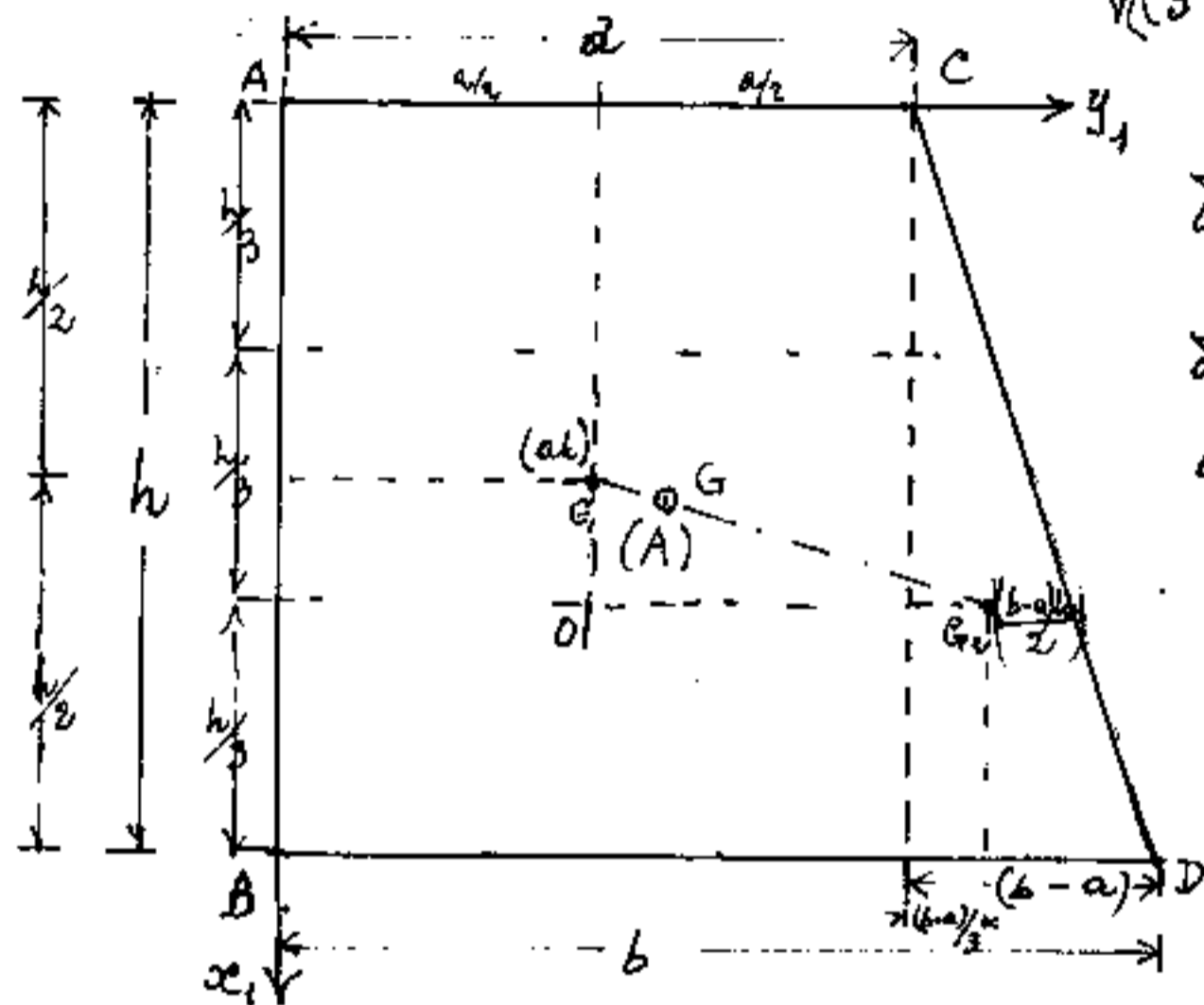
$$\overline{MG} = \frac{h}{3} \left(1 + \frac{b}{a+b} \right)$$

ove il terzo dell'alterza è incrementato proporzionalmente alla base maggiore sulla somma delle basi. Si può scrivere:

$$\overline{MG} = \left(\frac{h}{(b-a)} \right) (2y_G - a)$$

Per visualizzare geometricamente le formule ora scritte in funzione di a, b, h ; scomponiamo il trapezio rettangolo in un rettangolo di base a ed altezza h ed in un triangolo rettangolo, adiacente di base: $(b-a)$ ed altezza:

h . I baricentri distano: $\delta = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)h^2 + \left(\frac{a}{2} + \frac{b-a}{3}\right)^2}$



cioè:

$$\delta = \sqrt{\frac{h^2}{36} + \left(\frac{a}{6} + \frac{b}{3}\right)^2}$$

$$\delta = \frac{1}{6} \sqrt{h^2 + (a+2b)^2}$$

dobbiamo ripartire tale distanza inversamente proporzionale alle due figure. Però è

molto più comodo dividere proporzionalmente le

coordinate \overline{OG}_2 ed \overline{OG}_1 ; $\overline{OG}_1 = \frac{2}{3}h - \frac{h}{2} = \frac{h}{6}$;

$\overline{OG}_2 = \frac{a}{2} + \frac{b-a}{3} = \frac{a+2b}{6}$; $A = \frac{(a+b)h}{2}$; $A_{\text{rett}} = (ah)$; $A_{\text{tri}} = \frac{(b-a)h}{2}$

Assumiamo gli assi coincidenti con l'altezza (x_1) e la base minore (y_1) avremo:

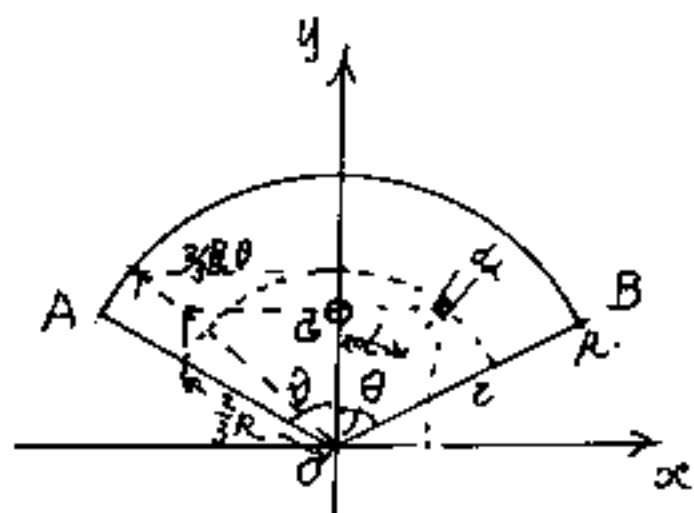
$$x_{1G} = \frac{h}{2} + \frac{(b-a)h/2}{(a+b)h/2} \left(\frac{h}{6}\right) = \frac{h}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{(b-a)}{(a+b)}\right) = \frac{h}{6} \left(\frac{3a+2b+b-a}{(a+b)}\right) =$$

$$x_{1G} = \frac{h}{3} \left(\frac{2a+2b+b}{2(a+b)}\right) = \boxed{x_{1G} = \frac{h}{3} \left(1 + \frac{b}{(a+b)}\right)} \text{ come trovato.}$$

$$y_{1G} = \frac{a}{2} + \frac{(b-a)h/2}{(a+b)h/2} \left(\frac{a+2b}{6}\right) = \frac{3a^2+3ab+ab-a^2+2b^2+2ab}{6(a+b)} = \frac{2(a^2+b^2+2ab)-2ab}{6(a+b)}$$

$$\boxed{y_{1G} = \frac{1}{3} \left(a+b - \frac{ab}{a+b}\right)} \text{ come già trovato.}$$

Con gli stessi procedimenti è possibile calcolare baricentri di figure delimitate da linee curve.



Settore circolare

$$dA = r dr d\alpha; \quad A = \int_{-\theta}^{+\theta} \int_0^R r dr d\alpha =$$

$$A = \frac{R^2}{2} (2\theta); \quad \int_0^R r dr = \frac{R^2}{2}$$

$$\boxed{A = R^2 \theta}$$

$$S_x = \int r \cos \alpha dA = \int_{-\theta}^{+\theta} \int_0^R r^2 \cos \alpha dr d\alpha =$$

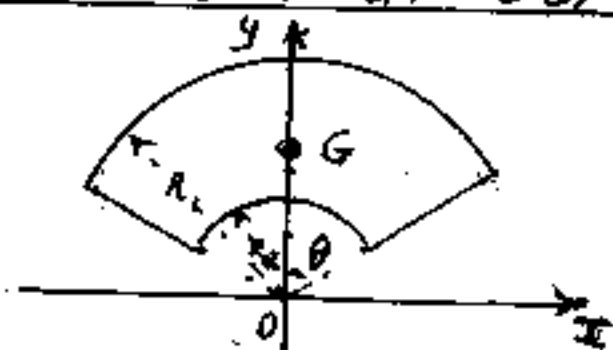
$$S_x = \frac{R^3}{3} 2 \sin \theta$$

$$y_G = \frac{2R^3 \sin \theta}{3R^2 \theta} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \theta}{\theta}$$

$$\boxed{y_G = \frac{2}{3} R \frac{\sin \theta}{\theta}}$$

Che si realizza con una facile costruzione grafica. Tracciato su arco $\frac{2}{3}R$, si può considerare il luogo geometrico di tutti i baricentri dei settori elementari di ampiezza $d\alpha$ equiparati a triangoli; quindi il baricentro di questa linea è il baricentro del settore. (Per la costruzione grafica del baricentro di un arco di circonferenza si vedano le pag. prec.)

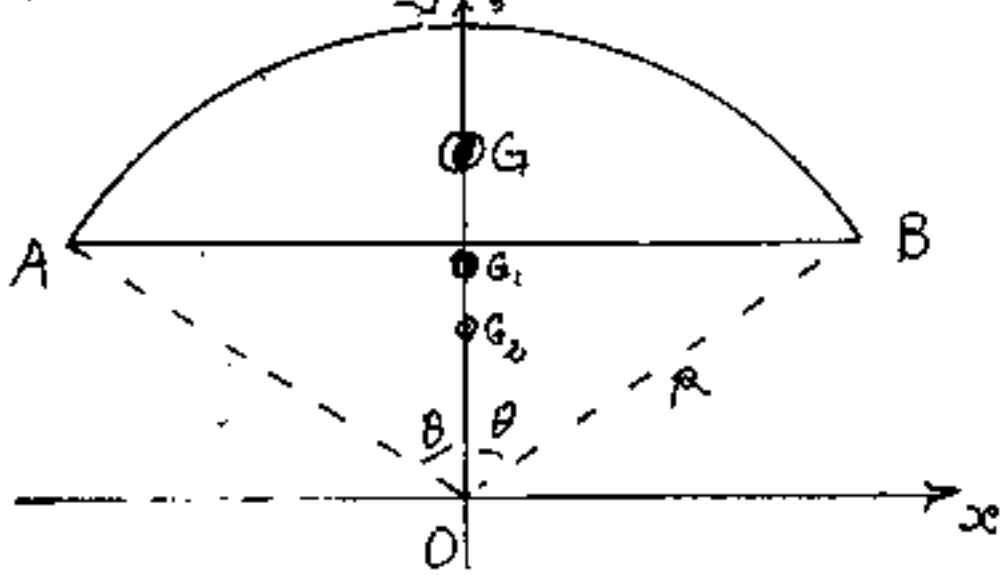
Settore di Corona Circolare : $\left(y_G = \frac{y_{G_1} A_1 - y_{G_2} A_2}{A_1 - A_2} \right)$



$$\boxed{y_G = \left(\frac{2}{3} \frac{\sin \theta}{\theta} \right) \left(\frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1^2 - R_2^2} \right)}$$

Segmento circolare

Se al settore circolare AOB togliamo l'area del triangolo AOB si ha il segmento circolare.



Siamo tornati al baricentro della differenza di masse.

Avremo:

$$A_1 = \text{area settore} = R^2 \theta ;$$

$$A_2 = \text{area triangolo} = \frac{R^2 \sin \theta}{2} ; \text{ ordinata settore} = y_{G_1} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \theta}{\theta}$$

$$\text{ordinata triangolo} = y_{G_2} = \frac{2}{3} R \cos \theta .$$

Per differenza: area del segmento = $R^2 \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right)$

$$S_x = (R^2 \theta) \left(\frac{2}{3} R \frac{\sin \theta}{\theta} \right) - \left(\frac{R^2 \sin 2\theta}{2} \right) \frac{2}{3} R \cos \theta$$

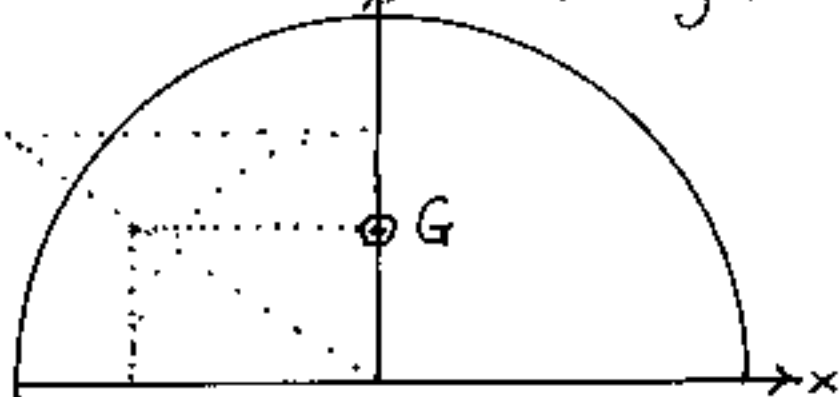
$$S_x = \frac{2}{3} R^3 \sin \theta - \frac{2}{3} R^3 \sin \theta \cos^2 \theta = \frac{2}{3} R^3 \sin \theta (1 - \cos^2 \theta)$$

$$S_x = \frac{2}{3} R^3 \sin^3 \theta \quad y_G = \frac{\frac{2}{3} R^3 \sin^3 \theta}{R^2 (2\theta - \sin 2\theta) / 2} = \frac{4}{3} R \left(\frac{\sin^3 \theta}{2\theta - \sin 2\theta} \right)$$

$$y_G = \frac{2}{3} R \left(\frac{\sin^3 \theta}{\theta - \sin \theta \cos \theta} \right)$$

Per $\theta = \pi/2$ si ha il Semicerchio

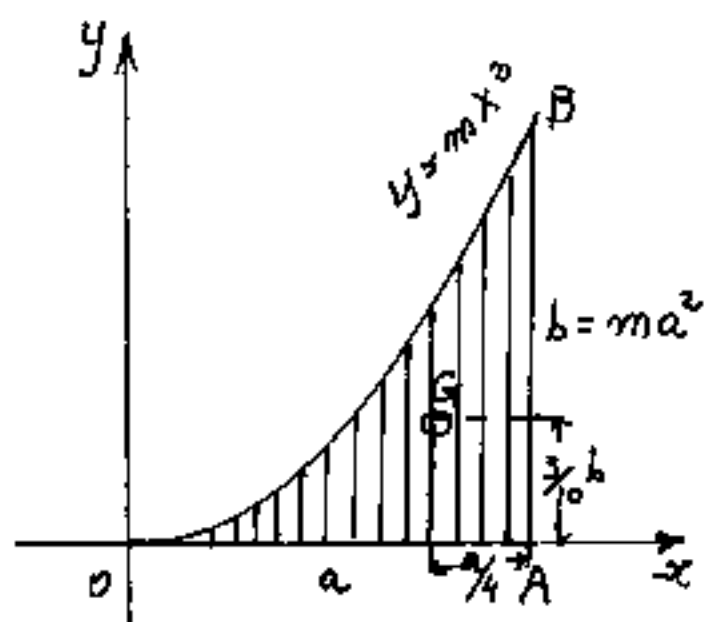
$$y_G = \frac{2}{3} R \frac{1}{\pi/2} = \frac{4R}{3\pi}$$



ore segmento e settore coincidono:

$$y_G = 0,42441318 R$$

Baricentri di triangoli parabolici



$$dA = \int_0^a y dx = \int_0^a mx^2 dx = \frac{ma^3}{3}$$

$$A = \left(\frac{ab}{3} \right)$$

$$S_y = \int x dA = \int_0^a mx^3 dx = \frac{ma^4}{4}$$

$$S_y = \frac{ba^2}{4}$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} ; \quad x_G = \frac{\frac{ba^2}{4}}{\frac{ab}{3}}$$

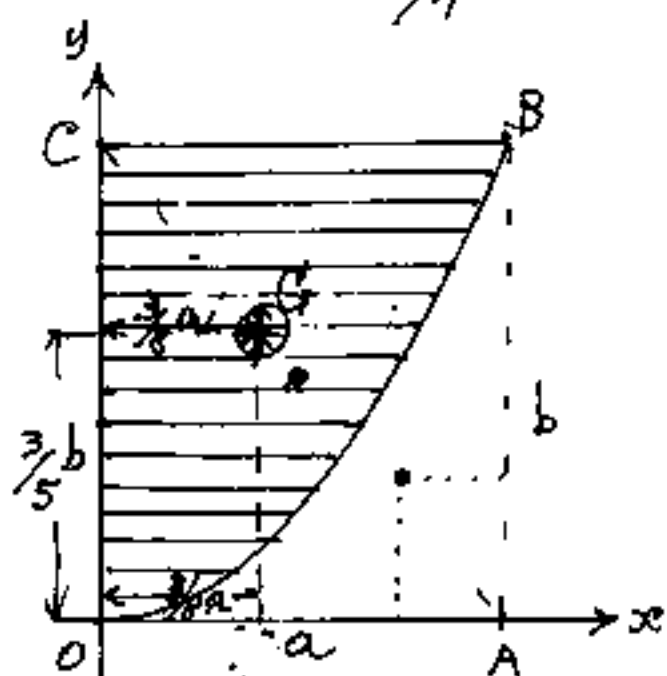
$$x_G = \frac{3}{4} a$$

$$S_x = \int \frac{y}{2} dA = \int_0^a \frac{mx^2}{2} \cdot mx^2 dx = \frac{m^2}{2} \int_0^a x^4 dx = \frac{m^2 a^5}{10}$$

$$S_x = \frac{ab^2}{10} ; \quad y_G = \frac{S_x}{A} ; \quad y_G = \frac{\frac{ab^2}{10}}{\frac{ab}{3}}$$

$$y_G = \frac{3}{10} b$$

Il baricentro dista dallo spigolo retto, rispettivamente: $\frac{a}{4}$ e $\frac{3}{10}b$.

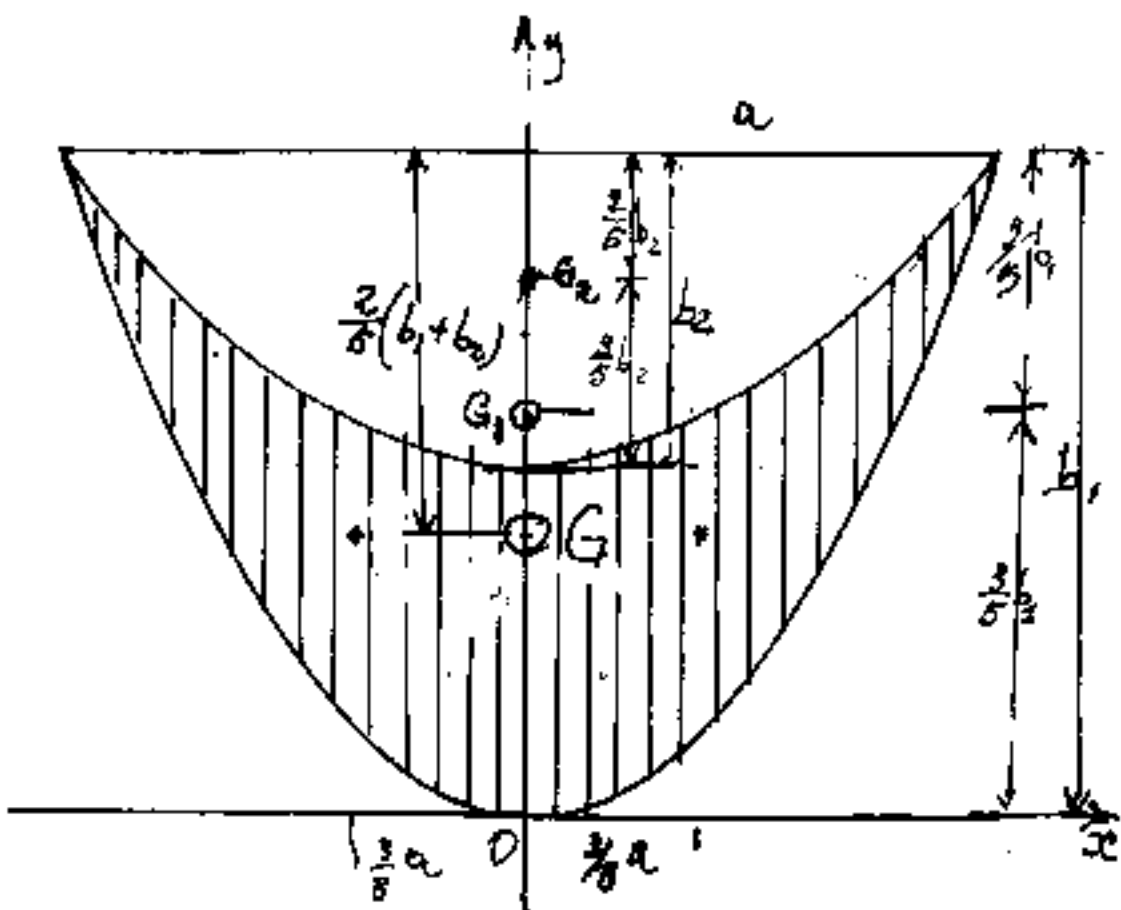


Per il triangolo parabolico OBC si può calcolare il baricentro come differenza di masse fra il rettangolo OABC ed il triangolo parabolico OAB.

$$\text{oppure: } A_{OBC} = \frac{2}{3} ab ; \quad S_y = ab \frac{a}{2} - \frac{ab}{3} \cdot \frac{3}{4} a = \frac{a^2 b}{4}$$

$$x_G = \frac{\frac{a^2 b}{4}}{\frac{2}{3} ab} = \frac{3a}{8} ; \quad x_G = \frac{3}{8} a ; \quad S_x = \frac{ab^2}{2} - \frac{ab^2}{3} \frac{3}{10} = \frac{2}{5} ab^2 \quad y_G = \frac{3}{5} b$$

Baricentro di lunule paraboliche



Poiché il baricentro di un segmento parabolico, divide la sua freccia in $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{5}$ dal vertice, ci permette, per differenza di cal-

colare il baricentro delle "lunule paraboliche

$$A_1 = \frac{4}{3} a b_1 ; A_2 = \frac{4}{3} a b_2 ; \text{area della lunula} = A = \frac{4}{3} a (b_1 - b_2)$$

$$S_a = \left(\frac{4}{3} a b_1 \right) \left(\frac{2}{5} b_1 \right) - \left(\frac{4}{3} a b_2 \right) \left(\frac{2}{5} b_2 \right) = \frac{8}{15} a (b_1^2 - b_2^2)$$

distanza di G dalla corda "a": $\bar{d}_G = \frac{S_a}{A}$

$$\bar{d}_G = \frac{8}{15} a (b_1 - b_2)(b_1 + b_2) / \frac{4}{3} a (b_1 - b_2)$$

$$\boxed{\bar{d}_G = \frac{2}{5} (b_1 + b_2)}$$

Ciò vale anche per un ovulo a contorni parabolici, in questo caso: $A = \frac{4}{3} a (b_1 + b_2)$

mentre S_a rimane lo stesso perché A_2 pur sommandosi come area rimane da banda opposta ad "a" per il momento statico

perciò: $\boxed{\bar{d}_G = \frac{2}{5} (b_1 - b_2)}$ della parte di b_1

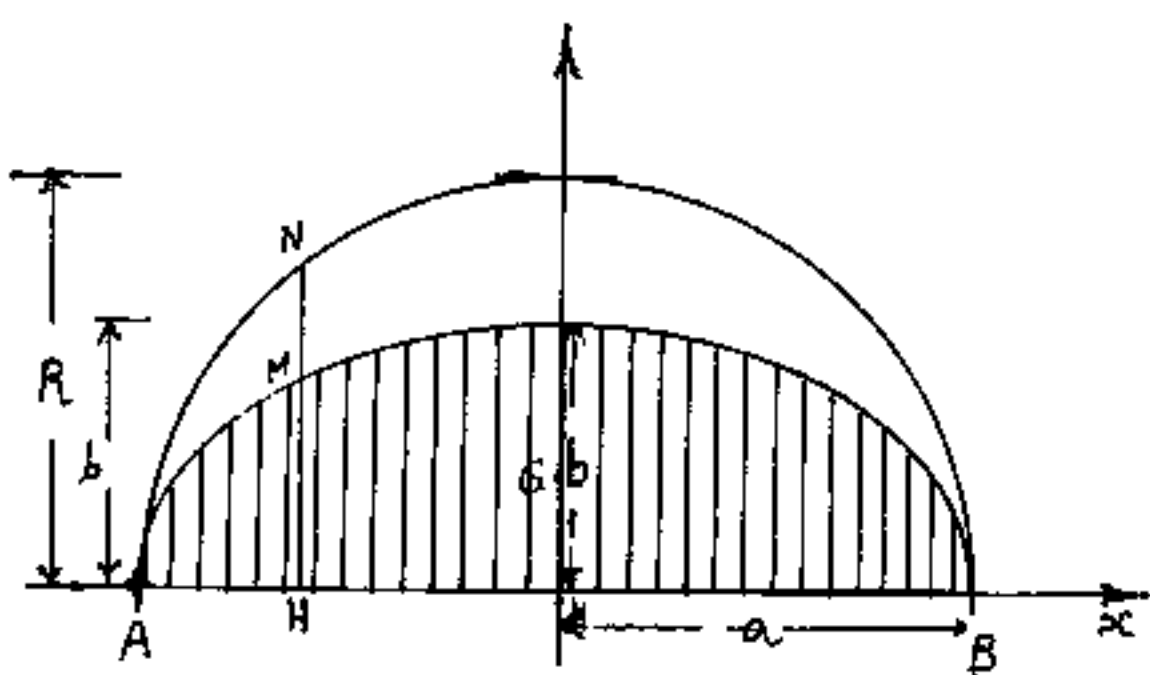
Resta $\pm \frac{2}{5} a = x_G$ per ciascuna semilunula.



Baricentro del semiellisse

Osseviamo che se proiettiamo in piano, una qualunque figura piana, anche la proiezione del baricentro è il baricentro della figura proiettata.

Il rapporto fra le corde dell'ellisse parallele al diametro minore b e le corrispondenti corde del cerchio è costante ed è " $\frac{b}{R}$ ", poiché nel semicerchio: $y_G = \frac{4}{3\pi} R$, nel semiellisse avremo:



$$y_G = \frac{4}{3\pi} R \cdot \frac{b}{R}$$

$$y_G = \frac{4}{3\pi} b$$

$$(y_G = 0.62441318)b$$

Bonaventura Cavalieri nella sua Geometria Indivisibilibus, rilevato che i segmenti \overline{NH} e \overline{MH}

(corde del cerchio di raggio R e dell'ellisse di semidiametri a, b) nel loro moto in direzione asisse, generano l'area del cerchio e dell'ellisse, mantenendo costante il rapporto

$$\frac{\overline{MH}}{\overline{NH}} = \frac{b}{R} = \frac{b}{a}; \text{ moltiplicando l'area del cerchio } \frac{R^2 \pi}{2} = a \cdot a \pi \frac{b}{a}$$

potè dire che l'area dell'ellisse è: $A_E = ab\pi$

I segmenti erano "indivisibili di area". (come i nostri differenziali).

Un secolo dopo il "moto" di uente portò Newton al calcolo fluxionale, e l'infinitesimo indivisibile portò Leibniz al calcolo differenziale.

I due aspetti degli "indivisibili" che generano le forme geometriche, in effetti sono la stessa cosa; Un punto che si muove in una certa direzione percorre nel tempo infinitesimo dt , lo spazio infinitesimo ds . Il punto in se non ha parti (dimensioni), la dimensione: "spazio lineare" nasce dal suo moto. E' la continuita' del tempo, che da' la continuita' dello spazio. Analogamente un segmento, od una linea, nel suo moto genera una superficie, ed un'area genera un volume.

Notare che il moto di un segmento e' computabile come area per le parti che si muovono normalmente al segmento. Cosi' un'area che col suo moto in direzione ad essa normale, genera un volume. Ma il moto puo' essere diverso per le varie parti di area, o per le varie parti di una linea, ed il problema risulta superato, se consideriamo concentrate nel loro baricentro l'ampiezza delle aree e l'ampiezza delle linee, e consideriamo il moto di un punto (G) baricentro. Nascono cosi' i teoremi di Pappo riscoperti da Suldino.

Aver introdotto il tempo come la conti-
nuità dello spazio è la più grande e
fondamentale scoperta nata alla scuola di
Galileo, focalizzata da Bonaventura Cavalieri
prima e da Torricelli poi, Newton (un secolo
dopo) chiamò flussione la variazione rispetto
al tempo, termine caduto in disuso e sostitui-
to dal concetto più generale di derivata.

A noi sembra che questi stupendi concetti
che portano a considerare la variazione
del baricentro come variazione dell'
intera massa, non siano, ancora oggi, suf-
ficientemente approfonditi. Il concetto di moto,
di perpendicolarità, e derivabile dalla ruotazio-
ne intorno ad un asse, per le distanze, (raggi)
dei punti, ove si connette un moto angolare
alla generazione di forme geometriche.

Come ogni moto possa scomporsi secondo
tre assi ortogonali, come le "proiezioni"
possano utilizzarsi per i calcoli.

(È sempre possibile far sì che la proiezione di un'ellisse
sia un cerchio); (È sempre possibile considerare un
punto che ruota intorno due diversi assi.)

I momenti del secondo ordine

Abbiamo visto i momenti statici (o momenti del primo ordine) come prodotti delle masse per le distanze, e ne abbiamo evidenziato l'azione di rotazione.

Supponiamo ora di sostituire le masse con i relativi momenti statici e moltiplichiamo questi per distanze che se sono quelle rispetto allo stesso asse, otteniamo i: momenti d'inerzia assiali; se le distanze sono relative allo stesso punto (polo) abbiamo i: momenti d'inerzia polari; se le distanze sono relative ad un nuovo asse, abbiamo i: momenti d'inerzia centrifughi.

I momenti del secondo ordine sono detti in generale momenti d'inerzia e sono definiti come la somma delle masse per il quadrato delle distanze. Si simboleggiano con la lettera J affetta da due indici che indicano gli assi di riferimento o dalla sola lettera P per i polari.

Poiché ordinariamente consideriamo come assi il sistema cartesiano O, x, y . ovvero:

$$\begin{aligned} \text{Assiali:} & \quad J_{xx} = \sum_1^n y_i^2 m_i = \int y^2 dm; \quad J_{yy} = \sum_1^n x_i^2 m_i = \int x^2 dm; \\ \text{Polari} & \quad J_p = \sum_1^n r_i^2 m_i = \int r^2 dm \quad (r = raggio) \\ \text{Centrifughi} & \quad J_{xy} = J_{yx} = \sum_1^n x_i y_i m_i = \int xy dm. \end{aligned}$$

La parola "inerzia" secondo lo Zanichelli equivale ad "opposto di azione". Secondo il Tommaso: "inerte" (dal latino) è colui che non ha nessuna arte.

Poiché ogni azione provoca una variazione, l'inerzia è l'impedimento alla variazione; da cui la legge d'inerzia: "Ogni corpo permane nel suo stato di quiete o di moto se non intervengono azioni esterne a modificarlo."

Consideriamo un corpo che ruota intorno ad un altro corpo, per inerzia il corpo in moto tenderebbe al moto rettilineo secondo la tangente alla traiettoria, istante per istante, occorre l'azione esterna per modificare la direzione, azione che può essere costituita da un cavo materiale che risulterà teso dalla forza centrifuga, ma può anche essere la forza di mutua attrazione delle masse che istante per istante equilibra la forza centrifuga (come avviene per gli astri, ove però vi sono molte forze di mutua attrazione e nessun corpo può pensarsi fermo perché tutti hanno moti relativi).

Se consideriamo un corpo solido, per esempio un disco ruotante intorno al suo asse baricentrico, perpendicolare al piano del disco, notiamo

che le parti di disco più lontane dall'asse si muovono con velocità istantanea (tangenziale) maggiore di quelle vicine all'asse, si può dire che, se la velocità angolare ω del disco è costante, la velocità istantanea, periferica, tangenziale, di ciascun punto del disco è proporzionale al raggio: $v = \omega r$; cioè ogni elemento di massa "dm" nei singoli punti, dispone di una energia cinetica: $dE_c = \frac{1}{2} (\omega r)^2 dm$.

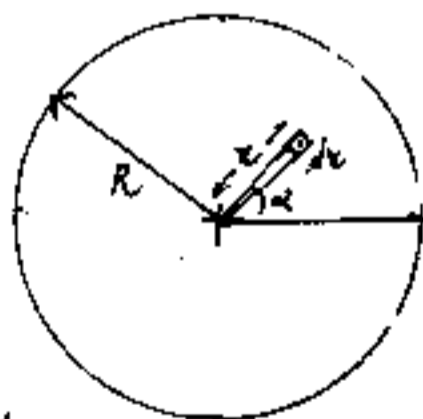
Se consideriamo il disco omogeneo di spessore "s" costante e densità γ costante, detta dA l'area elementare all'intorno del punto, $dm = \gamma s dA$

$dE_c = (\frac{1}{2} \gamma s \omega^2) r^2 dA$ i valori in parentesi sono costanti per cui $E_c = K \int_A r^2 dA$ ove $K = (\frac{1}{2} \gamma s \omega^2)$

$$dA = r dr d\alpha \quad ; \quad \left(\int r^2 dA = J_p \right)$$

$$E_c = K \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{R^4}{4} (2\pi) = K \frac{R^4 \pi}{2}$$

Detto: $\frac{\gamma s R^4 \pi}{2} = J_p = \text{momento}$



d'inertzia polare del disco avremo: $E_c = \frac{\omega^2}{2} J_p$

che confrontata con $E_c = \frac{1}{2} M v^2$ ci fa notare che nel moto rotatorio J_p tiene il posto della massa nel moto lineare, come la velocità angolare ω tiene il posto della velocità lineare v .

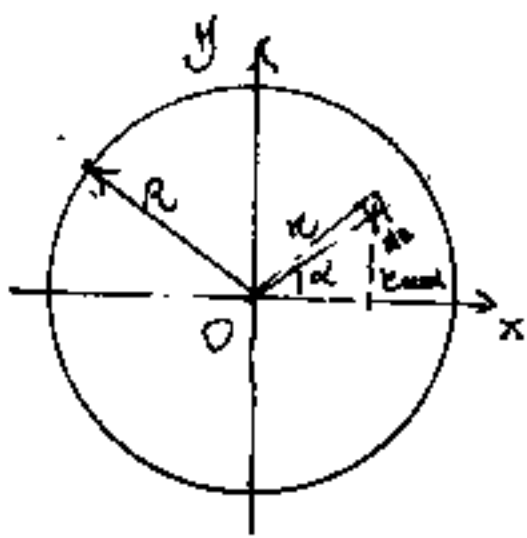
Come la forza, azione lineare è definita da: $F = ma = \frac{dv}{dt} m = m \frac{d^2s}{dt^2}$,

analogamente l'azione rotatoria di una coppia M (momento) può essere definita da: $M = J_P \frac{d^2\varphi}{dt^2} = J_P \frac{d\omega}{dt}$

ove si nota come ancora il momento d'inerzia polare corrisponda alla massa.

Il lavoro: $\int dL = \int M d\varphi = \int \omega M dt = \int J_P \omega d\omega = \frac{1}{2} \omega^2 J_P$
 ritorna in energia cinetica.

Considereremo le aree come "masse" nelle figure geometriche, e calcoleremo il momento d'inerzia assiale di un cerchio rispetto ad un diametro.



$$J_{xy} = J_{xx} = \int (r \sin \alpha)^2 dA = \iint (r \sin \alpha)^2 r d\alpha dr$$

$$J_{xx} = \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha =$$

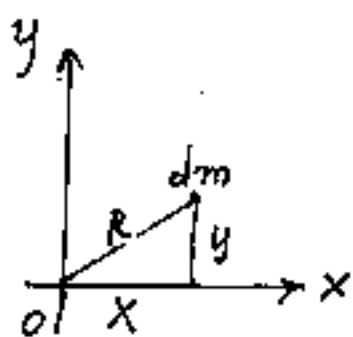
$$J_{xx} = \frac{R^4}{4} \frac{\sin 2\alpha \cos 2\alpha + 2\alpha}{2} \Big|_0^{2\pi} = J_{xx} = \frac{R^4 \pi}{4}$$

essendo: $J_{xx} + J_{yy} = J_P$ in fatti:-

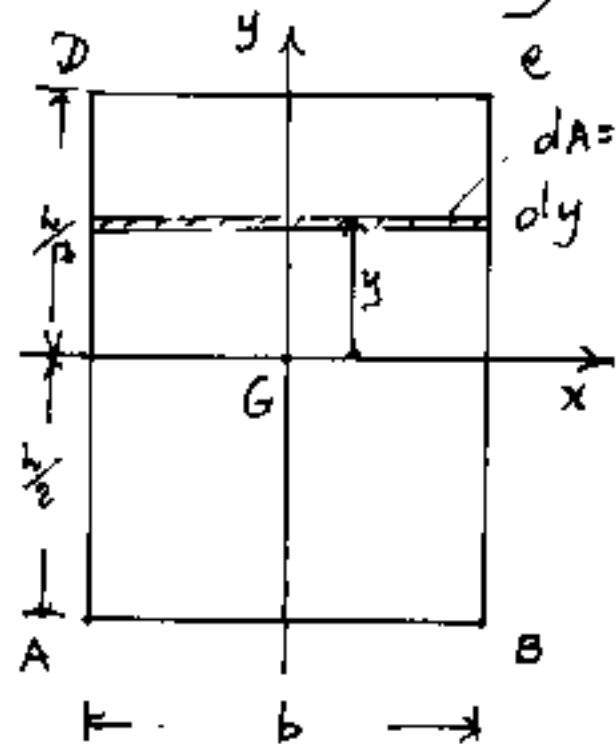
$$J_{xx} = \int y^2 dm ; J_{yy} = \int x^2 dm ; J_P = \int R^2 dm$$

ove: $x^2 + y^2 = R^2$. Per il cerchio essendo $J_{xx} = J_{yy}$

avremo $J_P = 2 \left(\frac{R^4 \pi}{4} \right) = \frac{R^4 \pi}{2}$ (come già calcolato)



Calcoliamo i momenti d'inerzia assiali di un rettangolo ABCD

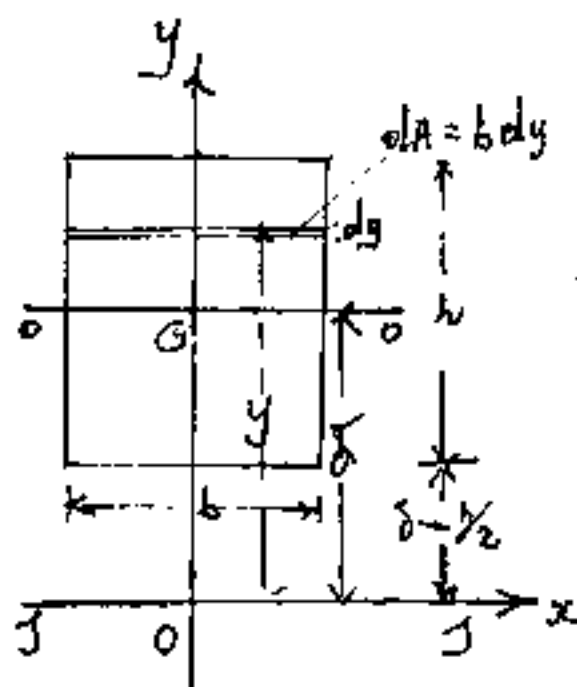


$$J_{xx} = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy = \frac{b}{3} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3 \right]$$

$$J_{xx} = \frac{bh^3}{12}$$

Scambiando "b" con "h"

$$J_{yy} = \frac{hb^3}{12}$$



Se spostiamo gli assi di δ in direzione y , l'asse x si mantiene parallelo all'asse x baricentrico che indichiamo con oo , mentre la nuova x si sovrappone all'asse

\bar{x} parallelo ad oo , avremo:

$$J_{\bar{x}\bar{x}} = \int_A y^2 dA = \int_{(\delta - \frac{h}{2})}^{(\delta + \frac{h}{2})} y^2 b dy = \frac{b}{3} \left[y^3 \right]_{(\delta - \frac{h}{2})}^{(\delta + \frac{h}{2})}$$

$$J_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{b}{3} \left[\left(\delta^3 + 3\delta^2 \frac{h}{2} + 3\delta \frac{h^2}{4} + \frac{h^3}{8} \right) - \left(\delta^3 - 3\delta^2 \frac{h}{2} + 3\delta \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} \right) \right]$$

$$J_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{b}{3} \left(\left(3\delta^2 \frac{h}{2} \right) + \left(\frac{h^3}{8} \right) \right) = \frac{bh^3}{12} + (bh)\delta^2$$

Ma: $\frac{bh^3}{12} = J_{xx} = J_{oo}$ baricentrico e $(bh) = A = \text{area}$

cioè:

$$J_{\bar{x}\bar{x}} = J_{oo} + A\delta^2$$

Il teorema di Huygens o di trasposizione

Quanto abbiamo ricavato per il rettangolo è valido per qualunque figura ed esprime che:
"Il momento d'inerzia rispetto ad un asse è dato dal momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico parallelo aumentato dell'area per il quadrato della distanza fra i due assi."

$$J_{SS} = J_{OO} + A\delta^2$$

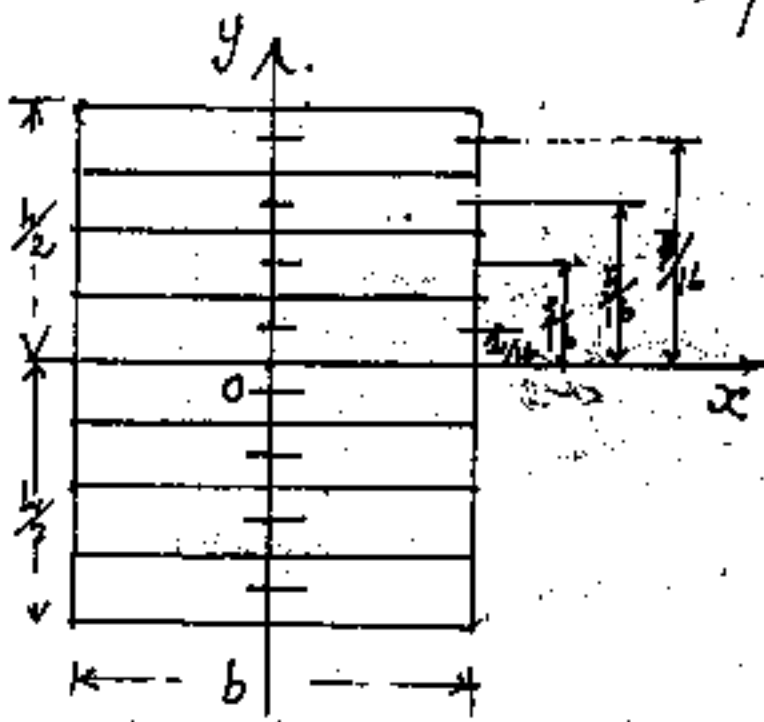
Inversamente se conosciamo il momento d'inerzia rispetto ad un asse e vogliamo il momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico avremo:

$$J_{OO} = J_{SS} - A\delta^2$$

Poiché J , A , δ^2 sono sempre maggiori di zero, la formula ci dice che i momenti d'inerzia rispetto ad assi baricentrici sono i minimi secondo la direzionalità di quegli assi.

Il teorema di Huygens ha molteplici aspetti, uno importantissimo è la connessione fra le aree che costituiscono la sezione, infatti se le aree non sono connesse, il momento d'inerzia della sezione è semplicemente la somma dei momenti d'inerzia delle singole

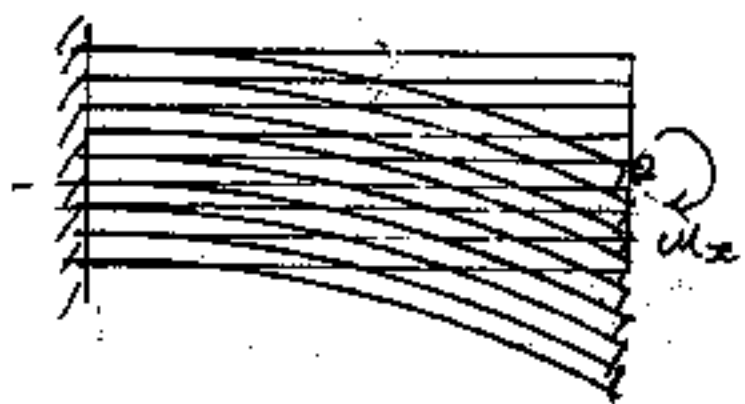
aree rispetto alla direzionalità del proprio asse baricentrico. Se invece sono connesse occorre aggiungere la somma delle aree per il quadrato delle distanze con l'asse baricentrico nella stessa direzionalità. Facciamo un esempio di sezione rettangolare di base "b" ed altezza "h" costituita da 8 tavole di spessore $(h/8)$



Se le tavole non sono connesse il loro momento d'inerzia nella direzionalità x, cioè d'impedimento ad un momento M_x , è la somma dei propri

I_{x_0} baricentrici, cioè: $8 \frac{b (h/8)^3}{12} = \sum I_{x_0} = 8 \frac{b h^3}{12 (512)}$

$\sum I_{x_0} = \left(\frac{b h^3}{12} \right) \frac{1}{64}$



Se sollecitiamo con un momento M_x la sezione composta da 8 tavole sovrapposte non connesse

esse scorrono l'una sull'altra ed offrono $\frac{1}{64}$ della mezzia-impedimento che offrirebbe la struttura se le tavole fossero incollate fra loro.

In particolare se le tavole fossero "n" avremmo $\frac{1}{n^2}$ di resistenza; 100 pagine di un blocco offrono alla

flessione: un impedimento = inerzia, pari a $\frac{1}{100^2}$ = undecimillesimo di quella che offrirebbe un cartone dello stesso spessore delle 100 pagine. e ciascuno può provare, (notando il mutuo scorrimento delle pagine).

Applicando Huygens è come considerare connesse le 8 otto tavole (incollate fra loro) avremo: (J_{xx} = momento d'inerzia baricentrico della sezione) $J_{xx} = 8 \left(\frac{b \left(\frac{h}{8} \right)^3}{12} \right) + 2 \left(\frac{b \frac{h}{8} \left(\frac{7}{16} h \right)^2}{8} \right) + 2 \left(\frac{b \frac{h}{8} \left(\frac{5}{16} h \right)^2}{8} \right) + 2 \left(\frac{b \frac{h}{8} \left(\frac{3}{16} h \right)^2}{8} \right) + 2 \left(\frac{b \frac{h}{8} \left(\frac{1}{16} h \right)^2}{8} \right) =$

$$J_{xx} = \frac{1}{64} \left(\frac{b h^3}{12} \right) + \left(\frac{b h}{4} \right) \left(\frac{49 + 25 + 9 + 1}{16^2} h^2 \right) =$$

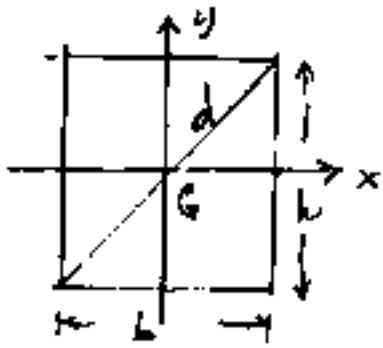
$$J_{xx} = \frac{1}{64} \left(\frac{b h^3}{12} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{b h^3}{256} \right) = \frac{b h^3}{12} \left(\frac{1}{64} + \frac{3 \cdot 21}{64} \right) = \frac{b h^3}{12}$$

Torna il J_{xx} baricentrico dell'intera sezione

Ciò fa capire come cavi composti di tanti fili di acciaio sono facilmente flessibili, mentre la stessa sezione di acciaio di area pari alla somma delle aree dei singoli fili è difficilmente flessibile. Però per flettersi facilmente i fili debbono scorrere fra loro e se per l'uso avviene spesso inversione d'inflessione, l'attrito logora i fili dei cavi, che debbono ogni tanto sostituirsi. (come negli ascensori).

Momenti d'inerzia di figure composte di rettangoli.

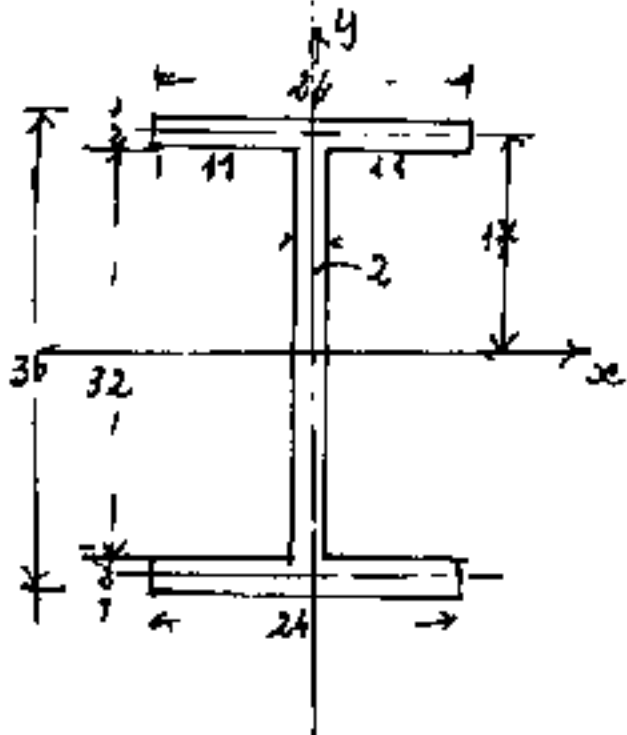
Utilizzando il teorema di trasposizione o di Huygens, e ricordando i momenti d'inerzia baricentrici del rettangolo:



$$J_{xx} = \frac{bh^3}{12}; \quad J_{yy} = \frac{hb^3}{12}; \quad J_G = J_{xx} + J_{yy} = \frac{bh d^2}{12};$$

è possibile in più modi calcolare J per figure composte.

Presentiamo un esercizio numerico (vedi figura)



$$J_{xx} = ali = 2 \left[\frac{24 \cdot 2^3}{12} + (24 \cdot 2)(17)^2 \right] = 27776$$

$$\text{anima} = \frac{2 \cdot 32^3}{12} = 5461,3$$

$$\underline{J_{xx} = 33237,3}$$

Verifica:

$$J_{xx} = \text{sezione piena} = \frac{24 \cdot 36^3}{12} = 93312, -$$

$$\text{vuoti} = 2 \left[\frac{32 \cdot 11^3}{12} \right] = - \frac{60074,65}{33237,3}$$

$$\underline{J_{xx} = 33237,3} \quad (\text{torna})$$

$$J_{yy} = ali = 2 \left[\frac{2 \cdot 24^3}{12} \right] + \text{anima} = \left[\frac{32 \cdot 2^3}{12} \right] =$$

$$4608 + 21,3$$

$$J_{yy} = \underline{4629,3}$$

verifica

$$J_{yy} = \text{sezione piena} = \frac{36 \cdot 24^3}{12} = 41472$$

$$\text{vuoti} = 2 \left[\frac{32 \cdot 11^3}{12} + (11 \cdot 32)(6,5)^2 \right] =$$

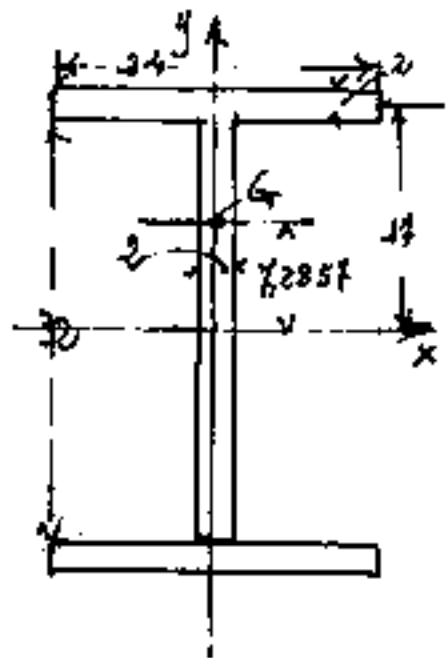
$$2 [3549,3 + 14872] = -36842,6$$

$$= 4629,3$$

$$J_{yy} = \underline{4629,3} \quad (\text{torna})$$

Esercizio 2) (segue dal prec.)

Supponiamo che per difetto di costruzione non agisca più la saldatura fra le ali inferiori e l'anima. Calcolare il nuovo momento d'inerzia. J_{yy} resta invariato = 4529,3
la struttura si scinde in un T ed in una piastra.



Calcoliamo il baricentro del T riferendo i momenti statici all'asse x

anima: area = $32 \times 2 = 64$; $S_x = 0$ (baricentrico)

ala: area = $34 \times 2 = 68$; $S_x = 68 \times 17 = 1156$
 $S_x = 1156$

$$y_G = \frac{1156}{132} = 8,75714286$$

$$J_{x_G} = \text{anima} = 5461,3 + 64(8,75714286)^2 = 3397,22449$$

$$\text{ala} = 16 + 68(17 - 8,75714286)^2 = 4545,63265$$

$$\text{ferro a T } J_{x_G} = 13404,19047$$

$$\text{ala inferiore } J_{x_G} = 16$$

$$\text{complessivo } J_{x_G} = \underline{\underline{13420,19047}}$$

verifichiamo il J_{x_G} del T:

$$\text{sezione piena } J = \frac{34 \cdot 34^3}{12} = 78608 + (34 \cdot 34)(8,75714286 - 1)^2 = 110848,3265$$

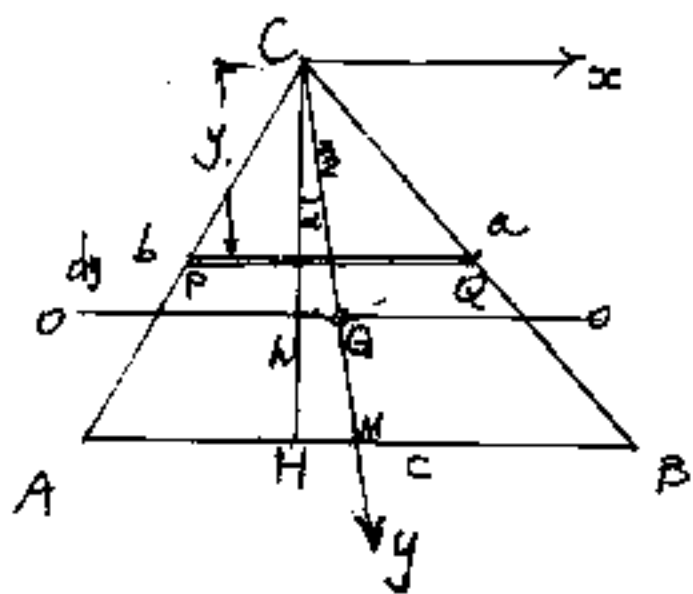
$$\text{vuoti: } 2 \left[\frac{11 \cdot 32^3}{12} + 11 \cdot 32(8,75714286)^2 \right] = \frac{30037,3333 + 48684,7347}{2} = 97444,1360$$

$$\text{(Torna)} \quad \underline{\underline{13404,1905}}$$

Per la mancanza di una connessione, l'impedimento alla flessione diretta meno della metà, circa $\frac{1}{10}$.

La misura delle distanze delle aree da un'asse, per calcolare il momento d'inerzia rispetto a quell'asse, che ordinariamente è presa in direzione normale all'asse, può essere presa secondo direzioni qualsiasi, se tali direzioni formano l'angolo α con la direzione normale, basterà moltiplicare per $\cos^3 \alpha$ questi momenti d'inerzia per riferirli ai momenti d'inerzia con distanze misurate normalmente.

Calcoliamo i momenti d'inerzia di un triangolo con distanze misurate in direzione delle mediane per momenti d'inerzia relativi ad assi paralleli ai lati.



Assumiamo in C l'origine degli assi obliqui, ove la x è parallela al lato $c = \overline{AB}$ e la y è sulla mediana m del lato \overline{AB} .

Il segmento generico: $\overline{PQ} = \frac{y}{m} c$; ma l'area all'intorno di \overline{PQ} sarà $dA = \frac{y}{m} c \cos \alpha dy$ ove α è l'angolo fra la mediana e l'altezza su \overline{AB} .

$$J_{xx} = \int_0^m y^2 dA = \int_0^m y^3 \frac{c}{m} \cos \alpha dy = \frac{m^4 c}{4 m} \cos \alpha = \boxed{\frac{m^3 c \cos \alpha}{4}}$$

Se volessimo il momento rispetto all'asse parallelo baricentrico $\bar{o}o$ avremo: $J_{oo} = J_{Gg} - A\delta^2$

$$\text{cioè } J_{oo} = \frac{cm^3}{4} \cos \alpha - \left(\frac{cm \cos \alpha}{2} \right) \left(\frac{2}{3}m \right)^2 =$$

$$J_{oo} = \frac{cm^3}{4} \cos \alpha - \frac{2}{9} cm^3 \cos \alpha =$$

$$\boxed{J_{oo} = \frac{cm^3 \cos \alpha}{36}}$$

e se volessimo il momento rispetto all'asse \overline{AB}

$$J_{AB} = J_{oo} + A\delta^2 = \frac{cm^3 \cos \alpha}{36} + \frac{cm \cos \alpha}{2} \left(\frac{m}{3} \right)^2$$

$$J_{AB} = \frac{c \cdot m \cdot \cos \alpha}{36} + \frac{cm^3 \cos \alpha}{18} =$$

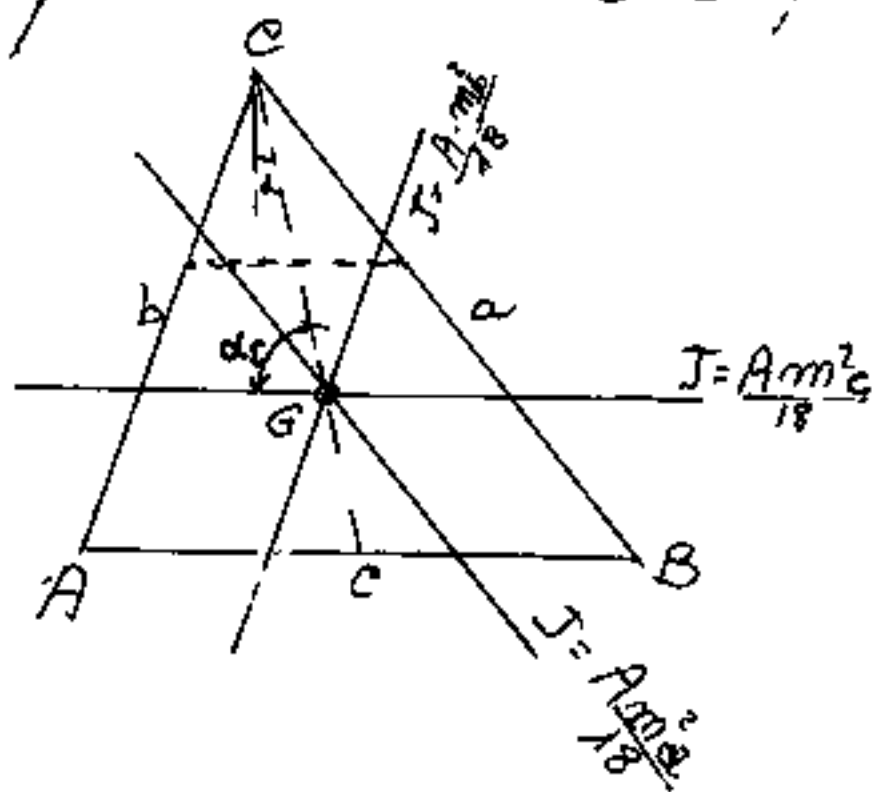
$$\boxed{J_{AB} = \frac{c \cdot m^3 \cos \alpha}{12}}$$

Poiché $m \cdot \cos \alpha = h$ è l'altezza rispetto ad $\overline{AB} = c$ e $\frac{ch}{2} = A$ è l'area del triangolo i tre momenti d'inerzia diventano:

$$\left. \begin{aligned} J_{xx} &= \frac{hc \cdot m_c^2}{2 \cdot 2} = \frac{Am_c^2}{2} \\ J_{oo} &= \frac{hc \cdot m_c^2}{2 \cdot 18} = \frac{Am_c^2}{18} \\ J_{AB} &= \frac{hc \cdot m_c^2}{2 \cdot 6} = \frac{Am_c^2}{6} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{abbiamo indicato } m_c \\ \text{per indicare rispetto a} \\ \text{quale lato è mediana.} \end{array}$$

Ma questo discorso è ripetibile per tutti i lati in particolare, poiché le mediane si incontrano nel baricentro, i momenti

d'inertza per assi baricentrici paralleli ai lati del triangolo, risultano proporzionali al quadrato delle rispettive mediane.



Abbiamo scritto affiancati agli assi baricentrici paralleli ai lati, i relativi momenti d'inertza, ore: m_a, m_b, m_c sono le mediane e relative ai lati a, b, c .

Se volessimo il momento d'inertza relativo alla mediana m_c , basta pensare che i singoli elementi di area $\frac{y}{m_c} c dy \cos \alpha$ sono divisi a metà dalla mediana stessa, perciò il loro $dJ = \frac{(ye)^3}{(m_c)^2} \frac{dy \cos \alpha}{12}$

$$J_{m_c} = \int_0^{m_c} \left(\frac{yc}{m_c} \right)^3 \frac{a^2 y \cos \alpha}{12} = \boxed{\frac{c^3 m_c}{48} \sec \alpha}$$

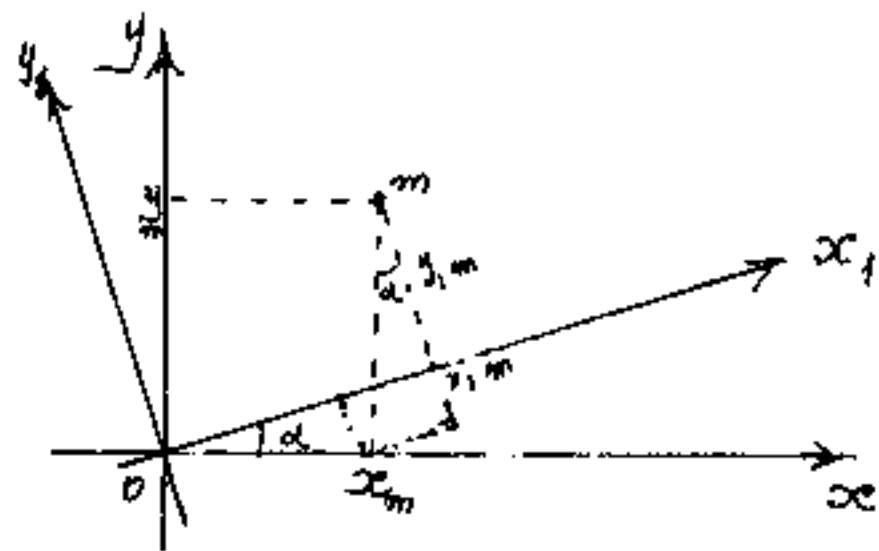
Qualora si voglia i momenti d'inertza baricentrici per assi paralleli ai lati, ma con misure prese ortogonalmente, dette h_a, h_b, h_c , le altezze relative ai lati a, b, c , avremo:

$$J_{\frac{a}{2}} = \frac{A h_a^2}{18} ; \quad J_{\frac{b}{2}} = \frac{A h_b^2}{18} ; \quad J_{\frac{c}{2}} = \frac{A h_c^2}{18} ;$$

Cerchiamo ora i momenti d'inertza per assi ruotati.

Momenti d'inerzia ad assi ruotati

Ci riferiamo ad assi ortogonali e consideriamo i momenti d'inerzia con misure ortogonali delle distanze.



Ricordiamo che se x, y , sono le coordinate di un punto, le coordinate dello stesso punto riferite ad assi ruotati di α

sono:

$$\begin{cases} x_1 = y \sin \alpha + x \cos \alpha \\ y_1 = y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{cases}$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse x_1 è:

$$J_{x_1, x_1} = \sum_i m_i y_{1i}^2 = \sum_i m_i (y_i^2 \cos^2 \alpha + x_i^2 \sin^2 \alpha - 2x_i y_i \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$J_{x_1, x_1} = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \sin^2 \alpha - J_{xy} (\sin 2\alpha)$$

analogamente:

$$J_{y_1, y_1} = J_{xx} \sin^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \alpha + J_{xy} (\sin 2\alpha)$$

infine:

$$J_{x_1, y_1} = \sum_i m_i (y \sin \alpha + x \cos \alpha)(y \cos \alpha - x \sin \alpha) =$$

$$J_{x_1, y_1} = (J_{xx} - J_{yy}) \sin \alpha \cos \alpha + J_{xy} \cos 2\alpha$$

Si noti che il momento d'inerzia polare, resta invariato ad assi ruotati intorno al polo.

$$J_p' = J_{x_1, x_1} + J_{y_1, y_1} = J_{xx} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + J_{yy} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) =$$

$$(J_{xx} + J_{yy}) = (J_{xx} + J_{yy}) = J_p = \text{cost.}$$

Ricordiamo dalla trigonometria: $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cos\alpha$:

$$\cos(2\alpha) = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \begin{cases} 2\cos^2\alpha - 1 \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \\ 1 - 2\sin^2\alpha \rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \end{cases}$$

Sostituendo nelle espressioni di $J_{x,x}$; $J_{y,y}$; $J_{x,y}$ abbiamo:

$$J_{x,x} = J_{xx} \left(\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \right) + J_{yy} \left(\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \right) - J_{xy} \sin(2\alpha)$$

$$J_{y,y} = J_{xx} \left(\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \right) + J_{yy} \left(\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \right) + J_{xy} \sin(2\alpha)$$

$$J_{x,y} = \left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2} \right) \sin(2\alpha) + J_{xy} \cos(2\alpha)$$

ed anche:

$$J_{x,x} = \left(\frac{J_{xx} + J_{yy}}{2} \right) + \left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2} \right) \cos(2\alpha) - J_{xy} \sin(2\alpha)$$

$$J_{y,y} = \left(\frac{J_{xx} + J_{yy}}{2} \right) - \left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2} \right) \cos(2\alpha) + J_{xy} \sin(2\alpha)$$

$$J_{x,y} = \left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2} \right) \sin(2\alpha) + J_{xy} \cos(2\alpha)$$

per $\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$; $2\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$; $\rightarrow \cos(2\alpha) = 0$

quindi per assi ruotati di 45° si ha:

$$J_{x,x} = \left(\frac{J_{xx} + J_{yy}}{2} \right) - J_{xy}$$

$$J_{y,y} = \left(\frac{J_{xx} + J_{yy}}{2} \right) + J_{xy}$$

$$J_{x,y} = \left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2} \right)$$

Valori validi solo per
assi ruotati di 45° ,

ove si nota il valore medio
assiale scostato dal centro d'inerzia
in + e - per i nuovi assiali.

Se ruoteremo di nuovo di 45° gli assi avremo che gli assi originari si scambierebbero, cioè la x si sovrappone alla y originaria e la y va sulla x originaria (di verso opposto). Poiché ciò scambia i valori dei momenti d'inerzia assiali ci domandiamo se a partire dalla x originaria, vi sia un particolare valore di α (α_0) per il quale $J_{x_1x_1} = \left(\frac{J_{xx} + J_{yy}}{2}\right) + \left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2}\right)\cos(2\alpha) - J_{xy}\sin(2\alpha)$ assuma valori massimi o minimi, a tal fine uguagliamo a zero la derivata:

$$\frac{dJ_{x_1x_1}}{d\alpha} = 0 \quad (\text{costante}) + \left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2}\right)(-2\sin(2\alpha)) - J_{xy} \cdot 2\cos(2\alpha) = 0$$

$$\frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \boxed{\tan(2\alpha_0) = \frac{-2J_{xy}}{J_{xx} - J_{yy}}}$$

ricordiamo che: $\tan(\varphi) = \tan(180^\circ + \varphi)$

quindi la nostra formula diventa:

$$\tan(2\alpha_0) = \tan(2 \cdot (90^\circ + \alpha_0))$$

ed anche:

$$\boxed{\begin{matrix} (\alpha_0) \\ (90^\circ + \alpha_0) \end{matrix} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{-2J_{xy}}{J_{xx} - J_{yy}}\right)}$$

Esistono quindi due assi ortogonali fra loro sui quali si verifica contemporaneamente che

su uno c'è J_{max} , sull'altro J_{min} , diremo questi assi: "Assi principali d'inertzia"

Li indicheremo: $J_{\xi\xi}$ e $J_{\eta\eta}$

Si noti che se uguagliamo a zero il valore di $J_{xy} = \frac{J_{xx} - J_{yy}}{2} \sin(2\alpha) + J_{xy} \cos(2\alpha)$, il valore di $\alpha = \alpha_0$ infatti: $\tan 2\alpha = \frac{-2J_{xy}}{J_{xx} - J_{yy}}$ cio' vuol dire che il momento centrifugo rispetto agli assi principali d'inertzia è identicamente nullo.

$$J_{\xi\eta} = 0$$

Cio' semplifica le formule se assumiamo come assi iniziali gli assi: ξ e η e con x, y , gli assi ruotati, chiameremo ancora " α " l'angolo di rotazione anche se in effetti il nostro angolo sarebbe rispetto agli assi originari ($\alpha + \alpha_0$).

Indichiamo con: $J_c = \frac{J_{\xi\xi} + J_{\eta\eta}}{2}$

con $R_y = \frac{J_{\xi\xi} - J_{\eta\eta}}{2}$

Sostituendo:

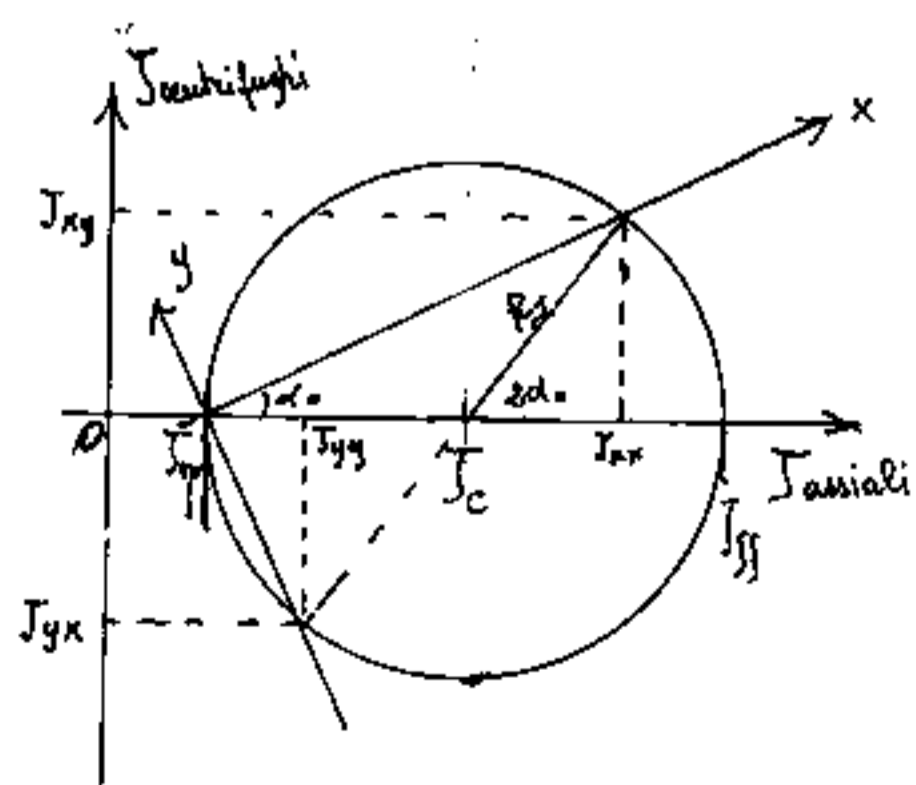
$$\begin{aligned} J_{xx} &= J_c + R_y \cos(2\alpha) \\ J_{yy} &= J_c - R_y \cos(2\alpha) \\ J_{xy} &= R_y \sin(2\alpha) \end{aligned}$$

Notiamo che il massimo momento d'inertia centrifugo si ha per assi x, y a 45° gradi rispetto agli assi principali d'inertia.

Il Cerchio di Mohr

Poiché la somma dei momenti d'inertia assiali: $J_{xx} + J_{yy} = \text{cost.}$, lo è anche la semisomma che abbiamo indicato con $J_c = \text{valore medio}$, e doppio del momento d'inertia polare.

Se consideriamo un sistema cartesiano ove in ascisse si riportano J assiali avremo che $J_{\xi\xi}$ e $J_{\eta\eta}$ sono le ascisse max e min, J_c è l'ascissa media non solo dei momenti d'inertia principali ma di tutti quelli su sistemi ortogonali ruotati. $(J_{\xi\xi} - J_{\eta\eta})$ è il diametro di un cerchio, (perciò abbiamo indicato con $R_J = \text{raggio} = \frac{J_{\xi\xi} - J_{\eta\eta}}{2}$)



Confrontando le espressioni di J_{xx} , J_{yy} , J_{xy} , in funzione di $J_{\xi\xi}$ e $J_{\eta\eta}$, si nota la validità della rappresentazione grafica a fianco, detta cerchio di Mohr.

Il cerchio di Mohr, (che ritroveremo per le tensioni)

È un particolare diagramma angolare, ove l'angolo al centro è doppio dell'angolo di rotazione degli assi, perciò ad ogni punto della circonferenza corrisponde una direzione, mentre la direzione a questa ortogonale sarà diametralmente opposta (può fare 90° al centro debbono essere 180°)

Il cerchio di Mohr serve per trovare gli assi principali d'inertzia, ed i relativi momenti principali, o viceversa valori di J per assi inclinati.

Come si opera:

Noi abbiamo determinato i momenti d'inertzia rispetto a due assi ortogonali baricentrici che indichiamo con J_{xx} ; J_{yy} ; $J_{xy} = J_{yx}$ (supponiamo $J_{xx} > J_{yy}$)

Possiamo riportare in asse: J_{yy} , J_c , J_{xx}

$J_c = \frac{J_{yy} + J_{xx}}{2}$ da questi punti in asse

possiamo riportare ortogonalmente J_{xy} e J_{yx} , unendo questi punti, (il segmento deve passare per J_c) abbiamo determinato R_J .

$$R_J = \sqrt{\left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2}\right)^2 + (J_{xy})^2}$$

e quindi i momenti principali d'inertzia

$$J_{\xi\xi} = J_c + R_J \quad ; \quad J_{\eta\eta} = J_c - R_J$$

L'angolo che gli assi principali d'inerzia formano con gli assi x, y è dato da:

$$\tan(\alpha_0) = \frac{-J_{xy}}{(J_{xx} - J_{yy})/2}$$

Le direzioni degli assi principali sono dette Direzioni principali.

È bene ricordare che il momento d'inerzia rispetto ad un asse è l'impedimento a ruotare per flessione, intorno a quell'asse, e che un diagramma (segmento) che rappresenti proporzionalmente valori inerenti tale impedimento deve essere posto normalmente all'asse, ma può anche assumere direzioni diverse come avviene, per esempio in un cerchio che ruoti intorno ad un diametro, solo il diametro normale all'asse di rotazione resta normale nella proiezione; le altre coppie di diametri, fra loro originariamente perpendicolari, nella proiezione non sono più perpendicolari e formano quelli che sono chiamati Diametri Coniugati nell'ellisse proiezione.

L'ellisse d'inerzia

La visione dei vari momenti d'inerzia baricentrici in un triangolo e relativi ad assi ruotati in direzione dei lati, ci ha portato a cercare espressioni algebriche capaci di darci i valori di J ruotato di un generico angolo " α ".

Fra tutti i possibili valori di α abbiamo cercato i valori α_0 che rendono massimo e minimo il valore di J .

Questi assi ruotati di α_0 rispetto ai nostri orientati arbitrariamente, sono stati chiamati: assi principali d'inerzia e le loro direzioni sono state chiamate direzioni principali, sulle quali abbiamo deciso di porre gli assi cartesiani di riferimento.

Ci domandiamo: "come rispetto ad un generico sistema di assi cartesiani è stato possibile calcolare le coordinate di un punto (baricentro), ove pensare concentrata la somma delle masse, per ottenere gli stessi momenti statici, rispetto a qualunque

retta, moltiplicando tale somma di masse per la distanza da tale retta; è forse possibile calcolare, rispetto agli assi principali di inerzia, (assunti come assi di riferimento), un punto, o un luogo di punti, ove pensare concentrata la somma delle masse, che moltiplicata per il quadrato di una distanza, dia il J relativo ad un prescelto asse comunque inclinato rispetto agli assi principali d'inerzia, ma, ovviamente, anch'esso baricentrico?"

È possibile, e possiamo arrivarci con ragionamenti diversi. Cercheremo di esprimerci, nel modo che riteniamo più semplice, ed adatto per chi voglia ripartire da zero.

Consideriamo una nuova grandezza
"Il momento d'inerzia per unità di massa"

Notiamo che, se per masse si intendono le aree, $\frac{J}{A} = \rho^2$ ($\frac{\text{cm}^4}{\text{cm}^2} = \text{cm}^2$), tale grandezza è il quadrato di sua distanza ρ , che essendo destinata per una stessa area a trovare J rispetto ad assi ruotati, la chiameremo:

Raggio giratore d'inerzia.

avremo:

$$\rho = \sqrt{J_{ss} / A}$$

Quindi la "distanza" ρ è misurata da certi punti, ove posso pensare concentrata la "massa" A , che moltiplicata per ρ^2 , dia il momento d'inerzia rispetto a certi assi baricentrici connessi con tali punti.

Vi è qui una corrispondenza biunivoca fra "punti" e "rette (assi)". È noto che una corrispondenza biunivoca fra rette e punti è detta polarità ove le rette-assi sono dette polari ed i punti corrispondenti sono detti poli.

"La parola "polo" deriva dal greco $\pi\acute{o}\lambda\omicron\varsigma$ che significa "perno" i poli, erano riferiti agli estremi di un'asse di rotazione la cui funzione era di sostegno, ma non di impedimento alla rotazione, come i poli terrestri."

Polari sono le coordinate uscenti da un punto, poli sono anche i centri di proiezione. In vari significati si trovano le parole: "polare e polo", a noi interessa qui la correlazione fra

punti e rette, è una correlazione involutoria o reciproca, o biunivoca; se alla retta "p" corrisponde il punto "P", al punto "P" corrisponde la retta "p". Se due punti giacciono rispettivamente sulla polare dell'altro si dicono coniugati o reciproci; così ogni polo ha per coniugati tutti i punti della sua polare. Un polo che giace sulla propria polare si dice autoconiugato.

Analogamente si dicono coniugate le rette polari che ciascuna ha su di sé il polo dell'altra.

Per noi le "polari" sono gli assi baricentrici rispetto ai quali calcoliamo i momenti d'inerzia.

I "poli" sono quei punti che distano f dalle rispettive polari.

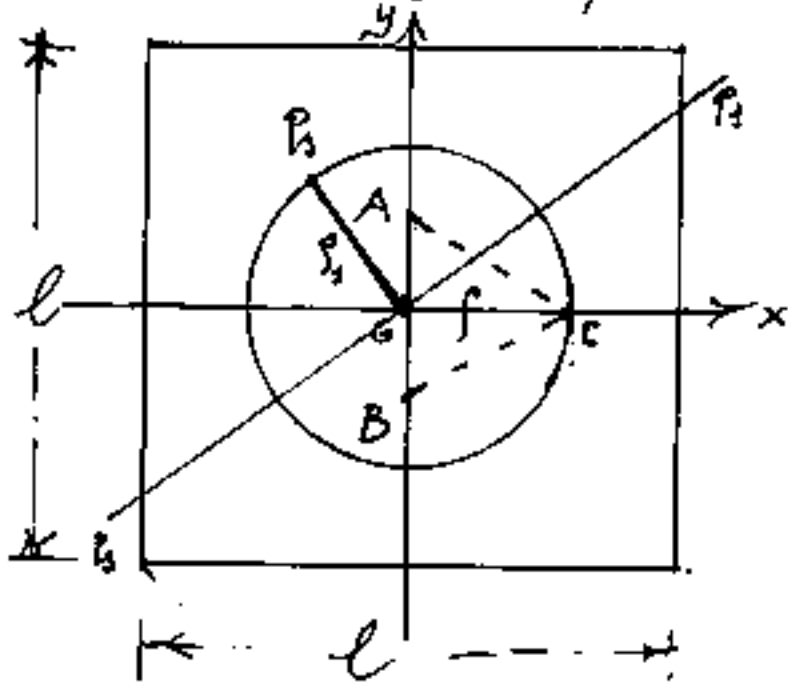
Ma queste distanze polari possono essere misurate fra il polo ed il centro $G =$ baricentro cioè fra punti coniugati, oppure ortogonalmente alla polare.

Noi sappiamo che ogni f è: $f_{\min} \leq f \leq f_{\max}$
intermedio fra f_{\max} e f_{\min} .

Se torniamo a sezioni rettangolari troviamo:

$$J_{xx} = \frac{bh^3}{12}; \quad J_{yy} = \frac{hb^3}{12}; \quad \text{ma se la sezione fosse quadrata: } h=b=l; \quad J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} = \frac{l^4}{12}$$

da cui: $\rho = \sqrt{\frac{l^4}{12 \cdot l^2}} = \frac{l}{\sqrt{6}}$ quindi



$$\rho_{\max} = \rho_{\min} = \frac{l}{\sqrt{6}}$$

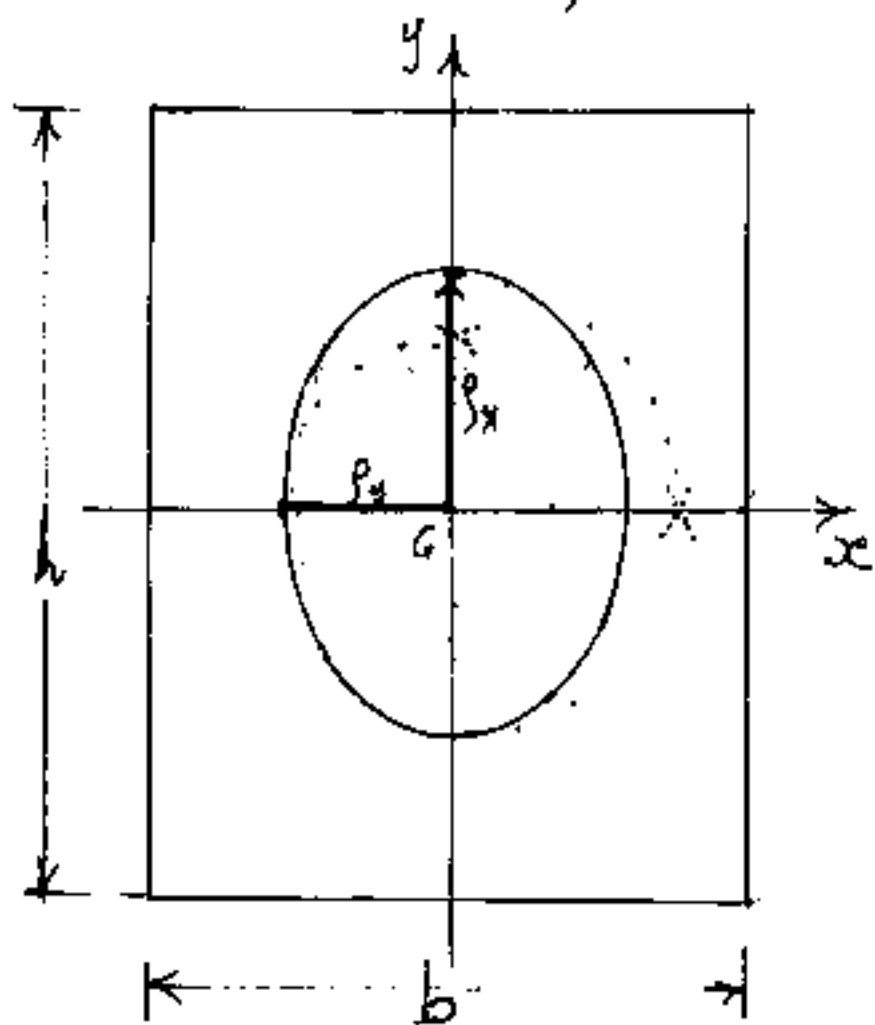
ogni altro ρ non potendo essere maggiore di ρ_{\max} , né minore

di ρ_{\min} dovrà essere $\rho = \frac{l}{\sqrt{6}}$

Poiché le distanze sono prese "ortogonalmente" in questo caso coincidono con le distanze dal centro e ρ è il raggio di una circonferenza di centro G ed ogni ρ è ortogonale all'asse cui si riferisce.

La costruzione di ρ graficamente è facile se ricordiamo che l'altezza di un triangolo equilatero è: $h = \frac{\text{lato} \cdot \sqrt{3}}{2}$; dividendo h in tre parti possiamo costruire il triangolo equilatero ABC ove l'altezza $\overline{GC} = \rho$, e la circonferenza di raggio ρ è il luogo dei "poli" P_i ove moltiplicando l'area per ρ^2 otteniamo il momento d'inerzia rispetto alla polare p_i normale a ρ .

Se facciamo ruotare il nostro quadrato intorno all'asse y , in proiezione diventa un rettangolo, e la circonferenza dei ρ un'ellisse, ove però i diametri che erano per-



pendicolari nella circonferenza diventano i diametri coniugati nell'ellisse, mentre i diametri principali dell'ellisse sono le direzioni principali, e restano ortogo-

nali sugli assi x ed y . (Per le correlazioni nella costruzione dell'ellisse vedasi Vol II)

$$\rho_x = \frac{h}{6} \sqrt{3} \quad ; \quad \rho_y = \frac{b}{6} \sqrt{3}$$

È questo l'ellisse centrale d'inerzia o di:

Culmann che però nasce da impostazioni

molto più complicate. Nei fenomeni fisici, molte grandezze, che variano da un massimo ad un minimo, e che, in qualche modo correlazionano biunivocamente rette e punti, sono rappresentate dai raggi dell'ellisse.

In generale, in meccanica razionale l'inerzia è studiata nello spazio tridimensionale, qui

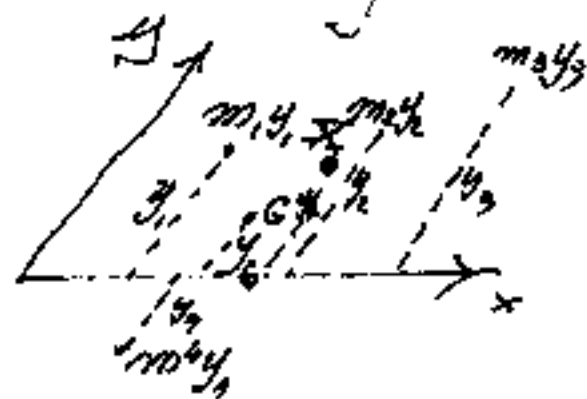
limitiamo il nostro studio a sistemi piani, ove le masse sono, in genere, le aree delle figure piane.

Ricordiamo dalla geometria proiettiva che il luogo dei punti autoconiugati, in una polarità, e l'involuppo delle rette autoconiugate è la conica fondamentale; poiché ciò non è reale nel nostro caso, si prende come polo il simmetrico, sulla base di queste premesse che definiscono una autipolarità si trova l'ellisse di Culman che, per completezza, dimostriamo.

Il sistema antipolare

Abbiamo considerato il momento d'inerzia come il momento statico ove al posto delle masse iniziali si sono sostituiti i momenti statici di tali masse iniziali. Tutto ciò rispetto ad un asse definito e con distanze dall'asse arbitrariamente inclinate. Tali distanze le indicheremo con y e l'asse con x ove però il sistema di assi x ed y non è in genere ortogonale, ma obliquo. Avremo il

baricentro G delle masse e la relativa y_G , ed



avremo il nuovo baricentro dei momenti statici assunti come nuove masse al posto delle masse iniziali, e questo nuovo baricentro si indica con la lettera X ed è detto: centro relativo. (all'asse x) di coordinata y_X

Se ricordiamo che: $J_{xx} = \sum_i (m_i y_i^2)$

possiamo avvalerci che: $S_x = y_G \sum_i (m_i)$

per dire $J_{xx} = y_X \cdot \sum m_i y_i = y_X S_x = \rho_x^2 \sum (m_i)$

$$J_{xx} = y_G y_X \sum (m_i) =$$

era ovvio che: $y_X = \frac{J_{xx}}{S_x}$ e

$$\rho_x^2 = y_G y_X$$

attenzione! questo: ρ_x non è baricentrico

Quest'ultima relazione afferma che il raggio giratore d'inerzia è medio proporzionale fra l'ordinata del baricentro G e l'ordinata del centro relativo X = (baricentro dei momenti statici assunti come masse)

Ricordando il teorema di trasposizione o di Huygens ove gli assi x, y non sono baricentrici, ma lo sono i loro paralleli x_0, y_0 avremo:

$J_{xx} = J_{x_0 x_0} + \sum (m_i) d_{x-x_0}^2$ che può scriversi:

$\rho_x^2 \sum (m_i) = \rho_{x_0}^2 \sum (m_i) + d_{x-x_0}^2 \sum (m_i)$ e dividendo:

per $\bar{z}(m)$

si ha:

$$\boxed{I_x^2 = I_{x_0}^2 + d_{x-x_0}^2}$$

ove: $(d_{x-x_0} = y_G)$

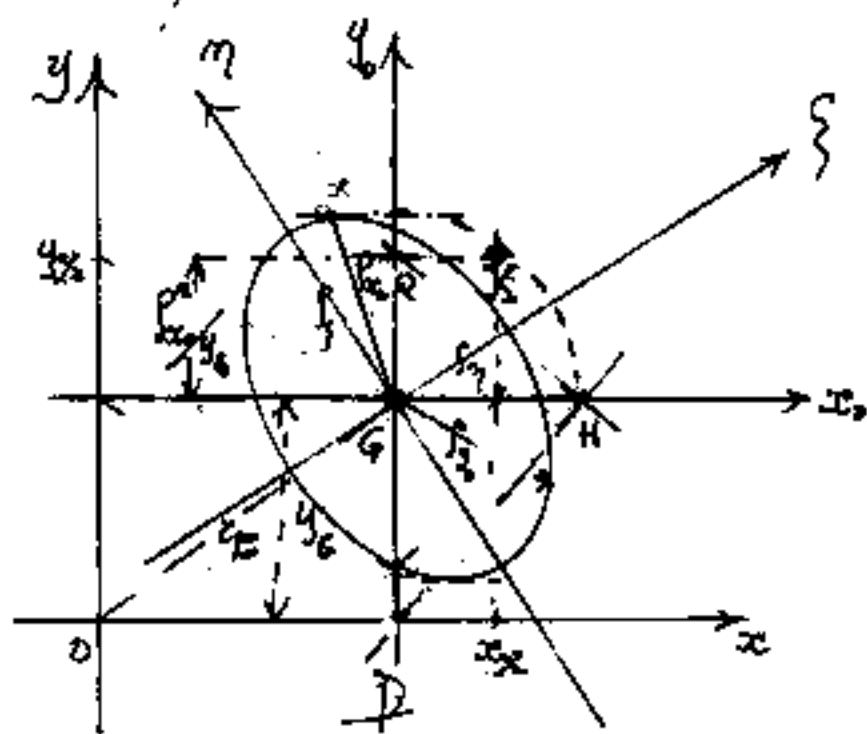
per cui:

$$\boxed{y_X} = \frac{I_x^2}{y_G} = \frac{I_{x_0}^2 + y_G^2}{y_G} = \left(y_G + \frac{I_{x_0}^2}{y_G} \right)$$

L'espressione ora scritta evidenzia che il centro relativo X è piú lontano del baricentro G dall'asse di riferimento x della grandezza: $(I_{x_0}^2/y_G)$ cioè del rapporto fra il quadrato del raggio giratore d'inertia, relativo al parallelo asse baricentrico x_0 , e la distanza fra i due assi: x ed $x_0 = y_G$.

Dato quindi un generico sistema di riferimento (che possiamo supporre ortogonale) x, y , ed il parallelo sistema di riferimento x_0, y_0 ; e baricentrico si abbia il sistema: ξ, η , delle direzioni principali d'inertia, e sia dato l'ellisse centrale d'inertia.

è facile costruire (X) centro relativo, infatti riportato in $\overline{GH} = I_{x_0}$, da H la normale ad HD trova mQ ove $\overline{QG} = I_{x_0}^2/y_G$. $\left(\frac{I_{x_0}^2}{y_G} \right)$



Per il momento d'inerzia polare nell'origine degli assi x ed y avremo: $J_p = J_{xx} + J_{yy}$

$$J_p = (J_{x_0x_0} + d_x^2 \Sigma(m)) + (J_{y_0y_0} + d_y^2 \Sigma(m)) =$$

ed essendo $J_{x_0x_0} + J_{y_0y_0} = J_G$; e $d_x^2 + d_y^2 = r_G^2$ ove r_G è la distanza \overline{OG} (o modulo in coordinate polari)

avremo:

$$J_p = J_G + r_G^2 \Sigma(m)$$

Il momento d'inerzia centrifugo: $J_{xy} = \Sigma(mxy)$

$$J_{xy} = \Sigma(m)(x_0 + d_x)(y_0 + d_y) = \Sigma(m)(x_0y_0 + x_0d_y + y_0d_x + d_xd_y)$$

i prodotti: $\Sigma(m)x_0$ e $\Sigma(m)y_0$ sono nulli perché x_0

ed y_0 sono baricentrici perciò anche: $d_y \Sigma(m)x_0 = d_x \Sigma(m)y_0 = 0$

$$J_{xy} = J_{x_0y_0} + d_xd_y \Sigma(m)$$

Il momento d'inerzia centrifugo può essere calcolato per due assi qualsiasi, se uno dei due è baricentrico:

$d_xd_y \Sigma(m) = 0$ perché: o $d_x = 0$ o $d_y = 0$

$$J_{x_0y} = J_{y_0x} = J_{x_0y_0}$$

Se i due assi sono paralleli fra loro e paralleli a x_0

$$J_{x_1x_2} = J_{x_0x_0} + d_1d_2 \Sigma(m)$$

e se uno di essi coincide con x_0 ; $d_1d_2 \Sigma(m) = 0$

$$J_{x_1x_0} = \underline{J_{x_0x_2}} = J_{x_0x_0} \quad (\text{assiale})$$

Esempio di calcolo di centri relativi (e di assi principali per la verifica grafica)

Riferite ad un sistema cartesiano O, x, y , sono note le masse:

$$m_1 = 5 ; \equiv (3, 2)$$

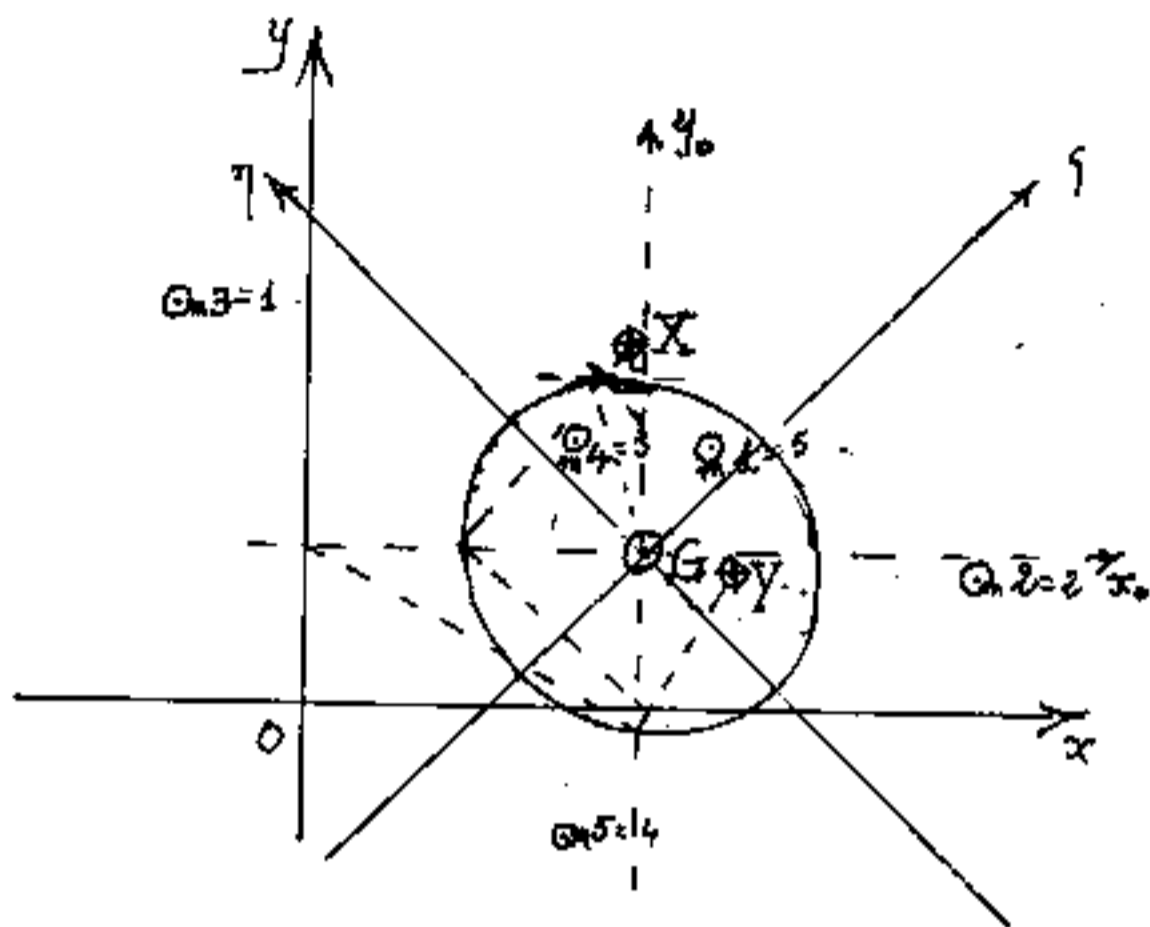
$$m_2 = 2 ; \equiv (5, 1)$$

$$m_3 = 1 ; \equiv (-1, 3)$$

$$m_4 = 3 ; \equiv (2, 2)$$

$$m_5 = 4 ; \equiv (2, -1)$$

$$\Sigma m = \underline{\underline{15}}$$



(baricentro)

$$S_x = (5 \cdot 2) + (2 \cdot 1) + (1 \cdot 3) + (3 \cdot 2) + (4 \cdot (-1))$$

$$10 + 2 + 3 + 6 - 4 = \underline{\underline{17}} ; y_G = \frac{17}{15} = \underline{\underline{1,133\bar{3}}}$$

$$S_y = (5 \cdot 3) + (2 \cdot 5) + (1 \cdot (-1)) + (3 \cdot 2) + (4 \cdot 2)$$

$$15 + 10 - 1 + 6 + 8 = \underline{\underline{38}} ; x_G = \frac{38}{15} = \underline{\underline{2,533\bar{3}}}$$

(centro relativo) X (rispetto ad x) ottenuto sostituendo alla posizione delle masse i valori S_x , e calcolando il nuovo baricentro come se i valori S_x fossero masse.

$$J_{xx} = (10 \cdot 2) + (2 \cdot 1) + (3 \cdot 3) + (6 \cdot 2) + ((-4) \cdot (-1))$$

$$20 + 2 + 9 + 12 + 4 = \underline{\underline{47}} ; y_X = \frac{47}{17} = \underline{\underline{2,764706}}$$

$$J_{xy} = (10 \cdot 3) + (2 \cdot 5) + (3 \cdot (-1)) + (6 \cdot 2) + (-4 \cdot 2)$$

$$30 + 10 - 3 + 12 - 8 = 41 ; x_X = \frac{41}{17} = \underline{\underline{2,4117647}}$$

$$J_{x_0 x_0} = J_{xx} - \Sigma(m) y_G^2 = 47 - 15 \left(\frac{17}{15}\right)^2 = \underline{\underline{27,733\bar{3}}}$$

$$J_{yy} = (15 \cdot 3) + (10 \cdot 5) + ((-1) \cdot (-1)) + (6 \cdot 2) + (8 \cdot 2)$$

$$45 + 50 + 1 + 12 + 16 = \underline{124}; \quad \bar{x}\bar{y} = \frac{124}{38} = \underline{3,263158}$$

$$J_{yx} = (15 \cdot 2) + (10 \cdot 1) + ((-1) \cdot 3) + (6 \cdot 2) + (8 \cdot (-1)) = J_{xy}:$$

$$+ 30 + 10 - 3 + 12 - 8 = \underline{41}; \quad \bar{y}\bar{x} = \frac{41}{38} = \underline{1,078947}$$

$$J_{y_0 y_0} = 124 - 15 \left(\frac{38}{15}\right)^2 = \underline{27,7333}$$

$$J_{x_0 y_0} = \underline{-2,066666} = \sum m_i (x_i - x_0)(y_i - y_0) = J_{xy} + x_0 y_0 \sum m_i + S_x x_0 + S_y y_0$$

$$\text{tang}(2\alpha_0) = \frac{-J_{x_0 y_0}}{(J_{x_0 x_0} - J_{y_0 y_0})/2}$$

$$\text{tang}(2\alpha_0) = 2 \cdot \frac{+2,0666}{(27,7333) - (27,7333)} = \infty$$

$$\alpha_0 = 45^\circ \quad \alpha_0 = 135^\circ$$

$$f_{x_0} = \sqrt{\frac{J_{x_0 x_0}}{\sum m}} = \sqrt{\frac{27,7333}{15}} = 1,35973854 = f_{y_0}$$

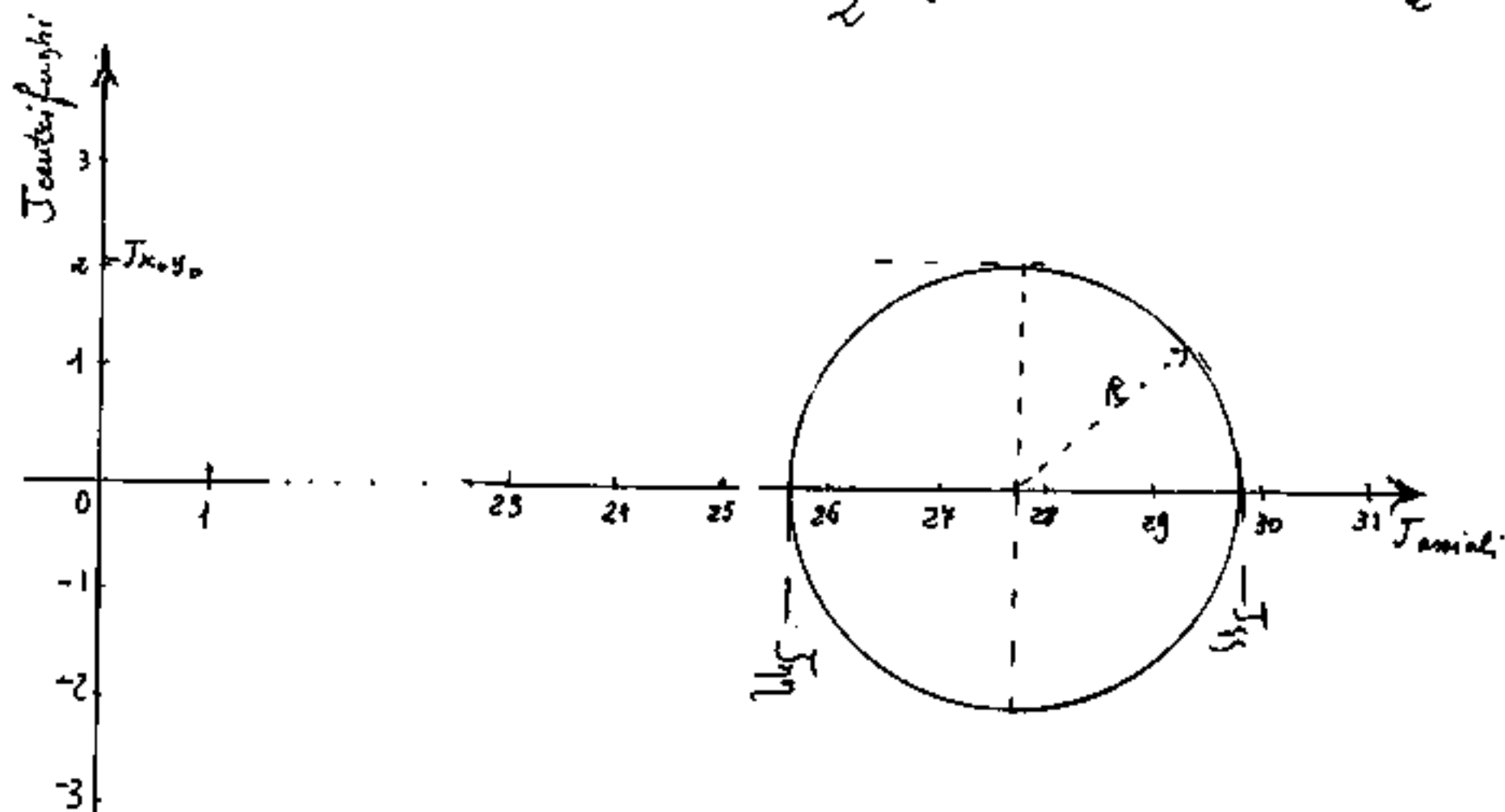
$$R = \sqrt{\frac{J_{x_0 x_0} - J_{y_0 y_0}}{2} + J_{x_0 y_0}^2} = \underline{2,0666}$$

$$J_{\xi\xi} = 27,7333 + 2,0666 = \underline{29,8}$$

$$J_{\eta\eta} = 27,7333 - 2,0666 = \underline{25,666}$$

$$f_{\xi} = \sqrt{\frac{29,8}{15}} = \underline{1,40949163}; \quad f_{\eta} = \sqrt{\frac{25,666}{15}} = \underline{1,29786149}$$

In questo caso i momenti principali d'inerzia sono abbastanza vicini $J_{\xi\xi} = 29,8$; $J_{\eta\eta} = 25,666$ per cui il raggio del cerchio di Mohr $\frac{29,8 - 25,666}{2} = 2,066$ conviene quindi lasciare fuori del foglio l'origine degli assi: $\frac{J_{\xi\xi} + J_{\eta\eta}}{2} = 27,7333 = \frac{J_{x_0x_0} + J_{y_0y_0}}{2}$



Si noti che la retta x , che taglia l'ellisse, ha il suo centro relativo X esterno all'ellisse, mentre la retta y , che è esterna all'ellisse, ha il suo centro relativo interno all'ellisse, cioè se le rette fossero tangenti all'ellisse i loro centri relativi sarebbero sull'ellisse dall'altra parte di G , ma se noi consideriamo i simmetrici dei centri relativi rispetto a G , questi simmetrici X' ; Y' giaceranno sulla retta sono autoconiugati, si ha una polarità, mentre

le rette ed i rispettivi centri relativi, danno una antipolarità; se la retta passa per il baricentro G , il suo centro relativo è all'infinito, se il centro relativo si avvicina a G la retta si allontana.

L'aver considerato i simmetrici ha permesso di tracciare la conica che è l'ellisse di Culman.

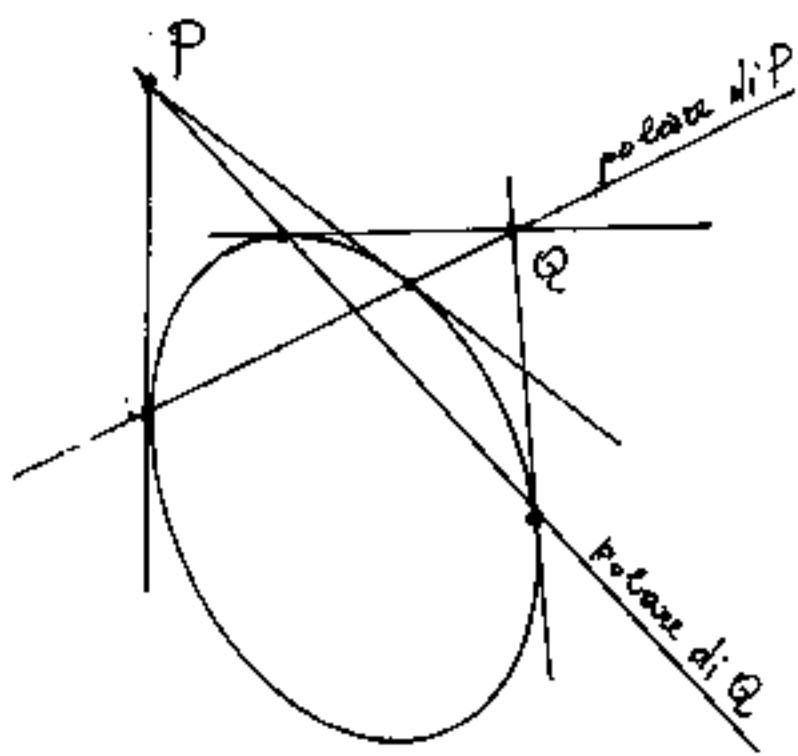
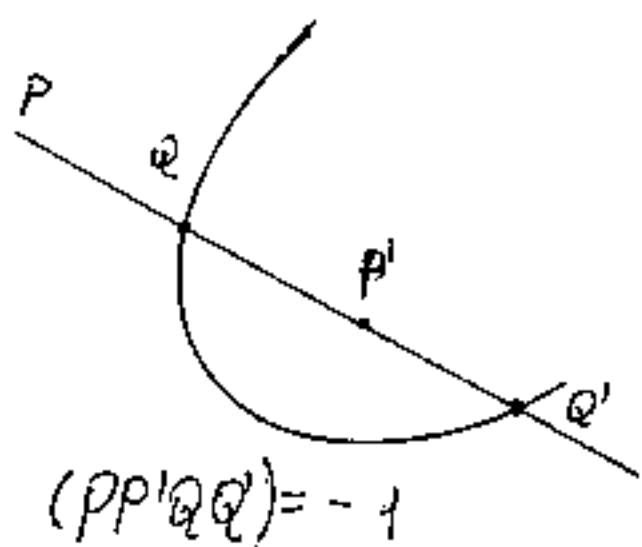
Elementi di geometria proiettiva

Per comprendere come la conica fondamentale di una polarità sia il luogo dei punti autoconiugati, (cioè che stanno sulla propria polare) come i simmetrici dei centri relativi e le rispettive rette. (Quando la retta ed il suo centro relativo sono equidistanti da G , il simmetrico X' di X è sulla retta), riteniamo opportuno di ampliare gli elementi di geometria proiettiva, già esposti nel II e III volume.

Due punti P e P' si dicono: coniugati rispetto ad una conica, quando separano armonicamente i due punti di intersezione fra la retta $\overline{PP'}$ e la conica.

Se teniamo fisso il punto P (Polo), il luogo dei punti coniugati è una retta che dicesi polare di P la indichiamo con " p " e passa per i punti di contatto delle tangenti alla conica.

Due rette si dicono coniugate rispetto alla conica quando l'una contiene il polo dell'altra. Cioè se le due rette coniugate p e p' e le tangenti alla conica passano per P esse formano un gruppo armonico. L'involuzione è ellittica o iperbolica a seconda che P sia interno od esterno alla conica.

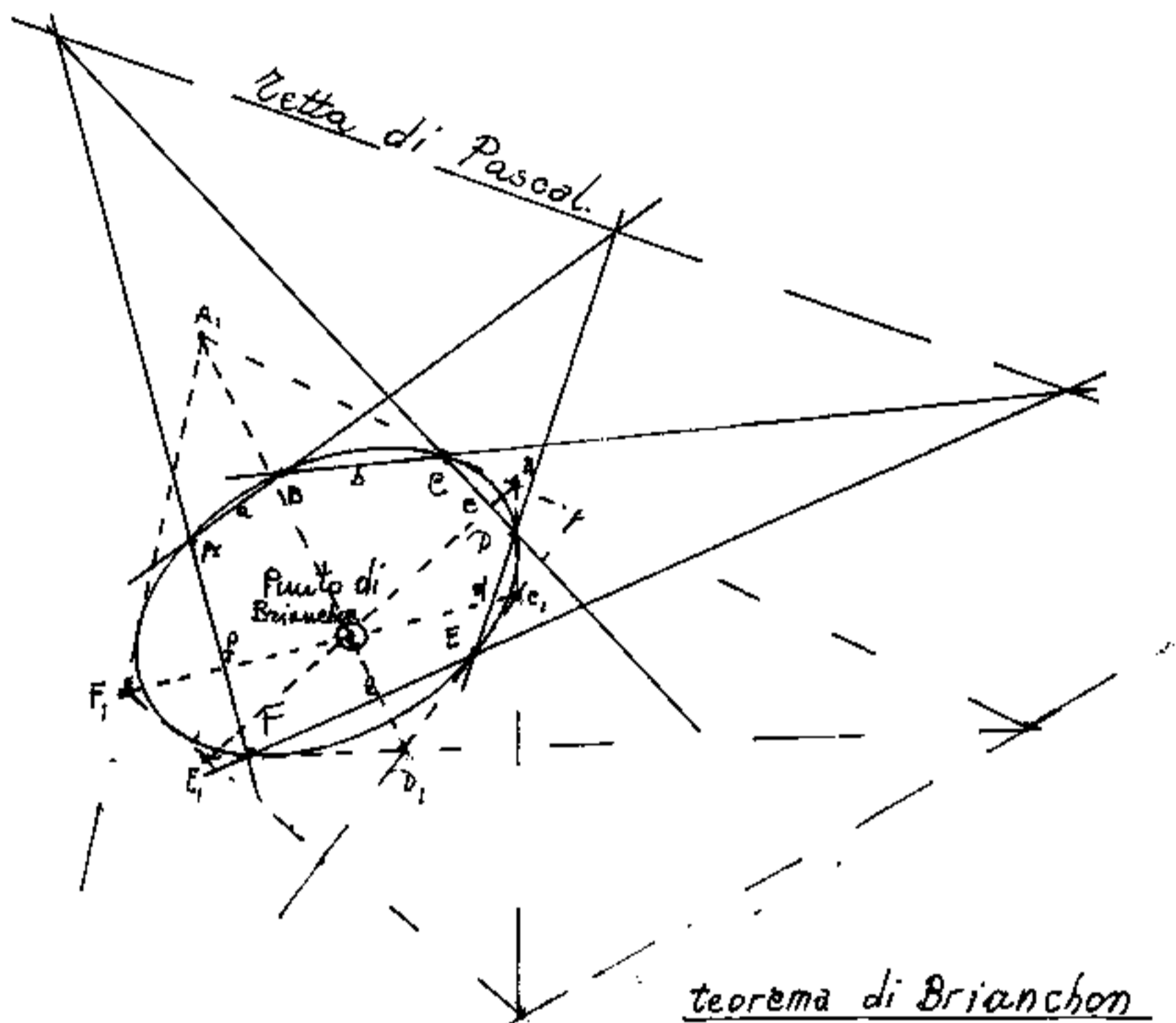


Teorema di Steiner - Charles

Il luogo dei punti comuni ai raggi corrispondenti in due fasci proiettivi (complessari distinti e non proiettivi) è una conica passante per i centri S ed S' e tangente in S ed S' al raggio che corrisponde ad $\overline{SS'}$ e queste tangenti si incontrano nel centro di collinazione. Inversamente prendendo i due punti su una conica e proiettando altri tre punti della stessa.

Il teorema di Pascal dice:

se un esagono semplice è inscritto in una conica, i punti di intersezione delle tre coppie di lati opposti appartengono ad una retta (retta di Pascal) e inversamente.



un esalatero semplice

circoscritto ad una conica, le rette congiungenti vertici opposti si incontrano in un punto detto punto di Brianchon.

Nel caso dell'ellisse in figura anche i lati opposti dell'esalatero circoscritto si incontrano su una retta.

Alcune osservazioni sulla proiettiva.

La parola proiettare (dal latino gettare in avanti) implica un proiettore ed una proiezione, se consideriamo puntiforme il proiettore si hanno due casi: il centro proiettore è in campo finito e si hanno le proiezioni centrali, se il proiettore è all'infinito il fascio dei raggi è composto di rette parallele.

La proiezione può avvenire in piano e se i raggi sono perpendicolari al piano si ha la proiezione ortogonale. (Monge)

Se consideriamo due piani qualsiasi ed un centro di proiezione, dal quale si proietta la figura di un piano sull'altro piano, la figura proiettata e la sua proiezione sono figure omologiche.

Si è già trattata (v. c. III) la questione dei triangoli omologici, dei quadrilateri completi e dei gruppi armonici; abbiamo già definito le coordinate proiettive, per esse abbiamo messo a fuoco la interpretazione di equazioni omogenee dimensionalmente. In geometria proiettiva, la polarità, è una correlazione reciproca

fra due piani sovrapposti, ed è tale che se ad un punto P corrisponde la retta p si ha che a tutti i punti della retta p corrispondono rispettivamente tutte le rette passanti per il punto P . Ogni coppia Punto (Polo) e retta (polare) che si corrispondono hanno una corrispondenza involutoria. Analoga la reciprocità involutoria fra piani nella polarità spaziale.

Ci limitiamo al piano.

Due rette si dicono coniugate, se ciascuna possiede il polo dell'altra.

Un punto si dice autoconiugato se giace sulla propria polare e viceversa, una retta polare si dice autoconiugata se contiene il proprio polo.

Il luogo dei punti autoconiugati è una conica che si chiama conica fondamentale della polarità ove l'involuzione delle polari costituisce l'insieme delle rette tangenti alla conica nei punti dei rispettivi poli.

È una polarità piana, e la conica si dice irriducibile

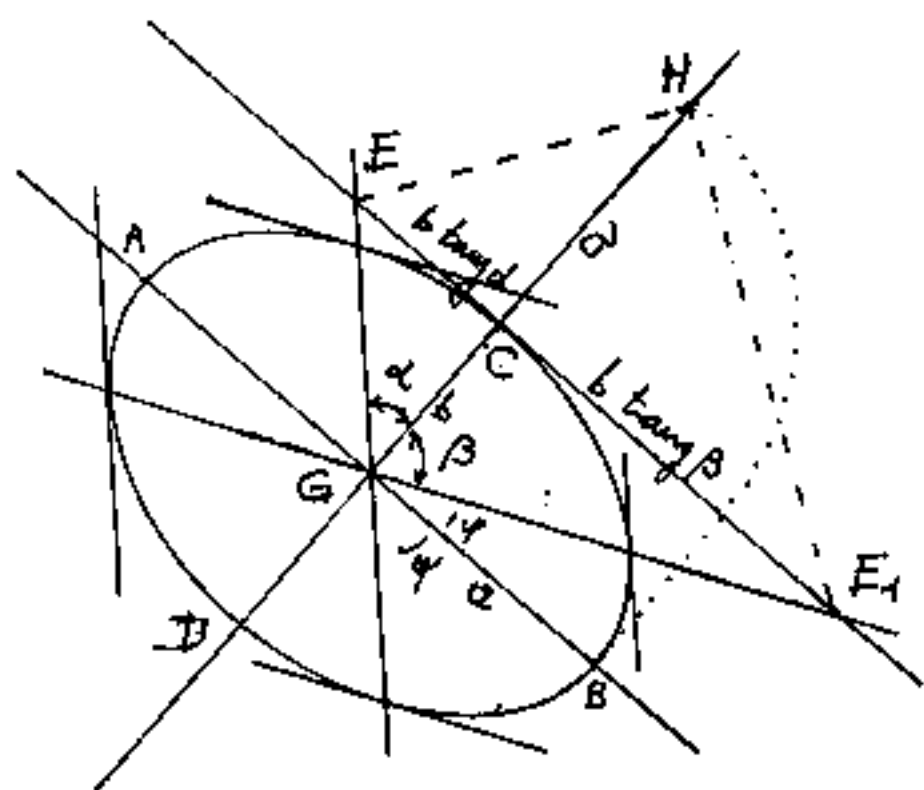
Se consideriamo le rette del piano ed i rispettivi centri relativi che sono da banda opposta rispetto a G e che X si allontana da G quando la retta si avvicina, se consideriamo X simmetrico finiscono per incontrarsi (autoconiugati) si ha l'ellisse di Culmann.

L'ellisse centrale d'inerzia di un sistema di masse è la conica fondamentale, nella polarità fra le rette del piano ed i simmetrici X' rispetto al baricentro G dei rispettivi centri relativi X . Quindi i centri relativi X e le rette del piano si corrispondono in una antipolarità determinata dall'ellisse centrale d'inerzia. Intendendo per antipolarità quella che ciascuna retta polare ha col simmetrico del proprio polo, rispetto al centro della polarità.

Se avessimo assunto come polarità = (corrispondenza biunivoca fra punti e rette) quella delle rette e dei propri centri relativi, poiché per rette baricentriche i poli (centri relativi) sono all'infinito e viceversa, non potevamo i centri relativi X giacere sulle rispettive rette, non era possibile, in campo reale, avere la conica fondamentale. Avendo assunto come polarità quella delle rette coi simmetrici X' , la correlazione fra le rette ed i centri relativi X diventa un'antipolarità, rispetto all'ellisse centrale d'inerzia.

Costruzione grafica del diametro coniugato

Dato l'ellisse di centro G e di diametri \overline{AB} e



\overline{CD} , ove: $\overline{AB} = \overline{GB} = a$;

$\overline{DG} = \overline{GC} = b$.

Per C tracciamo una parallela ad \overline{AB} che incontra in F un generico diametro dell'ellisse.

Se $\widehat{EGC} = \alpha$ avremo $\overline{FC} = b \cdot \tan \alpha$.

Sul prolungamento di \overline{GC} fino ad H riportiamo: $\overline{CH} = a$; da H la perpendicolare ad HE fino ad incontrare in E_1 la tangente per C , ove $\overline{CE_1} = b \tan \beta$, ove $\beta = \widehat{CGE_1}$. ($\overline{E_1G}$ = retta del diametro coniugato)

Dal triangolo rettangolo FHE_1 per il 2° di Euclide

$$(b \tan \alpha)(b \tan \beta) = a^2$$

da cui:

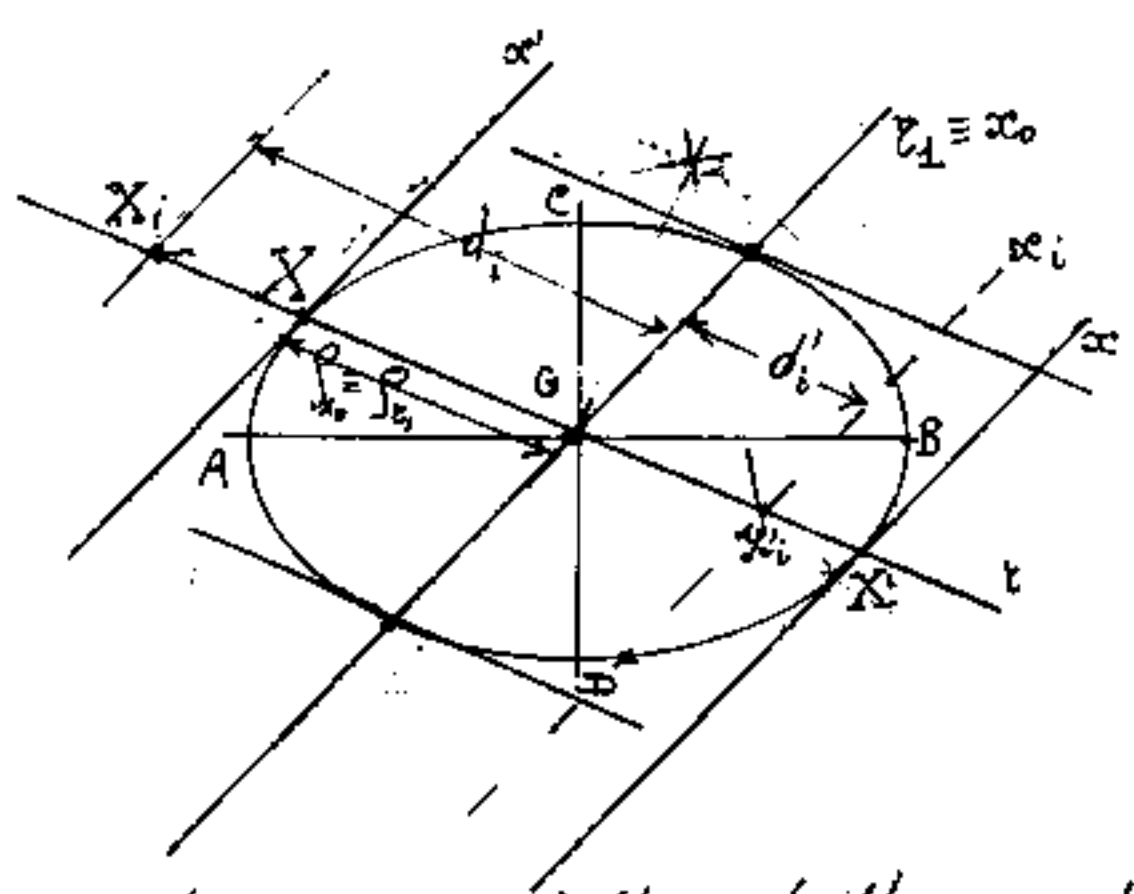
$$\boxed{(\tan \alpha)(\tan \beta) = \left(\frac{a^2}{b^2}\right)}$$

Nota formula dei diametri coniugati dell'ellisse, ove α e β sono gli angoli che formano col diametro minore dell'ellisse.

Se φ e φ' sono gli angoli che formano col diametro maggiore

avremo: $\boxed{(\tan \varphi)(\tan \varphi') = \frac{b^2}{a^2}}$

Consideriamo l'insieme delle rette "r" passanti per il baricentro G, ciascuna di esse incontra un insieme allineato di centri relativi X e di simmetrici X' giacenti sulle rispettive rette α ; inoltre, ciascuna "r" divide a metà le corde dell'ellisse parallele alle tangenti α in X' , ed α' in X . In particolare la corda r_1 passante per G parallela alla α ed α' , sui suoi estremi ha tangenti all'ellisse parallele alla r , cioè questa r , e la r sono diametri coniugati. Le direzioni r ed r , sono direzioni coniugate. Le distanze d_i e d'_i dal



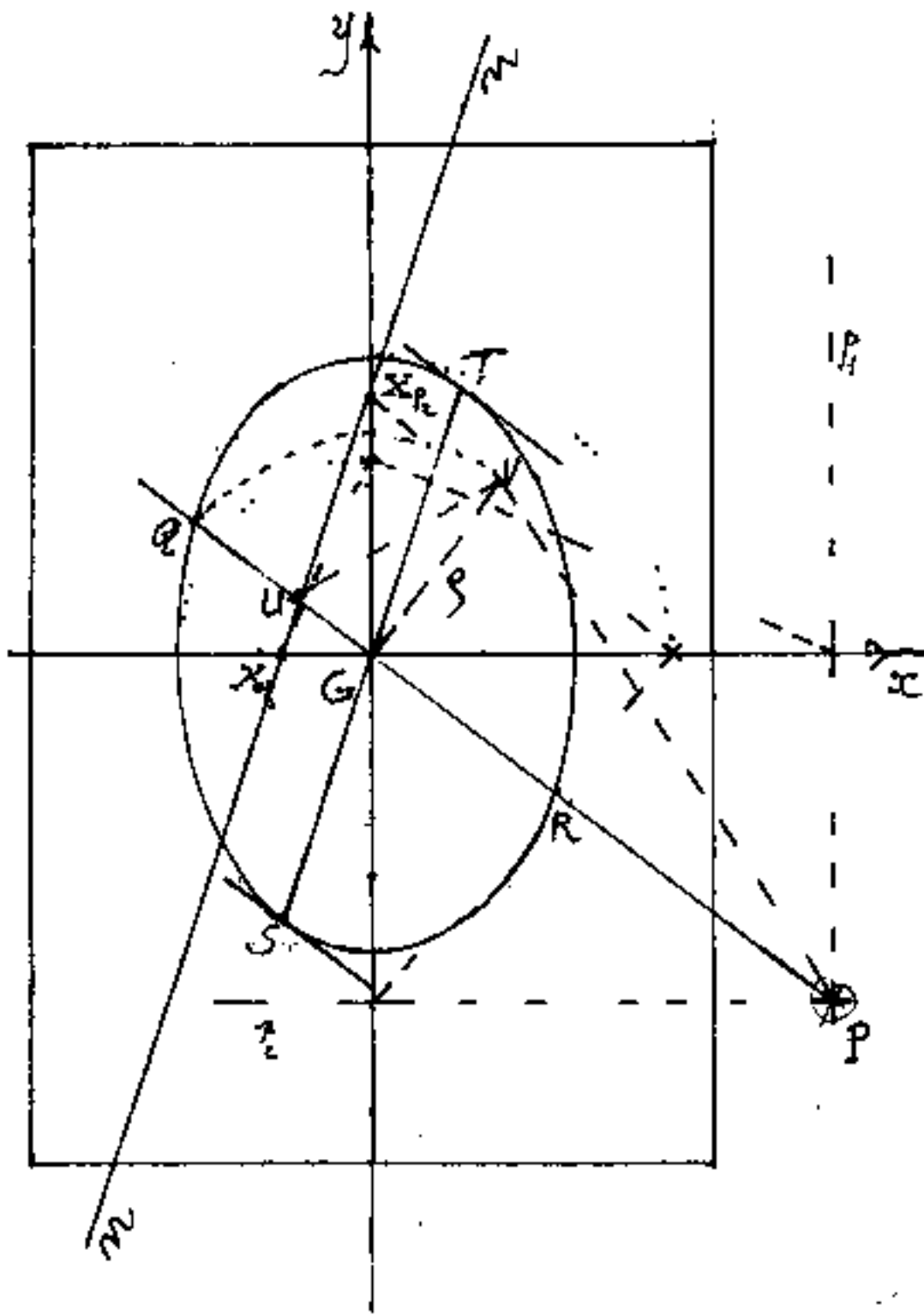
baricentro G. di X_i ed X'_i , misurate in direzione r sono tali che

$$d_i d'_i = f_{\alpha}^2 \equiv f_{\alpha'}^2$$

essendo: $f_{\alpha}^2 = \text{costante}$

anche i prodotti: $d_i d'_i = \text{costanti}$, cio' dimostra che la corrispondenza X_i, X'_i è una involuzione nella quale G è il centro.

Il fatto che le distanze d_i, d_i' , dal baricentro G , misurate da banda



opposta a G sulla retta di un diametro, il cui semidiametro (raggio d'inerzia del diametro coniugato), sia medio proporzionale fra d_i e d_i' ; Cioè in altre parole che le distanze: \overline{XG} e \overline{Gx} costituiscono le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa: \overline{Xx} .

di un triangolo rettangolo ove l'altezza relativa all'ipotenusa, ha il piede in G ed è ampia: $p =$ (semidiametro dell'ellisse giacente sulla retta su cui si misura) permettono una facile determinazione di x conoscendo X o viceversa.

P sia il centro di sollecitazione di un carico normale ad una sezione, la retta di cui è centro relativo, rispetto all'ellisse d'inerzia della sezione, è l'asse neutro intorno al

quale ruota la sezione per l'inflessione prodotta da P.

L'asse neutro $n-n$, può costruirsi in più modi: il più semplice è forse quello di considerare per P due rette p_1 e p_2 parallele ai diametri principali d'inerzia, l'unione dei due centri relativi X_{p_1} ed X_{p_2} è l'asse neutro.

Un'altro metodo è unire P con G e determinare il diametro \overline{QR} e quindi $\rho = \overline{QG}$, riportato ρ perpendicolarmente a \overline{PG} in $\overline{GV} = \rho$, si determina tracciando da V la normale a \overline{VP} , avremo:

$$\overline{UG} : \overline{GV} = \overline{GV} : \overline{GP}; \text{ cioè: } \boxed{\overline{UG} = \frac{\rho^2}{\overline{GP}}}$$

ma M è solo un punto di $n-n$ ed occorre conoscere la direzione del diametro coniugato \overline{ST} (coniugato di \overline{QR}) per avere la direzione della parallela $n-n$ passante per U .

Poiché una forza F agente in P da un momento $M = F \cdot \overline{PG}$ il raggio d'inerzia $\overline{GQ} = \rho$ è il raggio che dà il momento d'inerzia rispetto all'asse \overline{ST} , l'asse neutro $n-n$ è parallelo, ma spostato di \overline{UG} perché la F genera anche compressione oltreché inflessione.

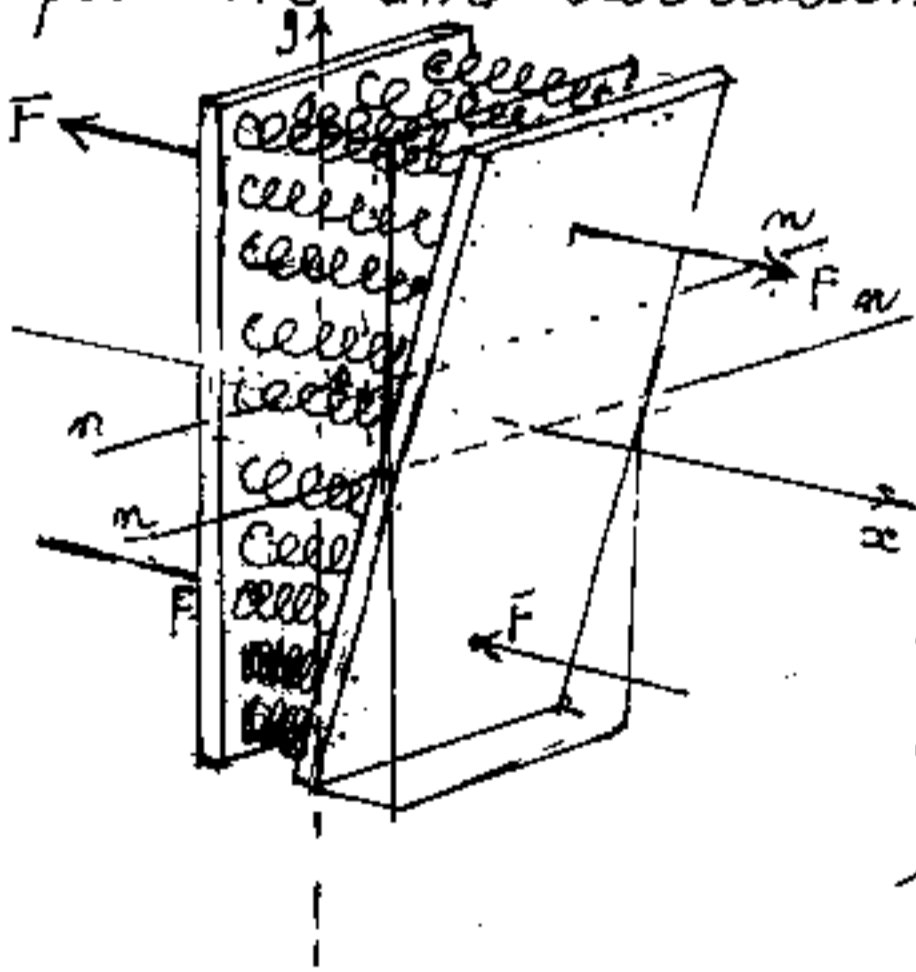
Il gioco della leva con la proporzionalità dei bracci, ci porta a considerare l'azione di un momento come l'azione di un peso o forza infinitesima, posta a distanza infinita: ($M = 0 \cdot \infty$). Ci è quindi familiare il momento statico proporzionale alla distanza (braccio).

Il momento d'inerzia proporzionale al quadrato delle distanze, può crearci dei dubbi.

Supponiamo di avere due tavole, per semplicità, rettangolari, affacciate fra loro, e collegate, ogni cm^2 con una molla (dinamometro) il cui accorciamento o allungamento sia proporzionale alla azione (forza) ricevuta.

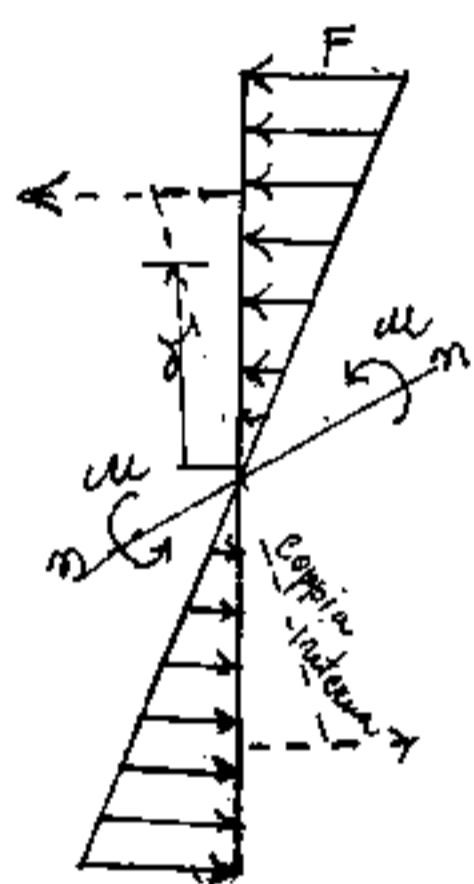
Le molle siano tutte uguali fra loro.

Supponiamo, con due coppie equilibrate di produrre una rotazione relativa φ fra le due



tavolette. Per semplicità consideriamo ferma una tavoletta, con gli assi di riferimento, se per l'asse neutro della tavoletta ruotata, facciamo passare un piano parallelo alla

tavoletta fissa, notiamo che le deformazioni delle molle sono proporzionali alla distanza dall'asse neutro. Poiché le deformazioni sono anche proporzionali alle loro azioni (forze), detto K un coefficiente di proporzionalità e δ la distanza dall'asse neutro, le forze $F = K\delta$.



Notiamo che le azioni delle molle generano sull'asse neutro dei momenti nello stesso verso, (siauo esse compresse o tese).

Il momento provocato da ciascuna molla distante δ dall'asse neutro è $M = F\delta$

e sostituendo F , si ha $M = K\delta^2$

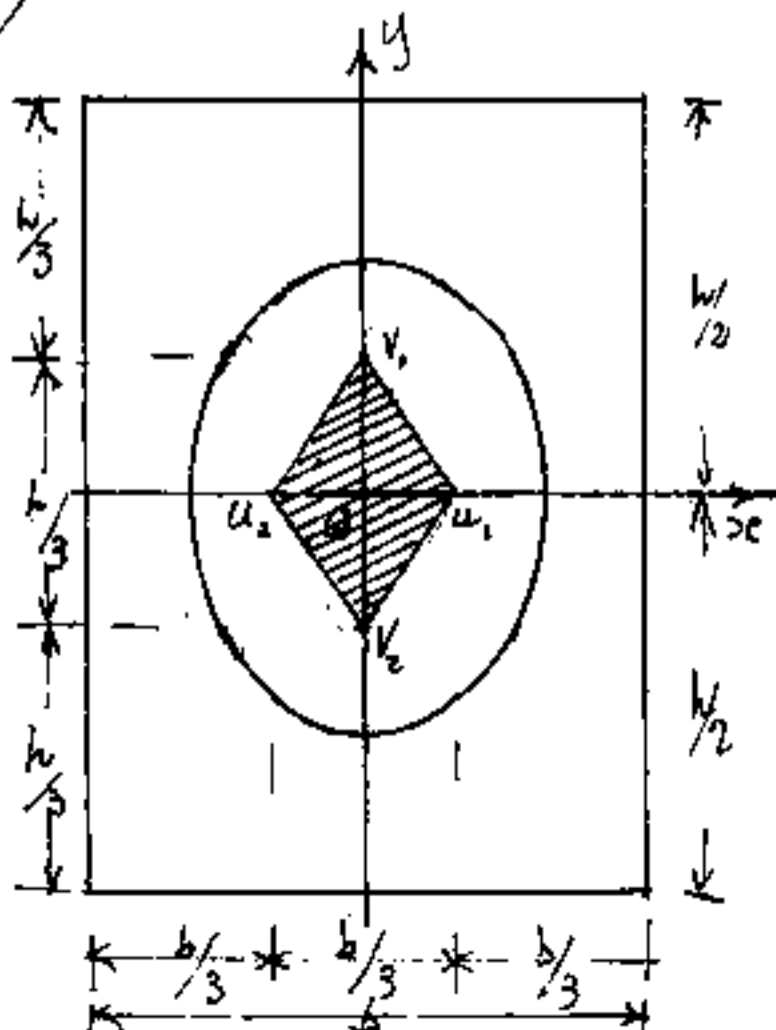
Se alle molle sostituiamo le fibre normali alla sezione, e osserviamo che l'azione delle fibre è proporzionale alla sezione di area a distanza δ , il problema del quadrato delle distanze è risolto perché le forze sono proporzionali a δ , i bracci relativi sono proporzionali a δ cioè il momento relativo interno è proporzionale ai quadrati di δ , e J è l'impedimento ad M .

Nocciolo centrale d'inerzia

È noto che la muratura non resiste a trazione, quindi è importantissimo che "l'asse neutro, (che separa la zona tesa dalla zona compressa) sia fuori della sezione muraria, cioè il centro di sollecitazione a compressione sia interno ad una zona di sezione tale che i rispettivi assi neutri sia esterni, od al più, tangenti non secanti la sezione. Tale zona è detta nocciolo centrale d'inerzia.

Si definisce il nocciolo centrale d'inerzia come: "Il luogo dei punti antipolo, nell'antipolarità determinata dall'ellisse centrale d'inerzia, di tutte le rette:

- tangenti non secanti la sezione, (definito come perimetro)
- esterne alla sezione; (definito come area)"

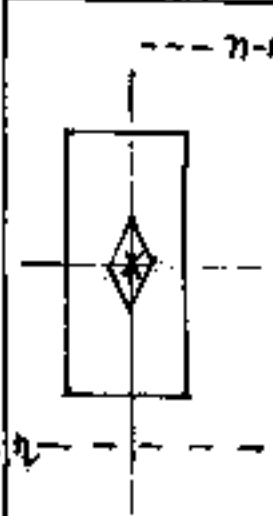
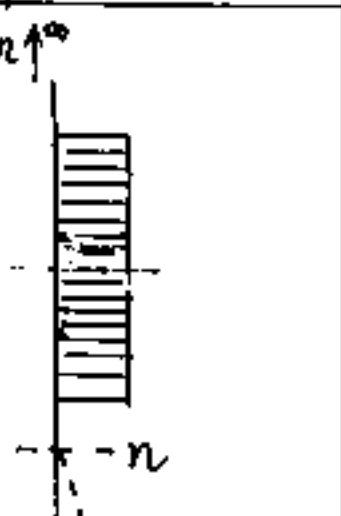

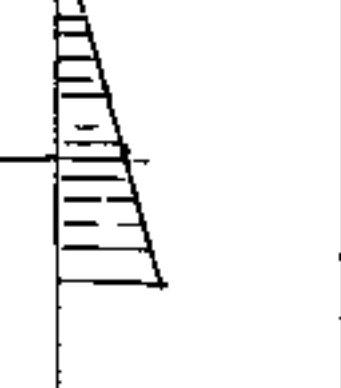
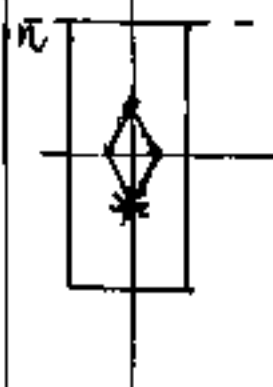
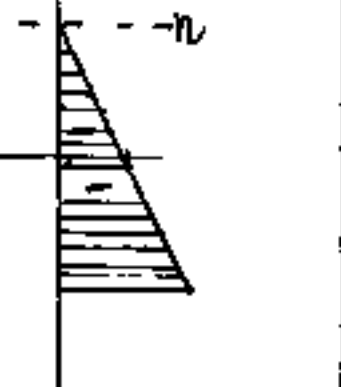
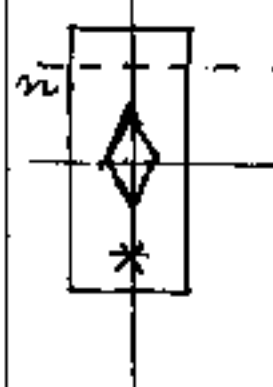
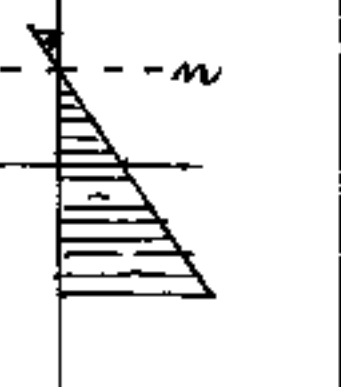
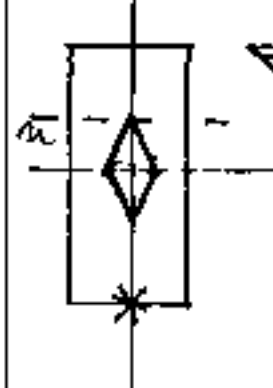
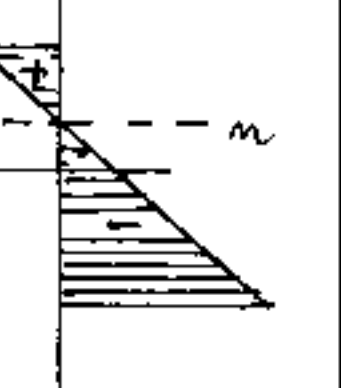
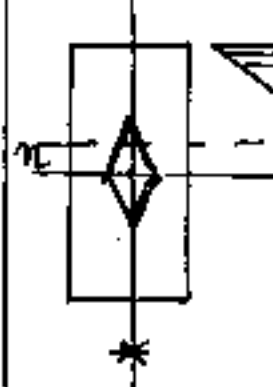
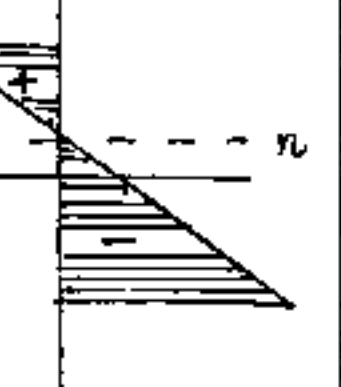
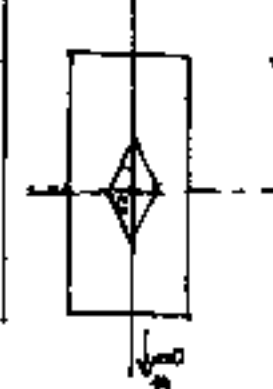



Per il rettangolo gli antichi dicevano: "Il terzo medio" quella parte ove concentrare il carico senza che si verificasse trazione. ($J_{xx} = \frac{bh^3}{12}$; $J_{yy} = \frac{hb^3}{12}$)

$$J_x = S_x = S_x \cdot \frac{h}{2}; \quad I_x^2 = \frac{h^2}{12}; \quad S_x = \frac{h^2/12}{h/2}$$
$$S_x = \overline{GV}_1 = \frac{h}{6} \quad \text{da cui: } \overline{V_1V_2} = \frac{h}{3}$$

analogamente $\overline{U_1U_2} = \frac{b}{3}$

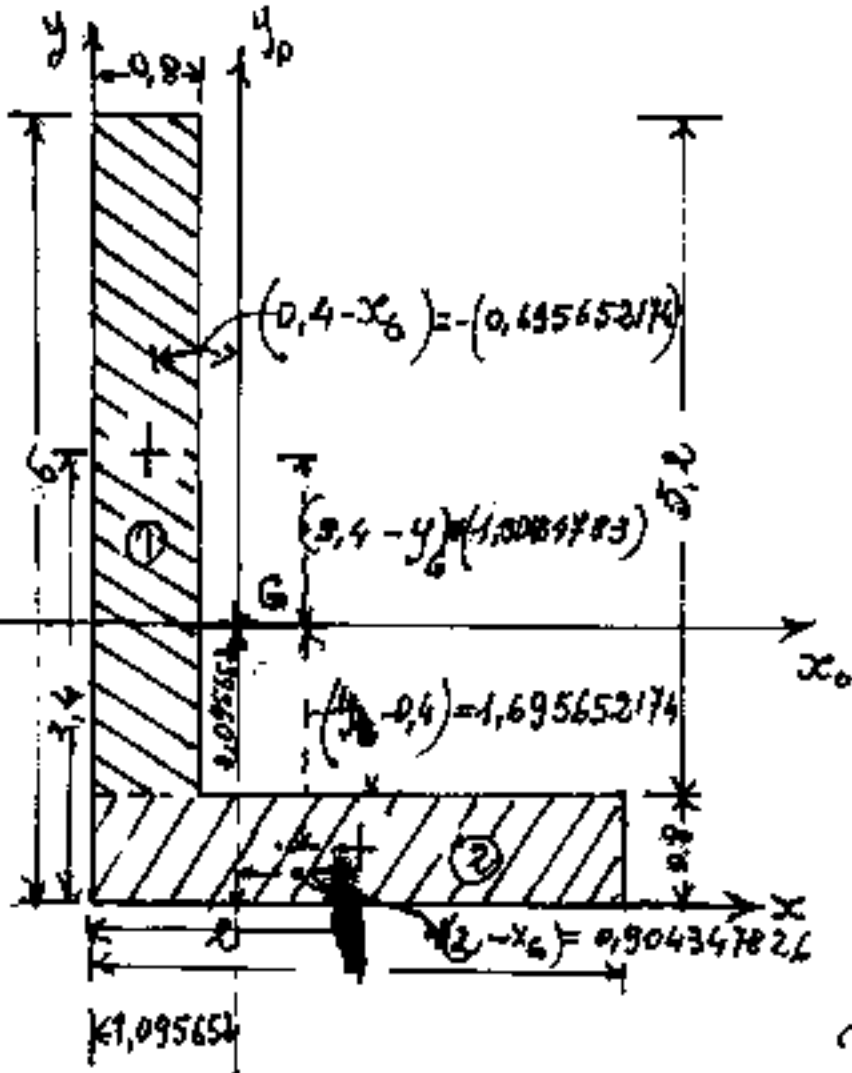
Tavola degli assi neutri per sezioni rettangolari

Schema sezione	diagramma tensioni	Centro di carico *	asse neutro \bar{m} - - - \bar{m}	NOTE	
		Nel baricentro	all'infinito	} sezioni solo compresse	
		interno al nocciolo	esterno alla sezione		
		al bordo del nocciolo	al bordo della sezione		
		interno alla sezione, esterno al nocciolo	esterno al nocciolo interno alla sezione		
		al bordo della sezione	al bordo del nocciolo		
		esterno alla sezione	interno al nocciolo		
		all'infinito con carico infinito. Sino. -	nel baricentro	è un momento Puro $\mu = 0.00$	

Esercizio di statica

Data la sezione di profilato ad L in figura calcolare i diametri principali d'inerzia e disegnare in scala il cerchio di Mohr orientato sulla figura della

sezione.



Risoluzione

I) Calcolo del baricentro

si divide in due rettangoli di area

$$(5,2 \times 0,8) + (4 \times 0,8) = A = \underline{7,36}$$
$$(4,16) + (3,2)$$

$$Sx = (4,16)(3,4) + (3,2)(0,4) = 15,424$$

$$y_G = \frac{15,424}{7,36} = 2,095652$$

$$Sy = (4,16)(0,4) + (3,2)(2) = 8,064$$

$$x_G = \frac{8,064}{7,36} = 1,095652$$

Calcolo dei momenti d'inerzia (assiali e centrifughi)

$$J_{x_0 x_0} = \left[\frac{(0,8)(5,2)^3}{12} + (4,16)(1,304347826)^2 \right] + \left[\frac{(4)(0,8)^3}{12} + (3,2)(1,695652174)^2 \right] =$$

$$J_{x_0 x_0} = 25,8227942$$

$$J_{y_0 y_0} = \left[\frac{(5,2)(0,8)^3}{12} + (4,16)(0,695652174)^2 \right] + \left[\frac{(4)(0,8)^3}{12} + (3,2)(0,904347826)^2 \right] =$$

$$J_{y_0 y_0} = 9,118794203$$

$$J_{x_0 y_0} = (4,16)(-0,695652174)(1,304347826) + (3,2)(0,904347826)(-1,695652174) =$$

$$J_{x_0 y_0} = -8,681739131$$

Calcolo degli assi principali d'inerzia.

$$\left(\frac{J_{x_0x_0} + J_{y_0y_0}}{2}\right) = \frac{(25,82279415) + (9,11879420)}{2} = \underline{\underline{17,47079417}}$$

$$\left(\frac{J_{x_0x_0} - J_{y_0y_0}}{2}\right) = \frac{(25,82279415) - (9,11879420)}{2} = \underline{\underline{8,352}}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{J_{x_0y_0}}{(J_{x_0x_0} - J_{y_0y_0})/2} = \frac{-8,681739131}{8,352} = -1,03948026$$

$$(2\alpha) = -46^{\circ},1089933 ; \quad \alpha^{\circ} = -23^{\circ},054496$$

$$\underline{\underline{\alpha^{\circ} = 23^{\circ} 03' 16",19}} \approx (23^{\circ})$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{J_{x_0x_0} - J_{y_0y_0}}{2}\right)^2 + (J_{x_0y_0})^2} = \sqrt{(8,352)^2 + (8,681739131)^2} = \underline{\underline{12,046929}}$$

$$J_{\xi\xi} = \left(\frac{J_{x_0x_0} + J_{y_0y_0}}{2}\right) + R = 17,47079417 + 12,046929 = \underline{\underline{29,5177232}}$$

$$J_{\eta\eta} = \left(\frac{J_{x_0x_0} + J_{y_0y_0}}{2}\right) - R = 17,47079417 - 12,046929 = \underline{\underline{5,4238652}}$$

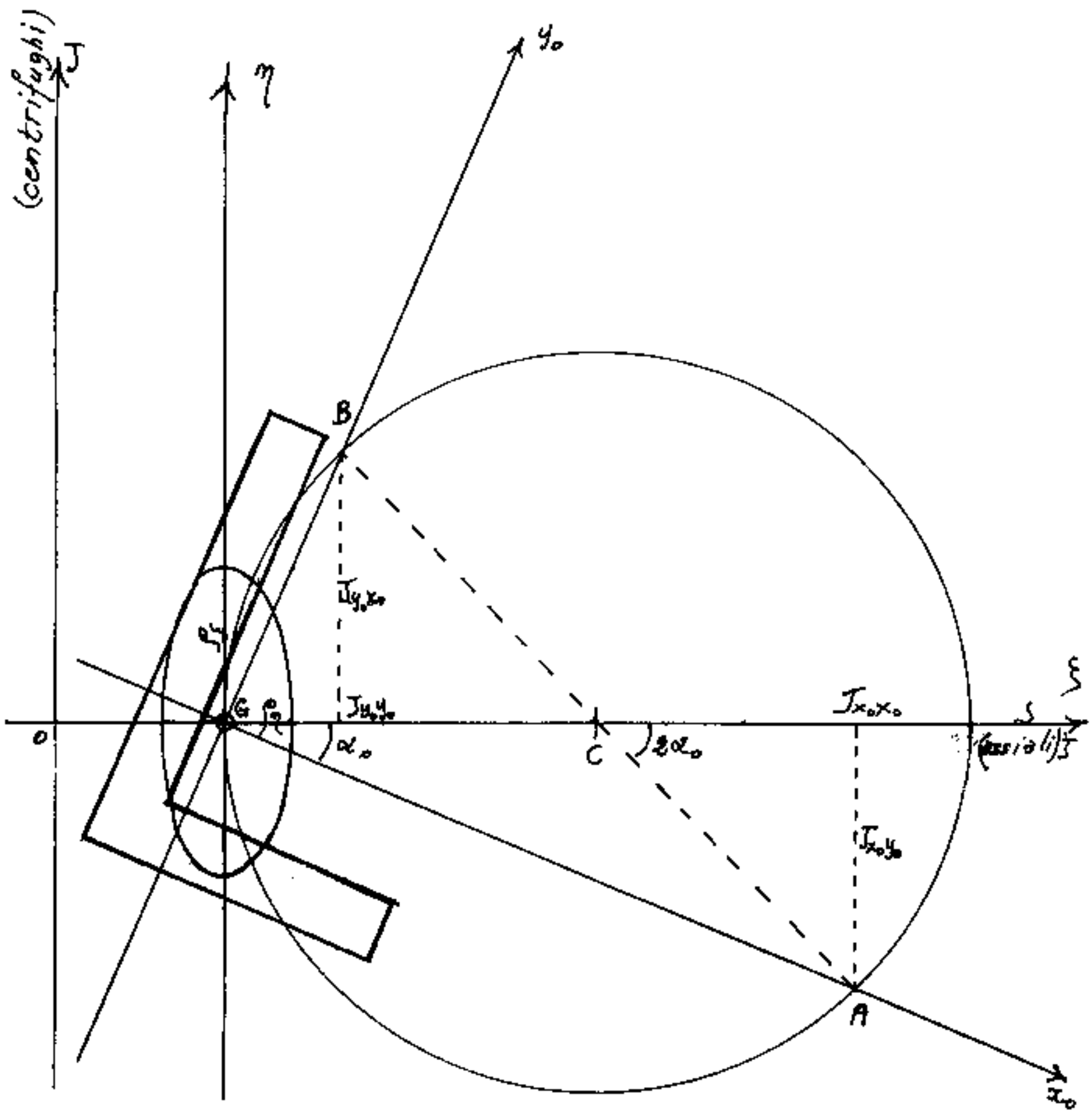
Calcolo dei raggi girotoni d'inerzia

$$\rho_{\xi} = \sqrt{J_{\xi\xi}/A} = \sqrt{\frac{29,5177232}{7,36}} = \underline{\underline{2,00263831}}$$

$$\rho_{\eta} = \sqrt{J_{\eta\eta}/A} = \sqrt{\frac{5,4238652}{7,36}} = \underline{\underline{0,85845105}}$$

Costruzione grafica del cerchio di Mohr.

Scala J : $cm^1 = 2.5 cm^4$; Scala ellisse e figura 1:1.



Preso un sistema di assi ortogonali di centro O , riportiamo in ascisse i momenti d'inerzia assiali: $I_{x_0x_0}$; $I_{y_0y_0}$ ed in ordinate i relativi momenti d'inerzia centrifughi: $I_{x_0y_0}$; $I_{y_0x_0}$; troviamo i punti A e B che uniti determinano C . Con centro in C e raggio $\overline{AC} = \overline{CB}$ troviamo i momenti d'inerzia principali $I_{\eta\eta}$ e $I_{\zeta\zeta}$.

La statica

Per affrontare un problema di statica, o di scienza delle costruzioni, occorre seguire una certa sequenza di operazioni, che va rispettata e che, ormai diversi anni fa, i miei allievi chiamarono: "Corano" per dare l'idea di una legge assoluta. Quindi schematizzata una struttura, la sequenza è la seguente:

^{7unto}
^{zero}) Mettere le lettere, le dimensioni, ed i parametri atti ad individuare le sezioni delle singole aste.

- 1) Vedere se la struttura è isostatica, iperstatica o labile, sia per vincoli esterni, sia per vincoli interni. Vedere se la struttura è scomponibile in strutture semplici ed individuare le strutture portanti, le strutture portate e le portate-portanti, individuando ed evidenziando le strutture che stanno in piedi da sole, direttamente al suolo, senza appoggiarsi ad altre strutture. Vedere i pendoli (o bielle) gli pseudopendoli, e le strutture (anche complesse) che funzionano come pendoli. Vedere se la struttura è

anomala o staticamente indeterminata.

2) Se labile ed i carichi non impegnano la labilità, si calcola come isostatica; se i carichi impegnano la labilità il calcolo si effettua tenendo conto delle forze dinamiche, (ciò non fa parte del presente programma).

3) Se iperstatica, si tolgono i vincoli sovrabbondanti e si sostituiscono con le loro azioni, (incognite iperstatiche) che determiniamo con uno dei metodi della s.d.e., (per es. Lavori virtuali, equazioni di congruenza ed elasticità, equazioni dei tre momenti, linea elastica, Mohr, teoremi vari sul lavoro ecc) Con ciò la struttura è ridotta ad isostatica perché le incognite iperstatiche sono divenute carichi esterni.

4) Se isostatica, o equiparabile a isostatica, o ridotta ad isostatica, si calcolano le reazioni vincolari, riducendo così la struttura in equilibrio nello spazio:
 $\sum F = 0$; $\sum M = 0$ (equazioni canoniche della statica)

5) Si calcolano le sollecitazioni: N, T, M, M_t ,
e si tracciano i relativi diagrammi

6) Dai diagrammi tracciati si individuano le
sezioni più sollecitate ed in esse si calco-
lano le tensioni σ e τ , (σ = tensione normale),
(τ = tensione tangenziale): $\sigma = \frac{N}{A}$; $\sigma = \frac{My}{J}$; $\tau = \frac{TS}{Jb}$; $\tau = \frac{M_t x_i}{J_p}$
 $\tau = \frac{M_t y_i}{J_p}$; e si tracciano i relativi diagrammi

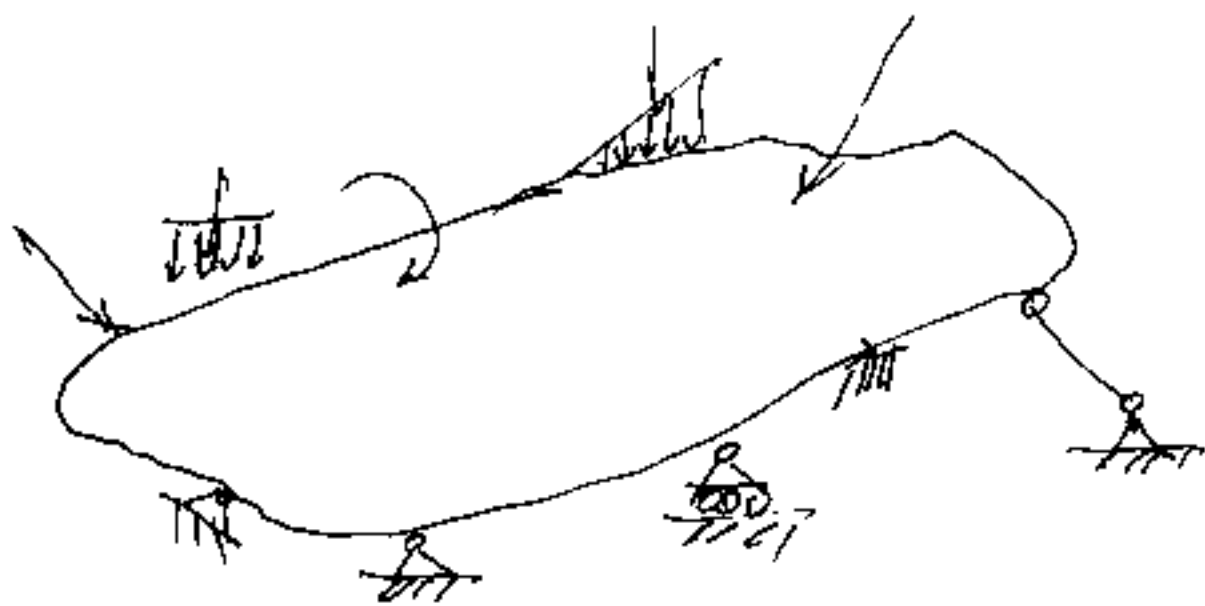
7) Dai diagrammi complessivi delle tensioni
 σ e τ si individuano i punti della sezione
che sono più impegnati e per essi si traccia
il cerchio di Mohr.

8) Dal cerchio di Mohr si individuano le
direzioni principali e le tensioni principali
che agiscono in quelle direzioni

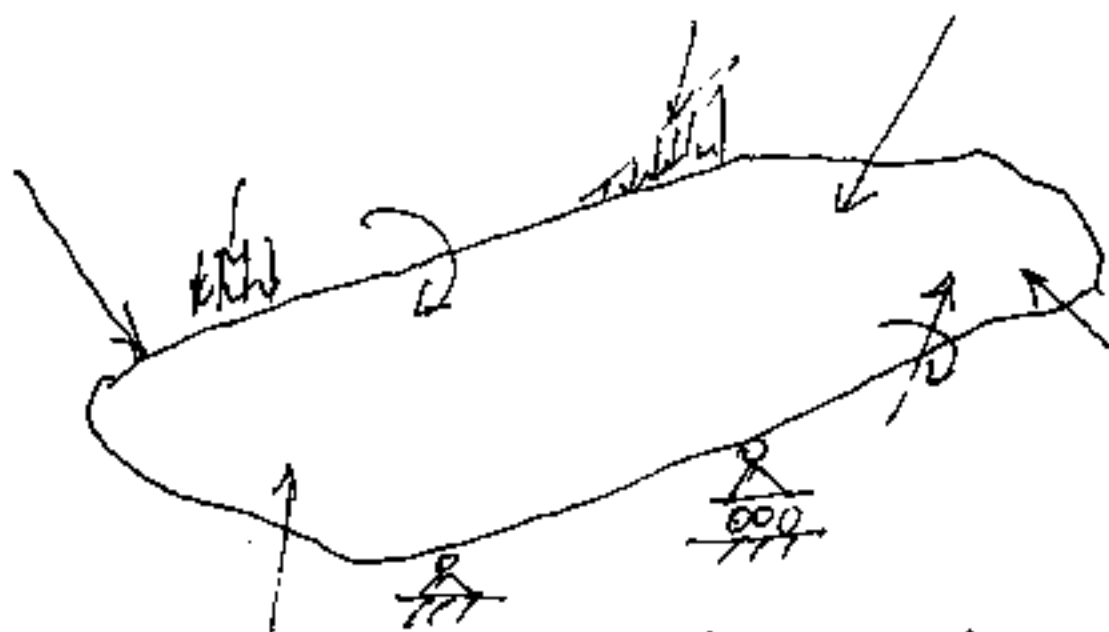
9) Con uno dei criteri di sicurezza si ve-
rifica la struttura.

10) Si calcolano le deformazioni, se non sono già
state calcolate al punto 3, per verificare l'idoneità.

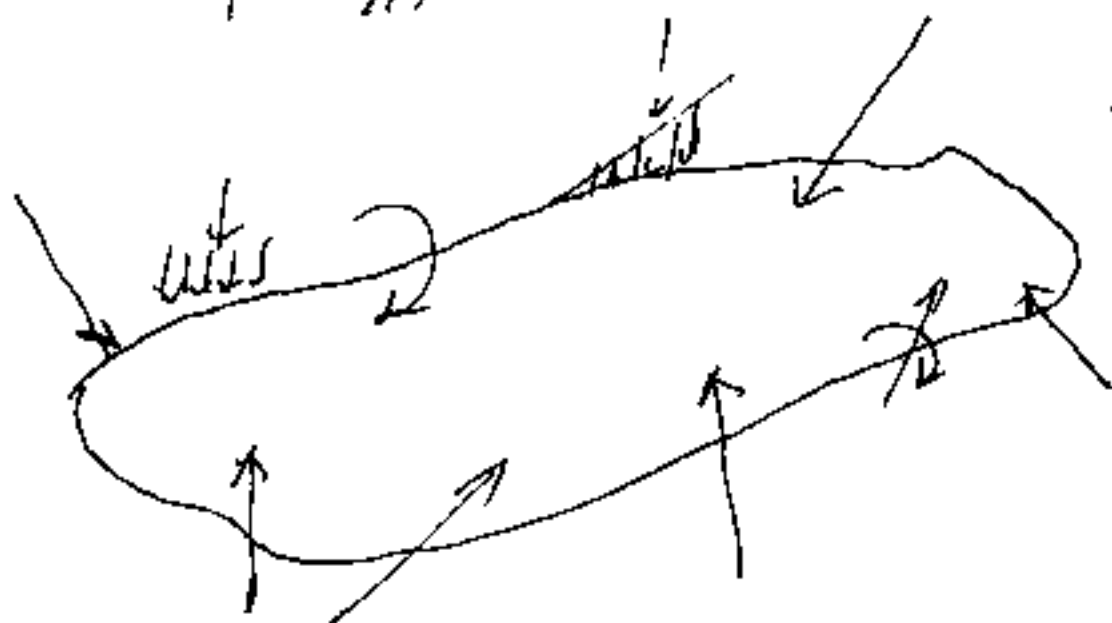
Sintesi delle operazioni



Struttura iperstat.



Struttura isostatica



in equilibrio nello spazio

$$\sum F = 0$$

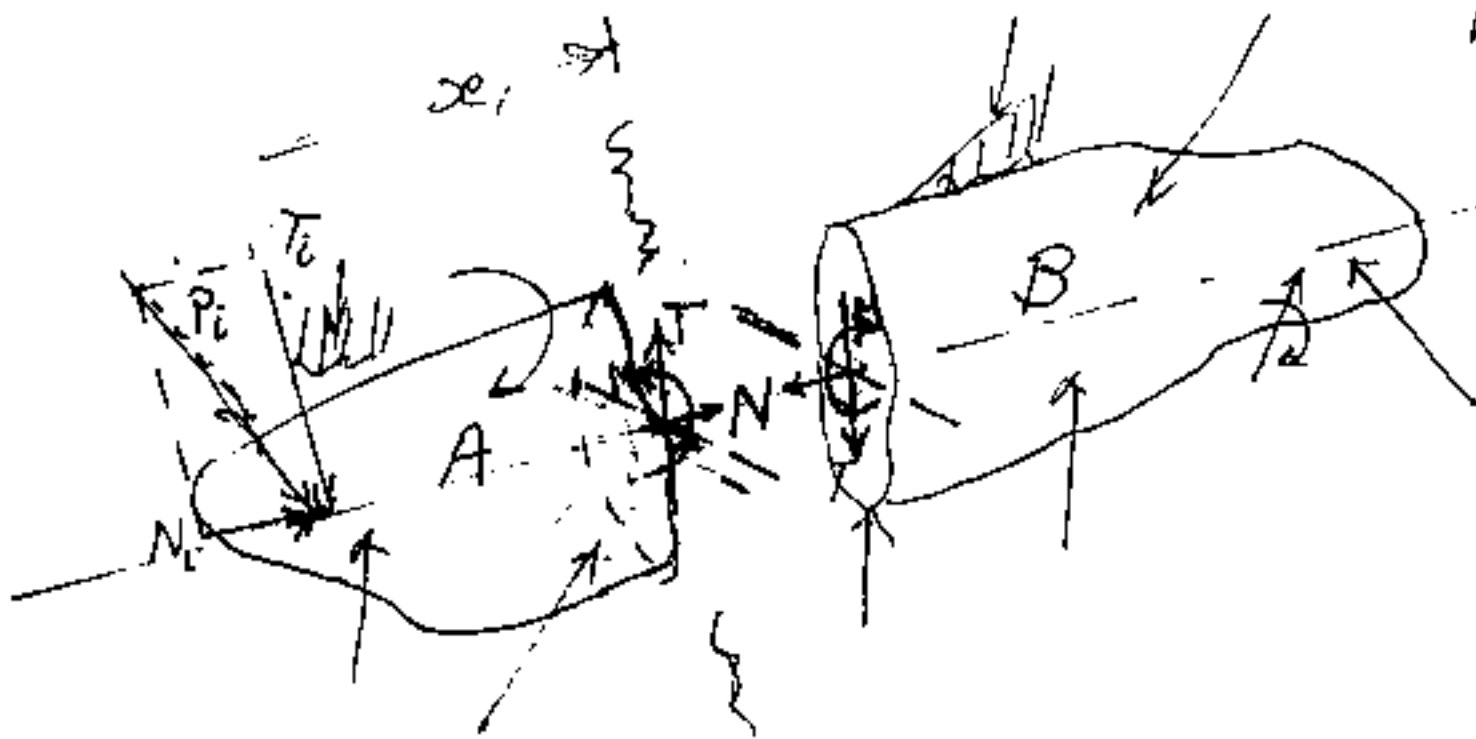
$$\sum M = 0$$

sezioniamo in due

parti la struttura ed indichiamo le azioni mutue nella sezione, (sollecitazioni) che ne impediscono i movimenti relativi di allontanamento, o avvicinamento, di slittamento o di rotazione relativa.

Le sollecitazioni

si calcolano o per forze a destra o per forze a sinistra della sezione, toma lo stesso valore e lo stesso segno.



$N =$ Sforzo Normale, positivo se di trazione negativo se di compressione. Si portano i carichi concentrati e le risultanti dei distribuiti sull'asse e si scompongono in N_i e T_i .

$$N = \sum_{i=1}^n N_i$$

$T =$ Sforzo di Taglio positivo se la parte a destra della sezione diviene più bassa per forze da sinistra.



Il diagramma T si traccia riportando nel loro verso le T_i partendo dall'estremo sinistra

$$T = \sum_{i=1}^n T_i$$

$M =$ Momento flettente positivo se tende le fibre inferiori della trave o interne al telaio.

$$M = \sum_{i=1}^n T_i \cdot x_i$$

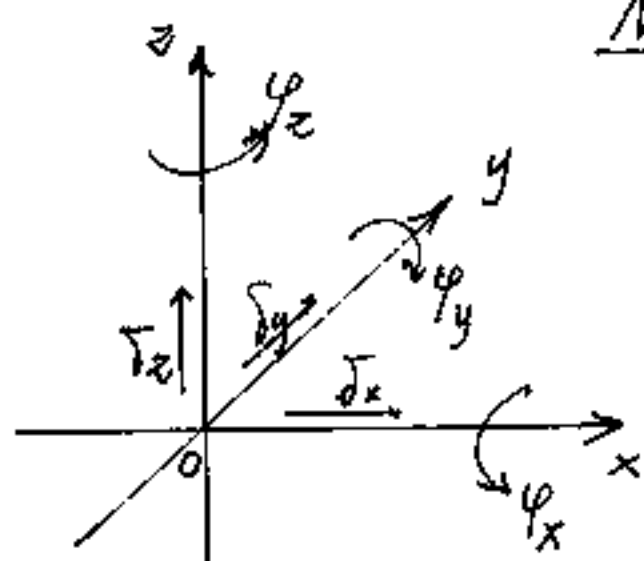
Il diagramma M si disegna sempre dalla parte delle fibre tese.

$M_t =$ Momento torcente positivo se è come lo svitamento della vite destrorsa

se b_i è il braccio della $P_i // T_i$ fuori dell'asse

$$M_t = \sum_{i=1}^n P_i b_i$$

Gradi di libertà e gradi di vincolo



Nello spazio tridimensionale

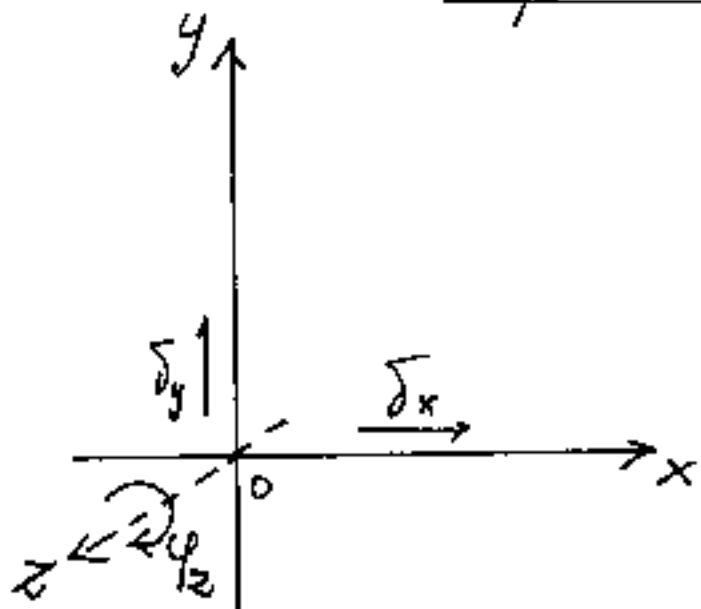
Dati tre assi cartesiani coordinati i movimenti di un corpo possono ridursi a tre traslazioni: δ_x ; δ_y ; δ_z e tre

rotazioni intorno agli assi: φ_x ; φ_y ; φ_z .
Quindi nello spazio tridimensionale i gradi di libertà sono sei e quindi occorrono sei gradi di vincolo per equilibrarli.

Si potrebbe obiettare: "lo spostamento δ è uno solo, come una sola è la rotazione φ ; però per determinare la direzione dello spostamento δ occorrono i coseni direttori (ne bastano due, il terzo è ricavabile da $\cos \delta = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}$) lo stesso vale per l'asse intorno a cui ruota e le grandezze ritornano 6.

Però lo studio delle strutture spaziali è piuttosto complesso e, per quanto possibile, si cerca di ridurre il complesso ad uno o più sistemi piani. (spazio bidimensionale)

Spazio bidimensionale (sistemi piani)

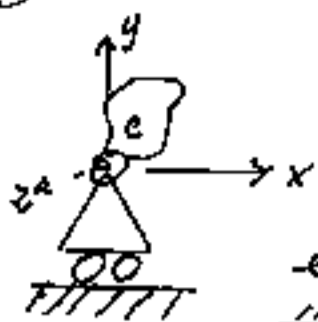


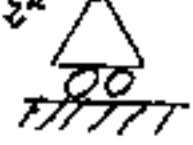

Gli assi cartesiani si riducono a due: x ed y , ma un corpo di dimensioni finite sul piano, mentre è libero di traslare linearmente δ_x , δ_y , non può ruotare intorno ad x od intorno ad y senza staccarsi dal piano xy , mentre può ruotare intorno ad assi paralleli a z cioè φ_z . Quindi nel piano i gradi di libertà sono tre: δ_x ; δ_y ; φ_z ; ed occorrono tre gradi di vincolo per equilibrarli.

Esaminiamo ora, nel dettaglio i vincoli piani ed il loro grado di vincolo che equivale al grado di libertà impedite.

Vincoli di grado uno

Il carrello



Il carrello:  è un vincolo bilatero ed andrebbe disegnato:  in quanto il corpo 'c' è impedito anche a sollevarsi, cioè:

$$\left. \begin{array}{l} \delta x = \text{libero} \\ \pm \delta y = \text{vincolato} \\ \delta z = \text{libero} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{due gradi di libertà} \\ \text{un grado di vincolo.} \end{array}$$

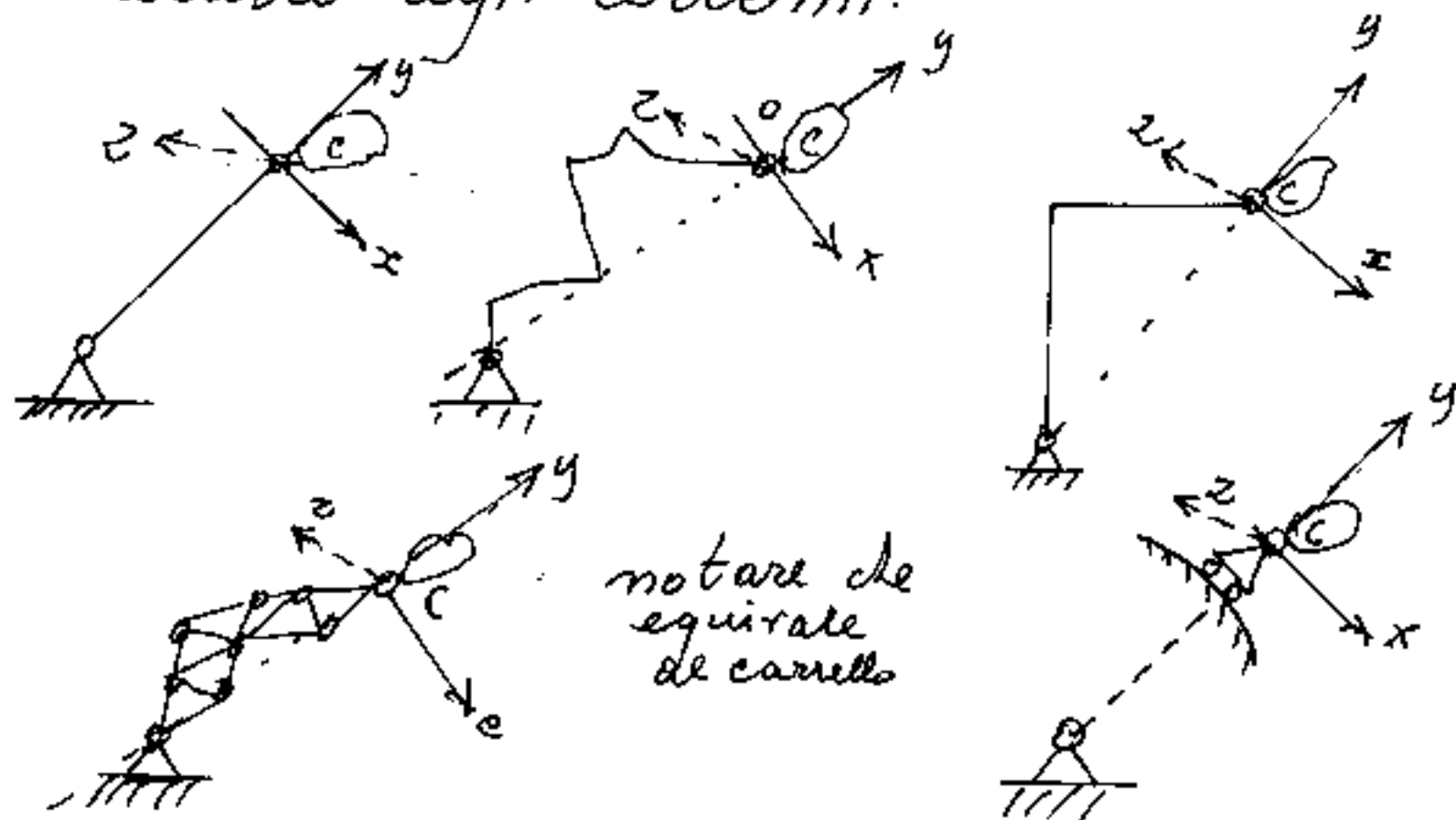
Il carrello reagisce sempre in direzione normale al piano di scorrimento.

Tre carrelli possono vincolare un corpo nel piano purché le loro rette di azione non abbiano lo stesso punto comune, (come I) perché in tal caso il punto comune sarebbe un centro istantaneo di rotazione ed il corpo avrebbe, almeno per piccoli angoli, la libertà di ruotare intorno ad esso. — Come vedremo una forza non è scomponibile secondo tre direzioni concorrenti nello stesso punto.



Pendolo o biella

Dicesi pendolo (o biella) un'asta o struttura scarica lungo l'asta (che può essere di forma qualsiasi) cernierata agli estremi:



$\delta_x = \text{libero}$
 $\delta_y = \text{vincolato}$
 $\varphi_z = \text{libero}$

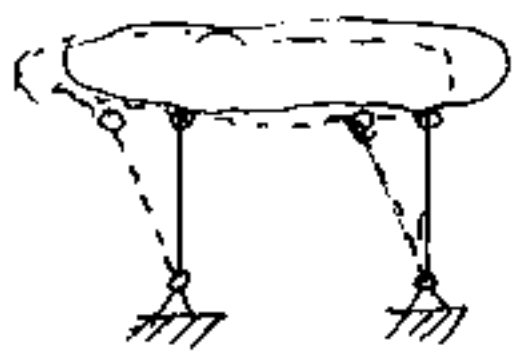
} due gradi di libertà
un grado di vincolo

Il pendolo (o biella) reagisce sempre secondo la congiungente le cerniere estreme. Ciò non avverrebbe se fosse carico.

Come già detto per il carrello occorrono tre vincoli di grado uno, le cui rette di azione non concorrano in uno stesso punto per vincolare un corpo.

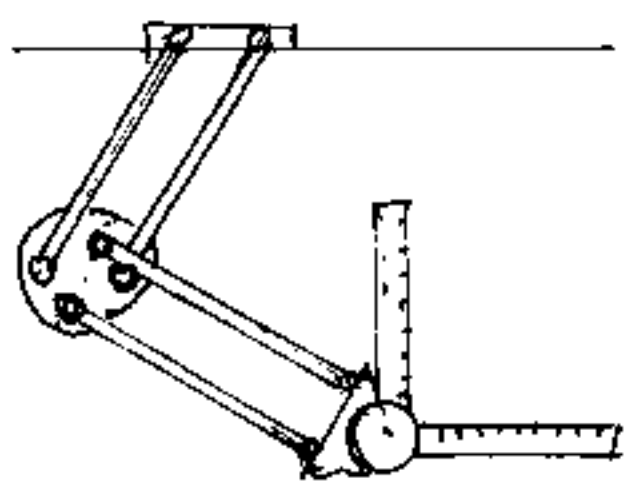
Se vi concorrono i vincoli si dicono irrazionalmente distribuiti.

Notiamo che se due pendoli della stessa lunghezza e paralleli vincolano un corpo,



poiché le loro rette di azione si incontrano all'infinito, il corpo trasla senza ruotare; cioè le traslazioni sarebbero rotazioni con raggio infinitamente grande.

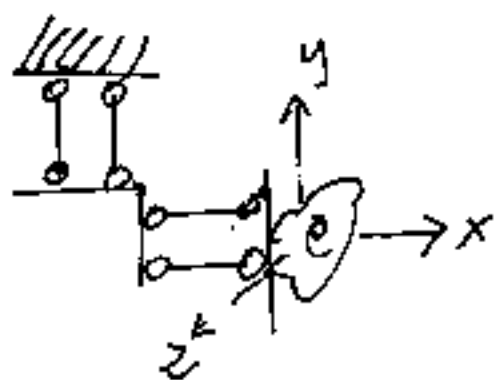
Ma questa osservazione portò alla costruzione dei tecnografi ove la messa in opera di



due doppi pendoli (bipendoli) consentiva di traslare le righe o stecche da disegno sia orizzontalmente che verticalmente restando

parallele a se stesse. (non ruotano se non lo vogliamo noi).

Nacque così il vincolo a doppio bipendolo



ove:

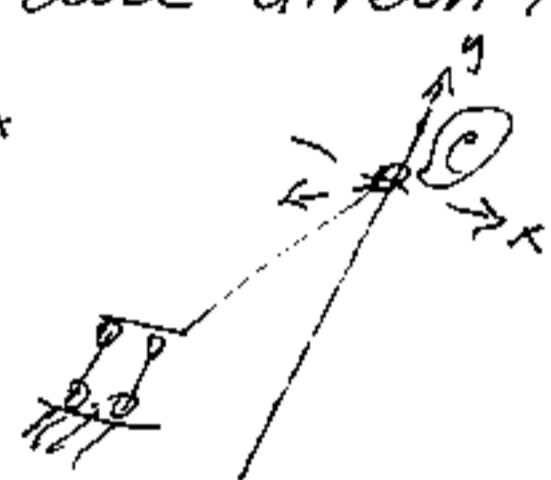
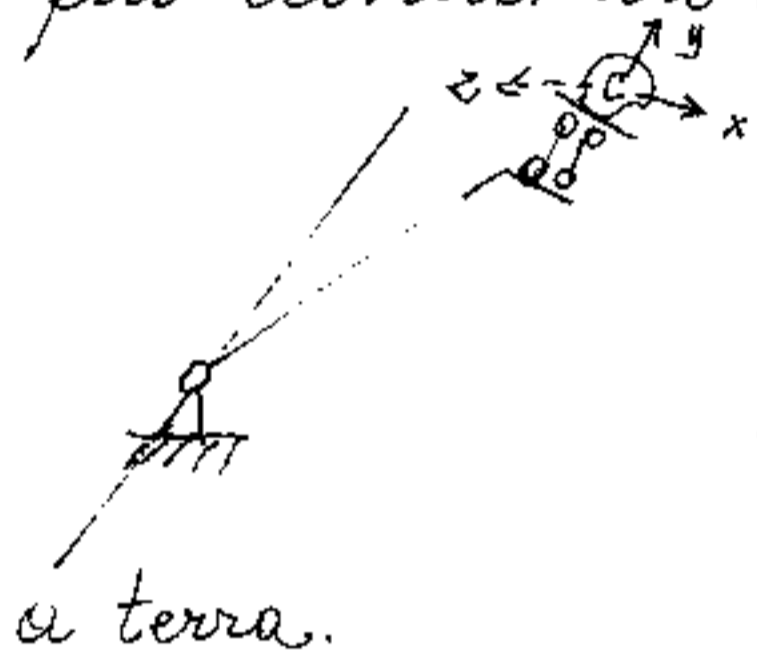
$\delta x = \text{libero}$
 $\delta y = \text{libero}$
 $\psi_z = \text{vincolato}$

due gradi di libertà
 un grado di vincolo.

Il doppio bipendolo reagisce solo ai momenti.

Lo pseudopendolo

C'è un altro vincolo di grado uno che utilizza il doppio pendolo (bipendolo) ed è una specie di pendolo ove una delle due cerniere estreme è andata all'infinito, lo abbiamo chiamato pseudopendolo, e può trovarsi in due diversi modi applicato

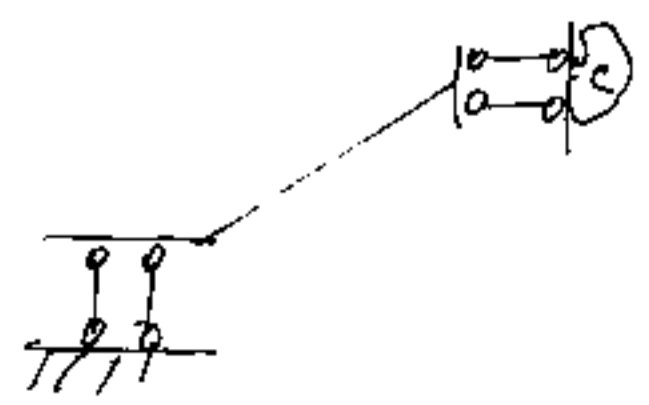


cioè con la cerniera a terra, oppure col bipendolo

a terra.

Come per i pendoli l'asta deve essere scarica e la sua reazione è la congiungente le cerniere, cioè passa per la cerniera reale ed ha come retta di azione la parallela alla direzione del bipendolo.

Se agli estremi dell'asta vi sono due bipendoli si ritorna al doppio bipendolo che reagisce solo ai momenti



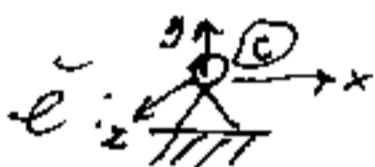
Vincoli di grado due.

Due vincoli di grado uno formano un vincolo di grado due (reale o fittizio), per esempio due pendoli che concorrono nella stessa cerniera su un corpo, equivalgono ad una cerniera reale (altrimenti ad una cerniera fittizia)

Le Cerniere



il simbolo classico di cerniera



è: se la cerniera è diretta-

mente a terra si usa il simbolo: se invece la cerniera si appoggia su un'altra struttura si usa il simbolo



$\delta_x =$ vincolato

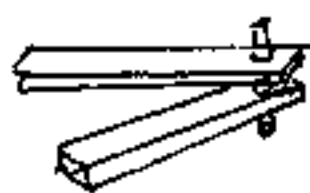
$\delta_y =$ vincolato

$\varphi_z =$ libero

due gradi di vincolo
un grado di libertà

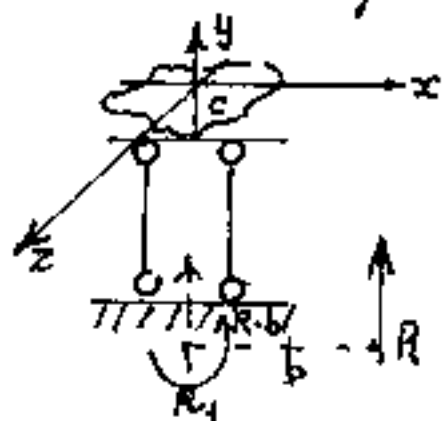
La reazione e l'azione hanno la retta passante per la cerniera, se così non fosse, la distanza sarebbe il braccio di un momento al quale la cerniera non può resistere.

due aste forate sullo stesso spinotto è una cerniera



Le aste di un compasso, le due lame delle forbici, le aste degli occhiali, sono vincolate a cerniera

Il bipendolo



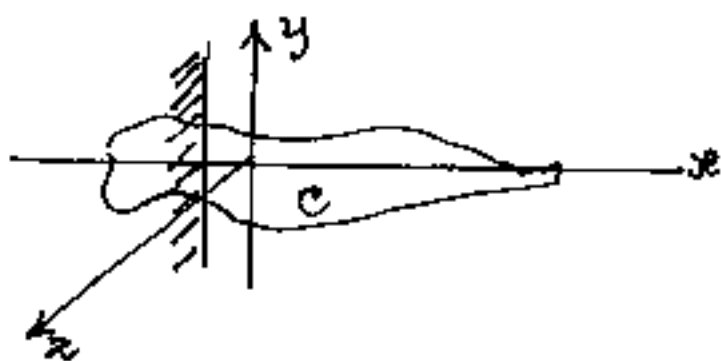
$\delta_x = \text{libero}$
 $\delta_y = \text{vincolato}$
 $\varphi_z = \text{vincolato}$

} Un grado di libertà, due gradi di vincolo

Il doppio pendolo reagisce a forze aventi la zetta d'azione parallela ai due pendoli, cioè la reazione può essere esterna, ma può essere riportata sul vincolo aggiungendo il momento.

Vincoli di grado tre

L'incastro

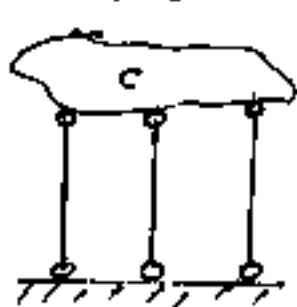
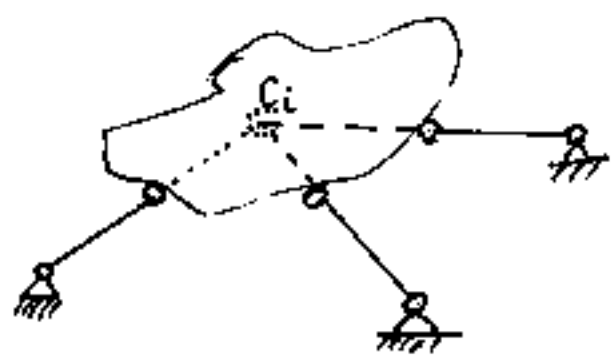


δ_x
 δ_y
 φ_z

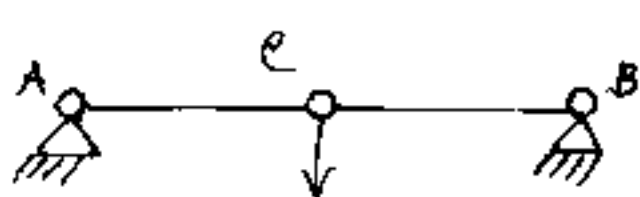
} vincolati

Vincoli irrazionalmente distribuiti

Si hanno vincoli irrazionalmente distribuiti quando i vincoli di grado 1 formano cerniere ideali in campo reale o all'infinito, cioè il corpo può rotare intorno C_i , o traslare se $C_i \rightarrow \infty$.



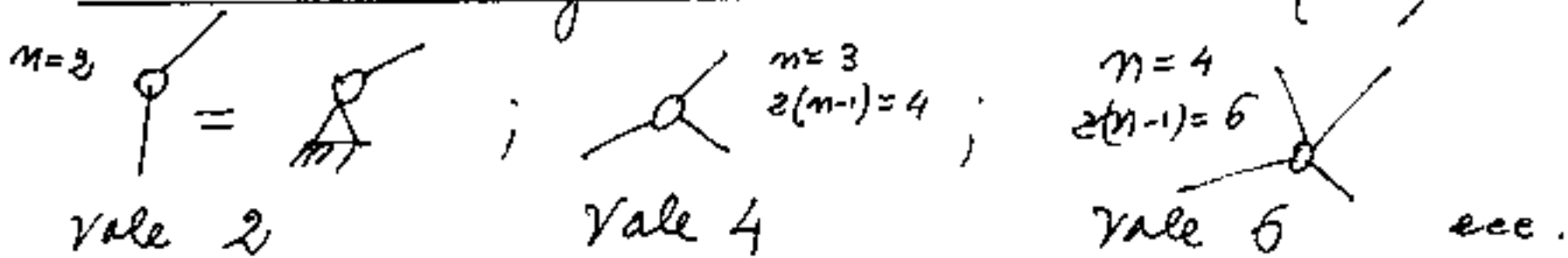
strutture labili, ove
 $C_i = \text{centro istantaneo di rotazione}$.



Anche l'arco a tre cerniere, se ha le cerniere allineate diventa una struttura isostatica, staticamente indeterminata.

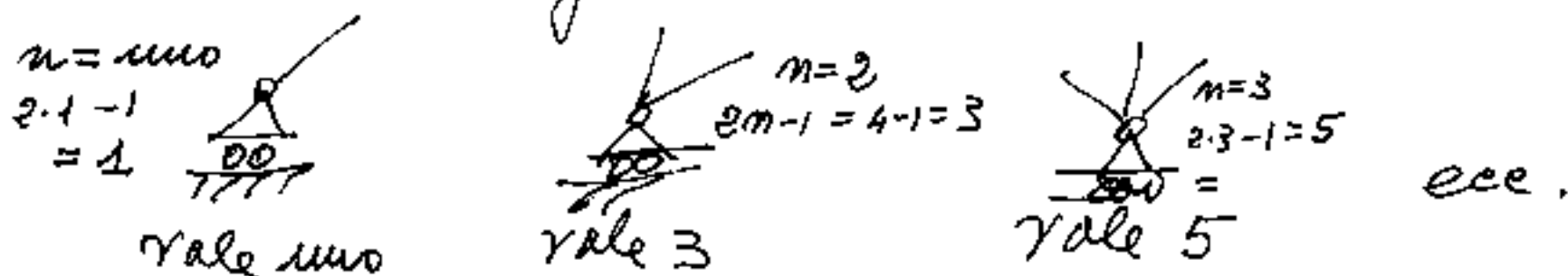
Vincoli colleganti più aste

cerniera collegante n aste vale: $2(n-1)$



come i numeri pari

carrello collegante n aste vale $2n-1$



come i numeri dispari

poiché ogni asta richiede un grado di vincolo pari a tre avremo che detta a la \sum dei valori dei vincoli di grado 1 $\sum c$ la somma dei valori delle cerniere I il numero degli incastri per n aste avremo la formula:

$$\underline{\underline{\sum a + \sum c + I - 3n = g}}$$

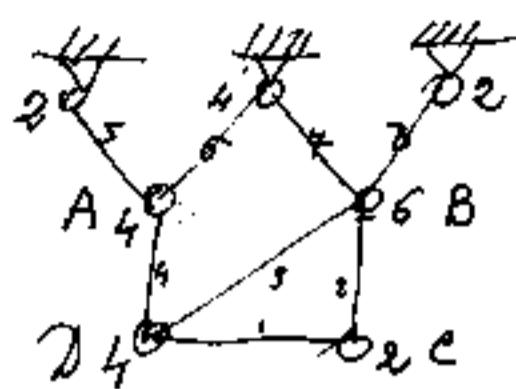
ore g è il grado di iperstaticità

$g=0$ isostatica (o anomala)

$g < 0$ labile

Ciò ci consente un calcolo per le reti eoloidi ma, è meglio vedere la struttura.

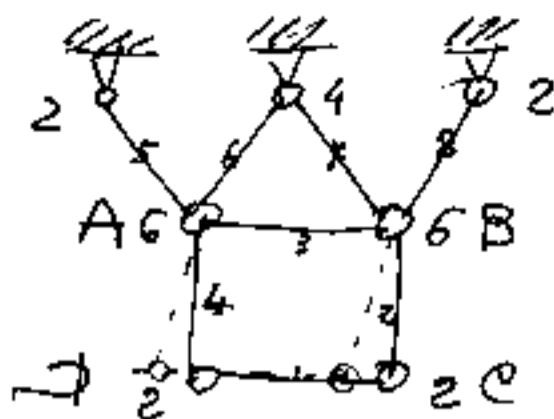
infatti consideriamo le due strutture, ove accanto alle cerniere c'è il loro valore. (aste $m=8$)



$$\begin{aligned} \sum c &= 24 \\ - 3 \times 8 &= 24 \end{aligned}$$

$$g = 0$$

effettivamente complementamente isostatica

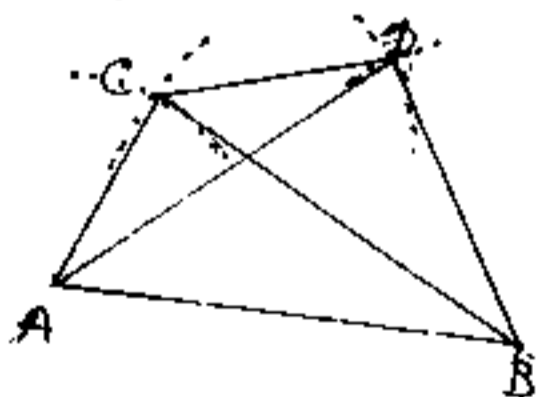


$$\begin{aligned} \sum c &= 24 \\ - 3 \times 8 &= 24 \end{aligned}$$

$$g = 0$$

l'asta 3 che unisce A e B già fissa crea un grado di iperstaticità (+1) mentre la maglia ABCD è labile (-1) se fuo dondolare, si ha $(+1) - (-1) = 0$ struttura in parte labile in parte iperstatica.

Per vedere una struttura periamo di fare il rilievo di un vano quadrilatero e di aver misurato i quattro lati e le due diagonali.

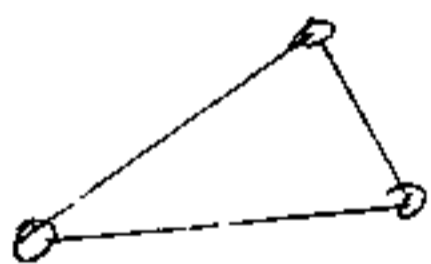


Al momento di fare il disegno in scala supponiamo di

aver tracciato la base \overline{AB} , quindi con centro in A ed apertura del compasso AC tracciamo un archetto, quindi con centro in B ed apertura \overline{BC} facciamo un secondo archetto, l'incontro dei

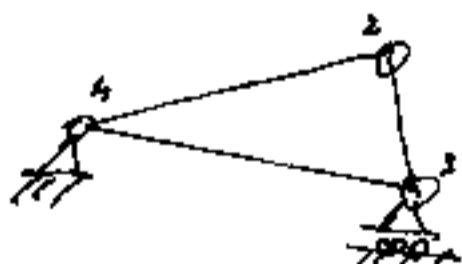
due archetti fissa la posizione di C rispetto ad A e B cioè la maglia triangolare ABC è indeformabile (internamente isostatica perché variando la lunghezza di una misura varia la posizione di un vertice, ma non influenza le altre.) La stessa costruzione possiamo farla per D, e supponiamo di aver preso per base \overline{AB} e per raggi \overline{AD} e \overline{BD} è rimasta fuori la misura \overline{CD} , che serve di verifica, però facendo centro in C si nota un piccolo triangolino d'errore, tanto più piccolo quanto più le misure erano precise, ma che ci fa notare che, se la variazione di una misura influenza le altre, il caso è iperstatico.

maglia triangolare cernierata



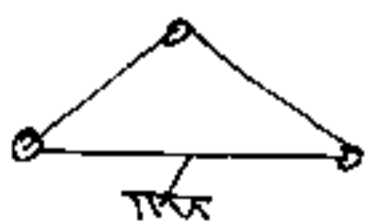
$$\begin{aligned} \Sigma c &= 6 \\ \text{note } 3 \times 3 &= -9 \\ q &= -3 \end{aligned}$$

internamente isostatica
esternamente tre volte
labile



$$\begin{aligned} \Sigma a &= 3 \\ \Sigma c &= 6 \\ \text{note } -9 & \\ 0 & \end{aligned}$$

isostatica internamente
ed esternamente

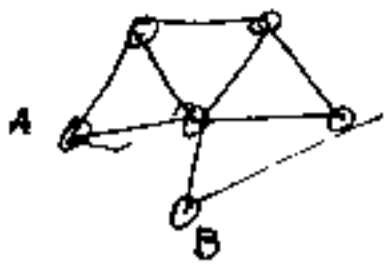


$$\begin{aligned} I &= 3 \\ \Sigma c &= 6 \\ \text{note } -9 & \\ 0 & \end{aligned}$$

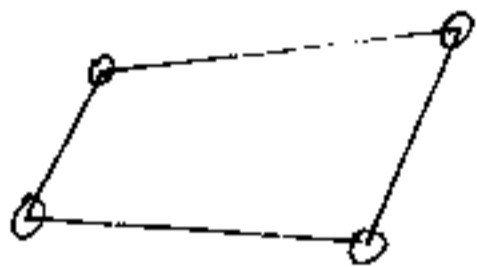
isostatica internamente
ed esternamente

Tutte le strutture costituite da maglie triangolari cernierate, con cerniere non includenti

sono internamente isostatiche. Se nella figura a fianco (internamente isostatica) ponessimo un'asta fra A e B diventerebbe internamente una volta iperstatica.

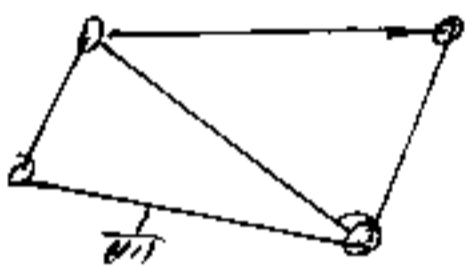


maglia quadrangolare



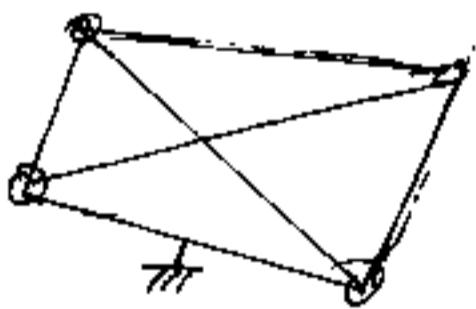
$\Sigma C = 0$
 $3 \text{ forze} = -12$
 -4
 } 3 volte labile esternamente
 } 1 volta labile internamente

se aggiungiamo un pendolo



sono due maglie triangolari
 Ceriniere è internamente
 isostatica

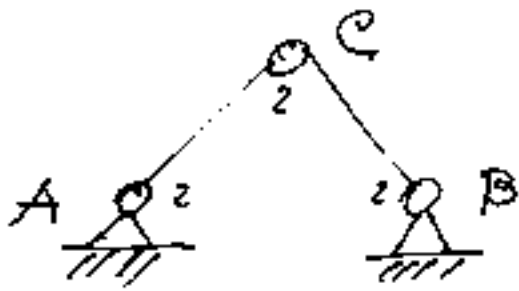
se aggiungiamo un altro pendolo
 è internamente una
 volta iperstatica infatti
 la lunghezza di quest'ultimo



pendolo è condizionata dalla lunghezza degli altri come nell'esempio del cilindro di un vano.

Se una struttura è internamente non labile (isostatica od iperstatica) è esternamente isostatica si possono calcolare subito i vincoli esterni, comunque complessa sia la struttura.

L'arco a tre cerniere



esternamente vi sono due cerniere $2 \times 2 = 4 = 3 + 1 =$ una volta iperstatico esternamente.

tolte le cerniere esterne le due aste cernierate in C sono internamente una volta labili.

Complessivamente isostatico.

Se è carico un solo ramo, per esempio l'asta \overline{AC} , l'altra asta \overline{CB} diventa un pendolo e l'arco a tre cerniere diventa isostatico esternamente e costituito da una sola asta internamente.

Quindi per risolvere l'arco a tre cerniere possiamo anche avvalerci della sovrapposizione degli effetti considerando una volta carica una parte, poi considerando carica l'altra.

Però il metodo classico è considerare le quattro incognite: H_A, V_A, H_B, V_B ed imporre le



$$\sum H = 0$$

$$\sum V = 0$$

$$\sum M_C = 0$$

per forze a sin

$$\sum M_C = 0$$

per forze a destra

ed imporre le quattro equazioni che risolvono le quattro incognite

Il calcolo delle reazioni vincolari

Il calcolo delle reazioni vincolari può essere eseguito seguendo vari criteri.

Metodi grafici
e Metodi analitici

È di importanza fondamentale ricordare che un insieme di carichi comunque frastagliati e distribuiti e concentrati e momenti, cioè un insieme di carichi comunque complesso è sempre riducibile ad una unica risultante, da equilibrare coi vincoli. (vale ai fini del calcolo delle reazioni dei vincoli isostatici)

E ricordare che in una struttura complessivamente isostatica, ogni asta può vedersi come una trave vincolata da un vincolo di grado uno ed un vincolo di grado due.

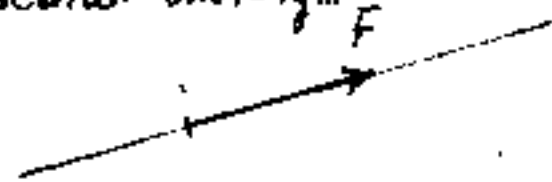
Analiticamente ci avvaliamo del fatto che il momento per forze a destra di una sezione è in valore e segno uguale al momento per forze a sinistra della stessa sezione.

Se come sezione possiamo scegliere quella ove figura una incognita, questa sparirà avendo braccio nullo e facilmente si calcola l'altra.

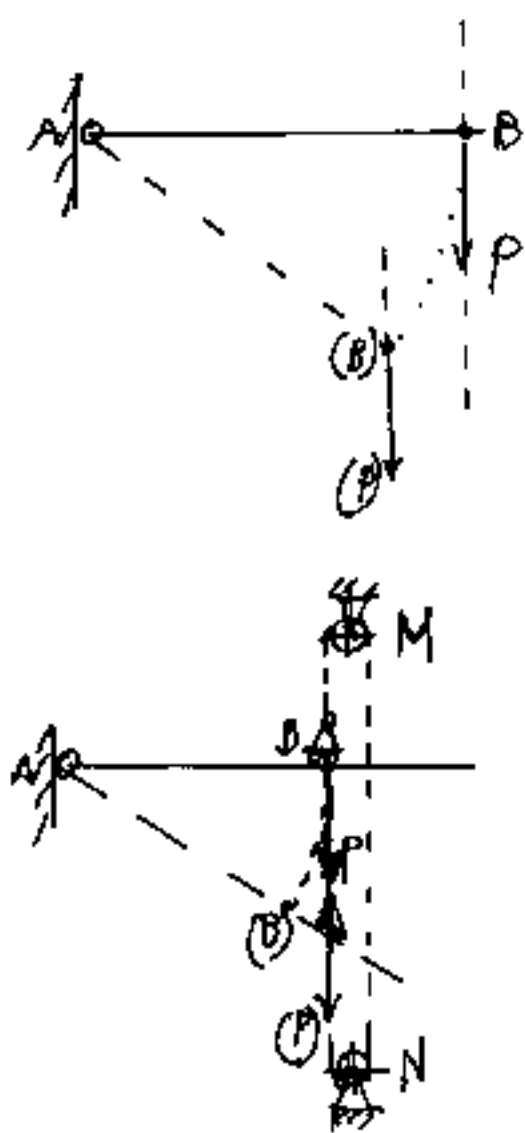
Composizione e scomposizione di Forze

I sistemi equivalenti

scala: $cm = kg \dots F$



Una forza si rappresenta con un segmento orientato su una retta di azione non può spostarsi dalla sua retta di azione perché genererebbe un momento. La lunghezza del segmento è in scala l'intensità della forza. La forza può scorrere lungo la sua retta di azione,



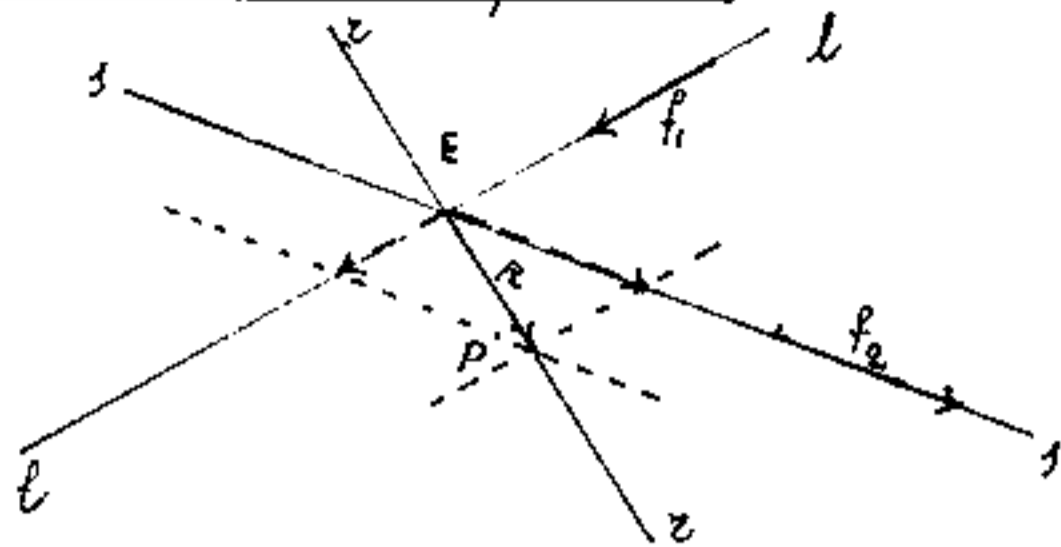
Non può considerarsi un vettore applicato perché (vedi figura) nel tempo, a causa della sua azione non manterrebbe la sua retta di azione. Se costruiamo vincoli tali da imporre al peso P di mantenere la sua retta d'azione (le carrucole M ed N) il peso agendo sull'asta non manterrebbe il

suo punto di applicazione. (Le forze non sono vettori)

(Era molto più giusta la definizione degli antichi "Le forze secundum situ") Sordano de Nemore.

(c.f.r. anche: Marcolongo - Rossi - Tolle: Elementi di calcolo vettoriale, omografico, tensoriale e Meccanica Razionale ed Hoepli - Milano)

Somma di forze



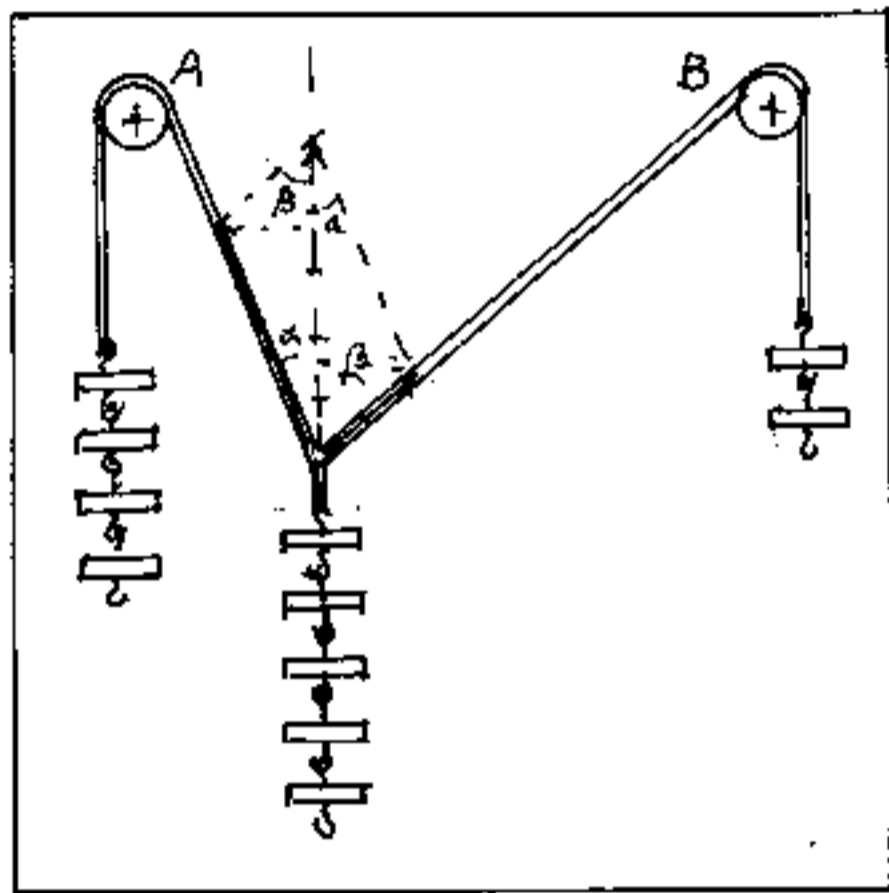
Date le forze f_1 ed f_2 agenti rispettivamente sulle rette l ed s , per trovare il sistema equiva-

lente, costituito dalla risultante R , occorre prima di tutto trovare il punto E comune alle due rette di azione, (detto punto di equilibrio). Riportare "di piuma" in E le due forze, ($\overleftarrow{\text{Piuma}}$ $\overrightarrow{\text{Punta}}$) e, dalle punte, le parallele alle rette di azione; queste parallele si incontreranno in un punto P , ove \overrightarrow{EP} è la risultante R , agente sulla retta r . La forza $-R$ di verso opposto alla R ma agente sulla stessa retta r equilibra le forze: (Reagente).

Si possono pensare tre funi legate in E e tirate secondo le rette di azione, se le forze sono proporzionali ai moduli di $f_1, f_2, e -R$ il punto E resta fermo in equilibrio.

L'esperimento può essere fatto utilizzando dei pesi e delle carrucole come in figura; il filo che li sostiene si sposterà

fino ad assumere la configurazione di equilibrio. Supponiamo che siano α e β gli angoli che le rette di azione di f_1 ed f_2 formano con la retta di azione della risultante, avremo

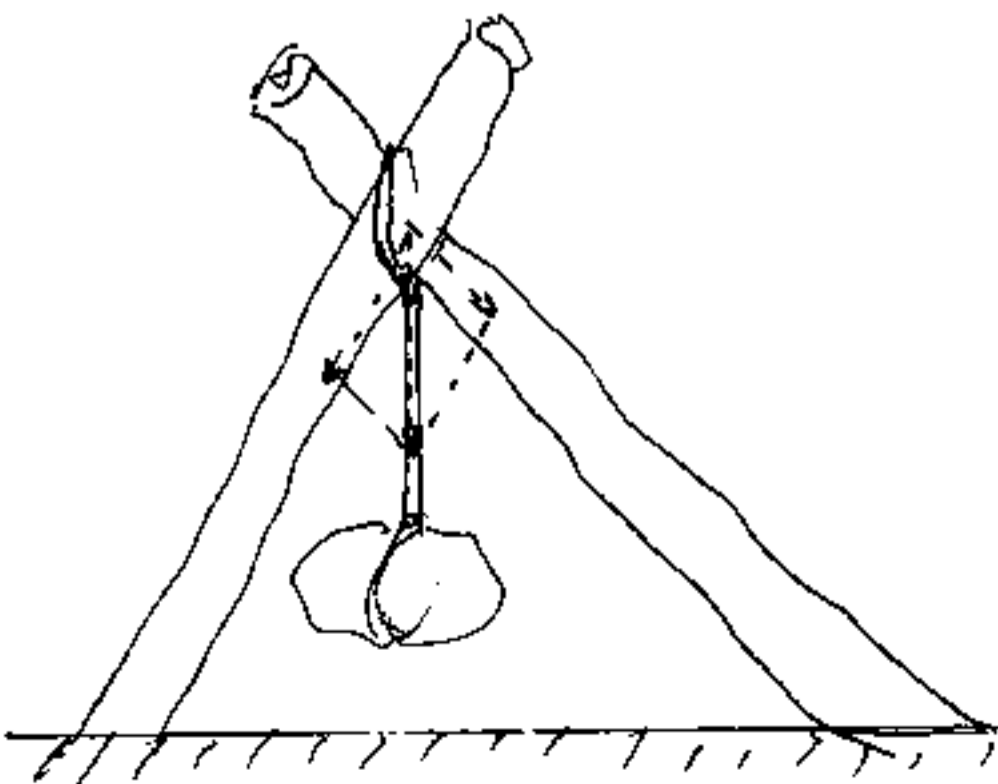


$f_1 \cos \alpha + f_2 \cos \beta = R$
 $|f_1 \sin \alpha| = |f_2 \sin \beta| = H =$
 componenti di f_1 ed f_2
 normali alla retta
 di azione di R
 che sono equilibrate
 fra loro.

Aumentando i pesi

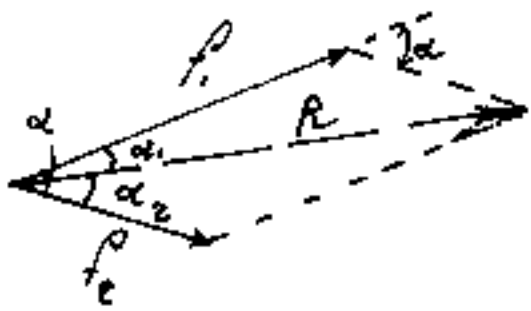
lateralmente la corda diviene più tesa.

Lo stesso principio di scomposizione si ha per due pali infissi nel terreno, che sostengono un peso. In questo caso i pali sono compressi



È bene osservare subito che, nel caso della fune tesa, si ha un equilibrio nel piano, mentre nel caso dei pali compressi, vi è una instabilità statica senza un terzo palo.

Quindi date due forze f_1 ed f_2 e la loro risultante R , è possibile calcolare gli angoli α_1 ed α_2 che la R forma con f_1 ed f_2 .



$$\cos \alpha_1 = \frac{R^2 + f_1^2 - f_2^2}{2Rf_1}$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{R^2 + f_2^2 - f_1^2}{2Rf_2}$$

Ove: $(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha =$ angolo fra le due forze.

ed anche: $R = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 - 2f_1f_2 \cos(180^\circ - \alpha)}$

Nasce così quella che è detta: "la regola del parallelogramma" che è vera se il parallelogramma viene costruito sulle vere rette di azione delle forze, non è più vera se f_1 ed f_2 vengono trasportate parallelamente a se stesse una di seguito all'altra, con R cambiato di segno, ottenendo quello che, molto impropriamente, viene detto triangolo di equilibrio.



È vero che: $f_1 + f_2 - R = 0$, però se prendiamo un punto interno al triangolo, esso disterà r_1, r_2, r_3 rispettivamente da $f_1, f_2, -R$ ed il momento è la somma dei momenti concordi: $M = f_1 r_1 + f_2 r_2 + |R| r_3$ ed è pari al doppio dell'area del triangolo.

Cioè il triangolo è sollecitato a ruotare per effetto di un momento proporzionale al doppio della sua area. È questa un'altra conferma che le forze non sono vettori infatti nel caso dei vettori il triangolo di equilibrio vale perché non si parla di direzione, ma di direzionalità, di tutte le rette parallele e non si alette rotazione.

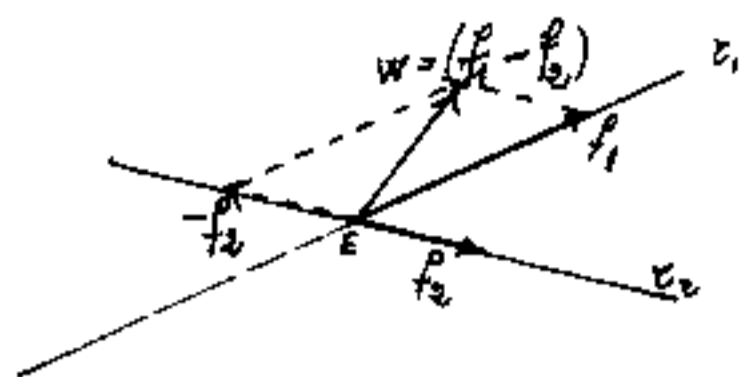
Ai fini dell'equilibrio, conviene sempre scomporre le forze in orizzontali (parallele all'x) (H), ed in verticali (parallele alla y) (V) ed imporre $\sum H = 0$; $\sum V = 0$ che equivalgono all'equazione canonica della statica $\sum F = 0$.

La $\sum dM = 0$ (somma dei momenti), in qualunque punto deve essere nulla, perché non può esservi rotazione. Considerata una sezione, l'equazione di-

venta: $\sum_{sin} M = \sum_{destra} dM$ entrambi tenderanno o le fibre inferiori o le fibre superiori, può se uno è orario l'altro è antiorario ed il simbolo = si riferisce solo alla intensità che abbiano verso opposto ed uguale intensità è nella formula $\sum_{sin} M + \sum_{destra} dM = 0$.

Si noti il segno in s.d.c dei momenti flettenti.

Differenza di due forze



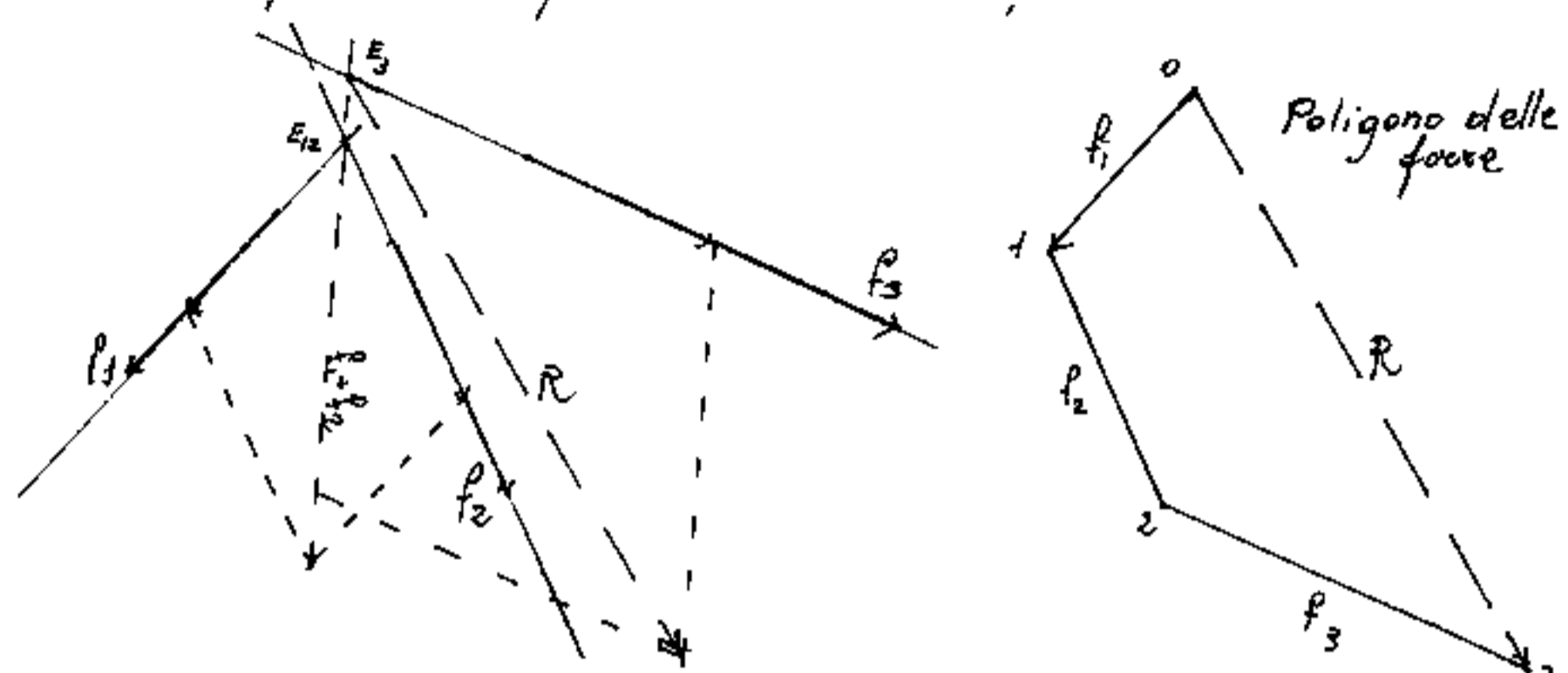
Due forze f_1 ed f_2 , date ed agenti rispettivamente secondo le rette r_1 ed r_2 , per trovare la differenza: $f_1 - f_2$, si inverte il segno di f_2 e, $(-f_2)$ si somma alla f_1 ed avremo come risultante la forza $W = (f_1 - f_2)$.

Nella regola del parallelogramma, è la seconda diagonale, la differenza dei vettori ed è diretta dalla punta del diminutore alla punta del diminuendo, come intensità e direzionalità vale anche per le forze, ma la vera retta di azione è parallela e passa dal punto comune alle rette di azione di f_1 ed f_2 . (punto E di equilibrio)

Somma di più forze

Se le forze di un sistema, le spostiamo parallelamente a se stesse, disponendole successivamente l'una all'altra, cioè che la piuma della successiva, corrisponda alla punta della precedente, costruiamo quello che chiamasi: "Poligono delle forze". Ove il segmento che unisce la piuma della prima forza con la punta dell'ultima è la risultante, come intensità e direzionalità, ma la sua

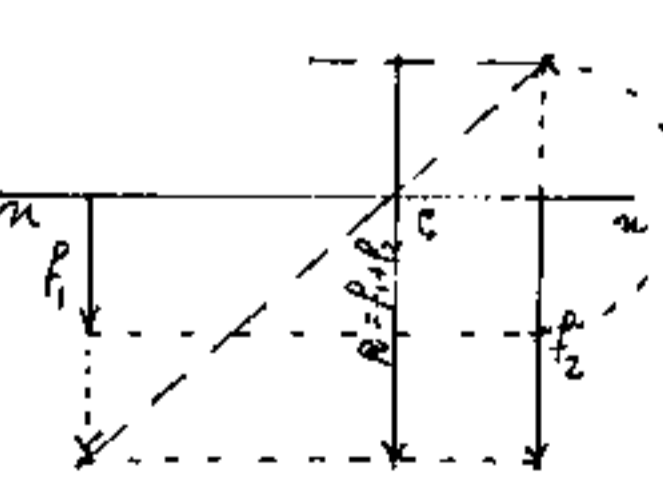
vera retta di azione deve essere determinata per esempio componendo le forze del sistema.



Per es. f_1 ed f_2 si riportano in E_{12} , si trova f_1+f_2 che si riporta di piuma con f_3 in E_3 si trova $R = f_1+f_2+f_3$. A destra si è disegnato il poligono delle forze che, salvo la retta di azione dà la stessa R . (Le due R disegnate sono lo stesso vettore non sono la stessa forza). Con ciò si spera di aver chiarito quanto esprimono autorevoli testi, cioè che: "le forze non sono vettori". Abbiamo già fatto cenno ai vettori che tratteremo in seguito.

Le forze parallele

Composizione di forze parallele.

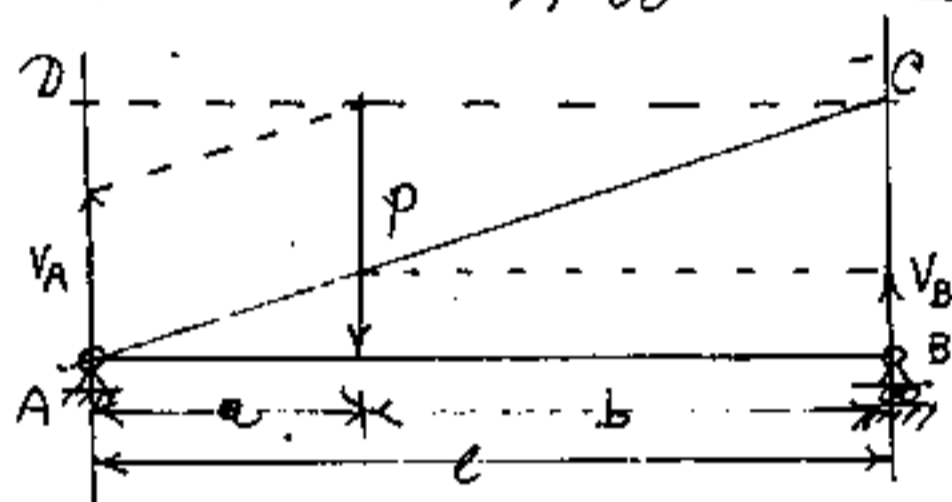


Date due forze parallele f_1 ed f_2 , si riportano di piuma sulla stessa normale nn alle loro rette di azione, una si proietta sulla retta dell'altra, l'altra si proietta sulla prima rovesciata rispetto ad nn , si uniscono le punte e si determina C e la $R = f_1+f_2$.

si proietta sulla prima rovesciata rispetto ad nn , si uniscono le punte e si determina C e la $R = f_1+f_2$.

Scomposizione di forze parallele

Il procedimento inverso alla composizione, è utile per trovare graficamente le reazioni sulla trave semplicemente appoggiata soggetta al carico P .



Il carrello reagisce verticalmente, il carico P può sempre scomporsi in una orizzontale alla

quale reagisce la cerniera, ed in una verticale da scomporre. Consideriamo P verticale, si proietta sulla retta di azione del carrello e sulla parallela per la cerniera, si ottiene così il rettangolo $ABCD$; si traccia una diagonale del rettangolo che dividerà P in due parti che non possono attraversare la diagonale, resta così definite le reazioni vincolari V_A e V_B del carico verticale P .

Analiticamente avremo: $M_A = 0 = \overset{\text{sin.}}{M_A} = +V_B \cdot l - P \cdot a = 0$

da cui: $V_B = \frac{P \cdot a}{l}$; $M_B = 0 = \overset{\text{sin.}}{M_B} = V_A \cdot l - P \cdot b = 0$

da cui $V_A = \frac{P \cdot b}{l}$ che giustificano la costruzione

grafica; infatti: $P:l = V_B:a$; $P:l = V_A:b$;
come appare dai triangoli simili.

Nel caso particolare che il carico verticale P si trovasse sul prolungamento della trave, cioè non intermedio agli appoggi, si tracciano le

rette di azione degli appoggi, si proietta P sulla retta di azione dell'appoggio intermedio, (nel nostro caso in $\overline{BP_1}$) si unisce l'altro appoggio con P_1 e si prolunga fino alla retta di P in C_1 , che si riporta sulla retta intermedia in C_2 da C_2 la parallela ad AC_1 . Si trova così $V_B = \overline{BC_2}$; $V_A = \overline{C_2A}$; (attenzione al verso di V_A !).

Si noti che è il procedimento precedente invertito, infatti si può pensare V_B un carico verso l'alto e V_A e P le reazioni verso il basso.

Analiticamente $\sum M_A = 0 = \sum M_A = -P(l+d) + V_B \cdot l = 0$

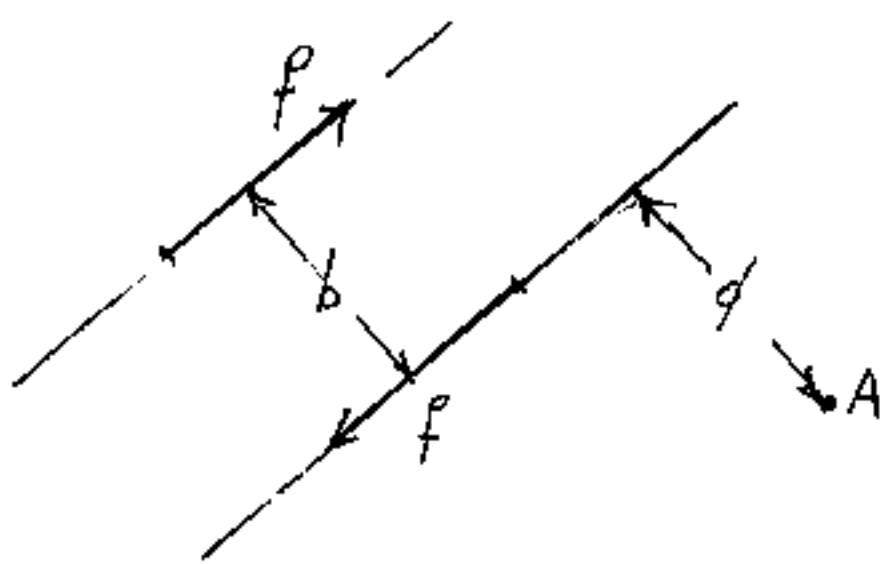
$$V_B = \frac{P(l+d)}{l}; \quad \sum M_B = + (V_A \cdot l = -P \cdot d) = \sum M_B$$

$$V_A = \frac{-Pd}{l} \quad (\text{ci dice che } V_A \text{ è verso il basso.})$$

(vedasi anche vol. I. cap. "La simmetria")

Le coppie di forze

Due forze della stessa intensità, agenti su rette parallele, ma con verso opposto, si dicono: "coppie di forze". Se la distanza fra le rette di azione è " b " (" b " è detto braccio della coppia.)



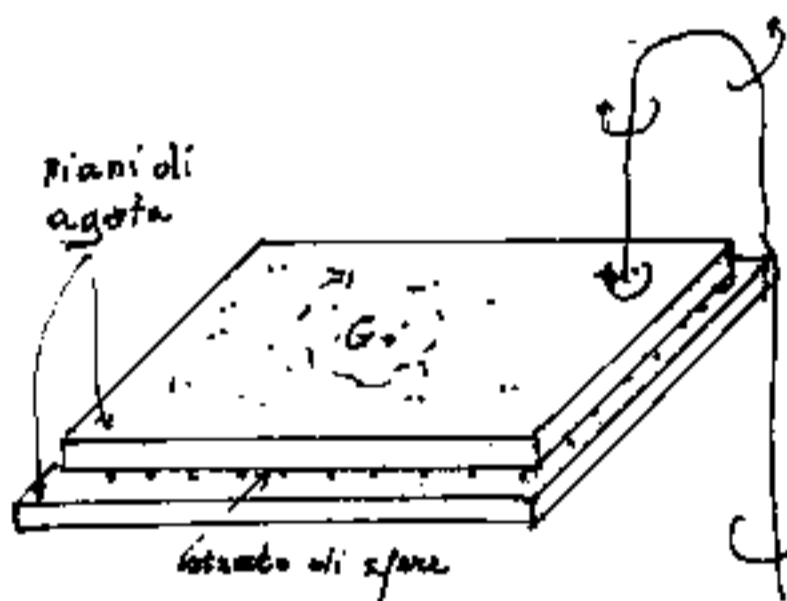
Consideriamo un punto A nel piano della coppia, e sia d la distanza di A dalla retta di azione più vicina, il momento

in A della coppia sarà: $M_A^+ = f(b+d) - fd = fb$.

Il valore del momento è indipendente da " d " perciò M è identico! per qualsiasi punto del piano ed ha per assi di rotazione le rette di giacitura cioè le normali al piano.

Il momento è quindi un vettore rappresentabile con un segmento pari alla sua intensità su una qualsiasi retta normale al piano, e di verso tale da rispettare la convenzione sui segni. Noi considereremo che dalla punta del vettore si vedrà il piano ruotare antiorario.

I fisici vollero sperimentare la validità che l'azione del momento era indipendente dal punto di applicazione; a tal fine presero due lastre di agata, rese specularmente piane, una per basamento, resa con ogni accuratezza orizzontale, l'altra sovrapposta, ma separata da uno strato di sfere metalliche calibrate, in modo da rendere minimo l'attrito fra le due lastre.



Sulla faccia superiore erano predisposti gli attacchi per un cavo flessibile che potesse trasmettere il momento,

ma e doveva essere disposto in modo da non impedire spostamenti orizzontali della lastra. Il risultato fu che qualunque fosse il punto di applicazione del cavo, la lastra girava sempre intorno al proprio baricentro.

Se attaccate un filo al mandrino di un trapano elettrico ed all'altro capo del filo su tavoletta di legno, sostenuta appena al filo stesso, facendo ruotare, (accendendo il trapano) noterete che il filo descrive una



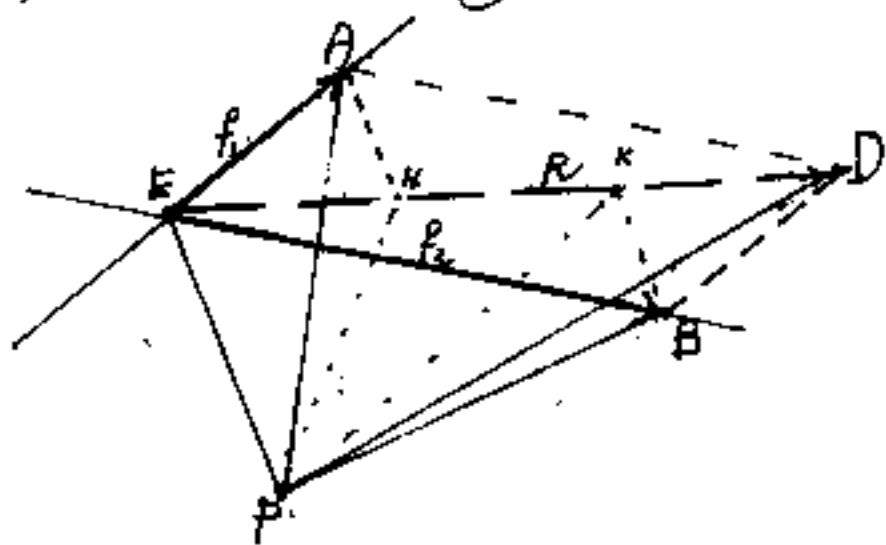
superficie conica e che il baricentro della tavoletta è sulla stessa

verticale del mandrino ovunque si attacchi il filo.

Il teorema di Varignon

Il teorema di Varignon dice:

"La somma algebrica dei momenti di rotazione di due forze rispetto ad un punto del loro piano è uguale al momento della risultante."



Sia E il punto comune alle forze $|f_1| = \overline{EA}$; $|f_2| = \overline{EB}$; da esso passa la risultante $|R| = \overline{ED}$.

Sia P il punto per il quale

dovremo dimostrare che i momenti in P dovuti alle forze equivalgono quello dovuto alla risultante. Notato che i momenti in P sono il doppio dell'area dei triangoli: EAP ; EBP ; EDP ; basterà dimostrare l'equivalenza fra le aree: $S_{EAP} + S_{EBP} = S_{EDP}$.

Se da A tracciamo la parallela ad \overline{EP} fino ad incontrare H su R , avremo che il triangolo: EHP è equivalente al triangolo: AEP perché stessa base \overline{EP} e stessa altezza. Lo stesso discorso vale.

La parallela ad \overline{EP} fino a K ove il triangolo EKP è equivalente ad EBP .

Ma $\overline{EK} = \overline{HD}$ per uguaglianza di triangoli perciò il triangolo EKP equivale HPD (stessa altezza basi uguali) e la somma dei triangoli $EPH + HPD$ è il triangolo EPD . (come doverasi dimostrare)

Il teorema di Varignon è estendibile ad un qualsiasi sistema di forze, ove le forze prese due a due, e quindi le risultanti prese due a due ... e le risultanti delle risultanti, fino ad arrivare all'ultima risultante.

Ma la risultante di una coppia è una forza infinitesima, (nulla), posta a distanza infinita; ciò sarà visto meglio trattando le sollecitazioni composte di presso-flessione e tenso-flessione, (lo abbiamo accennato in geometria delle masse)

La retta di azione della risultante di un qualsiasi sistema di carichi è detta asse centrale, si ricava in genere coi poligoni funicolari ed è detta come il "luogo dei punti che minimizza i momenti" (In generale zero).

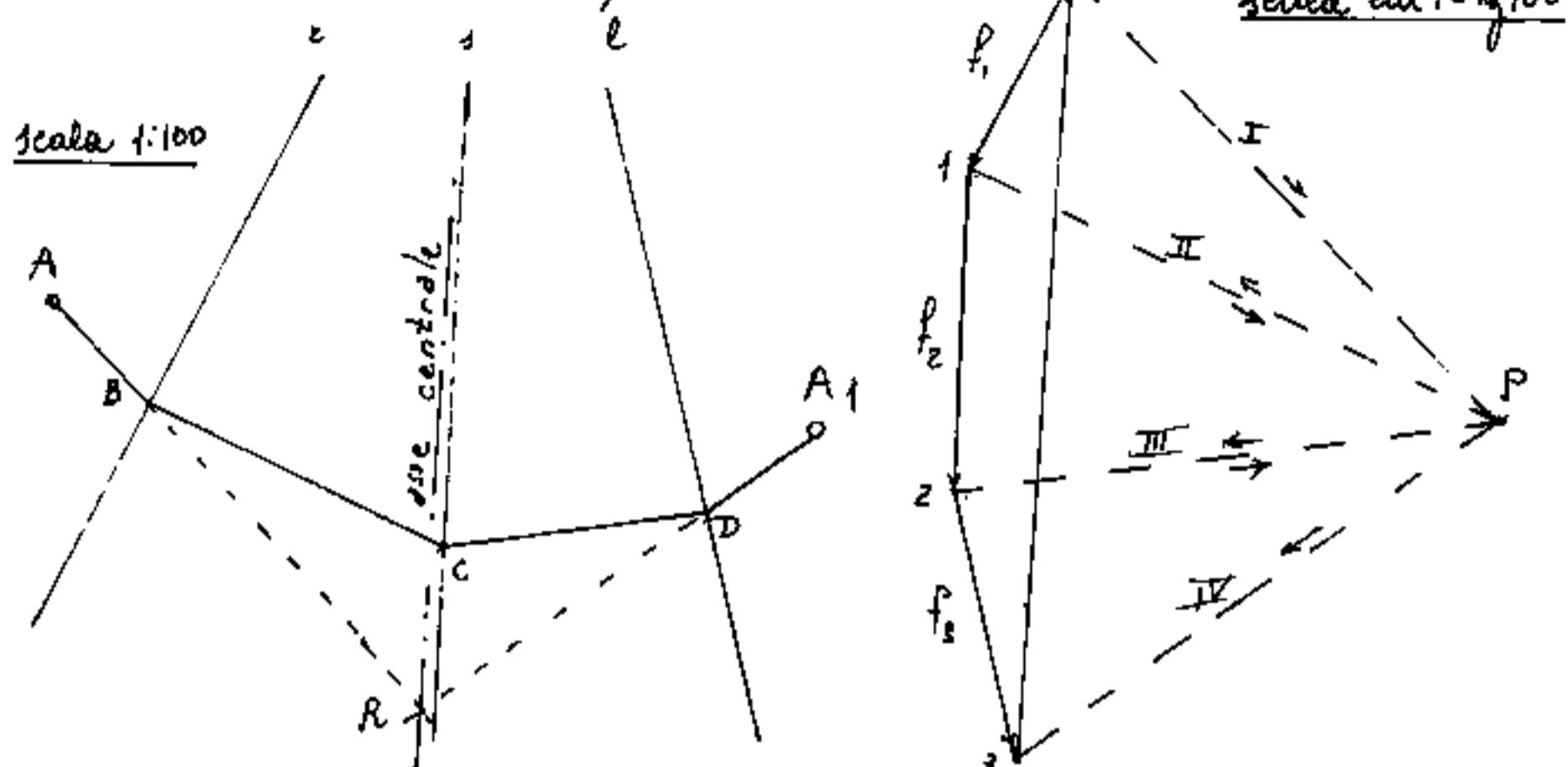
I poligoni funicolari

Dicesi poligono funicolare la configurazione di equilibrio di una fune soggetta a carichi in direzioni prefissate. Il grafico del poligono funicolare è in scala lunghezza, per poter misurare la distanza e l'orientamento delle rette di azione dei carichi, nonché le lunghezze dei tratti di fune fra carico e carico e fra carico ed appoggi. -

Per costruire il poligono funicolare, si costruisce prima il poligono delle forze in scala forze ($cu 1 = kg \dots$), quindi si proietta il poligono delle forze da un polo P che inizialmente può anche essere arbitrario, ma, come vedremo può essere tale da imporre condizioni allo stesso poligono funicolare.

I raggi proiettanti le forze sono, in scala, le componenti delle forze stesse, sia come intensità, sia come direzionalità. Ogni raggio è comune a due forze, salvo il primo e l'ultimo che è comune con la risultante.

Facciamo un esempio:



Date le tre rette di azione r, s, l , su cui agiscono le forze: $f_1 = 200 \text{ Kg}$; $f_2 = 300 \text{ Kg}$; $f_3 = 250 \text{ Kg}$; facciamo il poligono delle forze, $0, 1, 2, 3$; tracciando le parallele alle rette di azione, e riportandovi, consecutivamente in scala forze: f_1, f_2, f_3 . otteniamo l'intensità della risultante $= \overline{03} = \text{Kg } 710$; e la sua direzionalità.

Considerato il punto A come inizio del poligono funicolare, (A può essere considerato come l'ancoraggio della fune), per A tracciamo la parallela al I raggio proiettante, che incontrerà in B la retta r ; quindi da B la parallela al II raggio fino a C su s ; da C la parallela al III fino a D su l , e da D, in questo caso, la parallela al IV ed ultimo raggio, che sale fino all'ancoraggio A_1 , e si prolunga fino ad incontrare

in R il I raggio, per R si traccia la parallela alla risultante $\vec{O_3 - e_1}$ e la retta di azione della risultante (o dell'equilibrante) del sistema; questa retta di azione è detta "asse centrale".

Notiamo che, dalle scale dei due disegni, possiamo rilevare la situazione della fune ancorata in A ed A_1 e soggetta ai carichi f_1, f_2, f_3 :

Tratto \overline{AB} lungo m. 1,30 teso da Kg 550

" \overline{BC} " m. 3,00 " " 530

" \overline{CD} " m. 2,35 " " 490

" $\overline{DA_1}$ " m. 1,20 " " 530

fune lunga. m. 7,85

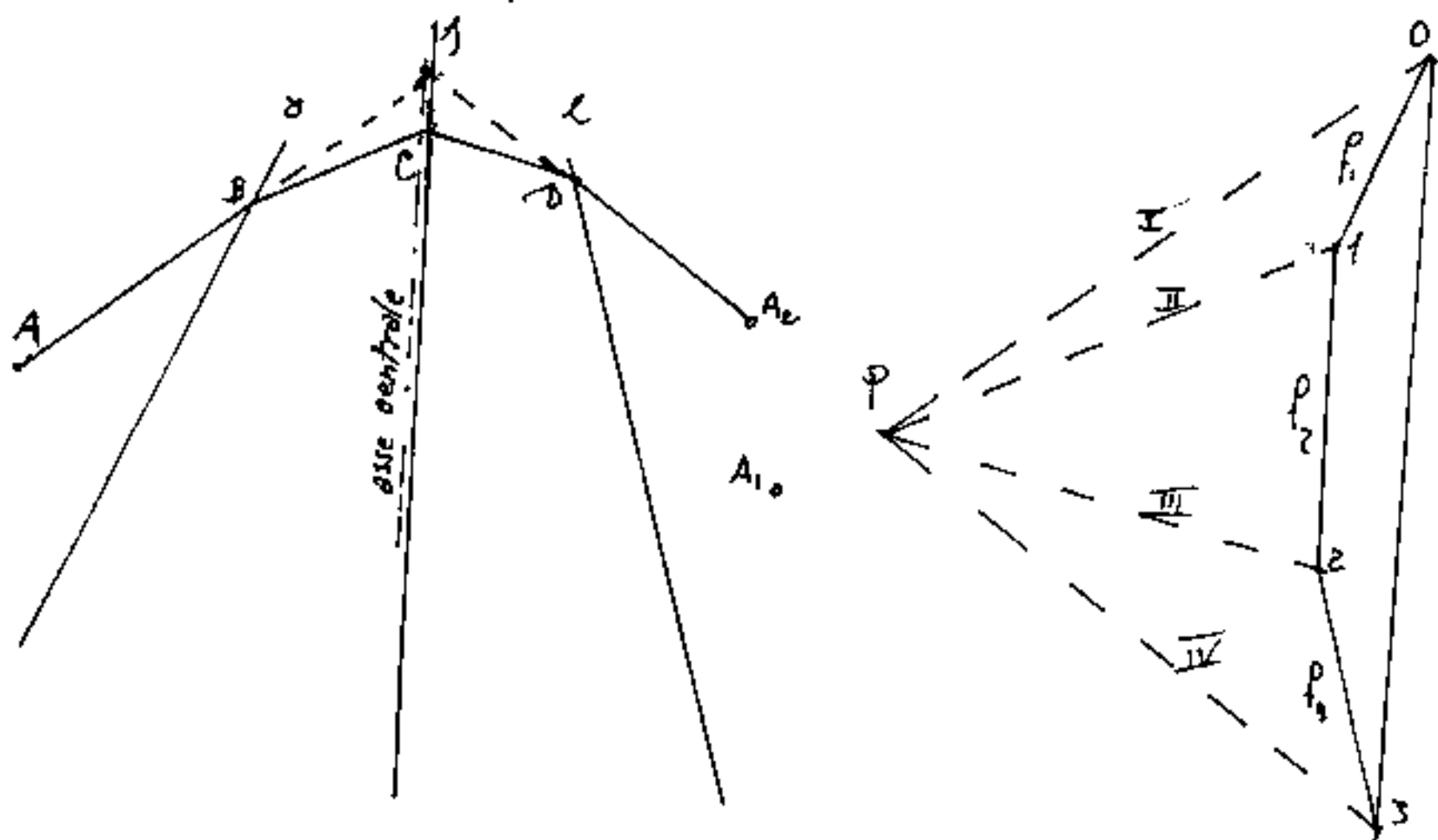
distanza $\overline{AA_1} = m. 7$

(le tensioni sono lette, in scala, nei rispettivi raggi paralleli)

Aumentando la distanza del polo P dal poligono delle forze, aumentano i raggi proiettanti cioè aumentano le tensioni dei singoli tratti di fune, il poligono funicolare diventa più teso. Con $P \rightarrow \infty$, il poligono funicolare diventa una retta.

Inversamente avviene avvicinando P al poligono delle forze, però v'è un limite in quanto i raggi proiettanti non potranno

Continuando a spostare il polo verso la sinistra, vi sono diversi casi particolari dipendenti anche dalla configurazione del poligono delle forze, (polo interno al poligono delle forze; polo giacente su una forza del poligono delle forze.) Non appena il polo è a sinistra del poligono delle forze, il poligono funicolare diventa di compressione.



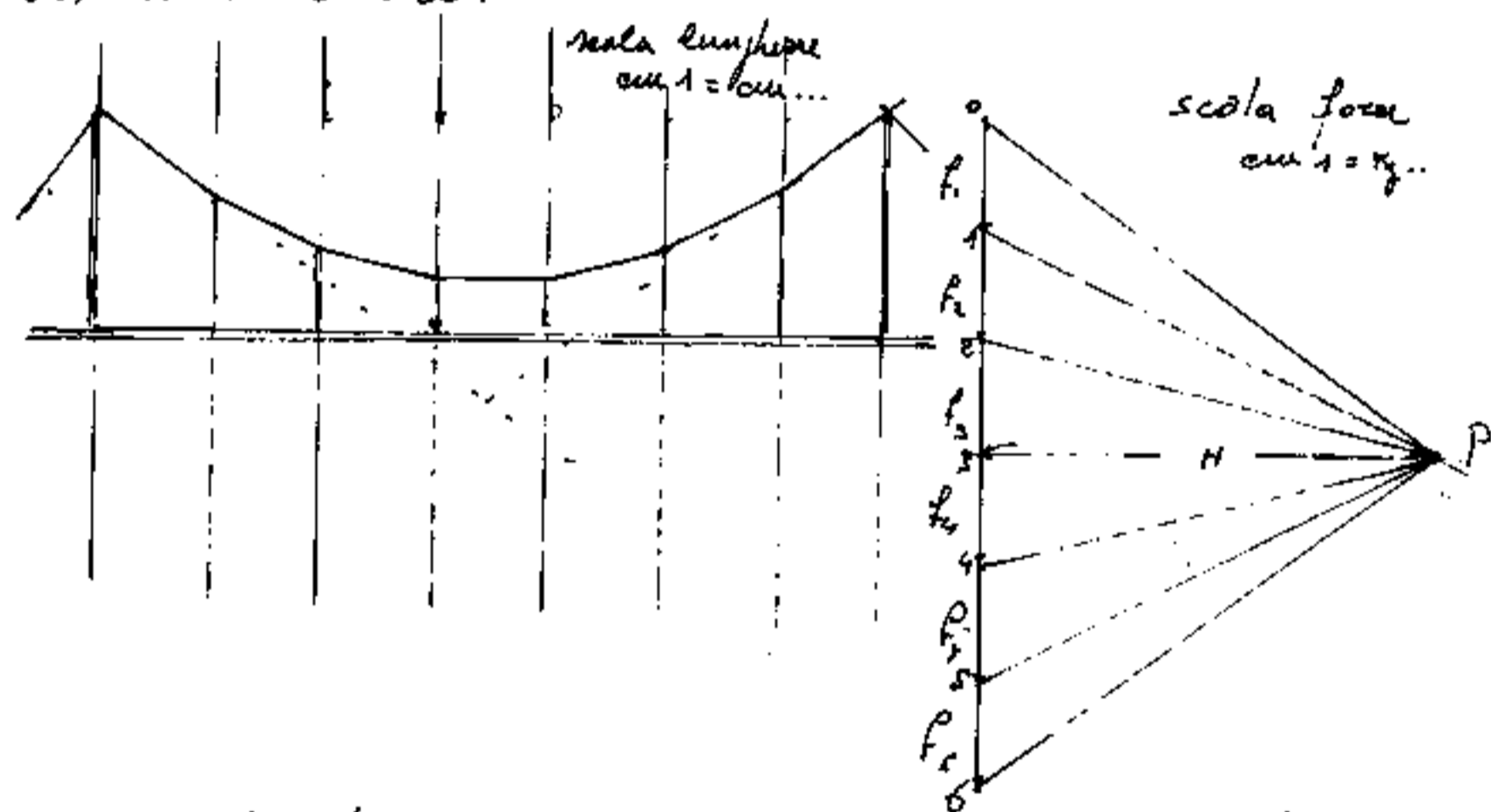
Anche in questo caso l'asse centrale (retta di azione della risultante dei carichi) resta lo stesso.

La scelta del polo implica due coordinate la scelta della posizione del primo lato del poligono funicolare implica un'altra condizione, (si suol dire che un sistema di forze ammette infinito eubo poligoni funicolari) in effetti fra gli infiniti poligoni funicolari, bastano tre condizioni per

definire univocamente un poligono funicolare,
per esempio: passante per tre punti.

Particolare interesse si ha quando il sistema di forze è costituito da forze parallele come i pesi in campo gravitazionale

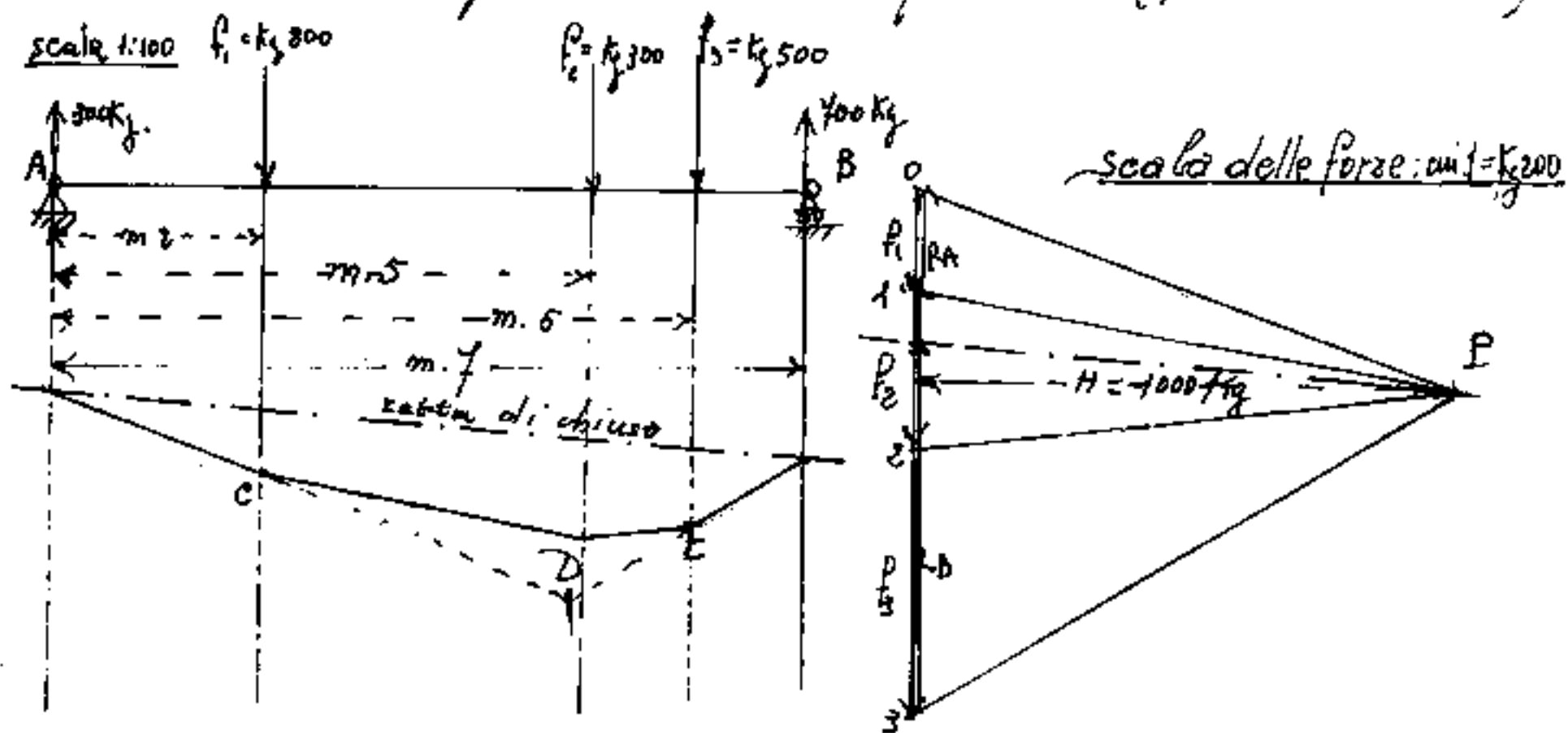
I poligoni funicolari tesi possono utilizzarsi nel calcolo dei ponti sospesi, i poligoni funicolari compressi nel calcolo degli archi in muratura.



Nel calcolo delle travi semplicemente appoggiate i carichi si scompongono in assiali (equilibrati in cerniera) e trasversali per i quali può farsi un poligono funicolare, ove il primo lato e l'ultimo taglieranno le rette di azione delle reazioni verticali; uniti questi due punti, (retta di chiusa) se ne traccia la parallela per P che dividerà la risultante secondo le reazioni degli appoggi;

Le ordinate fra il poligono funicolare sono del diagramma dei momenti flettenti, debbono essere lette in scala lunghezze e moltiplicate per H (distanza del polo dal poligono delle forze) letta in scala forze.

Conviene quindi prendere la distanza del polo H un numero facile a moltiplicare (p.es. 10, 100, ..)



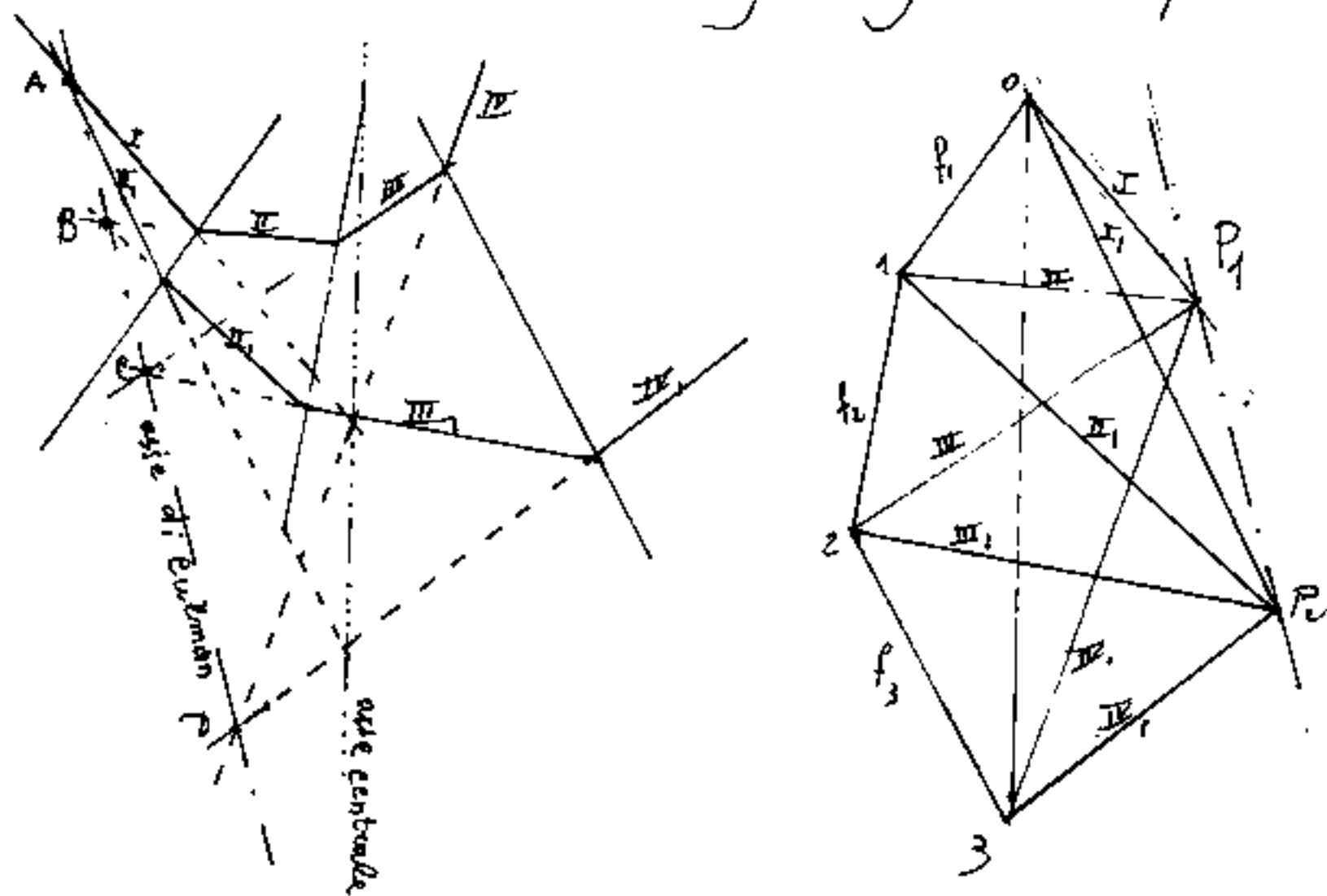
La parallela alla retta di chiusura divide la risultante in $R_B = 700 \text{ Kg}$; $R_A = 300 \text{ Kg}$

Nella sezione C leggiamo fra la retta di chiusura ed il poligono funicolare in scala lunghezze = 0,60 m che moltiplicato per $H = 1000 \text{ Kg}$ dà $M_C = 600 \text{ Kg m}$; analogamente $M_D = 900 \text{ Kg m}$; ed $M_E = 700 \text{ Kg m}$.

L'asse centrale passa a m. 4,9 da A.

L'asse di Culmann

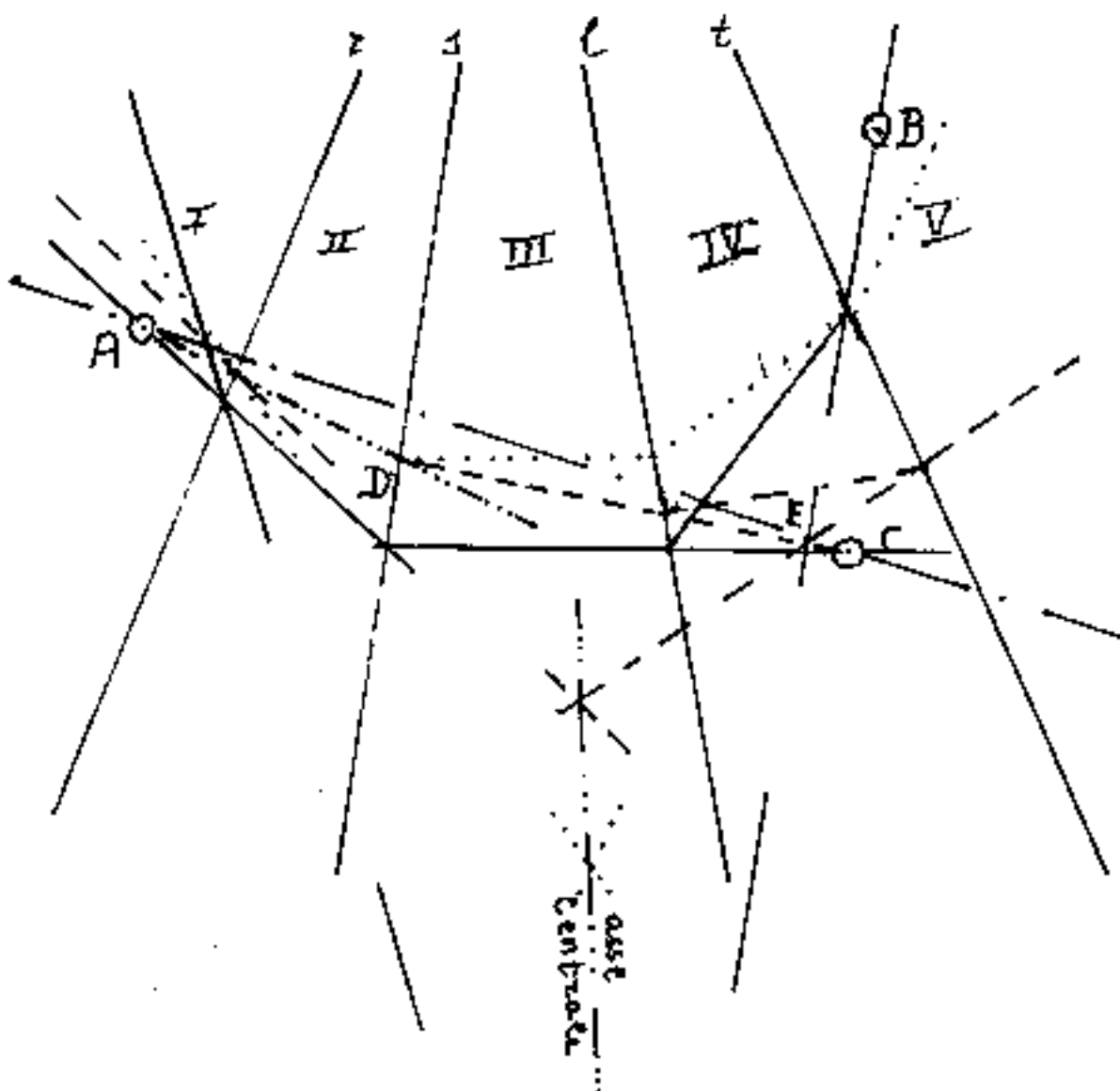
Dato un sistema di forze, facendolo due poligoni funicolari diversi (da due poli diversi) i lati omonimi dei poligoni si incontrano su una retta, detta asse di Culmann, che è parallela alla congiungente i poli.



Si sono indicati con A, B, C, D i punti di incontro sull'asse di Culmann rispettivamente dei primi, secondi, terzi, e quarti lati dei due poligoni funicolari

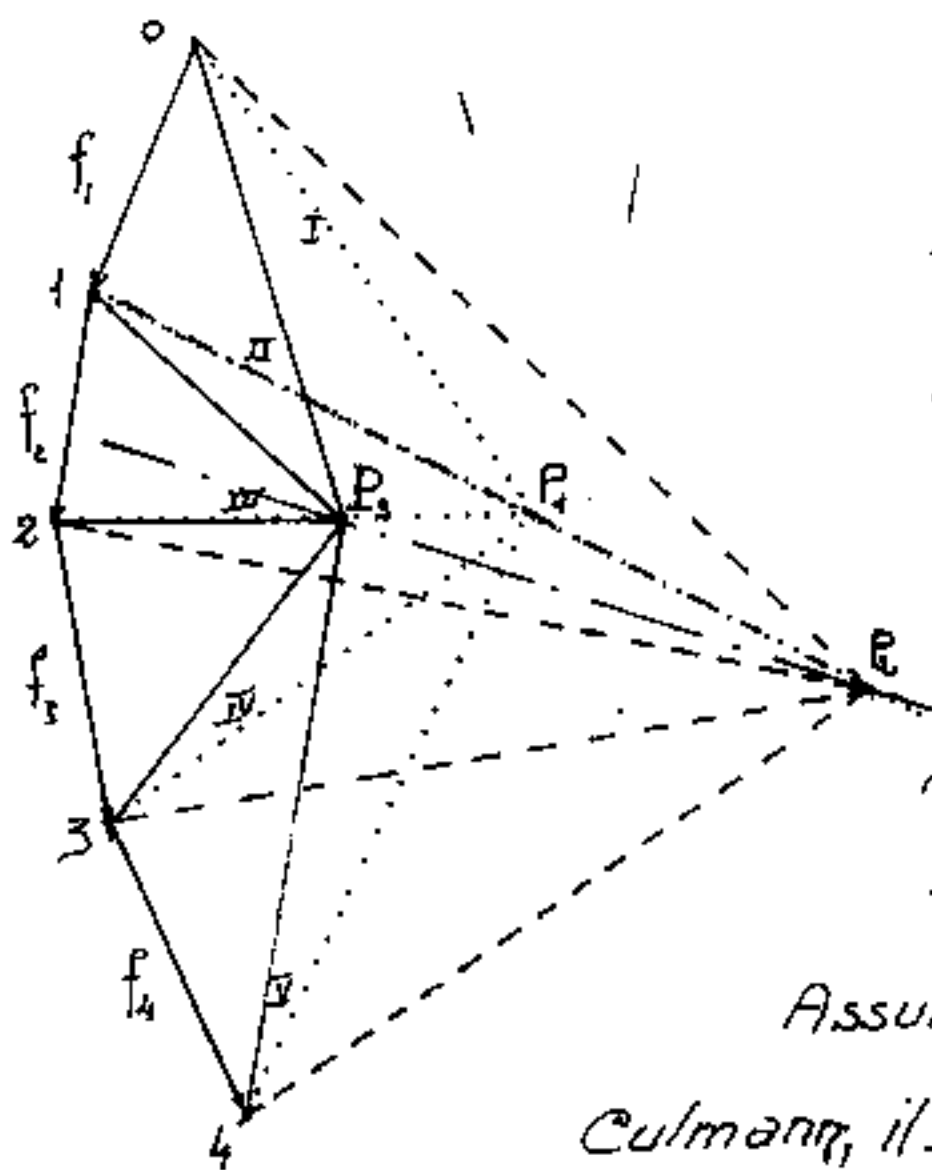
Utilizziamo l'asse di Culmann per far passare un poligono funicolare per tre punti assegnati.

Poligono funicolare per tre punti



Date le rette: r, s, l, t ,
 su cui agiscono rispettiva-
 mente le forze: f_1, f_2, f_3, f_4 ;
 fissati i punti A, B, C ,
 vogliamo costruire un
 poligono funicolare che
 abbia il II lato per A ,
 il III per C , il V per B .

Tracciato il poligono delle
 forze: $0, 1, 2, 3, 4$; si prende ini-
 zialmente un polo P_1 , a caso, e
 si fa passare il II lato del poli-
 gono funicolare per A , trac-
 ciando dopo gli altri lati.
 Si nota che il III non passa per C ,
 ed il V non passa per B .



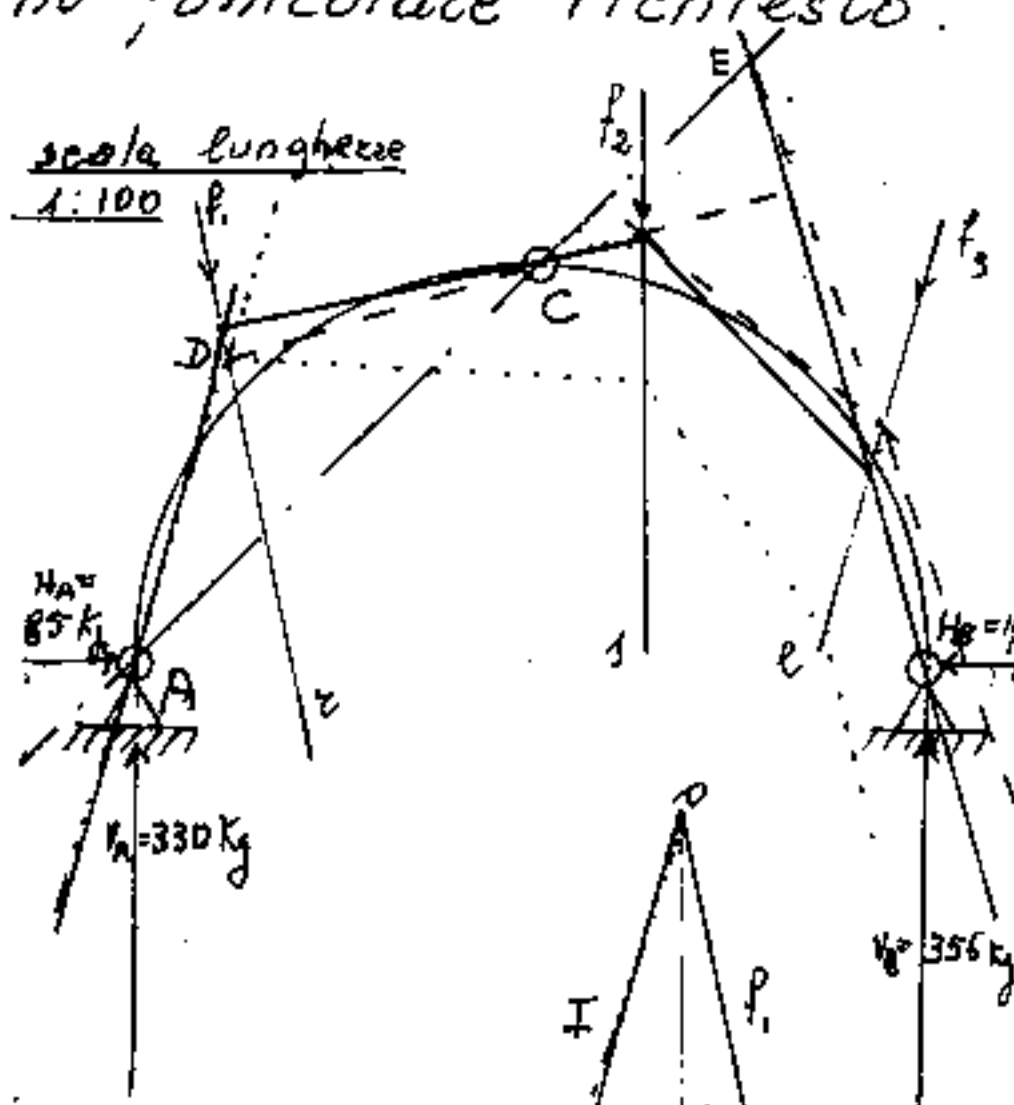
Assumiamo il II lato come asse di
 Culmann, il III lato incontra in D tale asse,

si unisce D con C e si assume come nuovo III lato, perciò
 la parallela a \overline{DC} del punto 2 del poligono delle forze deter-
 mina P_2 sulla parallela all'asse di Culmann (II raggio).

Assumiamo ora, come asse di Culmann, la retta \overline{AC} ,
 ove i secondi lati dovranno incontrarsi in A ed i
 terzi in C; il quinto lato incontra in E tale asse,
 unito E con B si assume come VI lato, ora, dal
 punto 4 del poligono delle forze, la parallela al
 VI lato, e da P_2 la parallela ad \overline{AC} , il punto
 comune è il polo P_3 che soddisfa il poligo=
 no funicolare richiesto.

Una Applicazione

scala lunghezze
1:100



Dato l'arco a tre cer=
 niere: A, B, C, caricato dal=
 le forze: $f_1 = 300 \text{ Kg}$; $f_2 = 200 \text{ Kg}$;
 $f_3 = 200 \text{ Kg}$ agenti secondo le
 rette t, s, l, trovare le
 reazioni vincolari e lo sfor=
 zo di taglio in C.

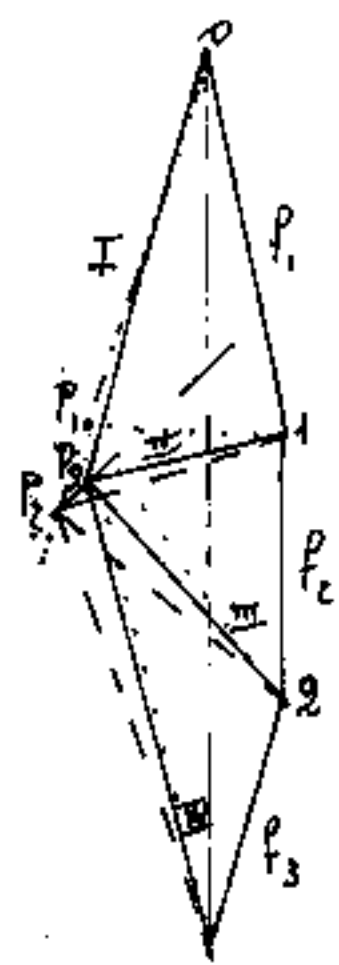
Data la situazione delle
 cerniere rispetto ai cari=
 chi, il I lato deve passare
 per A, il II per C, il IV
 per B. Costruito il poligono

funicolare abbiamo $R_A = 340 \text{ Kg}$ cioè: $V_A = 330 \text{ Kg}$; $H_A = 85 \text{ Kg}$;

$R_B = 370 \text{ Kg}$; $V_B = 356 \text{ Kg}$; $H_B = 100 \text{ Kg}$; $T_c = 155 \text{ Kg}$; $V_c = 40 \text{ Kg}$; $H_c = 150 \text{ Kg}$

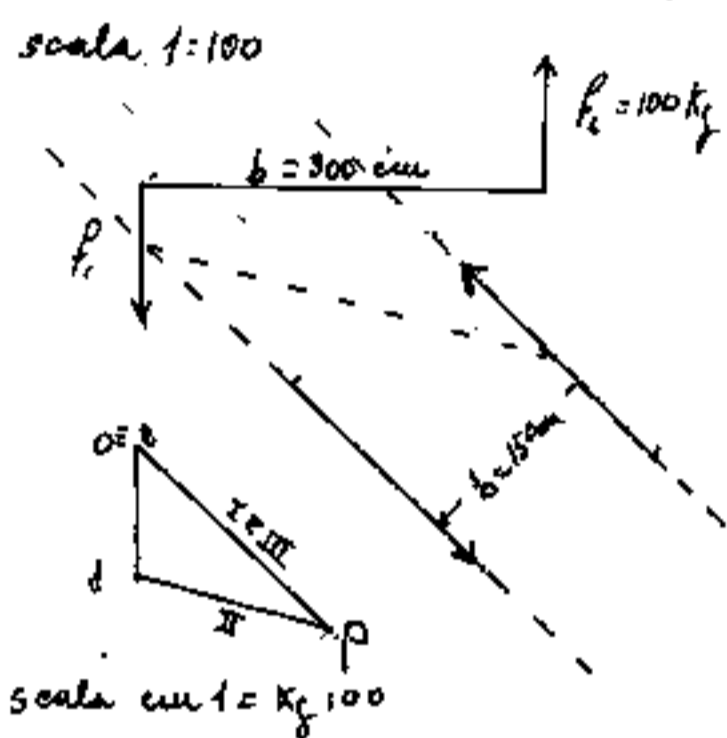
(nei limiti del graficismo)

scala forze
cm 1 = Kg 100



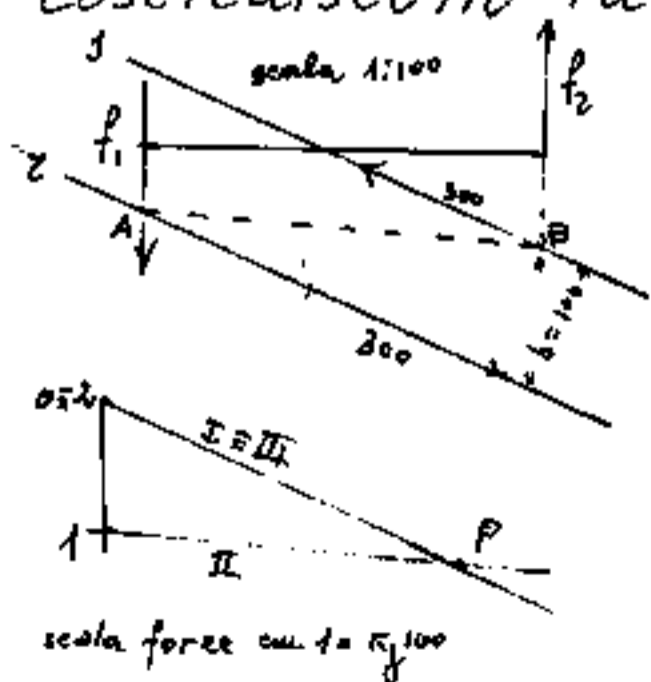
Il poligono funicolare è un sistema equivalente al sistema dei carichi, le intensità debbono essere lette sul poligono delle forze per i carichi, sui raggi proiettanti per gli sforzi sui lati del poligono funicolare.

Ciò consente di trasformare un sistema in un'altro. Per esempio: data la coppia in figura



si vuole trasformarla in una coppia agente secondo le rette inclinate di α con intensità 200 kg . - Costruito il poligono delle forze, si nota che è chiuso cioè il I raggio ed il III sono coincidenti.

riportiamo da $O \equiv 2$ la retta inclinata di α e su di essa, in scala, il $I \equiv III$ raggio di 200 kg , troviamo così il polo P e possiamo costruire il poligono funicolare (a tratti). Il primo e terzo lato costituiscono la nuova coppia di braccio 150 cm .

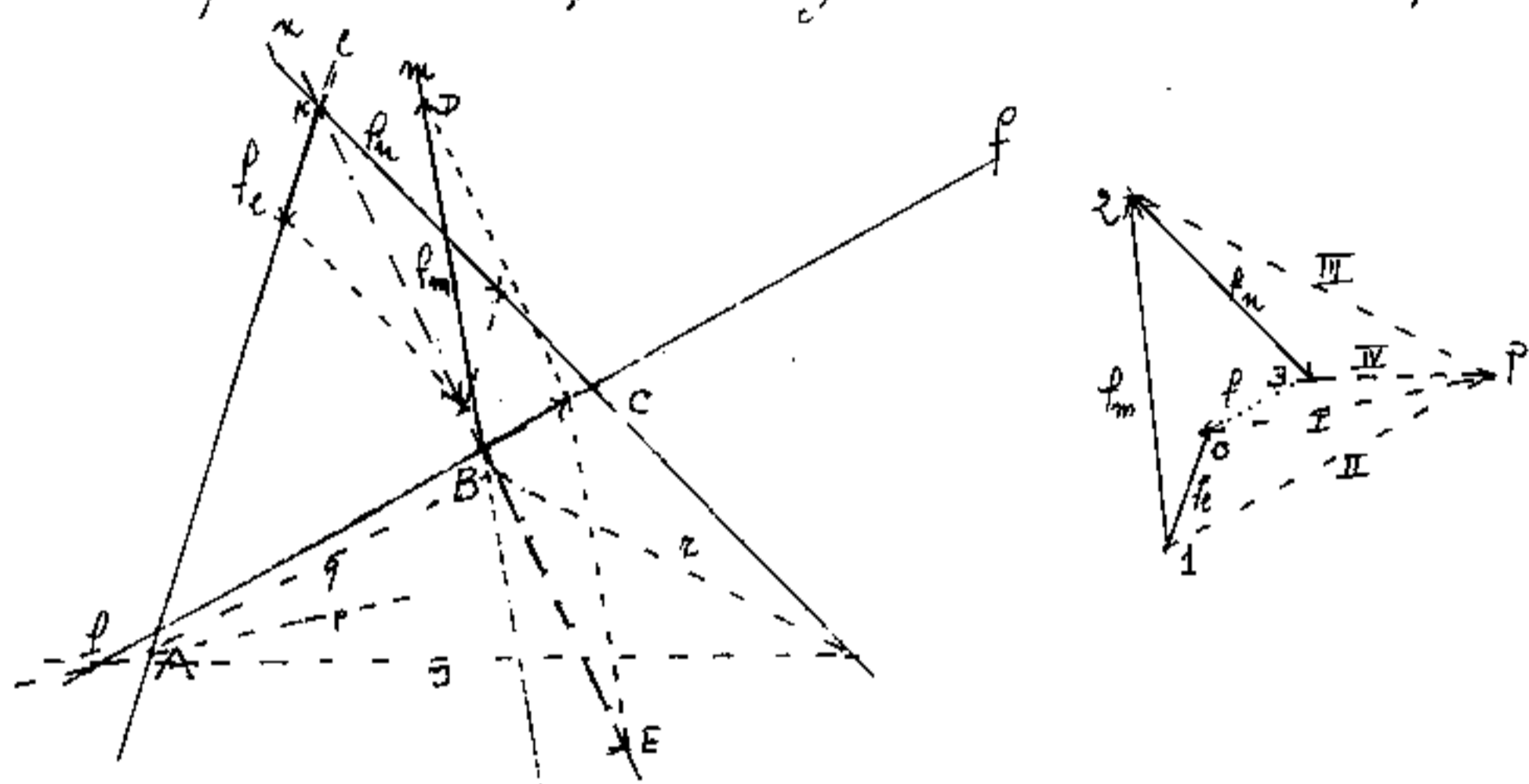


Se invece vogliamo che la nuova coppia abbia per rette di azione r ed s di braccio noto, da $O \equiv 2$ la parallela ad r ed s e da 1 la parallela ad \overline{AB} (II lato) si deter-

mina P e quindi l'intensità del $I \equiv III$ raggio. -

Scomposizione di una forza secondo tre direzioni non concorrenti

Siano l, m, n , le tre rette, (non concorrenti nello stesso punto), secondo le quali deve essere scomposta la forza agente secondo la f .



La " f " incontra l, m, n , nei tre punti A, B, C ; scegliamo uno di questi 3 punti e colleghiamolo col punto comune alle altre due rette.

Sia B il punto che colleghiamo col punto comune a l ed m ; riportiamo di piuma in B la forza f e la scomponiamo secondo n e secondo la tratteggiata; la BE la riportiamo di piuma in K e la scomponiamo in f_m ed f_l .

Qualunque punto scegliamo inizialmente: A, B , oppure C il risultato della scomposizione non cambia, cioè: f_m, f_l, f_n avranno la stessa intensità.

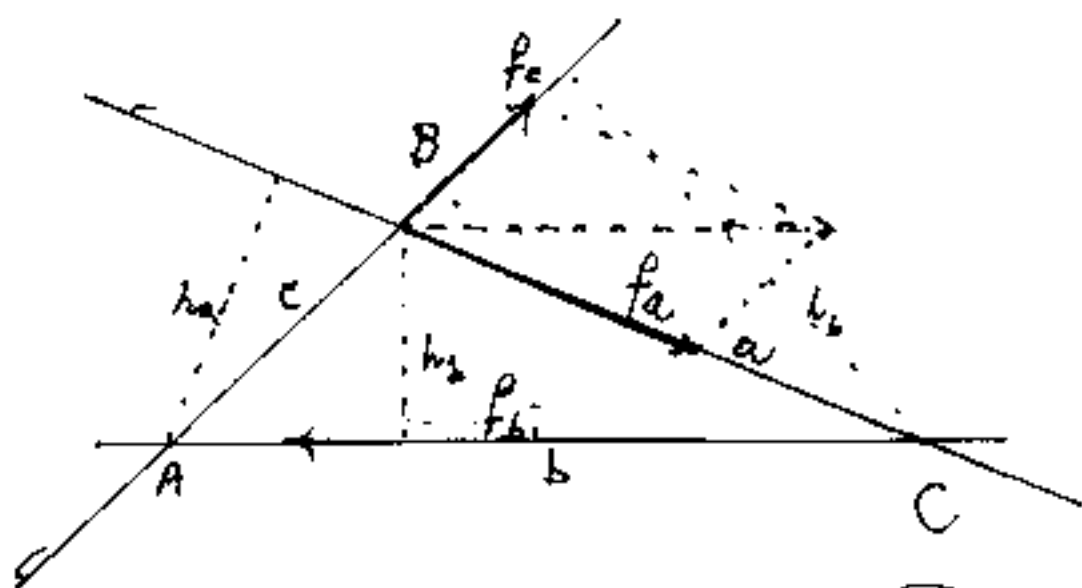
Se delle tre forze: f_e, f_m, f_n , ottenute dalla scomposizione facciamo il poligono delle forze e lo proiettiamo, possiamo costruire un nuovo poligono funicolare, eventualmente condizionato a passare per tre punti, od altri condizionamenti, il poligono funicolare agirà secondo 4 rette $(m+1)$ p, q, r, s le intensità delle forze sarà determinata dai raggi proiettanti: I, II, III, IV ; letti in scala forze. Noteremo che il I e l'ultimo lato del poligono funicolare si incontrano sulla retta f che diventa asse centrale.

Se dei raggi proiettanti facciamo un poligono delle forze e costruiamo un nuovo poligono funicolare, questo avrà 5 lati $(m+1)$ e lo stesso asse centrale f del precedente....

Potremmo continuare, avremo sempre dei sistemi equivalenti.

Scomposizione di un momento secondo tre forze in tre direzioni non concorrenti.

Sia M il momento e sia ABC il triangolo delimitato dalle tre rette. Siano a, b, c , i tre lati del triangolo, e siano: h_a, h_b, h_c le tre altezze relative ai tre



lati. Se dividiamo: $\frac{M}{h_b} = f_b$ otteniamo una forza che agisce sul lato b f_b cui forza parallela passa per B ed ha verso opposto. Se scomponiamo questa secondo "a" e secondo "c" otteniamo le altre due componenti che dovranno avere una intensità pari a:

$\frac{M}{h_a}$ ed $\frac{M}{h_c}$. Cioè: $f_a h_a = f_b h_b = f_c h_c = M =$ doppio dell'area del triangolo di lati: f_a, f_b, f_c .

Poiché il triangolo delle forze è quello delimitato dalle rette di azione le forze sono proporzionali ai lati a, b, c , su cui giacciono: $a h_a = b h_b = c h_c = 2S$
 $2S = KM$ da cui $K f_a = a$; $K f_b = b$; $K f_c = c$.

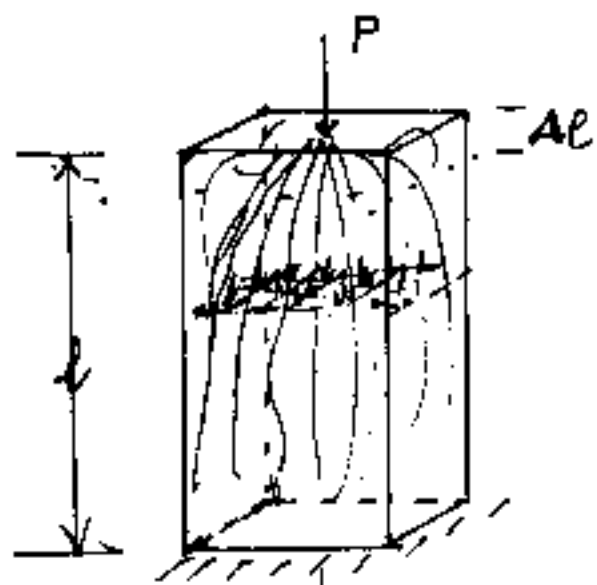
Le sollecitazioni

Si considerano in genere solidi astiformi, ove la lunghezza è preponderante rispetto alle dimensioni della sezione.

Sforzo Normale N

Positivo se di trazione, negativo di compressione.

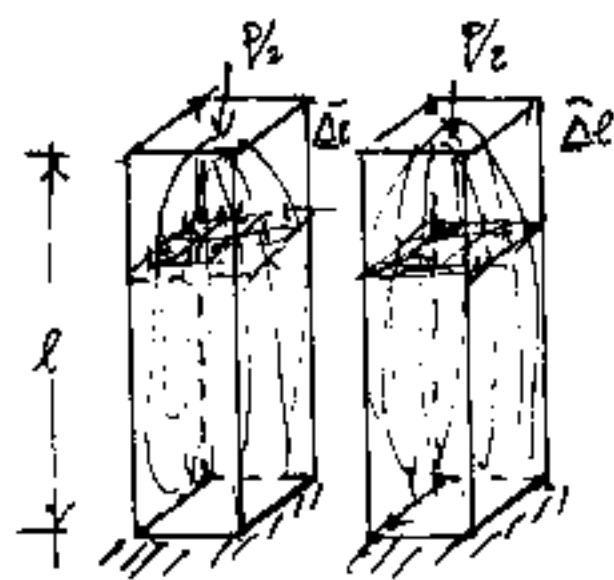
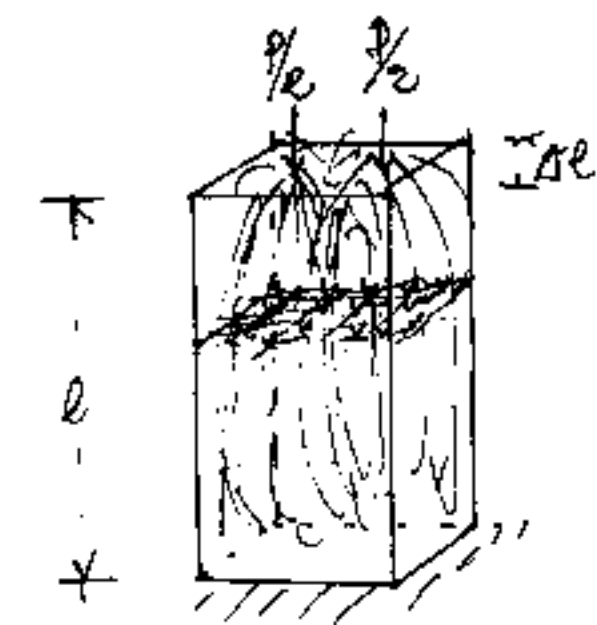
Consideriamo un pilastro soggetto ad un carico concentrato P , assiale e baricentrico nella sezione. Il solido si deforma elasticamente.



Una prima convenzione è che le sezioni si mantengono piane. (È ovvio che la sezione ove è applicato il carico concentrato non si mantiene piana)

Un altro principio detto di Saint-Venant per le travi soggette a carichi nelle sezioni estreme, dice:

"Salvo un breve tratto di trave in prossimità delle sezioni di applicazione del carico, il flusso delle tensioni interne rimane lo stesso comunque si distribuisca il carico nella sezione."



Quando il flusso di tensioni si è distribuito lo sforzo normale N si identifica nel carico P . Chiameremo tensione normale σ il rapporto fra lo sforzo normale N e l'area A della sezione; cioè:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{N}{A}; \quad (\text{espresso in Kg/cm}^2)$$

In effetti σ è la tensione media anche se la riteniamo costante nella sezione.

La deformazione elastica principale è l'allungamento o l'accorciamento della trave o asta soggetta a sforzo normale.

(Tratteremo a parte le contrazioni trasversali)

Indichiamo con Δl la variazione di lunghezza che sarà direttamente proporzionale ad N ed alla lunghezza ed inversamente proporzionale all'area e ad un modulo "E", dipendente dal materiale di cui è costituita l'asta, ed è chiamato:

modulo di elasticità normale. (Kg/cm^2)

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

però Δl è poco significativo sullo stato di tensione del solido, infatti un filo di ferro con diametro 2 mm,

lungo 100 metri la cui sezione è $0,0314 \text{ cm}^2$, si allunga di 0,1 cm con $N = \frac{0,1 \cdot 0,0314 \cdot 2 \cdot 100.000}{10000} \approx 0,6597 \text{ Kg}$ cioè con una tensione di $\approx 21 \text{ Kg/cm}^2$

Lo stesso filo di ferro lungo 50 cm per farlo allungare di 0,1 cm, occorre uno sforzo normale di $\approx 132 \text{ Kg}$ cioè una tensione $\approx 4200 \text{ Kg/cm}^2$ che, per il ferro ordinario, supera la rottura.

Quindi anziché Δl è molto più significativo l'allungamento (o accorciamento) per unità di lunghezza ($\frac{\text{cm}}{\text{cm}}$), si indica con ϵ e si chiama dilatazione:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Dividendo per l l'espressione di Δl :

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{EA} \quad \text{e sostituendo}$$

$\frac{N}{A} = \sigma$ otteniamo:

$$\frac{\Delta l}{l} = \epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

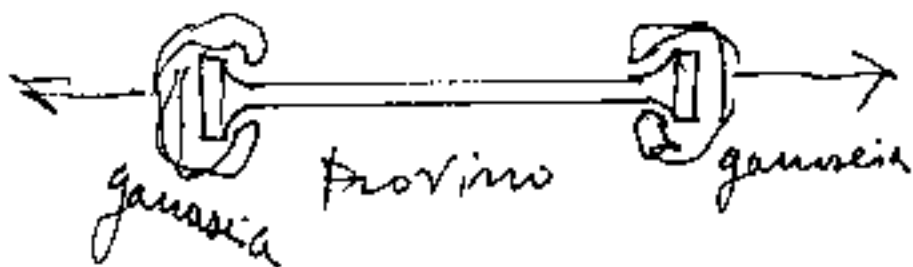
È questa la legge di Hooke che afferma essere proporzionali le tensioni e le dilatazioni. La formula può scriversi:

$$\sigma = E \epsilon \quad ; \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

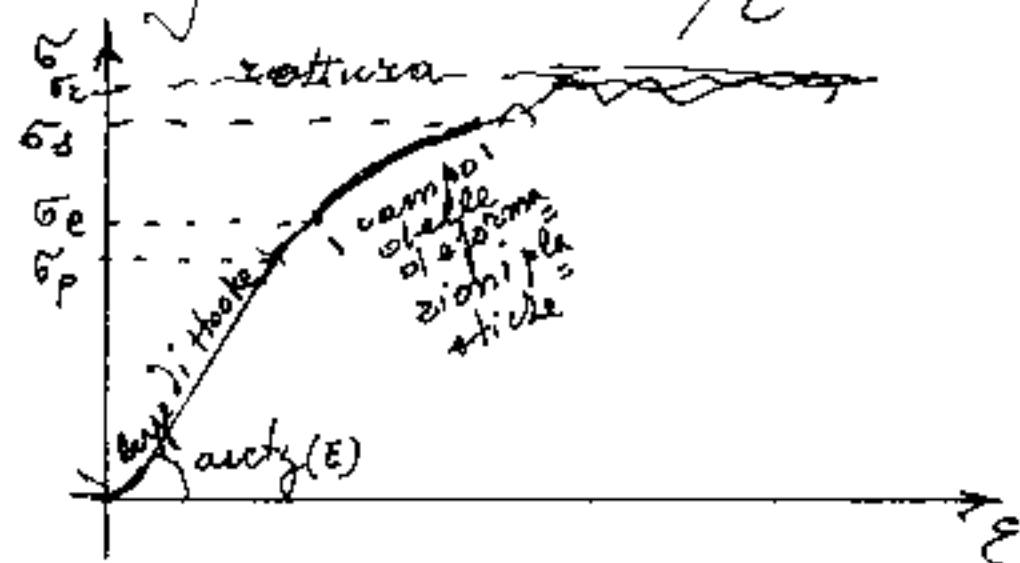
La legge di Hooke è fondamentale in tutta la scienza delle costruzioni.

Consideriamo un provino in ferro per le prove di trazione.

Un tempo i provini in ferro avevano, lunghezza e sezione fissati, gli estremi erano raccordati da ingrossamenti sui quali agivano le ganasce della macchina che provoca lo sforzo di trazione:



Molte macchine erano fornite di un sistema scrivente che graficizzava il diagramma σ/ϵ .



Riportiamo il grafico di un provino in ferro.

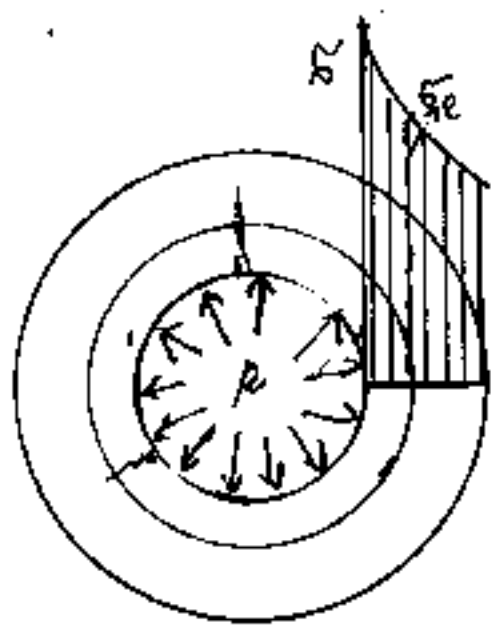
σ_p = limite di proporzionalità (limite della legge di Hooke);

σ_e = limite di elasticità (lasciando la tensione il provino torna alla configurazione iniziale senza che si siano prodotte deformazioni permanenti); σ_s = limite di snervamento

Dal limite di elasticità, al limite di snervamento, si ha il campo delle deformazioni plastiche nel quale si verificano le deformazioni permanenti, utili per le lavorazioni delle lamiere per carrozzerie, per fare pentole, tappini metallici ecc.

Avendo una striscia metallica vincolata, è facile vedere fino a quale carico rimane inalterata e da quale carico risulta deformata permanentemente.

Il fatto che oltre σ_e si verificano deformazioni permanenti è stato utilizzato per processi di autoblindatura nelle boeche da fuoco dei cannoni e nei tubi delle condotte forzate.



Un tubo soggetto ad una pressione interna p ha una tensione σ distribuita sulle circonferenze concentriche come il diagramma a fianco, ove è indicata la circonferenza soggetta a σ_e (limite di elasticità); il tubo interno si deformerà plasticamente restando di diametro maggiore, tolta la pressione p , il tubo esterno, rimasto elastico, comprimerà il tubo interno. (Autoblindatura)

Non solo, ma la deformazione plastica, implica anche un incrudimento del materiale, (di ciò ci si può rendere conto piegando un filo di ferro, difficilmente riusciremo a raddrizzarlo nel punto della piegatura, si raddrizzerà a fianco, perché in quel punto il materiale è incrudito (più duro)).

Quindi la porzione interna del nostro tubo, dopo aver tolto la pressione generata dal fluido contenuto nel tubo, risulta di maggior diametro incrudita e precompressa dall'azione della porzione esterna di tubo, che, rimasta elastica, vorrebbe tornare al diametro iniziale.

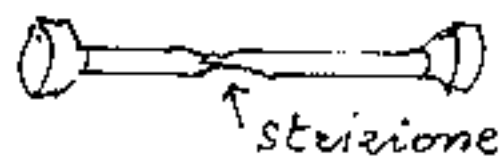
Rimettendo ora il fluido in pressione nel tubo, inizialmente dovrà sviluppare una pressione per riportare a zero lo sforzo normale della parte interna precompressa, poi comincerà a tenderla. È evidente il miglioramento delle prestazioni dovute all'autoblindatura.

La blindatura può essere eseguita con due tubi coassiali, quello esterno montato a caldo, in modo che raffreddandosi comprima l'interno.

Dopo la fase di deformazione plastica, superata la σ_s (limite di snervamento), le fibre del materiale cominciano a compersi, le deformazioni diventano notevoli, anche non aumentando il carico, perché ad ogni rottura diminuisce l'area resistente e quindi aumenta la deformazione che provoca nuove rotture. Se il diagramma σ/ϵ è fatto automaticamente fra σ_s e σ_r (rottura) la penna scrivente fa una serie di ondulazioni prima che si verifichi la rottura.

È bene precisare che il diagramma σ/ϵ è diverso per i diversi materiali ed è anche diverso fra prove di trazione e prove di compressione.

Nelle prove di trazione, il provino, poco prima della rottura, presenta una sezione di area notevolmente ridotta; il fenomeno è detto "strizione"



Nelle prove di compressione l'area della sezione tende ad aumentare e diventa notevole per materiali plastici (un cilindro di creta molle compresso gonfia lateralmente)

La sollecitazione a sforzo normale (N) è fondamentale perché dimostreremo che qualunque sia la sollecitazione o la somma di sollecitazioni composte, il flusso delle tensioni all'interno del materiale avviene secondo linee dette isostatiche che sono solo di trazione o di compressione; punto per punto perpendicolari fra loro - le cui direzioni in quel punto del materiale sono dette: direzioni principali e le tensioni σ che agiscono in quel punto sono dette: tensioni principali e sono la massima e la minima in quel punto.

Anche le prove di laboratorio sui materiali sono pressoché esclusivamente di trazione e di compressione, per individuare la tensione di rottura σ_c che divisa per un certo grado g di sicurezza fornisce la $\sigma_{ammisibile} = \frac{\sigma_c}{g} = k$ spesso indicata con $k = \sigma_{amm}$.

In merito vi sono disposizioni di legge alle quali il progettista, il costruttore, ed il collaudatore debbono attenersi.

(Anche se talvolta, vecchie disposizioni risultano scientificamente più valide delle nuove)

Anche il modulo E di elasticità normale è stato determinato sperimentalmente (c.f.r. G. Colometti - Scienza delle Costruzioni - Edizioni Scientifiche Einaudi - 1953 - (volume I cap. III pag. 408))
 I valori mediamente accettati sono riportati in tutti i manuali tecnici.

Ferro - acciai $E \cong 2100000 \text{ Kg/cm}^2$

ferro $\bar{\sigma}_c \cong 3000 \div 4500 \frac{1}{m} \cong 0,29$

acciaio $\bar{\sigma}_c \cong 3500 \div 7000 \frac{1}{m} \cong 0,30$

gli acciai al nichel-cromo ed al silicio magnesio ed altri hanno $\bar{\sigma}_c > 10000 \text{ Kg/cm}^2$

Rame $E \cong 1200000 \div 1300000 \text{ Kg/cm}^2$

$\bar{\sigma}_c$ (trazione) $\cong 2000 \div 5000 \text{ Kg/cm}^2 \frac{1}{m} \cong 0,35$

$\bar{\sigma}_c$ (compressione) $\cong > 15000 \text{ Kg/cm}^2$

Nichel $E \cong 2300000 \text{ Kg/cm}^2$

$\bar{\sigma}_c \cong 3500 \div 8000 \text{ Kg/cm}^2 \frac{1}{m} \cong 0,325$

Zinco $E \cong 800000 \div 900000 \text{ Kg/cm}^2$

$\bar{\sigma}_c \cong 600 \div 2000 \text{ Kg/cm}^2$

Legnami

Abete $E \cong 90000 \div 95000 \text{ Kg/cm}^2$

$\bar{\sigma}_c$ (trazione) $= 600 \div 700 \text{ Kg/cm}^2$

$\bar{\sigma}_c$ (compressione) $= 250 \div 300 \text{ Kg/cm}^2$

Pino $E \cong 100000 \text{ Kg/cm}^2$

$\bar{\sigma}_c$ (trazione) $= 200 \text{ Kg/cm}^2$

$\bar{\sigma}_c$ (compressione) $= 350 \text{ Kg/cm}^2$

Quercia $E \approx 110000 \text{ Kg/cm}^2$

σ_z (trazione) $\approx 950 \text{ Kg/cm}^2$

σ_z (compressione) $\approx 400 \text{ Kg/cm}^2$

Faggio $E \approx 160000 \text{ Kg/cm}^2$

σ_z (trazione) $\approx 1050 \text{ Kg/cm}^2$

σ_z (compressione) $\approx 400 \text{ Kg/cm}^2$

Noce $E \approx 140000 \text{ Kg/cm}^2$

σ_z (trazione) $\approx 850 \text{ Kg/cm}^2$

σ_z (compressione) $\approx 400 \text{ Kg/cm}^2$

Pioppo $E \approx 75000 \text{ Kg/cm}^2$

σ_z (trazione) $\approx 550 \text{ Kg/cm}^2$

σ_z (compressione) $\approx 250 \text{ Kg/cm}^2$

Pietrame $E \approx 25000 \div 250000 \text{ Kg/cm}^2$

Arenaria

$\sigma_z \approx 10 \div 40$ "

$\sigma_z \approx 500 \div 1000$ "

chimiche

$E \approx 150000 \div 1000000 \text{ Kg/cm}^2$

$\sigma_z \approx 20 \div 60$ "

$\sigma_z \approx 1000 \div 1800$ "

Mattoni

$E \approx 50000 \div 150000 \text{ Kg/cm}^2$

σ_z (compressione) $100 \div 500 \text{ Kg/cm}^2$

Vetro

$E \approx 700000 \div 800000 \text{ Kg/cm}^2$

σ_z trazione $\approx 150 \div 300 \text{ Kg/cm}^2$

σ_z compressione $\approx 400 \div 1500 \text{ Kg/cm}^2$

Setto K il carico di sicurezza o tensione ammissi

bile: $\sigma_{amm.} = K$ avremo:

$$\boxed{A = \frac{N}{K}} = \text{formula di progetto}$$

$$\boxed{\frac{N}{A} = \sigma \leq K} = \text{formula di verifica}$$

Formule valide per travi tese, o per travi tozze se compresse.

La dizione travi tozze travi snelle sarà meglio trattata con l'instabilità elastica, per ora consideriamo tozze le travi o aste (comprese) le cui lunghezze non superino ≈ 15 volte le dimensioni della sezione. un pilastro $0,30 \times 0,30$ m. diventa snello quando la sua lunghezza supera i m. 4,5, un altro pi_lastro, della stessa area di sezione però $0,2 \times 0,65$ m. diventa snello per $l > \underline{3}$ m.

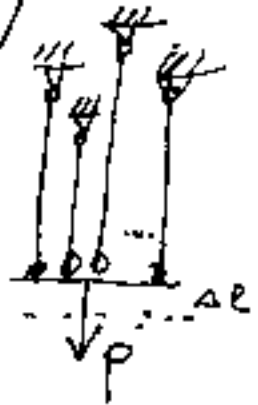
La rigidezza a sforzo normale e la ripartizione dei carichi nelle aste

L'espressione: $\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{N}{\left(\frac{EA}{l}\right)} = \frac{N}{w_N}$

ci dice che la deformazione Δl è direttamente proporzionale ad N (sforzo Normale) ed inversamente proporzionale a $w_N = \frac{EA}{l}$ detta rigidezza a sforzo normale.

Quindi la rigidezza a sforzo normale, (w_N) dipende solo dalle caratteristiche dell'asta (Area della sezione e lunghezza) e dal materiale di cui è fatta (E), ed è l'impedimento alla deformazione.

Vedremo che ogni sollecitazione ha una propria espressione della rigidezza che contrasta la deformazione di quella sollecitazione.



Se si hanno n aste di diversa rigidezza $w_{N_1}, w_{N_2}, \dots, w_{N_n}$ che sostengono il peso P e desideriamo sapere lo sforzo normale di ciascuna delle n aste, poiché Δl sarà uguale per tutte le aste, poiché $\sum_{i=1}^n N_i = P$ avremo che lo sforzo nella generica asta i sarà: $N_i = \frac{P w_{N_i}}{\sum_{i=1}^n w_{N_i}}$ ove: $\left(\frac{P}{\sum_{i=1}^n w_{N_i}} = \Delta l = \frac{N_i}{w_{N_i}}\right)$.

Quindi la rigidezza di un'asta a sforzo normale può determinarsi: $\boxed{W_n = \frac{N}{\Delta l}} \text{ (Kg/cm)}$

infatti: $\frac{EA}{l} = \frac{\text{Kg/cm}^2 \cdot \text{cm}^2}{\text{cm}} = \text{Kg/cm}$.

Una molla che avesse rigidezza 2 Kg/cm potrebbe essere utilizzata come dinamometro tarando i Kg ogni mezzo centimetro nella scala graduata.

Un comune elastico che con 100 gr si allunga di un centimetro (rigidità $= 0,1 \text{ Kg/cm}$) è affiancato ad un tondino di ferro $\phi 10_{\text{mm}}$ lungo $m 4$ cioè

$$0,5^2 \pi = \text{Area} = 0,785398 \quad ; \quad W_n = \frac{2100000 \cdot 0,785398}{400} = 4123,34$$

se entrambi sostengono il peso di una tonnellata $= 1000 \text{ Kg}$ quanto di questo peso tocca a ciascuna asta. $\leq W_n = 4123,34 + 0,1 = 4123,44 \quad ; \quad \frac{1000}{4123,44} = 0,24252$

$$0,2425 \times 0,1 = 0,024252 \approx \text{gr. } 24,25 \text{ sopportati dall'elastico}$$

$$0,2425 \times 4123,34 = 999,9757 \text{ e: } \frac{999,975748}{0,024252} =$$

La natura grava di più il più forte, quello che oppone più resistenza alla deformazione

(Un antico proverbio dice: "Iddio manda il freddo secondo i panni")

$$\text{La deformazione: } \Delta l = \frac{1000 \cdot 400}{2100000 \cdot 0,785398} = 0,24252 \text{ cm}$$

la presenza dell'elastico influenza l'arrotondamento della 5^a cifra decimale.

Le Dilatazioni termiche

Lo sforzo normale può generarsi anche per variazioni di temperatura in aste iperstatiche. È noto che i vari materiali hanno variazioni di volume al variare della temperatura.

A parte l'acqua che ha il massimo di densità a 4°C. (cio' che provoca lo sgretolamento superficiale della pietra serena, in particolare le soglie esposte all'intemperie, infatti la pioggia penetrando per capillarità nei microcretti che si sono prodotti con la scalpellatura, se successivamente gela, aumenta di volume e preme sulla pietra aumentando il microcretto e generando di nuovi fino a staccare gli strati superficiali.)

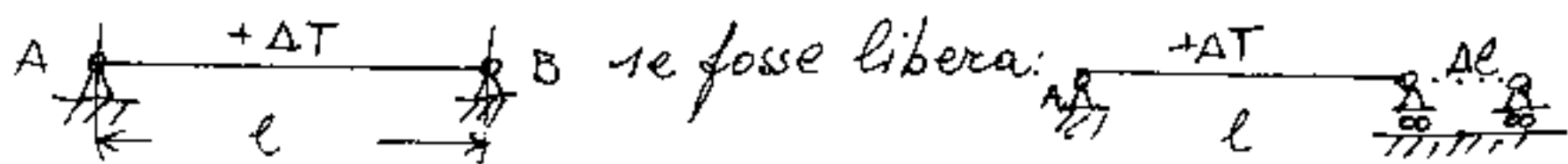
Gli altri materiali hanno un coefficiente di dilatazione medio, che può essere di dilatazione lineare: $\frac{cm}{cm^{\circ}C}$ per grado celsius valido da 0° +100° oppure cubico ($\frac{cm^3}{cm^3^{\circ}C}$) valido a temperature ordinarie $\approx 20^{\circ}C$.

Coefficienti di dilatazione lineare α .

Acciaio-ferro	0,000012	legno (= fibre)	0,000004
Alluminio	0,000024	" (⊥ ")	0,000058
Argento	0,000020	Nichel	0,000013
Invar	0,0000015	Oro	0,000014
mattoni	0,000006	porcellana	0,000003
		Rame	0,000017

Altri coefficienti possono trovarsi sui manuali tecnici.

Consideriamo un'asta vincolata agli estremi che subisca il salto termico ΔT ,



avrebbe un allungamento o accorciamento Δl

ove: $\Delta l = \alpha l \Delta T$ per riportarla a posto

occorre uno sforzo normale N che provochi, di

verso opposto, lo stesso $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$; cioè:

$$\frac{Nl}{EA} = \alpha l \Delta T \Rightarrow \frac{\sigma}{E} = \alpha \Delta T : \boxed{\sigma = E \alpha \Delta T}$$

per il ferro $E = 2100000$; $\alpha = 0,00012$ si ha

$$\underline{E \alpha = 25,2} = \frac{\sigma}{\Delta T} = \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

vuol dire che un'asta in ferro iperstatica

ha una variazione di tensione di $25, \text{Kg/cm}^2$ per

ogni grado di variazione termica; se consideriamo

che la $\sigma_{amm} = \kappa = 1200 \text{Kg/cm}^2$ per il ferro ordinario

basta un salto termico di $47,619$ gradi Celsius,

facilmente raggiungibile fra le temperature invernali

li e le temperature in pieno sole estivo.

Un altro esempio si ha quando due aste uguali

affiancate, vincolate agli estremi, per una

di esse si verifica il salto termico ΔT . In questo caso le aste avranno lo stesso Δl però di segno contrario:

$$\alpha \Delta T - \frac{N}{EA} = \frac{N}{EA}$$

$$\boxed{\epsilon = \frac{N}{A} = \frac{E \alpha \Delta T}{2}}$$

Se le due aste hanno rigidità diversa w_1 e w_2 avremo:

$$\alpha l \Delta T - \frac{N}{w_1} = \frac{N}{w_2}$$

$$\alpha l \Delta T = N \left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} \right)$$

$$\boxed{N = \frac{w_1 \cdot w_2}{w_1 + w_2} \alpha l \Delta T}$$

La variazione di lunghezza, Δl , può essere generata meccanicamente, per esempio un bullone di rigidità w_1 si avvitava, dalla posizione di contatto neutro su un corpo di rigidità w_2 , con $\frac{1}{m}$ di giro del dado, se p è il passo della vite avremo

$$\frac{p}{m} - \frac{N}{w_1} = \frac{N}{w_2}$$

da cui lo sforzo normale del bullone teso e del corpo compresso è:

$$\boxed{N = \frac{w_1 \cdot w_2}{w_1 + w_2} \left(\frac{p}{m} \right)}$$

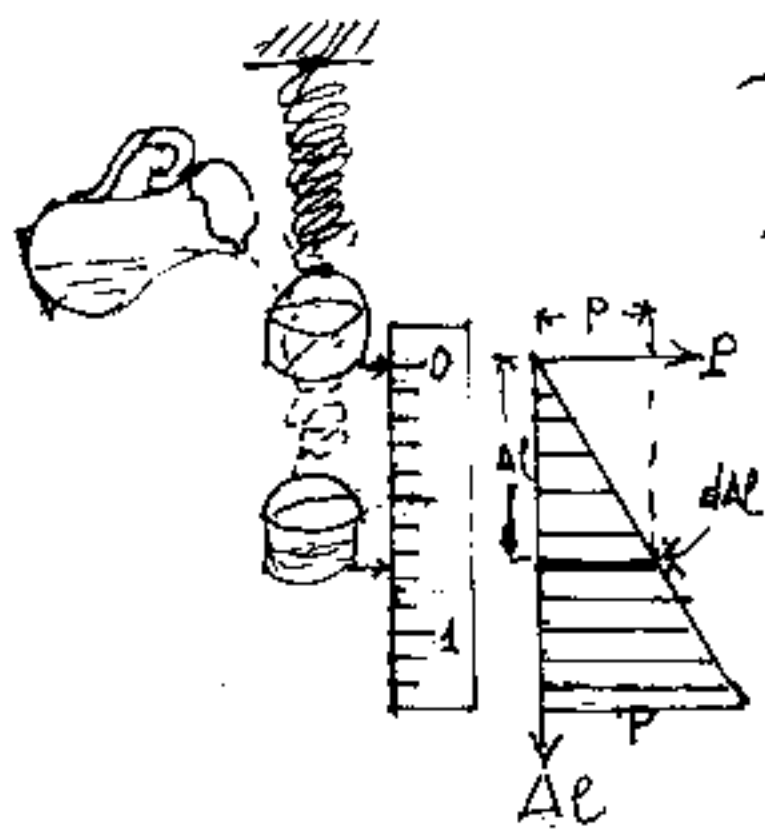
Il lavoro elastico

Il lavoro meccanico può equipararsi al sollevamento di un peso (Kg) all'altezza h (m) rispetto alla quota di partenza. Il lavoro si misura in Kgm .

Inversamente un peso P che si trovi ad altezza h dispone di una energia potenziale gravitazionale capace di trasformarsi in lavoro meccanico minore del lavoro meccanico necessario a sollevare il peso, per la quota di energia dispersa in calore per gli inevitabili attriti.

Consideriamo un elastico, o una molla, o un qualunque corpo, che sostenga un recipiente vuoto, munito di indice che, inizialmente segna zero su apposita scala graduata per misurare il Δl del

sostegno quando si immettono pesi nel recipiente. A fianco riportiamo il diagramma che ha in ascissa i pesi P ed in ordinata le deformazioni Δl . Se versiamo, goccia a goccia, dell'acqua nel recipiente, il



peso lo farà discendere, e, in una posizione generica

il lavoro infinitesimo dovuto a $d(\Delta l)$. Integrando abbiamo l'area del triangolo, ed essendo $P = N$

Lavoro elastico $L_e = \frac{N \cdot \Delta l}{2} = \boxed{L = \frac{N^2 l}{2EA}}$ che è l'energia elastica accumulata nel solido affinché questo, soggetto allo sforzo normale N e dilatato di $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$, possa sostenere il peso P .

L'energia elastica accumulata è energia potenziale, infatti, sganciando il peso, il corpo tornerà violentemente allo stato di quiete.

Una molla compressa esercita una azione spingente, una molla tesa esercita una azione trattenente; queste azioni sono chiamate forze in effetti il loro valore è solo istantaneo, poiché appena esercitano qualsiasi lavoro esterno, la energia elastica interna diminuisce e con essa l'intensità dell'azione (forza).

Quindi l'equilibrio: azione - reazione esiste quando il corpo agente, cede una parte della sua energia al corpo che lo sostiene affinché possa generare una azione uguale e contraria.

(Non esistono i "corpi rigidi", esistono invece corpi più o meno elastici; un comune elastico lungo ≈ 25 cm della sezione di mm. 2×1 ; con un peso di ≈ 150 gr. si allunga: $\Delta l \approx 40$ mm;

Se fissate in alto un estremo di questo elastico, che sostiene il peso, e provate con una mano a sollevare il peso di qualche centimetro, noterete che lo sforzo iniziale è praticamente nullo, poi via via che sollevate il peso esso graverà sempre di più sulla mano, e solo quando l'elastico ritorna indeformato, avrete sulla mano l'intero peso. Quindi è l'entità della deformazione che dà la cosiddetta forza di sostegno; altro che corpo rigido! Non solo, avendo sollevato il peso fino a sostenere l'intero carico se h è l'altezza ($l = Ae$) che avete percorso, il lavoro è $\frac{Ph}{2}$ perché non era l'intero peso per tutto il percorso, ma partiva da zero e l'intero peso era solo alla fine).

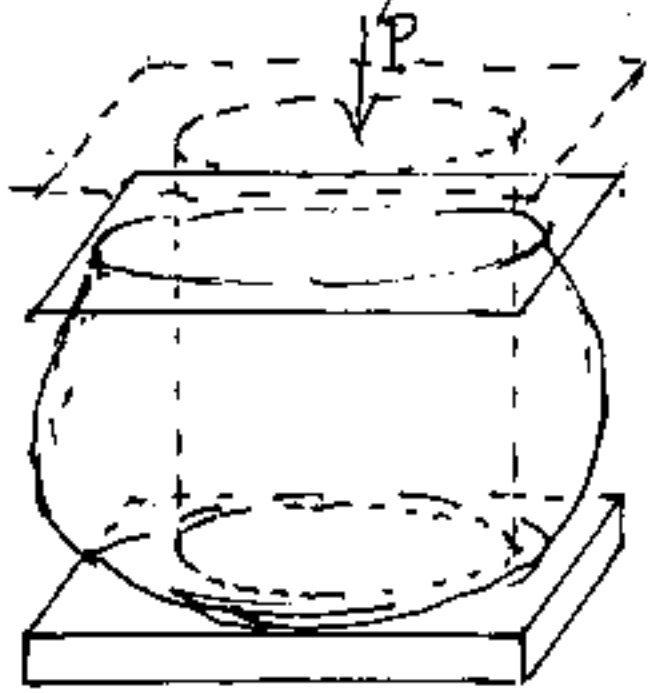
Quindi un vincolo allo sforzo normale di trazione o di compressione, si deforma fino ad immagazzinare l'energia elastica capace di produrre la reazione uguale e contraria!

L'osservazione è acuta e merita di essere esaminata più dettagliatamente nel concetto di energia interna di un corpo.

Le contrazioni trasversali

La legge di Hooke: $\epsilon = \frac{1}{E} \sigma$, non prevede deformazioni trasversali, solo longitudinali. D'altra parte se prendiamo un cilindretto di creta molle, da formare e lo comprimiamo, assialmente, con due tavolette rigide, (per ripartire le tensioni), notiamo uno sporcamento trasversale, cioè un aumento del diametro oltreché un accorciamento della lunghezza. S.

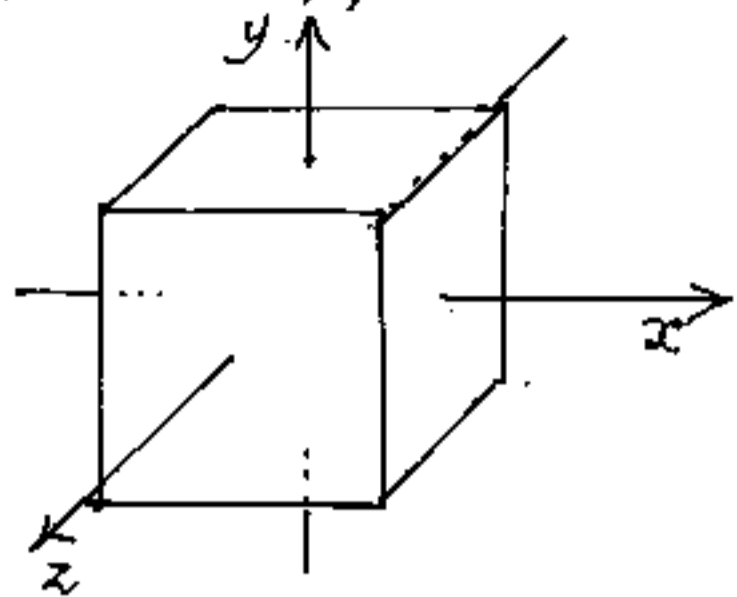
Se l'attrito fra tavolette e sezioni del cilindro è superiore all'attrito interno, la massima dilatazione si ha a metà altezza. Con opportuna lubrificazione fra creta e tavoletta è possibile ottenere che la deformata sia ancora un



cilindro (accorciato e di maggior diametro)

Il Poisson studiò le contrazioni trasversali, a tal fine considerò un cubetto di materiale compresso fra due

facce opposte, a due a due con carichi diversi.



Poiché' azioni dello stesso segno agenti sulle facce laterali provocano una diminuzione della deforma-

zione assiale (cioè un aumento della resistenza, per questo si cerchiavano le colonne. Del resto, se consideriamo il nostro cilindretto di creta molle posto in un barattolo di latta, dello stesso diametro ed a perfetta tenuta, se con un pistone comprimiamo la creta, non si ha schiacciamento, prima che venga rotto l'involucro metallico, ovviamente la resistenza del cilindretto di creta è molte volte maggiore se è dentro un cilindro metallico di quel diametro.)

È bene subito chiarire che la resistenza di un materiale di modulo di elasticità E è possibile riferirla alle tensioni $\sigma < \sigma_{amm}$ od alle $\epsilon < \epsilon_{amm}$.

per Poisson abbiamo:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m} \right) \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} \left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right) \end{aligned}$$

si noti che le formule di Poisson sono anche la generalizzazione della formula di Hooke

$$\epsilon = \frac{1}{E} \sigma$$

per cui: $\left. \begin{array}{l} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right) \\ \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m} \right) \\ \left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right) \end{array} \right\}$ dette tensioni ideali σ_{id} .

per la verifica si ha: $\sigma_{id} \leq \sigma_{amm.}$

Il coefficiente " $\frac{1}{m}$ " detto coefficiente di Poisson è stato determinato sperimentalmente da vari studiosi (vedi Colometti S. VDI Scienza delle Costruzioni - ed. Einaudi 1953)

per il ferro (mediamente) $\frac{1}{m} = 0,29$

per l'acciaio (") $\frac{1}{m} = 0,29$

per il rame (") $\frac{1}{m} = 0,35$

Il Belluzzi considera m variabile fra $\frac{10}{3}$ e 4

cioè: $\frac{1}{m} = \frac{1}{4} \div \frac{3}{10} = 0,25 \div 0,3$ —

Vedremo nelle sollecitazioni a Taglio e torsione, l'importanza di " m " nell'elasticità tangenziale. Definito G il modulo di elasticità tangenziale: $G = \frac{m}{2(m+1)} E$ ove

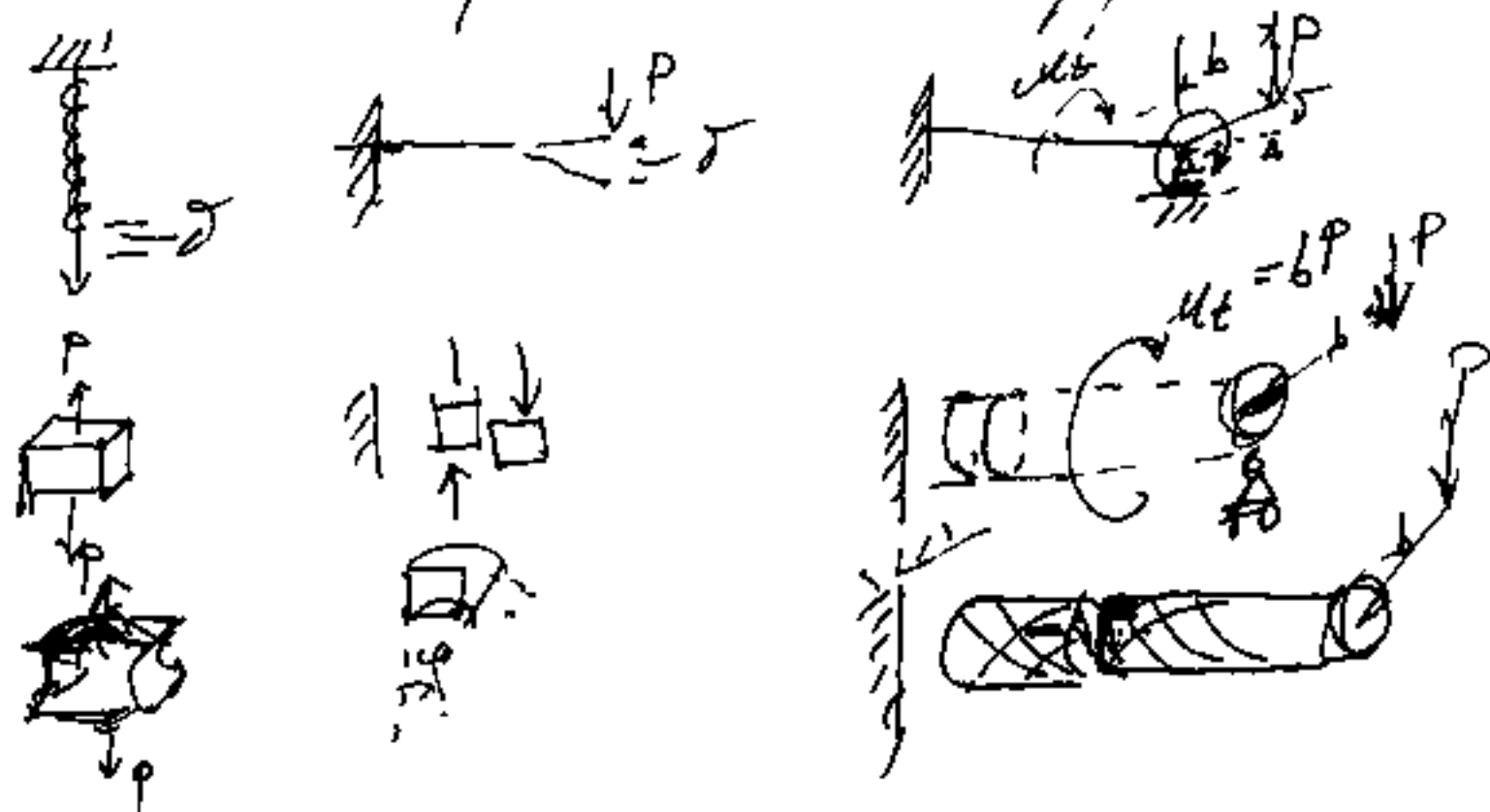
E = modulo di elasticità normale.

La deformazione implica movimento.

I moti sono di due tipi: traslativo e ruotativo da ciò le equazioni canoniche della statica: $\sum \bar{F} = 0$; $\sum M = 0$

La deformazione apparente è la deformazione esterna, connessa alla deformazione interna, e la considerazione di quest'ultima in una sezione del solido ha portato a definire le sollecitazioni.

Per rendere più comprensibile la questione consideriamo alcune modalità per sostenere il peso P e supponiamo sia δ lo spostamento del suo punto di applicazione:

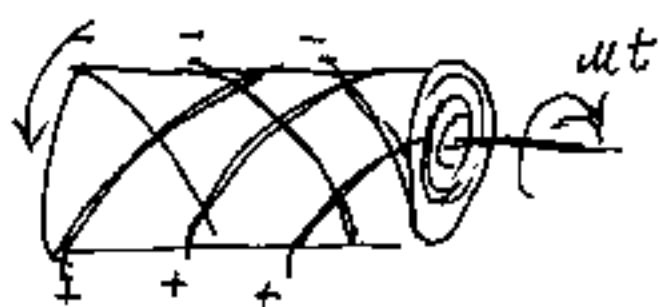


Il lavoro elastico "esterno" compiuto da P $L = \frac{P\delta}{2}$
ed è lo stesso nei tre casi essendo costante P e δ .
Nel I caso è un allungamento, che può anche

avere una contrazione trasversale.

Nel II caso si ha inflessione, cioè rotazione delle sezioni e scorrimento dovuto al taglio.

Nel III caso che abbiamo voluto ridurre alla pura torsione, i dischetti delle sezioni scorrono l'uno sull'altro e non apparirebbe lo sforzo normale,



ma se riguardiamo il solido come costituito da tante superfici cilindriche coassiali, (come i tronchi degli alberi) formate queste da due serie di fibre ad elica, inclinate $\pm 45^\circ$ rispetto all'asse, notiamo che, col verso in figura le fibre + risultano tese, le fibre - risultano compresse.

Però, come abbiamo visto al capitolo del teorema di trasposizione o di Huygens, oltre a fibre tese e compresse, un solido, ha reazioni a deformarsi anche per sforzi tangenziali.

Comunque l'insieme delle deformazioni interne (di cui si apprezza solo la conseguente configurazione esterna) implica un immagazzinamento di energia che equivale al lavoro esterno del carico agente.

Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria, il lavoro esterno equivale alla energia potenziale elastica interna: $\phi = \int \varphi dv$.
 se noi consideriamo che, nel caso generale, lo stato di deformazione elastica può dipendere da 21 coefficienti avremo: che i 21 coefficienti possono esprimersi:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \epsilon_x^2} ; \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \epsilon_y^2} ; \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \epsilon_z^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_y} ; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_z} ; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \epsilon_y \partial \epsilon_z}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \epsilon_{xz} \partial \delta_{xy}} ; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \epsilon_{xz} \partial \delta_{xz}} ; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \epsilon_x \partial \delta_{yz}}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \epsilon_y \partial \delta_{xy}} ; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \epsilon_y \partial \delta_{xz}} ; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \epsilon_y \partial \delta_{yz}}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \epsilon_z \partial \delta_{xy}} ; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \epsilon_z \partial \delta_{xz}} ; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \epsilon_z \partial \delta_{yz}}$$

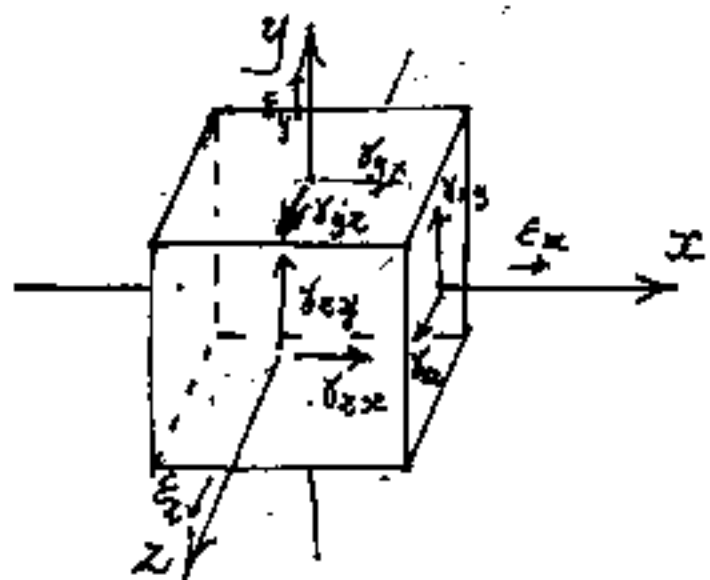
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \delta_{xy} \partial \delta_{xz}} ; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \delta_{xy} \partial \delta_{yz}} ; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \delta_{xz} \partial \delta_{yz}}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma_{xy}^2} ; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma_{xz}^2} ; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma_{yz}^2}$$

Questi 12 coefficienti sono nulli per corpi isotropi perciò sono anche chiamati parametri della elasticità dissimmetrica.

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$; sono le tre dilatazioni nelle direzioni degli assi.

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$; sono i tre scorrimenti sulle facce normali agli assi, ma occorre ricordare che per il principio dell'inversione degli indici: $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$; $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$; così possiamo vedere come il primo indice è la giacitura della faccia su cui avviene lo scorrimento, il secondo indice la direzione dello scorrimento supposto fermo il cubetto base.



Per capire le impostazioni base della teoria dell'elasticità occorre familiarizzarsi col concetto di "derivata parziale" (vedi vol III)

quando la variazione di una grandezza φ è provocata da diverse variabili, la sua variazione infinitesima $d\varphi$ sarà espressa dal suo differenziale totale ove le derivate parziali sono i coefficienti moltiplicatori delle variazioni: dv_1, dv_2, dv_3, \dots delle singole variabili ed il prodotto di ciascuna è il contributo che essa porta alla variazione della grandezza (+ o -).

cioè:

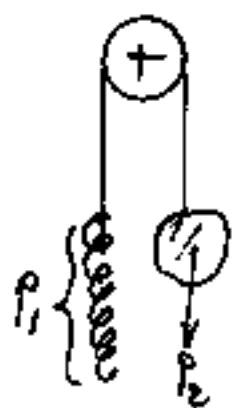
coefficienti moltiplicatori:

$$\left. \begin{array}{l} \text{variazione} \\ \text{della} \\ \text{grandezza} \end{array} \right\} d\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v_1} \right) (dv_1) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v_2} \right) (dv_2) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v_3} \right) (dv_3) + \dots$$

variazioni delle variabili:

Poiché sappiamo che sono le deformazioni elastiche che provocano le tensioni (e non viceversa); infatti l'azione di un peso, (o di una forza) che compie lavoro perdendo; nel caso del peso, l'energia potenziale gravitazionale; (nel caso di una forza perderà energia cinetica, od elastica o altra forma di energia). Diciamo questa "azione", se non è impedita, provoca una accelerazione: $a = \frac{F}{m}$.

Qui il discorso si fa sottile; consideriamo una molla di peso P_1 connessa ad un corpo di peso P_2 , attraverso un cavo di peso trascurabile.

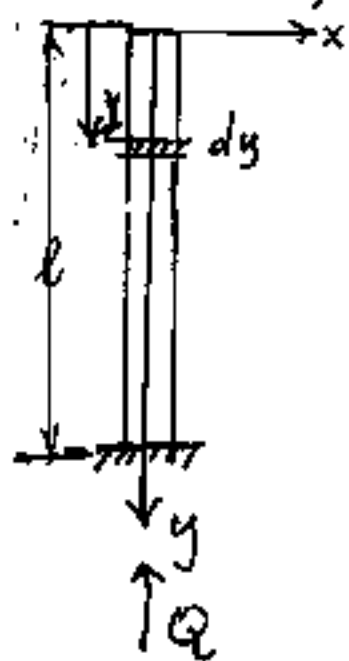


(Vedi figura). Se: $P_1 = P_2$ vi è equilibrio la molla però resta deformata. La deformazione dipende dal punto ove è connesso il cavo, e

la sua deformazione deve essere tale da generare sul cavo una forza pari a P_2 .

La molla sia lunga l e sia: $\Delta l = \frac{Pl}{EA} = \frac{P}{(EA/l)}$;
 (nelle molle, al posto della rigidità, in fisica, si ha
 un K detto: costante delle molle, o che: " K è
 la forza per la deformazione". L'energia elastica
 che sappiamo: $\frac{Pl^2}{2EA}$ diventa: $\frac{K\Delta l^2}{2}$; $P = K\Delta l$)
 Noi non usiamo il K dei fisici per evitare confusioni.

Questo problema è il problema dei pilastri
 soggetti al solo peso proprio (o dei cavi soggetti
 al solo peso proprio).

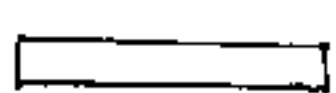


Se Q è il peso totale $q = Q/l$ è
 il peso per unità di lunghezza, nella
 sezione y il peso è: qy , quindi
 il tronchetto dy si deformerà:

$$d(\Delta l) = \frac{(qy)dy}{EA}; \text{ integrando si ha}$$

$$\Delta l = \frac{ql^2}{2EA} = \frac{Ql}{2EA}$$

Si noti i due casi:

- 1)  lo stesso corpo è compresso
 (o teso) dal carico concentrato Q agente nelle
 due sezioni estreme: $\Delta l = Ql/EA$.

Il lavoro elastico accumulato è: $L = \frac{Q^2 l}{2EA}$.

- 2) Il corpo è soggetto al suo peso distribuito e sostenuto in
 una delle sezioni estreme dal carico Q : $\Delta l = \frac{Ql}{2EA}$

Il lavoro elastico accumulato è $L = \frac{Ql^2}{4EA}$

Se la molla fosse attaccata al cavo a metà altezza la sua lunghezza rimarrebbe invariata perché l'accorciamento della zona compressa equivarrebbe all'allungamento della zona tesa.

Un corpo elastico, in assenza di gravità, venga spinto da una forza F ; si hanno vari casi se il corpo è impedito da banda opposta a muoversi. Se la forza compie il lavoro $\frac{F^2 l}{2EA}$ che si accumula in energia elastica nel corpo stesso.

Affinché ciò si verifichi occorre un lasso di tempo più o meno breve. Ciò che compie il lavoro elastico è la differenza fra l'azione F e la reazione proporzionale al Δl provocato: $N = \frac{\Delta l EA}{l} = FEA = EA \frac{\Delta l}{l} = EA \epsilon = \text{cost.}$, varia Δl e con ciò N quando $N = F$ si ha l'equilibrio $F - N = \text{zero}$ non può compiere più lavoro. quindi l'azione di F va decrescendo da F a zero linearmente, ed è l'ulteriore dimostrazione del perché il lavoro elastico compiuto (ad equilibrio avvenuto) è: $\frac{1}{2} F \Delta l$ (quel diviso 2 perché il diagramma dei valori di F è triangolare).

Questi concetti appena accennati saranno sviluppati dopo aver trattato la teoria dell'elasticità.

Altri aspetti dello sforzo normale si hanno nello studio delle curve funicolari.

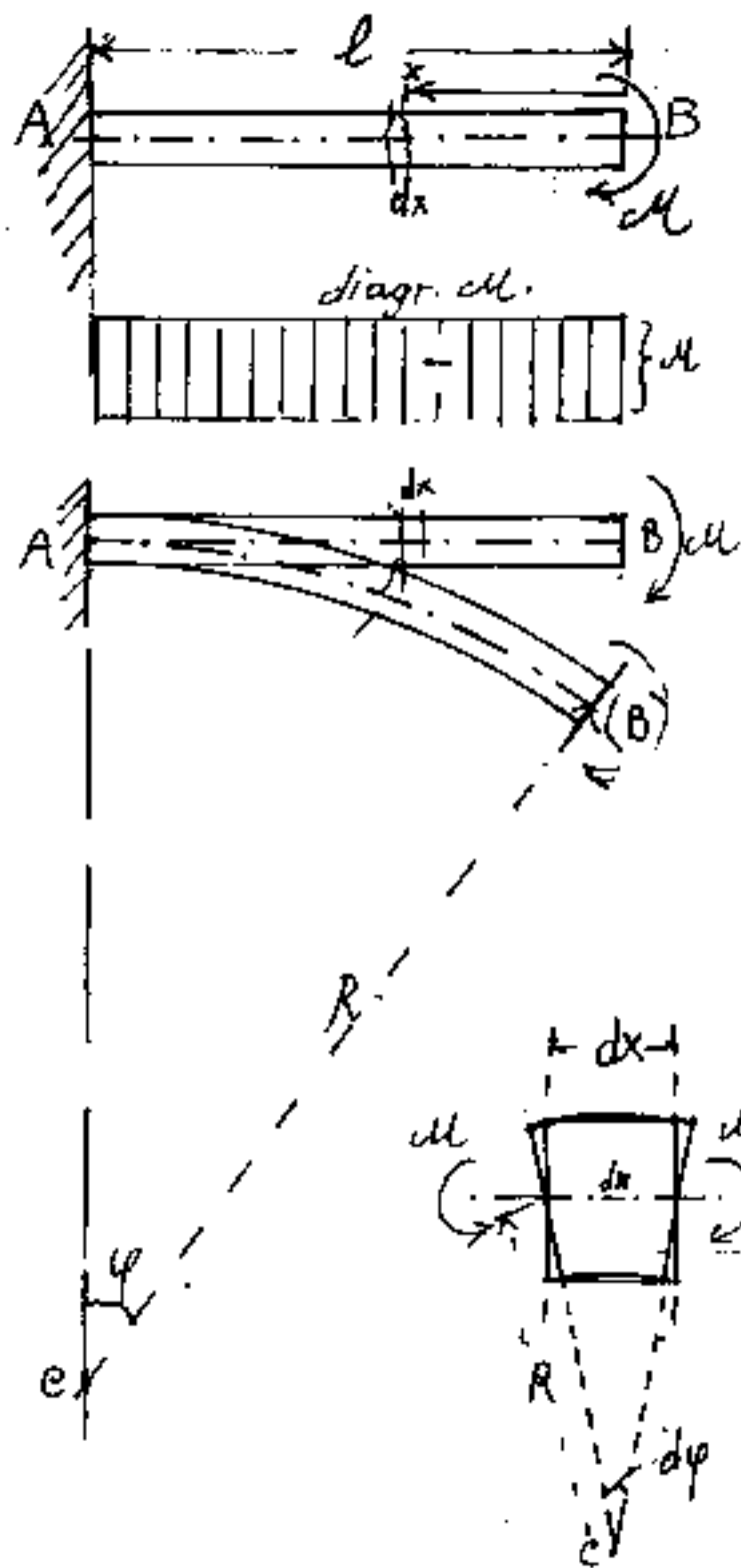
Cavi o funi sospese, curve catenarie e catenoidi, ecc, che ci riserviamo di trattare nel seguito.

Un importante argomento è l'instabilità statica e l'instabilità elastica, entrambe provocate dalla compressione, (mai per trazione). La prima è verificabile da poligoni articolati (materializzazione dei poligoni funicolari) che abbiano gradi di libertà. La seconda, spesso chiamata "Carico di Punta", si verifica in aste compresse, piuttosto snelle, facenti parte di strutture reticolari, ed anche aste singole, lunghe e di piccola sezione (piccolo J) compresse da carichi concentrici. (vedi cap. carico di punta) e cap. strutture reticolari.

Momento flettente M

Positivo se tende le fibre inferiori delle travi orizzontali, o interne al telaio. (Può avvenire che in casi particolari il segno sia indeciso). Il diagramma dei momenti flettenti si disegna sempre dalla parte delle fibre tese.

Consideriamo una mensola, soggetta ad un momento nella sezione estrema: (abbiamo



disegnato lo spessore in altezza della trave, anziché il solo asse, per evidenziare come, nella deformazione, l'asse si curva ma rimane di lunghezza invariata, mentre le fibre al di sopra si allungano e inferiormente si accorciano; l'opposto se cambiamo verso ad M .)

Consideriamo un tronchetto infinitesimo dx di trave, accettiamo la conservazione delle sezioni piane, il momento che grava sulle sezioni distanti dx provoca la rotazione relativa: $d\varphi$, poiché il tratto

dx di asse è rimasto di lunghezza invariata per la lunghezza dell'archetto dx possiamo scrivere

$$\boxed{dx = R d\varphi} \quad ; \quad \boxed{R = \frac{dx}{d\varphi}}$$

Poiché $M = \text{cost.}$ lungo tutta la trave curva R è costante, cioè la deformata è un arco di cerchio, e la lunghezza dell'asse è rimasta l .

Consideriamo la sezione terminale B ruotata di φ e cerchiamo di misurare l'allungamento Δl di una fibra distante y dall'asse che chiameremo: "asse neutro" non essendo né teso, né compresso.

Per similitudine di triangoli curvi,

$$\text{avremo: } \Delta l : y = l : R$$

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{y}{R}$$

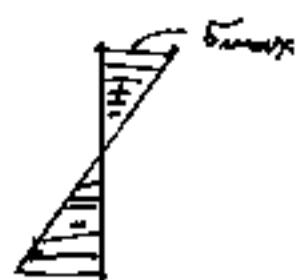
per la legge di Hooke $\sigma = E\epsilon$

$$\boxed{\sigma = \frac{yE}{R}}$$

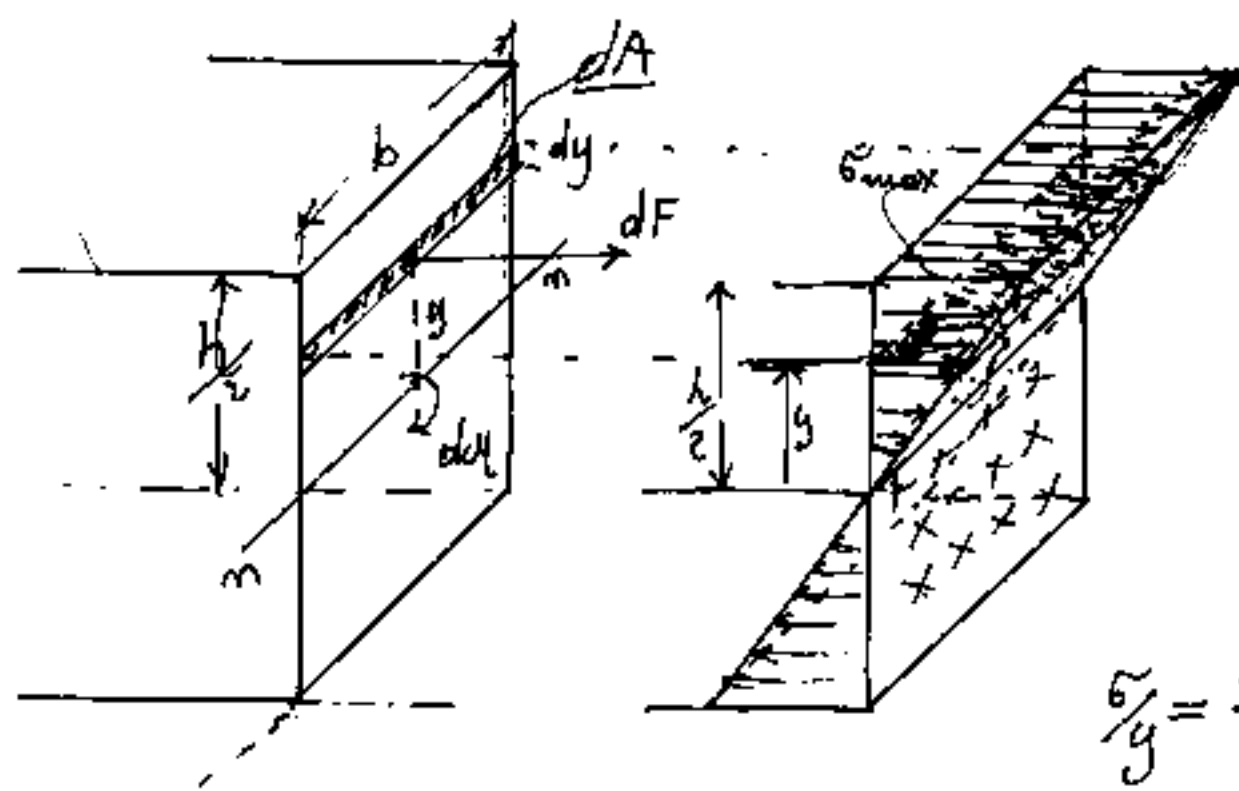
formula che consente di calcolare la tensione di una fibra distante y dall'asse neutro, in

funzione di E e del raggio R di curvatura.

Quindi: un diagramma delle $\sigma =$ (tensione normale) provocate da M è del tipo:



Ma sezione, per sezione la coppia esterna deve essere equilibrata dalla coppia interna, ed avremo:



sezione: $(b \times h)$

$$\sigma : y = \sigma_{max} : h/2$$

$$\sigma = \frac{\sigma_{max} \cdot y}{h/2}$$

$$\frac{\sigma}{y} = \frac{\sigma_{max}}{h/2} = \text{costante.}$$

Lo strato di fibre distanti y dall'asse neutro $(n-n)$, di spessore dy , che, nella sezione coprono l'area $dA = b \cdot dy$; essendo ciascuna fibra soggetta alla tensione σ complessivamente con la loro deformazione hanno accumulato una energia elastica che genera la forza $dF = \sigma dA$

sostituendo: $dF = \left(\frac{\sigma_{max} y}{h/2} \right) dA$

ma la forza dF genera sull'asse neutro il momento:

$$dM = y \cdot dF$$



cioè: $\int dM = \left(\frac{\sigma_{max}}{h/2} \right) \int y^2 dA = \frac{\sigma}{y} J$

ove: $J = \int y^2 dA$ è il momento d'inerzia rispetto all'asse neutro. Avremo quindi:

$$\sigma = \frac{M y}{J}$$

Importantissima formula di Navier che consente calcolare la tensione σ .

Trova qui giustificazione la definizione di momento d'inerzia come il prodotto di "masse" (abbiamo definito cosa intendiamo per masse) per il quadrato delle distanze; Notate: più una fibra è lontana dall'asse neutro maggiore è la sua tensione, ma la tensione esercitata sull'area dA è una forza, quindi questa forza è proporzionale ad y , ma y è anche il braccio che genera il momento dM di dF . perciò la coppia interna è proporzionale al quadrato delle distanze dall'asse neutro, una volta perché cresce la forza, una volta perché cresce il braccio.

La materia in prossimità dell'asse neutro non contrasta il momento flettente dovuto ai carichi esterni (reagisce come braccio di coppia, cioè allo scorrimento che tratteremo col taglio). Ciò ha portato a sezioni della forma a doppio T ove  le ali sono impegnate con le σ_{max} a generare la coppia interna antagonista. Un doppio T, ai fini di J , equivale ad un rettangolo  che si otterrebbe sezionando lungo l'asse dell'ala ma e riattaccando le ali per le punte.

In natura, le nostre ossa, le canne, la paglia ecc sono esempi di distribuzione di materia al forato sezione.

La formula di Navier: $\sigma = \frac{M y}{J}$ confrontata
 con: $\sigma = \frac{E y}{R}$ ci consente di ricavare R in
 funzione di M e delle caratteristiche del materiale
 e della sezione (costante) $\frac{E y}{R} = \frac{M y}{J}$ detta curva
tura l'inverso del raggio avremo:

$$\text{curvatura} = \boxed{\frac{1}{R} = \frac{M}{EJ}}$$

formula base della linea elastica.

ma: $\frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{EJ}$ perciò la deformazio

ne dovuta ad M diventa: $d\varphi = \frac{M dx}{EJ}$

c.

$$\boxed{\varphi = \int_0^l \frac{M dx}{EJ}}$$

se EJ è costante:

$$\boxed{\varphi = \frac{M l}{EJ}}$$

$$\varphi = \frac{M}{(EJ/l)}$$

ove: $\frac{l}{EJ} = G = \underline{\text{peso elastico}}$

$$\frac{1}{G} = \frac{(EJ)}{l} = w = \underline{\text{rigidezza a flessione}}$$

attenzione ai simboli:

$$w = \frac{EJ}{l} \text{ (rif. sez.)}; \quad W = \frac{J}{y_{\max}} = \text{modulo di resistenza}$$

In effetti:

$$\frac{M}{W} = \varphi = \text{angolo in radianti}$$

$$\frac{M}{W} = \sigma_{\max} = \text{tensione massima in Kg/cm}^2$$

Il modulo di resistenza si trova tabulato per le sezioni dei profilati commerciali e serve:

verifica:

$$\frac{M}{W} = \sigma \leq K \quad (K = \text{tensione ammissibile})$$

progetto

$$W \geq \frac{M}{K} \quad (\text{dalle tabelle si risale al profilato})$$

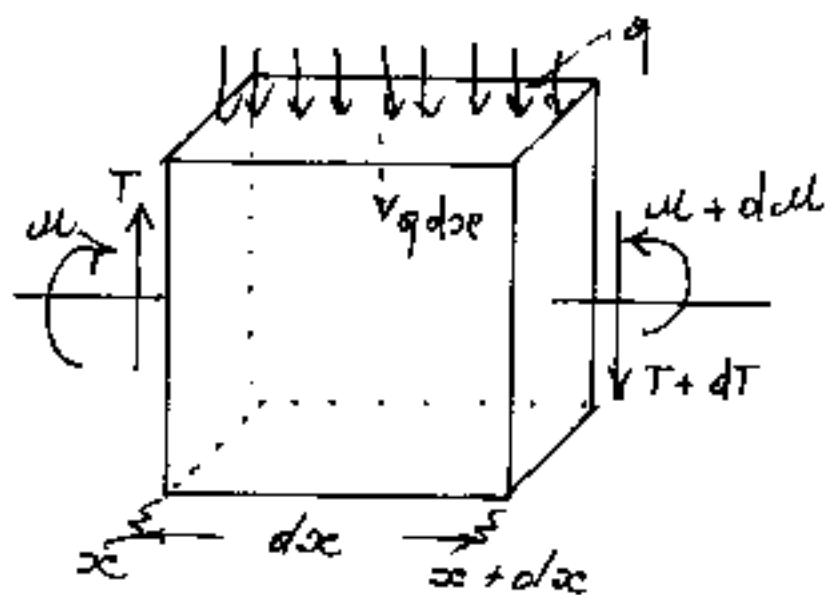
Queste formule sono solo indicative, e nella verifica, e nel progetto occorre tener conto di eventuali sollecitazioni composte e saranno trattate nel seguito. In particolare occorre accertare che la connessione interna assicuri il braccio della coppia reattiva (vedi teoremi di trasposizione o di Huygens sui momenti d'inerzia).

Lavoro elastico

$$L = \int \frac{M d\varphi}{2} = \boxed{L = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ}}$$

Relazioni fra M ; q ; T .

consideriamo un tronchetto di trave fra le sezioni (x) ed $(x+dx)$, soggetto ad un carico ripartito "q", la cui risultante sarà "q dx".



Sulle facce delle sezioni il tronchetto è sollecitato da

(M) ed $(M+dM)$; da (T) ed $(T+dT)$.

Se facciamo l'equilibrio alla traslazione verticale in y della sezione $(x+dx)$, avremo:

$$T - q dx = T + dT$$

cioè: $\boxed{\frac{dT}{dx} = -q}$ La derivata prima del taglio rispetto ad x , è il carico distribuito q preso di segno opposto.

Se facciamo l'equilibrio alla rotazione della sezione $(x+dx)$ si ha:

$$T dx + M - q \frac{(dx)^2}{2} = M + dM$$

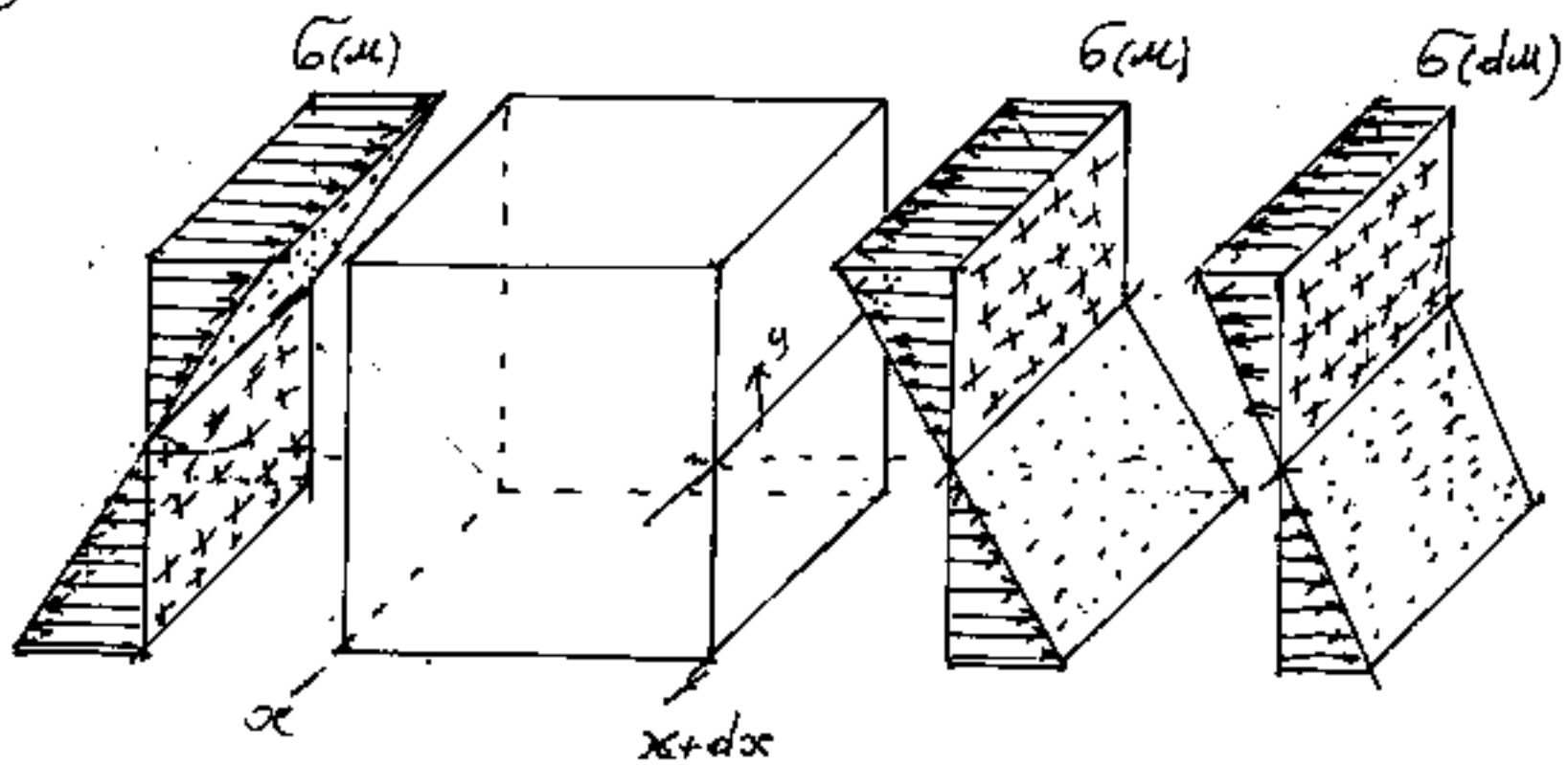
Si trascura dx^2 rispetto a dx e si ha:

$\boxed{\frac{dM}{dx} = T}$ La derivata prima del momento rispetto ad x è il taglio.

$\frac{dT}{dx} = \boxed{\frac{d^2M}{dx^2} = -q}$ La derivata seconda di M rispetto ad x due volte è il carico distribuito preso di segno opposto.

Lo Sforzo di Taglio

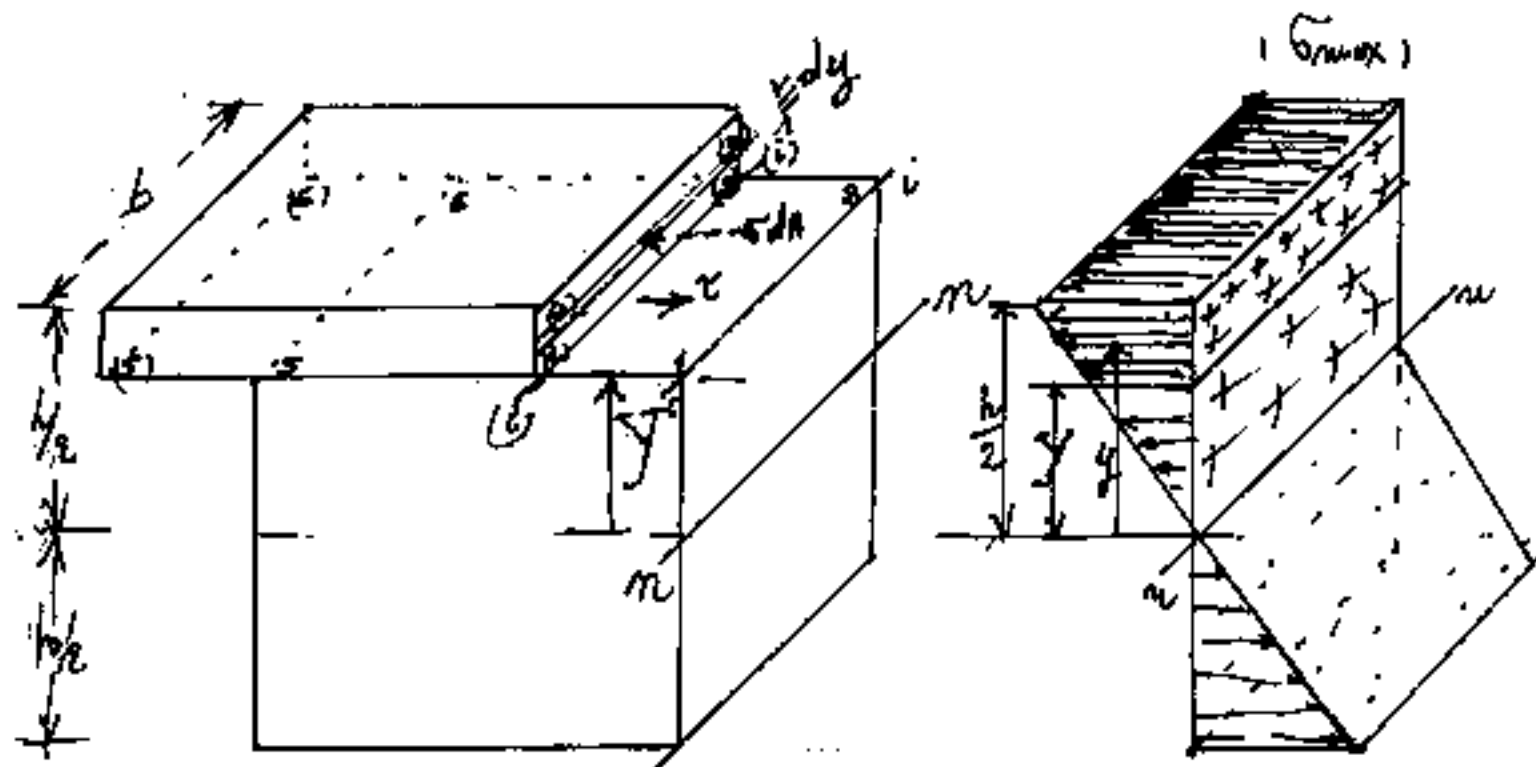
Consideriamo il tronchetto di trave fra le sezioni (x) ed $(x+dx)$, e consideriamo i diagrammi delle tensioni normali agenti sulle sezioni che lo delimitano.



Si nota che le tensioni σ dovute ad M agiscono sulle due facce del tronchetto, con versi opposti che si autoequilibrano, (in figura, le fibre superiori sono compresse le inferiori rispetto all'asse neutro tese).

Ma le azioni delle tensioni σ dovute alla variazione di momento (dM) come si equilibrano? A tal fine consideriamo di sezionare il tronchetto con un piano orizzontale distante y dal piano neutro.

L'azione delle fibre dovuta alle tensioni $\sigma_{(dell)}$ faranno scivolare le due parti di solido sul piano di sezione orizzontale di traccia ii



Le tensioni che agiscono sulla faccia superiore sono quelle che distano dall'asse neutro nn da y ad $\frac{h}{2}$. Lo strato generico distante y da nn avrà: $\sigma = \left(\sigma_{max} \frac{y}{\frac{h}{2}} \right)$ che agirà sull'area $dA = b dy$ cioè la forza elementare $dF = \sigma dA$
 $= \frac{\sigma_{max}}{\frac{h}{2}} \cdot y dA$; integrando la forza sarà:

$$F = \frac{\sigma_{max}}{\frac{h}{2}} \int_y^{\frac{h}{2}} y dA =$$

Ma la σ è dovuta a dM perciò: $\sigma_{max} = \frac{dM(\frac{h}{2})}{J}$
 sostituendolo e semplificando la spinta dovuta alle σ di dM sarà $F = \frac{dM}{J} \int_y^{\frac{h}{2}} y dA$
 L'integrale: $\int_y^{\frac{h}{2}} y dA = S_{ii} =$ momento statico rispetto all'asse neutro dell'area $A(234)$.

sostituendo: $F_{(s)} = \frac{dM}{J} S_{ii}$

a questa forza si oppone la forza dovuta alle tensioni tangenziali τ che agiscono sul piano di sezione ii , sull'area A_{1256} per impedire lo scorrimento, avremo:

$$F_{(s)} = \tau \cdot A_{1256} = \tau \cdot b dx$$

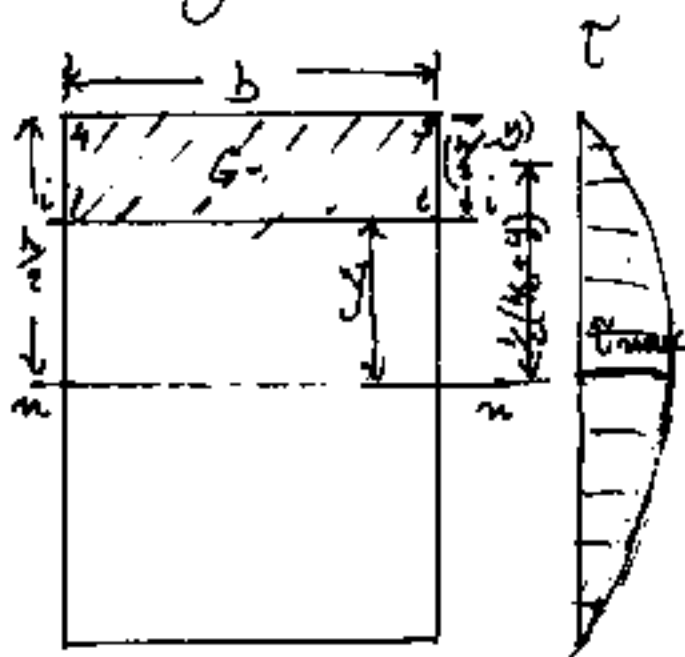
poiché, per l'equilibrio deve essere $F_{(s)} = F_{\tau}$

$$\tau b dx = \frac{dM}{J} S_{ii}$$

$$\tau = \frac{dM}{dx} \frac{S_{ii}}{bJ} \quad \text{ma: } \frac{dM}{dx} = T$$

$$\tau = \frac{T S_{ii}}{J b}$$

Formula classica che fornisce la tensione τ sul piano di traccia ii per sezioni rettangolari



Se consideriamo la sezione rettangolare, possiamo calcolare:

$$S_{ii} = (A_{1234}) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) =$$

$$S_{ii} = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right)$$

$$S_{ii} = \frac{b}{2} \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right)$$

Poiché S_{ii} è l'unica variabile nella formula delle τ vuol dire che per $y = \frac{h}{2}$ la τ è nulla, per $y = 0$ cioè sull'asse neutro la τ è massima e varia

parabolicamente da 0 a τ_{max} :

$$\tau_{max} = \frac{T \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4}\right)}{\frac{bh^3}{12} b} = \frac{T \frac{bh^2}{8}}{bh^3/12} =$$

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{T}{bh} \quad \text{posto: } \left(\frac{T}{bh} = \tau_{media} \right)$$

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{3}{2} \tau_{media}}$$

La τ_{media} si usa per le chiodature:

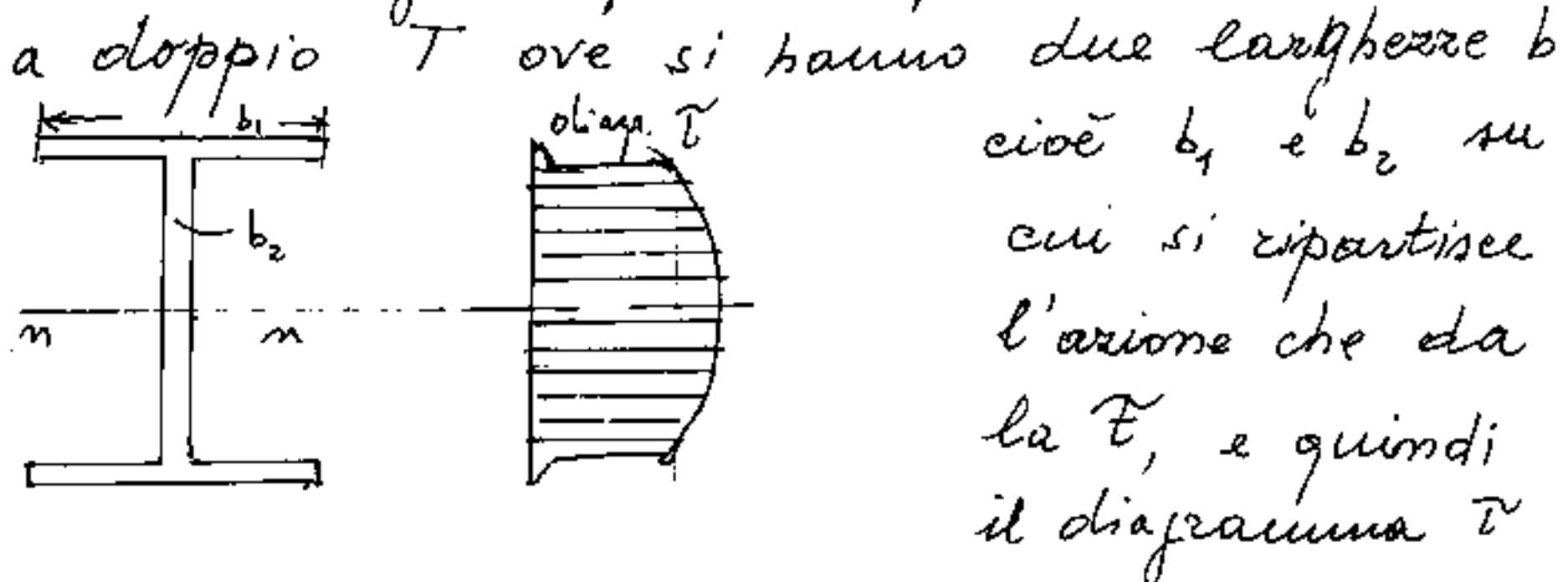


Che la τ sia massimo sull'asse neutro si può rilevare da quei cretti orizzontali a mezza altezza nelle travi di legno dei tetti:

La formula:

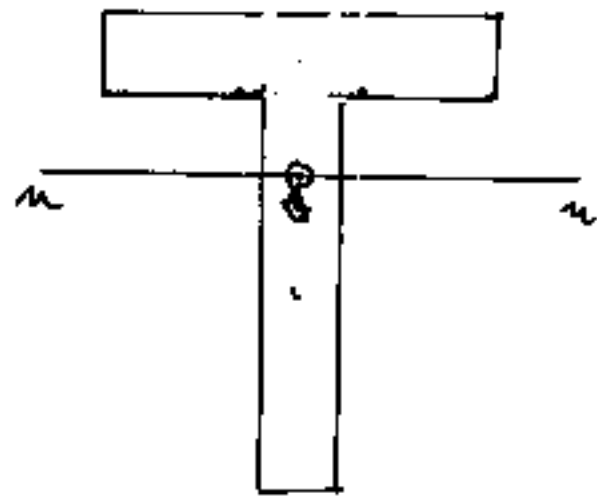
$$\boxed{\tau = \frac{T \cdot S}{J \cdot b}}$$

si estende alle strutture scomponibili in rettangoli, per esempio una trave

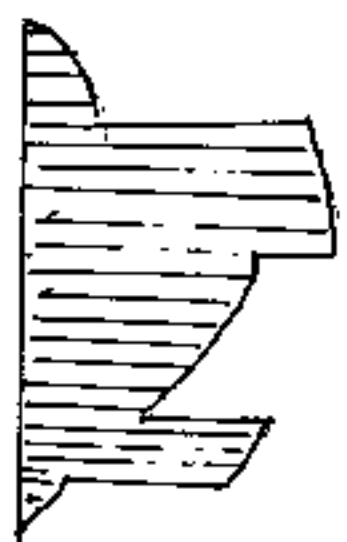
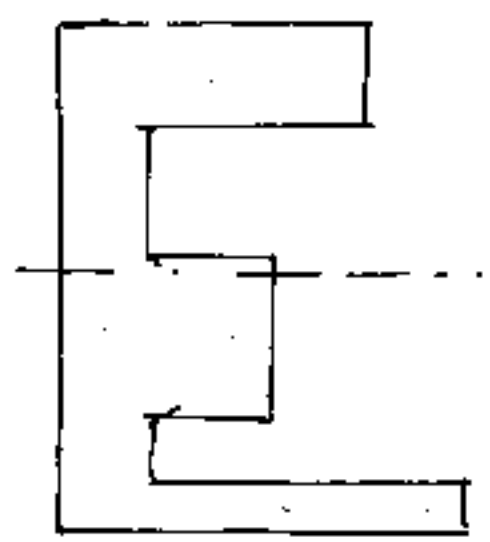
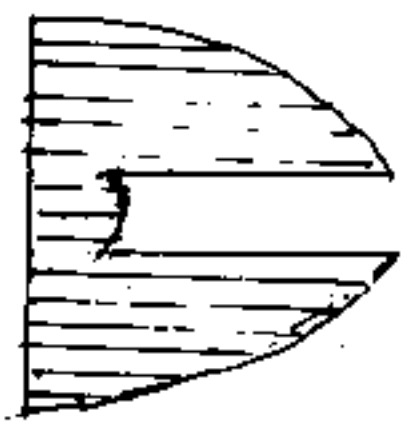
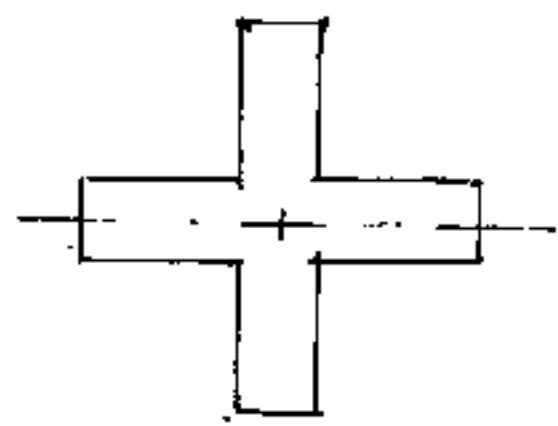


sarà come in figura:

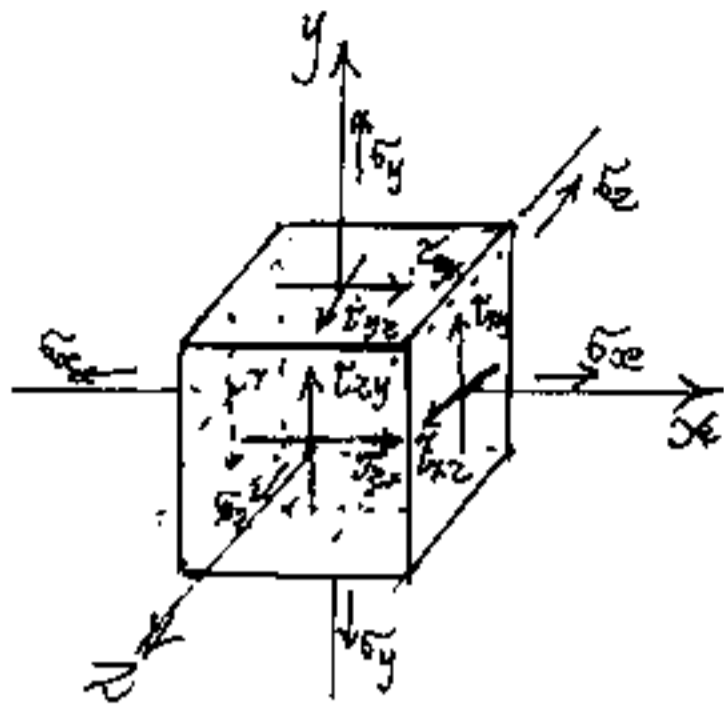
Si noti il brusco salto delle τ in corrispondenza del salto di larghezza b .



Presentiamo alcuni diagrammi di τ per sezioni scomponibili in rettangoli.



Tensioni normali e tangenziali



Se consideriamo un cubetto all'interno di un solido, e lo orientiamo secondo gli assi; le tensioni normali σ_x , σ_y , σ_z ; agenti secondo

il verso degli saranno positive e tenderanno le fibre del cubetto. Le tensioni tangenziali agenti sulle facce del cubetto, saranno affette da due indici: il primo indica la retta di giacitura, cioè se è x vuol dire tutte le facce perpendicolari ad x ; il secondo indice è la direzione e sarà una delle due direzioni diverse dalla direzione della retta di giacitura. avremo cioè:

sulla faccia (x) : τ_{xy} e τ_{xz}
" " (y) : τ_{yx} e τ_{yz}
" " (z) : τ_{zx} e τ_{zy}

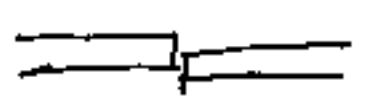
Per il principio di inversione degli indici si ha: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$


$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Sulle facce opposte del cubetto le τ hanno versi

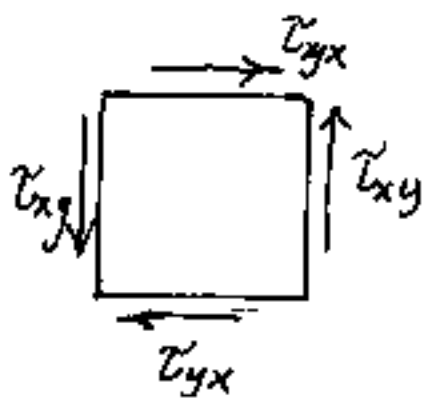
opposti; cioè due τ uguali per l'inversione degli indici sui tre spigoli delle facce positive si incontrano di punta sulle altre di piuma.

Il taglio propriamente detto si ha sulle facce normali all'asse del solido:  cioè: τ_{xy} ; (o τ_{xz}).

Il taglio  che si verifica sui piani paralleli all'asse è chiamato scorrimento.

Noi quindi, per le sezioni rettangolari, abbiamo ricavato la τ_{yx} che per l'inversione degli indici è uguale alla τ_{xy} .

Tale uguaglianza è facile a dimostrarsi: consideriamo, nel piano il quadrato infinitesimo: dx ; dy , e consideriamo agenti sui lati le tensioni: $\dots +\tau_{xy}$; $-\tau_{xy}$; $+\tau_{yx}$; $-\tau_{yx}$.

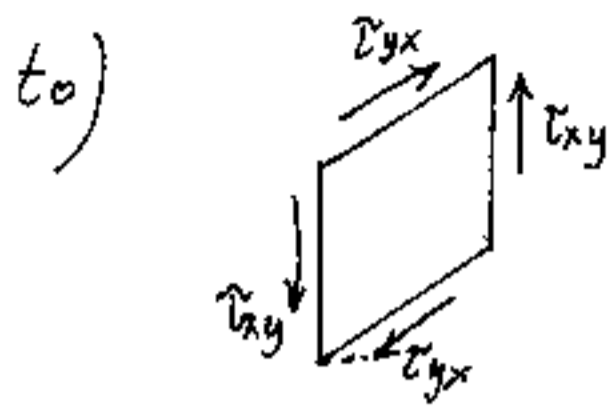


Le τ su facce opposte hanno segni opposti per l'equilibrio alle traslazioni orizzontali e verticali,

poiché formano: coppie di uguale braccio $dx = dy$, per l'equilibrio alla rotazione devono essere di uguale intensità ed incontrarsi sui vertici o di piuma o di punta.

Le deformazioni dovute al taglio

Alle tensioni T si accompagnano le deformazioni del nostro cubetto, (del nostro quadrato)

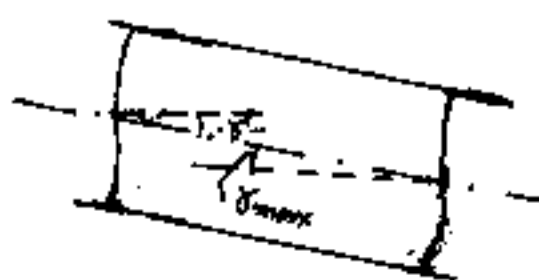
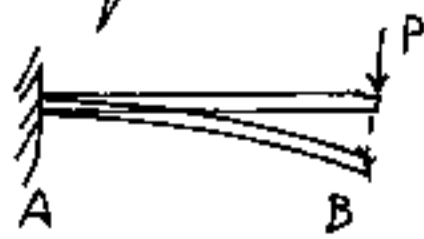


La deformazione è considerata angolare ed è una variazione dell'angolo retto

che si indica con gli stessi indici delle T , cioè: $\delta_{xey} = \delta_{yox}$. di cui abbiamo già fatto cenno.

La variazione della T su una stessa faccia (max sull'asse neutro per sezioni rettangolari semplici) e...

le connesse deformazioni dell'angolo retto, implica che le sezioni non si possono più considerare piane. Se consideriamo una mensola caricata da un peso sull'estremo libero in modo che il taglio sia costante su tutta la lunghezza, le deformazioni dovute al momento, mascherano quelle dovute al taglio, che sono minori e spesso trascurabili, ma se consideriamo un tronchetto in prossimità della sezione libera, ove il momento è piccolo, ed esageriamo le deformazioni dovute a T avremo:



(ingrandendo la sezione)

In analogia con la legge di Hooke: $\sigma = E \epsilon$
 poniamo: $\tau = G \gamma$ ove G è il coefficiente di elasticità tangenziale, legato al coefficiente E di elasticità normale dalla

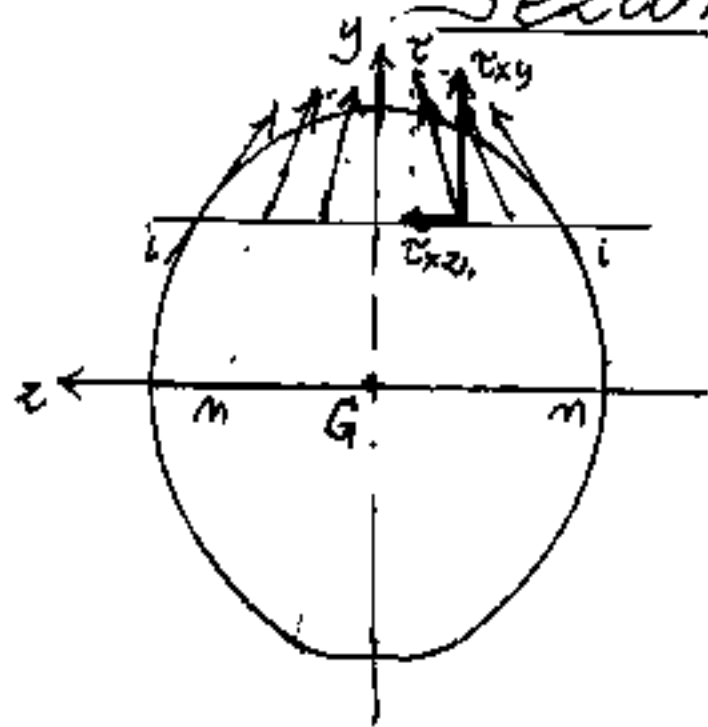
relazione: $G = \frac{E m}{(2m + 2)}$ $2Gm + 2G = mE$
 ($m = \text{coeff. Poisson}$)

si può ricavare: $m = \frac{2G}{E - 2G} = \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{E}{G} - 1}$

cioè: $\frac{1}{m} = \frac{1}{2} \frac{E}{G} - 1$ ed anche: $\frac{E}{G} = 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right)$

trattandosi di valori positivi E è più del doppio di G .

Sezioni non rettangolari

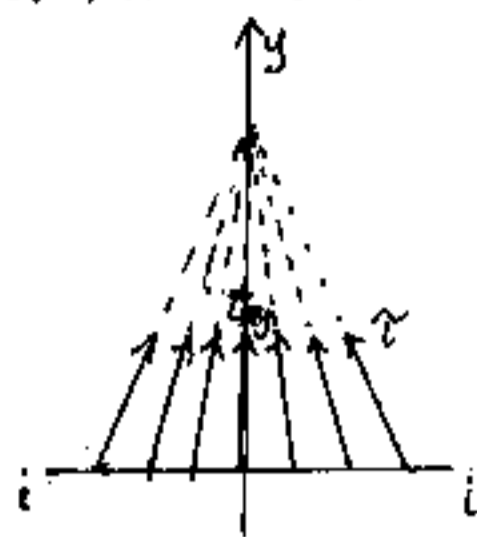


Noi abbiamo esposto la teoria elementare del taglio, per semplicità consideriamo una sezione non rettangolare, ma simmetrica

rispetto all'asse y (direzione che diamo a T)

Ogni τ può scomporsi in τ_{xy} e τ_{xz} , per sezioni simmetriche in y la τ_{xz} troverà simmetrica l'equilibrante sulla stessa retta ii mentre la τ_{xy} equivarrà alla τ_{yx} . Sul bordo le τ risultano tangenti. Se supponiamo la τ_{xy} costante su ii ,

equivale a supporre che tutte le T agenti su i_i si incontrino sulla retta simmetrica y e le



loro punte siano alla stessa distanza da i_i . In questa ipotesi la T su y equivale a T_{xy} ed ha nulla la componente

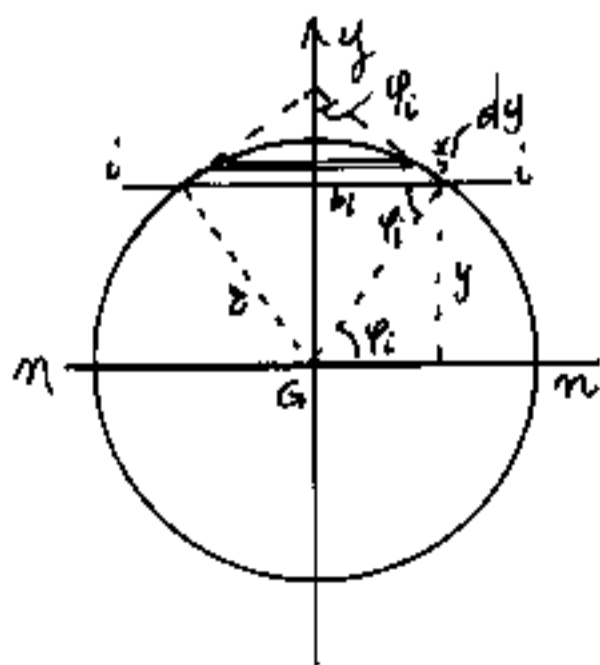
T_{xz} ; le T sul bordo (tangenziali) hanno la max T_{xz} ; e per ogni i_i possiamo avvalerci della relazione:

$$\tau = \frac{T S_i}{J b_i}$$

In questo caso la variazione di b non è brusca, come nel caso delle sezioni composte di rettangoli e quindi il diagramma T sarà continuo. E' come se considerassimo la sezione composta di rettangoli infinitesimi sovrapposti di base i_i variabile, ed altezza dy .

Sezione circolare

Cerchiamo di applicare le nostre ipotesi alla sezione circolare di raggio r . La lunghezza della



corda generica $i_i = b_i = 2r \cos \varphi_i$

lo spessore $dy = ds \cdot \cos \varphi = r \cos \varphi d\varphi$

$$dA = b dy = 2r^2 \cos^2 \varphi d\varphi ;$$

la distanza da $m-i$ $y = r \sin \varphi$

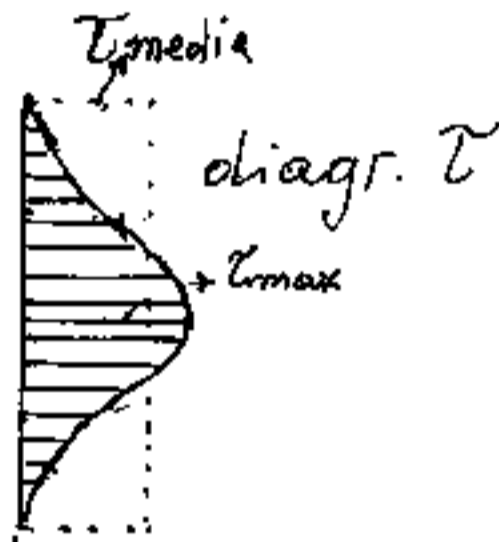
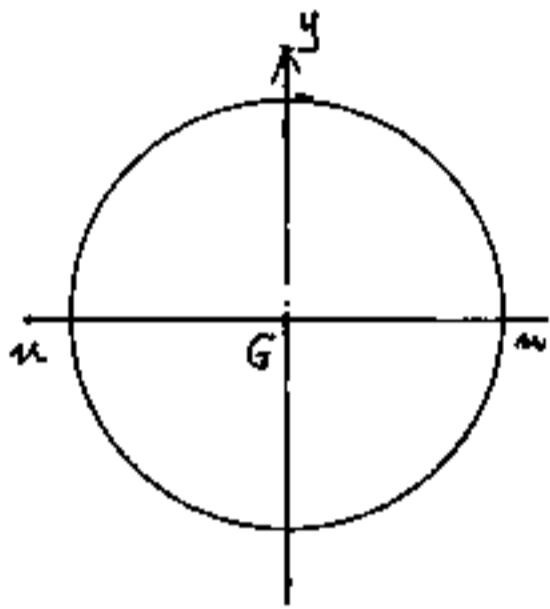
$$dS = y dA = \int_{\varphi_i}^{90} 2r^3 \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi =$$

$$\int_{\varphi_i}^{90} -2r^3 \cos \varphi d \cos \varphi = \left[\frac{2}{3} r^3 \cos^3 \varphi \right]_{\varphi_i}^{90} = \boxed{\int = \frac{2}{3} r^3 \cos^3 \varphi_i}$$

Ricordiamo che: $J_{dd} = \frac{\gamma^4 \pi}{4}$ quindi: $\tau = \frac{TS}{Jb}$

diventa $\tau = \frac{T \frac{2}{3} \gamma^3 \cos^3 \varphi_i}{\frac{\gamma^4 \pi}{4} (2 \gamma \cos \varphi_i)} = \boxed{\tau = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi \gamma^2} \cos^2 \varphi_i}$

il diagramma delle τ varia con $\cos^2 \varphi_i$
 sull'asse neutro $\varphi_i = 0$ si ha la $\boxed{\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{T}{A}}$
 con variazione $(\cos^2 \varphi)$.



si noti che per $\varphi_i = \pm 45^\circ = \pm \pi/4$ la $\tau_{\pi/4} = \tau_{max}/2 = \frac{2}{3} \frac{T}{A}$ ed è un punto di flesso del diagramma delle τ .

È bene tener presente che queste impostazioni sono solo approssimate e rimandiamo ad altra parte lo studio rigoroso del problema del taglio.

Poiché le deformazioni dovute al taglio sono molto complesse, si è elementarizzata la questione introducendo un fattore: χ (leggi "chi" con la "c" toscana) detto fattore taglio dipendente dalla forma della sezione e facendo l'analogia con lo sforzo normale

ove $\Delta l = Nl/EA$ per il taglio avremo:

$$\gamma = \int \frac{\chi T dx}{GA}$$

cioè il lavoro elastico diventa:

$$\mathcal{L} = \int \chi \frac{T^2 dx}{GA}$$

$$\mathcal{L} = \chi \frac{T^2 l}{GA}$$

Il lavoro elastico interno può scriversi:

$$\mathcal{L} = \int_V \frac{\tau_{xy} \delta \tau_{xy}}{2} dV = \int_V \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV = \int_l dx \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dA, \text{ avendo consi-}$$

derato solo τ_{xy} , il ragionamento è valido solo per le sezioni rettangolari o se sostituendo $\tau_{yx} = \frac{TS_i}{J b_i}$,

abbiamo:

$$\mathcal{L} = \int_l dx \int_A \left(\frac{TS_i}{J b_i} \right)^2 \frac{dA}{2G}$$

Evidenziando le costanti si ha:

$$\mathcal{L} = \int_l \frac{T^2 dx}{2G J^2} \int_A \frac{S_i^2}{b_i^2} dA; \text{ avendo } dA = b_i dy,$$

possiamo esprimere $J = \int^2 A$ da cui: $J^2 = \int^4 A^2$

se y' e y'' sono le distanze dalla i

$$\mathcal{L} = \int_l \frac{T^2 dx}{2GA} \cdot \frac{1}{\int^4 A} \int_{y'}^{y''} \frac{S_i^2}{b_i} dy$$

e ponendo

$$\chi = \frac{1}{\int^4 A} \int_{y'}^{y''} \frac{S_i^2}{b_i} dy$$

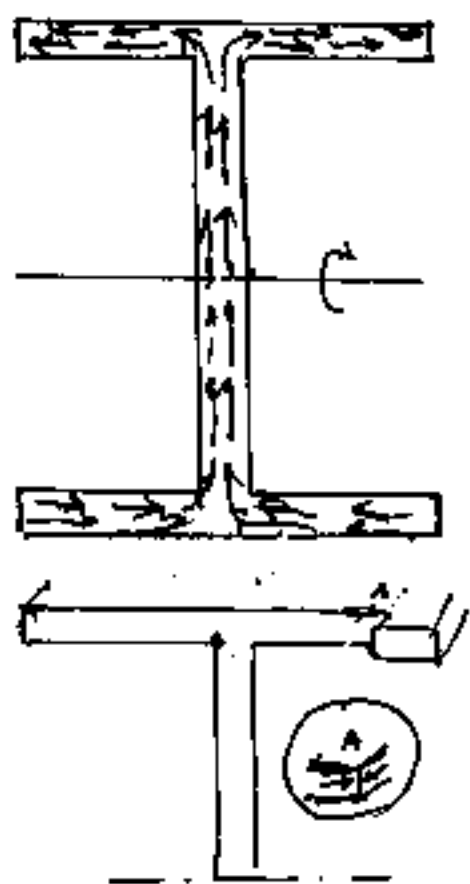
$$\mathcal{L} = \chi \frac{T^2 l}{GA}$$

Il fattore taglio χ per il rettangolo: $\chi = 6/5$
per il cerchio si dà comunemente: $\chi = \frac{10}{9} \approx 1,111\dots$
mentre lo studio rigoroso porta $\chi = 1,175$. —

Questi dati sono stati ripresi da D. Belluzzi -
scienza delle costruzioni - Vol. I. - ed Zanichelli
- Bologna - 1948.

Come si vede, per sezioni convesse χ varia
poco sopra l'unità, $1,2$ per il rettangolo e quadrato
 $1,111$ per il cerchio e l'ellisse, ma sale per sezioni
miste per un doppio T: I del 16 il Belluzzi
calcola $\chi = 2,28$.

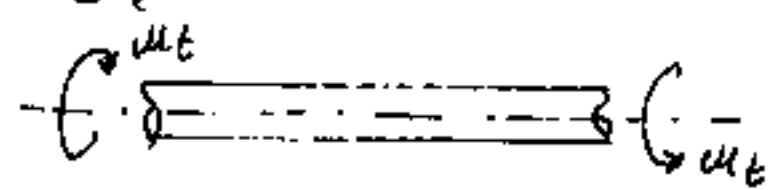
Importantissimo lo studio sul flusso
delle τ nella sezione soprattutto se
non simmetriche.



Tratteremo l'argomento
al centro di Taglio o di Torsione
dopo aver fatto il capitolo
sulla sollecitazione a
torsione. —

La Torsione

La sollecitazione a torsione è provocata da un momento (M_t = momento torcente) che ha per asse, l'asse dell'asta soggetta a torsione. M_t si considera po-



sitivo quando le sezioni dell'asta sog-

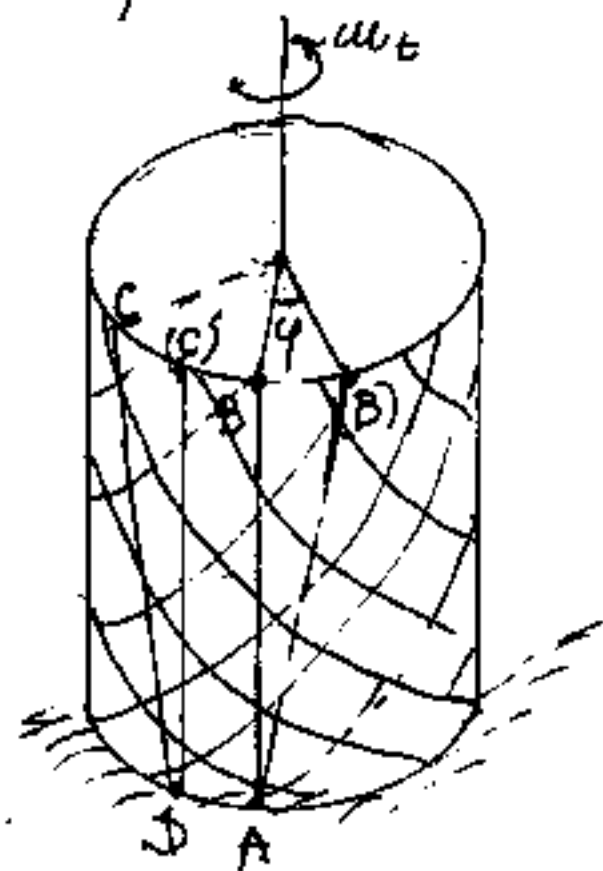
getta a torsione tendono a muoversi come nello svitamento della vite destrorsa fra dado e bullone.

Le sezioni, su cui si affacciano le due parti contigue di asta, tenderebbero a slittare l'una sull'altra, se la coesione del solido non generasse tensioni tangenziali che ne impediscono lo slittamento, ma subiscono uno scorrimento elastico capace di generare momenti interni equilibranti; e ciò si verifica quando, (se φ è l'angolo di rotazione della sezione libera), si genera nel solido una energia elastica capace di equilibrare il M_t agente.

È bene rilevare subito che M_t non è una sollecitazione riferibile ad un sistema piano di forze.

Aste cilindriche di sezione circolare

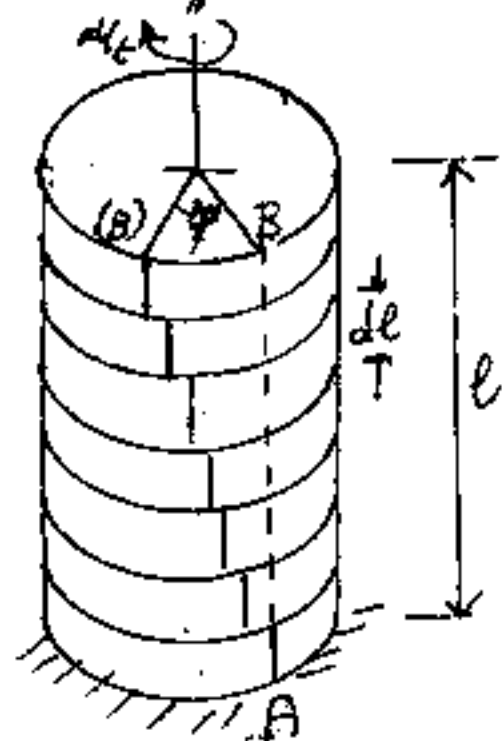
Basta pensare al lavoro trasmesso dagli assi dei motori, per rilevare l'importanza di questa trattazione, (alberi di trasmissione).



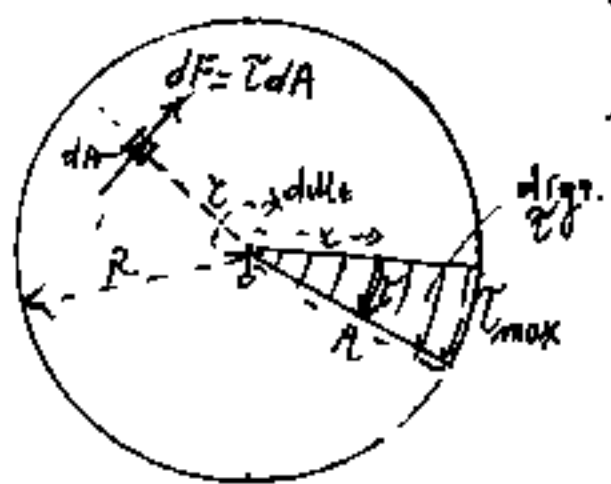
Consideriamo un cilindro incastrato alla base e notiamo le fibre sulla superficie laterale; per effetto di M_t , la fibra \overline{AB} andando in $\overline{A(B)}$ si è allungata, mentre la \overline{DC} andando in $\overline{D(C)}$ si è accor-

ciata, cioè le fibre inclinate come la \overline{DC} si accorciano mentre le fibre inclinate di verso opposto si allungano, e poiché, in ogni superficie cilindrica coassiale, ad ogni fibra con una certa inclinazione corrisponde una fibra inclinata di verso opposto, per effetto della torsione, il solido non si è complessivamente né allungato, né accorciato; e quindi non ha subito neppure le contrazioni trasversali, (radiali).

La deformazione interna è quindi un puro scorrimento elastico, si può pensare ad una pila di dischetti circolari, connessi fra loro con materiale elastico. Se materializziamo questi dischetti (come tante monete), vedremo una linea come la $\bar{A}\bar{B}$, per effetto del momento torcente in figura (negativo) frammentarsi



in tanti segmenti con B che finisce in (B), e si nota come ogni dischetto ruoti rispetto al dischetto sottostante di un angolo: $d\varphi$; lo scorrimento delle tensioni tangenziali, fa accumulare nel cilindro l'energia elastica capace di produrre un dM_t uguale e di segno opposto che equilibra l' M_t agente.



Consideriamo quindi una sezione circolare di raggio R , ed un raggio r variabile da zero ad R . Se consideriamo le τ (tensioni tangenziali) proporzionali

al loro scorrimento, possiamo fare il diagramma delle τ , ove la τ_{max} sarà sul bordo e la tensione

τ in posizione generica sarà: $\tau = \frac{\tau_{max} \cdot r}{R}$

Ma la τ agendo sull'area dA provoca la forza $dF = \tau dA$ e tale forza che si trova distante r dall'asse provoca il momento torcente $dM_t = r dF$ sostituendo: $dM_t = r \tau dA = \frac{\tau_{max}}{R} r^2 dA$

Per la proporzionalità: $\frac{\tau_{max}}{R} = \frac{\tau}{r} =$ costante in dipendente dalla variabile r , perciò integrando, e ricordando che: $\int_0^R r^2 dA = J_p =$ momento d'inerzia polare

$$\int dM_t = M_t = \int \frac{\tau_{max}}{R} r^2 dA = \frac{\tau_{max}}{R} \int r^2 dA = \frac{\tau_{max}}{R} J_p$$

$$M_t = \frac{\tau}{r} J_p \quad \text{da cui la tensione}$$

$$\text{tangenziale} = \boxed{\tau = \frac{M_t r}{J_p}}$$

Formula che calcola la tensione τ a distanza r dall'asse; ed è l'analoga della formula di Navier per la flessione semplice, ove, la tensione normale σ a distanza y dall'asse neutro, abbiamo visto: $\sigma = \frac{M y}{J}$; ove J era il momento d'inerzia assiale rispetto all'asse neutro.

Ricordando che, il modulo di elasticità per deformazioni tangenziali è $G = \frac{m}{2(m+1)} E$, e che la deformazione φ per flessione semplice era

$$\varphi = \int \frac{M dx}{E I} \quad \text{la deformazione per torsione: } \boxed{\varphi = \int \frac{M_t dl}{G J_p}}$$

Lavoro elastico per solidi cilindrici a sezione circolare, soggetti a torsione è:

$$\mathcal{L} = \int_0^l \frac{M_t^2 dl}{2 G J_p}$$

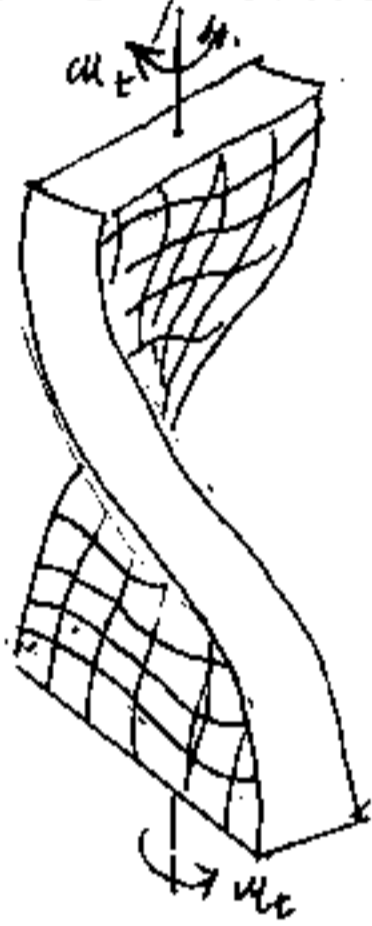
È appena il caso di ricordare le bilance a torsione di Coulomb per misurare le forze debolissime di attrazione o repulsione di corpi elettrizzati o magnetizzati, o addirittura gravitazionali.

Solidi di sezione non circolare

Per i solidi di sezione diversa dalla sezione circolare le formule trovate non sono più applicabili. Infatti, mentre per le sezioni circolari, nella torsione, le sezioni stesse si mantengono piane, le sezioni diverse dalle sezioni circolari, non si mantengono piane, lo studio rigoroso viene fatto con la teoria dell'elasticità.

Che le sezioni non si mantengono piane si può verificare sperimentalmente prendendo un prisma parallelepipedo, molto

elastico, e disegnare sulle facce laterali una quadrettatura, quindi applicare alle sezioni estreme un momento torcente di verso opposto (a seconda che l'azione è di svitamento o di avvitamento della vite destrogira avremo torsione positiva o negativa, in figura è negativo θ_0)



Vedremo le fibre longitudinali parallele agli spigoli diventare eliche cilindriche, mentre le linee parallele ai segmenti di base diventano ondulate.

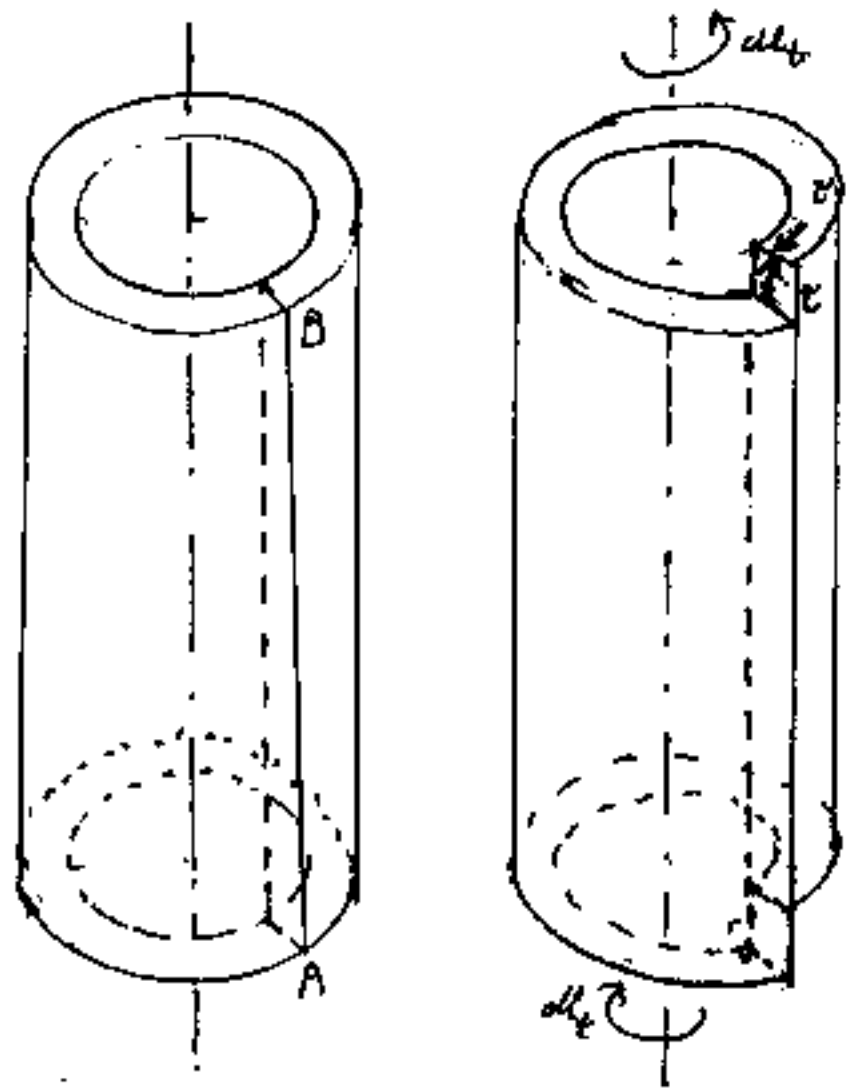
Però anche la teoria del

l'elasticità, pur riuscendo a simboleggiare in complesse formule il fenomeno, pure da tali formule non è stato possibile esplicitare le tensioni tangenziali τ o gli scorrimenti γ ove sappiamo: $\tau = G\gamma$ che è l'analogo della legge di Hooke: ($\sigma = E\varepsilon$)

Però le formule che correlazionano la τ , la γ e gli elementi della sezione sono uguali a formule che correlazionano gli elementi della sezione con altre grandezze

fisiche; nascono così dei procedimenti di calcolo detti per analogia.

Nella torsione vale per le T il principio dell'inversione degli indici, cosa che, al solito, è possibile constatare sperimentalmente.



Infatti se consideriamo una corona circolare (per la quale valgono ancora le formule della sezione circolare) che presunti un taglio secondo un piano longitudinale, il modello può essere

di cartoncino avvolto a cilindro, se noi agiamo alle estremità come i momenti in figura, il nostro cartoncino si deformerà come disegnato, ove le T indicate sono uguali.

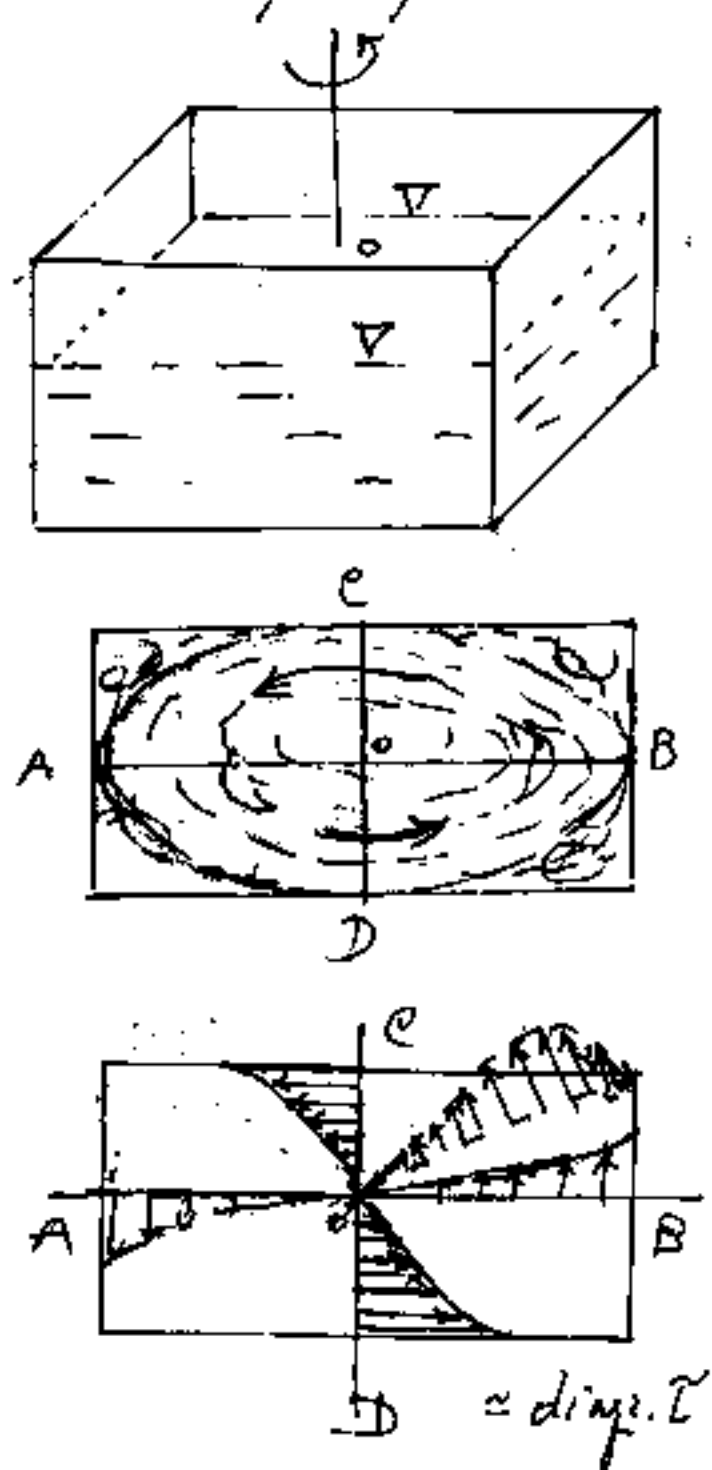
Anche un foglio di carta avvolto a cilindro fa vedere lo scorrimento se lo sollecitiamo agli estremi con M_x .

L'analogia più conosciuta è forse l'analogia idrodinamica ove la tensione T , che, come abbiamo detto, non era esplicitabile,

tiene il posto della velocità di un fluido che ruota in un serbatoio identico alla sezione del solido.

Analogia idrodinamica.

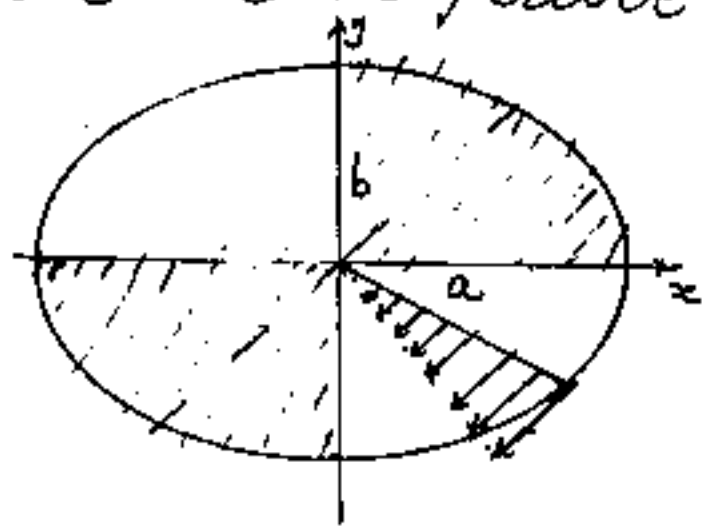
Consideriamo una sezione rettangolare di un solido astiforme soggetto a torsione; e consideriamo una vasca rettangolare, nelle stesse proporzioni della sezione.



La vasca contenga un liquido che ruota, mantenendo costante il livello. Poiché la portata, attraverso le varie sezioni, deve mantenersi costante, avendo lo stesso livello, (stessa altezza), il liquido attraverso la sezione \overline{OC} , (più stretta della sezione \overline{OA}) dovrà avere in \overline{OC} una velocità maggiore.

Poiché per il moto dei fluidi, pur con difficoltà si possono misurare velocità, e quindi è facile tracciarne il diagramma, che proporzionalmente è il diagramma \tilde{L} .

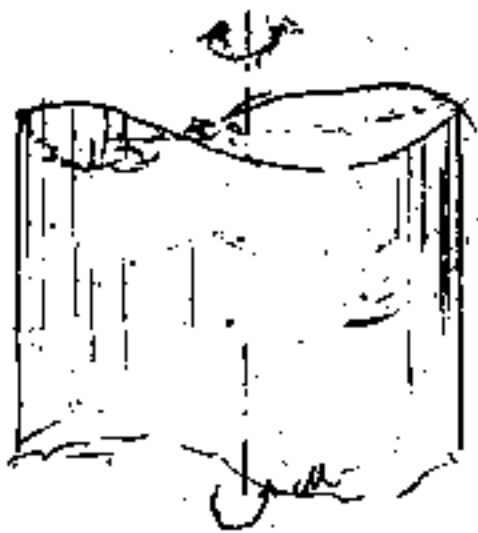
Più facile la determinazione per sezioni ellittiche ove il fluire del liquido pur avendo velocità diverse (minore



quando attraversa il semidiametro a , maggiore quando attraversa il semidiametro b ,

essendo $a > b$) tuttavia non incontra gli ingorghi che si verificano ai vertici del rettangolo.

Per l'ellisse la teoria dell'elasticità trova che le linee di flusso sono ellissi omotetiche, (simili e similmente disposte), ed essendo al bordo la τ con direzione tangenziale, all'interno su un diametro le τ saranno dirette come il diametro coniugato.



Nell'ellisse le sezioni non si mantengono piane.

L'area dell'ellisse $A = ab\pi$.

La tensione in un punto g

generico della sezione:

$$\tau = \frac{Mt}{A/2} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}$$

Si noti che dividendo la sezione in quattro quadranti, due quadranti opposti al centro fanno curvatura verso il basso, gli altri due verso l'alto.

Se scomponiamo la tensione tangenziale massima (che si trova agli estremi del diametro minore dell'ellisse) secondo due fibre inclinate di $\pm 45^\circ$ rispetto alla direzione dell'asse longitudinale, abbiamo su una trazione, sull'altra compressione cioè quelle tese si allungano e quelle compresse si accorciano, ciò fa vedere come le sezioni non restano piane e come invertendo il segno di M_t si invertono le curvature nei quadranti dell'ellisse.

$$\tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi a b^2}$$

Agli estremi del diametro maggiore, per l'analogia idrodinamica la τ sarebbe minima fra le tensioni tangenziali, non minima in assoluto, (il Belussi la indica con τ_1)

$$\tau_1 = \frac{2M_t}{\pi a^2 b}$$

L'angolo di quanto hanno ruotato intorno all'asse due sezioni di un'asta lunga l e con sezione ellittica di diametri $2a$; $2b$; è dato da:

$$\theta = \frac{M_t l}{\pi G} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3}$$

Il lavoro elastico:

$$L_e = \frac{M_t^2 l}{2\pi G} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3}$$

Per la sezione rettangolare, Bardi di De Saint Venant ha calcolato, in funzione del rapporto dei lati: $a/b = n$ con $a > b$ opportune tabelle di valori che applicati nelle rispettive formule consentono di calcolare τ_{max} che si trova a metà del lato maggiore (come si può vedere dai diagrammi τ già riportati) ed anche l'angolo θ/l riferito alla lunghezza unitaria.

$n = \frac{a}{b}$	1	1,1	1,2	1,25	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,75	1,8
α	4,804	4,67	4,57	4,52	4,48	4,40	4,33	4,27	4,21	4,18	4,16
β	7,114	6,49	6,02	5,82	5,65	5,35	5,11	4,91	4,76	4,67	4,60

$n = \frac{a}{b}$	2	2,25	2,5	3,0	4,0	5,0	6,0	8,0	10	20	∞
α	4,07	3,97	3,88	3,74	3,55	3,43	3,35	3,26	3,20	3,10	3,00
β	4,37	4,16	4,01	3,80	3,56	3,43	3,35	3,26	3,20	3,10	3,00

$$\tau_{max} = \alpha \frac{M_t}{a b^2}$$

$$\theta = \beta \frac{M_t l}{G a b^3}$$

e la τ_{max} in funzione di θ

$$\tau_{max} = \frac{\alpha}{\beta} G b \cdot \theta$$

Poiché spesso si usano bilance di torsione, ed

orologi ore un braccio, con due pesi agli estremi, è sostenuto da una linguetta elastica di sezione rettangolare con $a \gg b$ (basta $a > 4b$) per vedere dalle tabelle che per $n > 4$, $\alpha = \beta$, cioè:



$$\tau_{max} = G b \theta$$

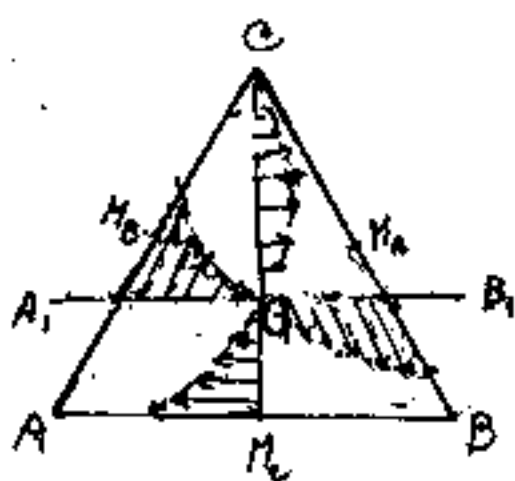
con $G \cong 800\,000 \text{ Kg/cm}^2$

$b \cong \frac{1}{100} \text{ cm}$

$\tau_{max} = 800 \text{ Kg/cm}^2$

$\theta = 2 \text{ rad.}$

$l = 20 \text{ cm}$



Sezioni triangolari equilatera

Se pensiamo al liquido che circola, a livello costante, in una vasca triangolare

il centro è G e la velocità in \overline{MG} deve essere mediamente doppia di quella occorrente a far passare la stessa quantità di liquido dalla sezione \overline{GC} . Ogni altro segmento uscente da G è maggiore di GM affinché arrivi al perimetro; perciò nelle mezzerie M dei lati si ha la τ_{max} . Per simmetria una volta individuato il diagramma τ su una mediana, deve essere valido anche per le altre, eventualmente rovesciati se cambia segno θ . (abbiamo ripreso il diagramma esposto dal Belluzzi)

Occorre ricordare che la trattazione della sollecitazione a torsione, è qui solo approssimata (come lo è stata per lo sforzo di taglio), ci ci serviamo una trattazione più organica per quando avremo esposti i principi ed i conseguenti metodi di calcolo necessari.

(Il Belluzzi avverte che le soluzioni del problema della torsione nei prismi di sezione ellittica, rettangolare, triangolare e di altre forme, furono date da B. De Saint Venant: "Memoire sur la torsion des prismes...")

Notiamo dal diagramma riportato (cfr. Belluzzi Scienza delle Costruzioni Vol I) che il diagramma sulla mediana CMe deve essere identico a quello sulla mediana AMe ; vien fatto di domandarci: com'è che nella breve variazione da \overline{GM}_A a \overline{GB} , il diagramma cambia curvatura? E lo cambia fra C ed Ma .

Siamo spiacenti, almeno per ora, di non poter chiarire il dubbio; pensare che il diagramma non sia esatto, è difficile, vista la cura con cui il Belluzzi espone i dati nel suo testo; d'altra parte la logica della simmetria farebbe prevedere rotori nei vertici.

Il fattore di torsione

Analogamente a quanto già detto sul fattore taglio come coefficiente, dipendente solo dalla forma della sezione, da applicarsi a formule semplici, anche per la torsione consideriamo un fattore "q" detto fattore di torsione e dipendente solo dalla forma della sezione.

L'analogia delle formule è con la flessione, ricordando infatti che l'angolo $\varphi = \frac{M \cdot l}{E I}$, l'angolo θ di rotazione in torsione diventa

$$\theta = q \frac{M \cdot l}{G J_p}$$

Per sezioni circolari piene o cove: $q=1$, come abbiamo già visto.

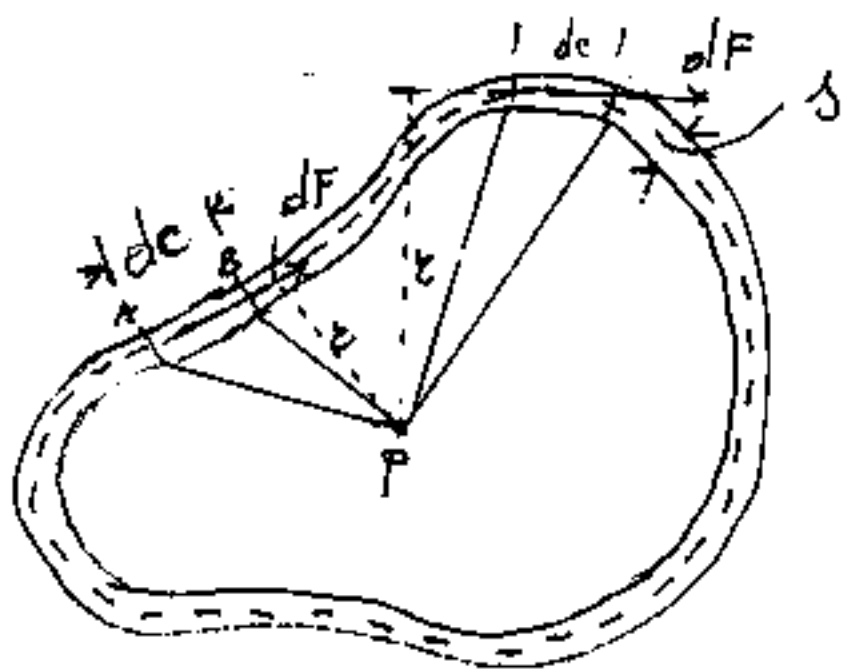
Saint Venant suggerì: $q = 40 \frac{J_p^2}{A^4}$ per sezioni di profilati.

per l'ellisse $q = 4\pi^2 = 39,48$; per il rettangolo varia da quadrato ($q = 42,7$) a segmento ($q = 36$); per il triangolo equilatero $q = 45$.

Il lavoro elastico:

$$L = \frac{M \theta}{2} = \frac{q M^2 l}{2 G J_p}$$

Travi tubolari con parete sottile



Si abbia una trave con sezione cava, cioè tubolare di spessore s piccolo e costante.

Il diagramma delle

τ ci dice che la tensione è massima sul bordo esterno e minima sul bordo interno. Noi consideriamo una τ media agente sul bordo medio (tratteggiato). Se consideriamo un tratto "dc" di contorno la cui area $dA = sdc$ moltiplicata per τ dà la forza $dF = \tau dA = \tau sdc$.

Se consideriamo un punto P interno alla sezione e distante r da dc , dF provoca in P il momento torcente elementare $dM_t = r dF$
 $dM_t = \tau s r dc$, ma: $r dc = 2d\Omega$, è il doppio dell'area elementare ABP . Ciò si verifica per tutti i triangoli di vertice P e base dc . Estendendo dc a tutto il bordo medio (integrando dc) si ottiene il doppio delle aree dei triangoli di base dc , cioè il doppio dell'area Ω delimitata dal bordo medio, e l'insieme delle dF che equilibra M_t .

$dM_t = \tau s dc = \tau s \cdot 2d\Omega$ integrando e
risolvendo τ

$$\tau = \frac{M_t}{2\Omega s}$$

Formula di Bredt che fornisce la τ per
le travi a sezione tubolare sottile

L'energia elastica accumulata in una trave
lunga l è pari al lavoro esterno di M_t

$L_e = \frac{M_t \theta}{2}$ ove θ è l'angolo di
rotazione delle due sezioni terminali distanti l
(preferiamo indicare θ/l l'angolo per unità di lunghezza)

Poiché: $G \frac{\theta}{l} = \tau$; $\frac{\theta}{l} = \frac{\tau}{G}$; $dL_e = \frac{\tau \cdot \theta}{2} dV$

$$L_e = \frac{1}{2} \int \frac{\tau^2}{G} dV = \frac{1}{2G} \int \tau^2 l s dc = \frac{l}{2G} \int \frac{M_t^2}{4\Omega^2 s} dc = \frac{M_t \theta}{2}$$

$$\theta = \frac{M_t l}{4G\Omega^2} \int \frac{dc}{s}$$

$$\theta = \frac{M_t l c}{4G\Omega^2 s}$$

Per la τ ammissibile vi sono varie teorie:

detta K la σ ammissibile a sforzo normale

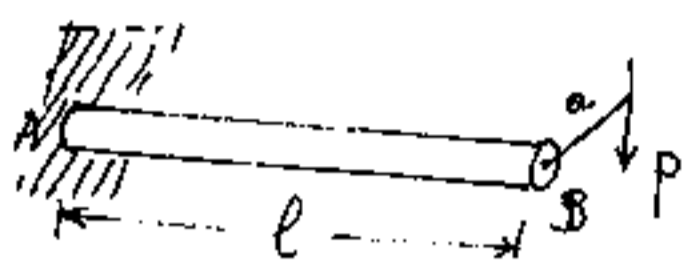
per Saint-Venant: $\left(\frac{m+1}{m}\right)\tau \leq K$

$$\text{cioè: } \tau \leq \frac{mK}{m+1}$$

secondo Mohr: $\tau \leq 0,5K$

Prove sperimentali per trovare m, G, E .

Un metodo veramente ingegnoso è stato proposto da Kirchhoff.

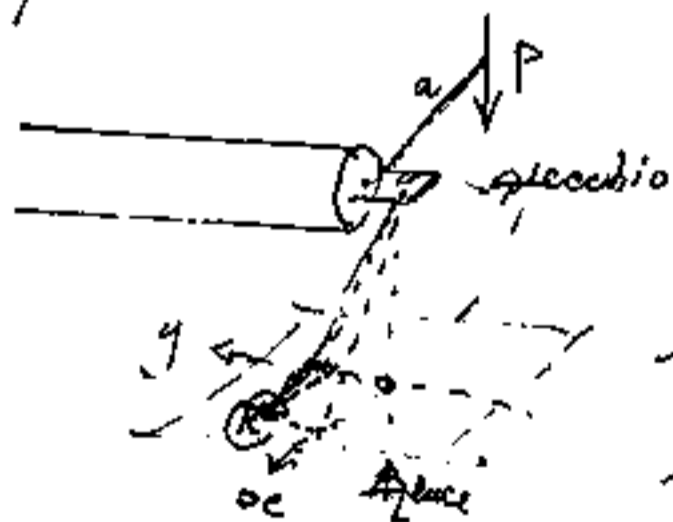


All'estremo libero di un'asta incastrata, lunga l e di sezione circolare,

è applicato, con un braccio rigido a un peso P .

Perciò l'asta è soggetta al momento torcente costante $M_t = Pa$; al taglio costante $T = P$, al momento flettente linearmente variabile $M = Pa x$, fino al massimo $M_{max} = M_A = Pl$.

Per misurare gli angoli φ e θ dovuti ad M ed M_t utilizziamo il metodo Poggendorff, poniamo cioè in B uno specchietto come in figura orizzontalmente.



Sappiamo che un raggio di luce che cada normalmente sullo specchietto quando lo

specchio ruota, si riflette con angolo doppio di quello dello specchio. Perciò applicato il carico, il raggio riflesso darà le coordinate dello spostamento.

Sappiamo che $\varphi = \frac{Pl^2}{2EJ}$; $\theta = \frac{Pal}{GJ_p}$

$$\begin{aligned} E &= \frac{Pl^2}{2\varphi J} \\ G &= \frac{Pal}{\theta J_p} \end{aligned} \quad (2J = J_p)$$

ciò: $\boxed{\frac{E}{G} = \frac{\theta l}{\varphi a}}$

Se la tavola su cui si riflette il raggio luminoso dista d dallo specchietto, le coordinate $y = 2\varphi d$
 $x = 2\theta d$ cioè il rapporto delle coordinate è il rapporto degli angoli.

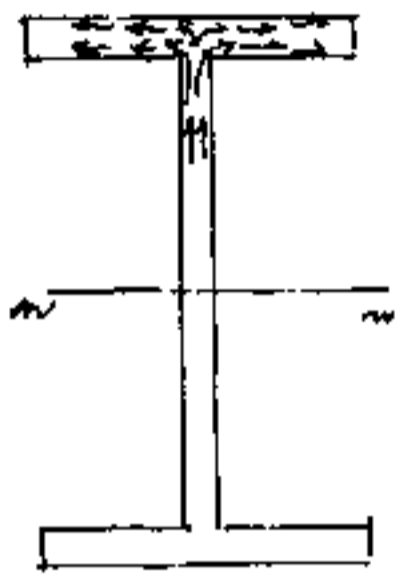
Posto: $w = \frac{E}{G}$ avremo: $\boxed{m = \frac{2}{w-2}}$

$$E = \frac{Pl^2}{2\varphi J} \quad ; \quad G = \frac{Pal}{\theta J_p}$$

però i valori di E e G risultano più difettosi perché sono funzioni di più grandezze, mentre il loro rapporto è proporzionale al rapporto $\frac{\theta}{\varphi}$.

Il flusso delle τ nelle sezioni dei profilati

Per sezioni simmetriche soggette a taglio, non vi sono particolari problemi. Per

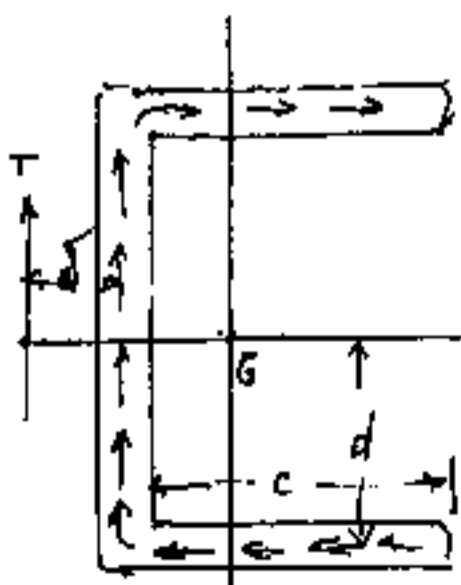


esempio un doppio τ reagisce a taglio quasi esclusivamente con l'anima. Le τ che percorrono le ali si attenuano notevolmente via via che si allontanano dall'anima.

Ali molto larghe diventano inefficienti anche a flessione

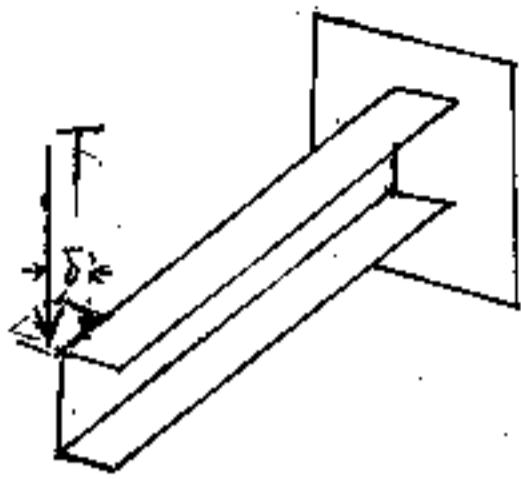
Il centro di taglio o di torsione

Quando la sezione non è simmetrica,



per esempio un C, la continuità delle τ genera una coppia nelle ali del profilato, se caricato baricentricamente, o anche sull'anima la trave

si torce. Per rendersene conto basta piegare a C una striscia di cartoncino e da un lato incastrarla, se premiamo sulla



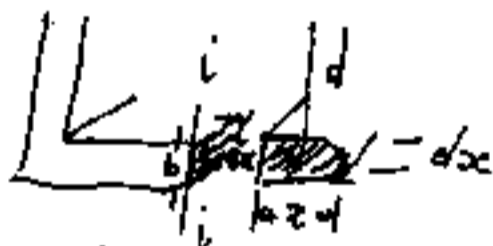
sezione libera si ha torsione, occorre premere su una linguetta esterno come κ per equilibrare M_t .

Tale punto esterno distante δ dall'anima è detto centro di taglio o di torsione.

Riferiamo il solido a tre assi cartesiani, x longitudinale y secondo l'anima, z secondo le ali.

Sezioniamo un'ala secondo una retta i parallela ad y . Sulla i si affacceranno le $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ed agirà la forza:

$$\tau_{zx} b dx$$



quindi analogamente a quanto già fatto, si ha la nota formula $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{T S_i}{J b_i}$

sia $b_i = b = \text{costante}$ $S_i = A_i d$; $S_i = b z d$

$\tau_{xz} = \frac{T z d}{J}$ varia con z , se la lunghezza dell'ala è c , la risultante delle τ nell'ala: $H = \frac{T b c^2 d}{2J}$

ed $H \cdot z d = M_t$ perciò T dovrà essere posto a distanza δ dall'anima affinché $T \delta$ generi un M_t uguale e contrario

$$\delta = \frac{H \cdot c d}{T} = \frac{d^2 c^2 b}{J}$$

Tavola riepilogativa delle sollecitazioni

Sollecitazione	Tensione	Deformazione	Lavoro	Note
<u>sforzo Normale</u> N	$\sigma = \frac{N}{A}$	$\Delta l = \int \frac{N dx}{EA}$	$L_e = \int \frac{N^2 dx}{2EA}$	dilatazione $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ $\sigma = E\epsilon$ (legge di Hooke) $E =$ modulo di elasticità normale
<u>Momento flettente</u> M	$\sigma = \frac{My}{J}$ (Navier)	$\varphi = \int \frac{M dx}{EJ}$	$L_e = \int \frac{M^2 dx}{2EJ}$	
<u>sforzo di Taglio</u> T	$\tau = \frac{TS}{Jb}$	$\delta = \int \chi \frac{T dx}{GA}$	$L_e = \int \chi \frac{T^2 dx}{2GA}$	$\chi =$ fattore taglio $G =$ modulo di elasticità tangenziale $G = E \frac{\nu}{2(1+\nu)}$
<u>Momento torcente</u> M_t	$\tau = \frac{M_t r}{J_p}$	$\varphi = \int \frac{M_t dx}{G J_p}$	$L_e = \int \frac{M_t^2 dx}{2G J_p}$	Vale solo per sezioni circolari cilindriche. $q =$ fattore torsione vale per sezioni qualsiasi
	$\tau = \frac{M_t}{2J_s}$	vale per (Bredt)	sezioni tubolari sottili	

La Linea Elastica

Dicesi "linea elastica" la configurazione di equilibrio dell'asse di un solido astiforme, elastico, soggetto a carichi.

Dall'analisi matematica abbiamo che il raggio R di curvatura in un punto di una linea $y=f(x)$ è dato da:

$$R = \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{y''}$$

quindi la curvatura: $(1/R)$;

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$$

Sappiamo che y' è la tangente trigonometrica dell'angolo di rotazione della sezione, $\approx \varphi$ (circa uguale all'angolo, trattandosi di angoli piccolissimi), trascurabile rispetto all'unità, ed a maggior ragione trascurabile il suo quadrato.

Quindi la formula (approssimata) diventa:

$$\frac{1}{R} = y''$$

L'aver trascurato y' equivale a trascurare le deformazioni dovute allo sforzo di taglio.

In matematica la $y = f(x)$ è ordinariamente positiva verso l'alto, noi porremo positiva la direzione verso il basso dei carichi in campo gravitazionale cioè poniamo: $\eta = -y$; e la nostra equazione diventa:

$$\frac{1}{R} = -\eta''$$

Nel trattare la flessione abbiamo ricavato:

$$\frac{1}{R} = \frac{\mathcal{M}}{EJ}$$

sostituendo:

$$\eta'' = \frac{-\mathcal{M}}{EJ}$$

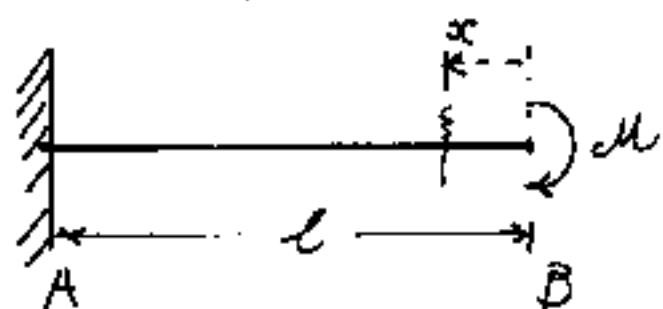
Equazione della linea elastica, che nel caso di: $EJ = \text{cost}$, può scriversi:

$$EJ\eta'' = -\mathcal{M}$$

È una equazione differenziale del secondo ordine, incompleto (mancano η e η') per cui basta una doppia integrazione per risolverla.

Le due costanti arbitrarie di integrazione: C_1 e C_2 si calcolano ai limiti.

Esempi di calcolo



$$M(x) = -M$$

$$EJ \eta'' = M$$

integrando: $EJ \eta' = Mx + C_1$

Sappiamo che $\eta' = \varphi$; per $x = l \rightarrow \varphi_A = 0$; per cui:

$$0 = Ml + C_1; \quad C_1 = -Ml$$

e l'equazione diventa:

$$EJ \eta' = M(x - l); \quad \boxed{\varphi = \frac{M}{EJ} (x - l)}$$

integrando di nuovo:

$$EJ \eta = \frac{Mx^2}{2} - Mlx + C_2$$

per $x = l \rightarrow \eta_A = 0$

$$0 = \frac{Ml^2}{2} - Ml^2 + C_2$$

$$C_2 = \frac{Ml^2}{2}$$

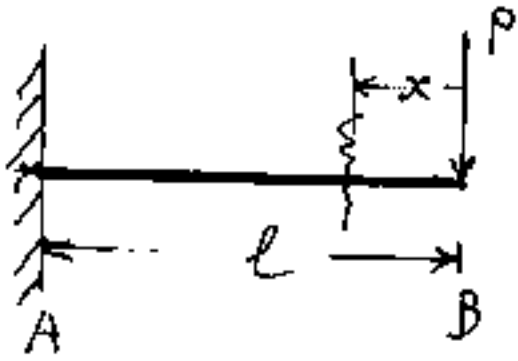
e l'equazione diventa:

$$\eta = \frac{M}{EJ} \left(\frac{x^2}{2} - lx + \frac{l^2}{2} \right)$$

che può scriversi:

$$\boxed{\eta = \frac{M}{2EJ} (l - x)^2}$$

Si noti che questa curva è una parabola, mentre trattando la flessione avevamo trovato una circonferenza che è osculatrice di questa parabola, la differenza è dovuta ad aver trascurato y' .



$$-M_{ox} = P \cdot x$$

$$EJ\eta'' = P \cdot x$$

$$EJ\eta' = \frac{P \cdot x^2}{2} + C_1$$

per $x = l$, $\eta' = 0$

$$EJ\eta' = \frac{P \cdot x^2}{2} - \frac{P \cdot l^2}{2}$$

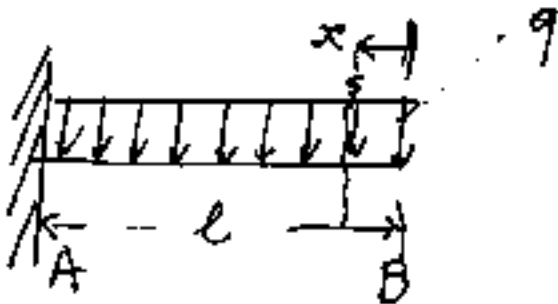
$$\boxed{\varphi = \frac{P}{2EJ} (x^2 - l^2)} \quad \left(\varphi_B = \frac{P \cdot l^2}{2EJ} \right)$$

$$EJ\eta = \frac{P \cdot x^3}{6} - \frac{P \cdot l^2 \cdot x}{2} + C_2$$

per $x = l$; $\eta = 0$

$$C_2 = \frac{P \cdot l^3}{2} - \frac{P \cdot l^3}{6} = \frac{P \cdot l^3}{3}$$

$$\boxed{\eta = \frac{P}{EJ} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{l^2 \cdot x}{2} + \frac{l^3}{3} \right)} \quad \left(\eta_B = f = \frac{P \cdot l^3}{3EJ} \right)$$



$$M_{ox} = -\frac{q \cdot x^2}{2}; \quad EJ\eta'' = \frac{q \cdot x^2}{2}$$

$$EJ\eta' = \frac{q \cdot x^3}{6} + C_1 \quad (x = l \rightarrow \eta' = 0)$$

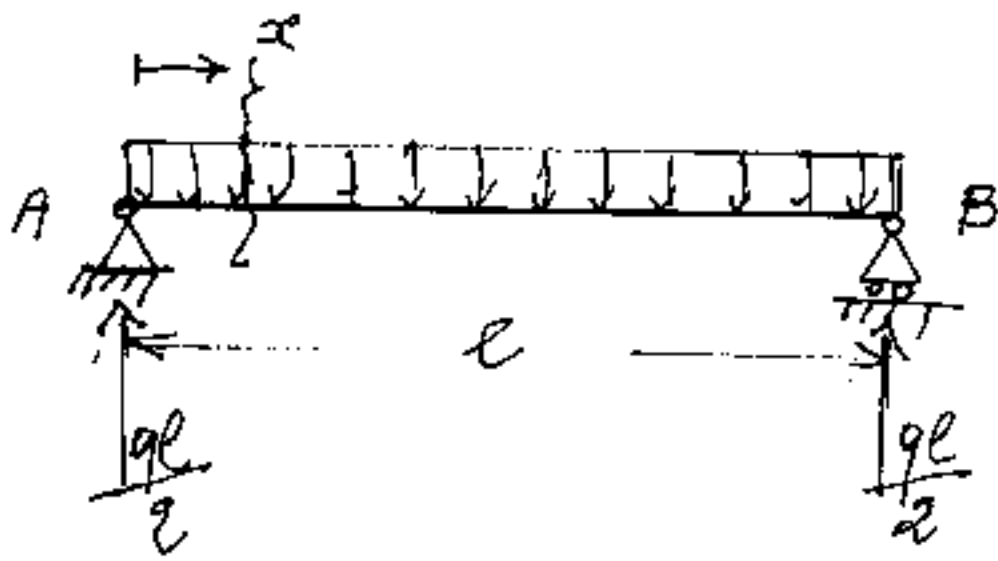
$$EJ\eta' = \frac{q \cdot x^3}{6} - \frac{q \cdot l^3}{6} \quad \left(\varphi_B = -\frac{q \cdot l^3}{6EJ} \right)$$

$$\boxed{\varphi = \frac{q}{6EJ} (x^3 - l^3)}$$

$$EJ\eta = \frac{q \cdot x^4}{24} - \frac{q \cdot l^3 \cdot x}{6} + C_2 \quad (x = l; \eta = 0)$$

$$C_2 = \frac{4 - 1}{24} q \cdot l^4 = \frac{q \cdot l^4}{8}$$

$$\boxed{\eta = \frac{q}{EJ} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{l^3 \cdot x}{6} + \frac{l^4}{8} \right)} \quad \left(\eta_B = \frac{q \cdot l^4}{8EJ} \right)$$



$$M_{xx} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

$$EJ\eta'' = qx^2 - \frac{qlx}{2}$$

$$EJ\eta' = \frac{qx^3}{6} - \frac{qlx^2}{4} + C_1$$

$$EJ\eta = \frac{qx^4}{24} - \frac{qlx^3}{12} + C_1x + C_2$$

per $x=0$; $\eta=0 \rightarrow C_2=0$

per $x=l$; $\eta=0$ $C_1 = \frac{ql^3}{12} - \frac{ql^3}{24} = \frac{ql^3}{24}$

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \left(\frac{qx^3}{6} - \frac{qlx^2}{4} + \frac{ql^3}{24} \right)$$

$$\eta = \frac{1}{EJ} \left(\frac{qx^4}{24} - \frac{qlx^3}{12} + \frac{ql^3}{24}x \right)$$

$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{ql^3}{24EJ}$$

$\varphi=0$ per $x=l/2$

$$\eta_{\max} = \eta_{\left(\frac{l}{2}\right)} = \frac{ql^4}{EJ \cdot 24} \left(\frac{1}{16} - \frac{\frac{2}{8}}{\frac{8}{16}} + \frac{\frac{8}{16}}{\frac{16}{16}} \right) =$$

$$\eta_{\max} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$$

Analogia del Mohr

La linea elastica è superata dall'analogia di Mohr.

Ricordiamo le relazioni: fra q, T, M ; e confrontiamole con l'equazione della linea elastica, avremo:

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = - \frac{M}{EI}$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \varphi = \int \frac{M}{EI} dx$$

$$\frac{dM}{dx} = T$$

Dalle prime due si nota che dato il carico q sappiamo calcolare M .

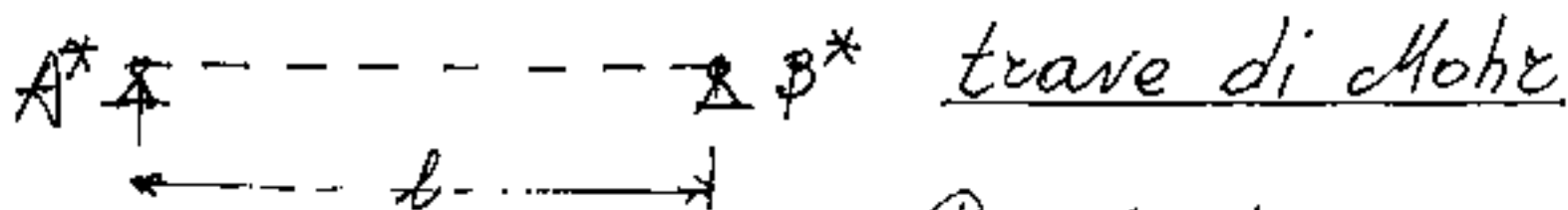
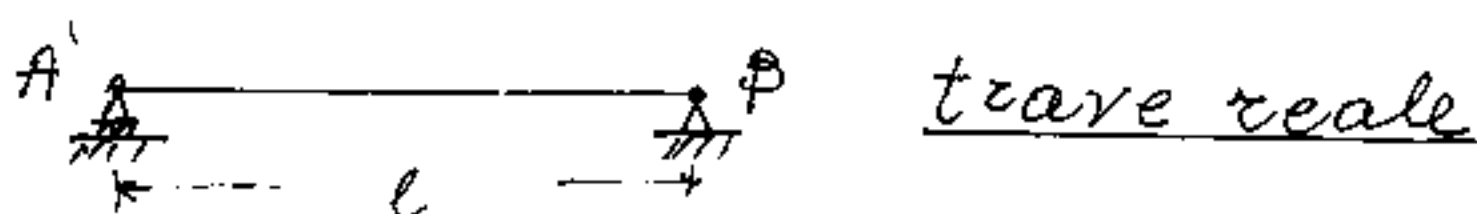
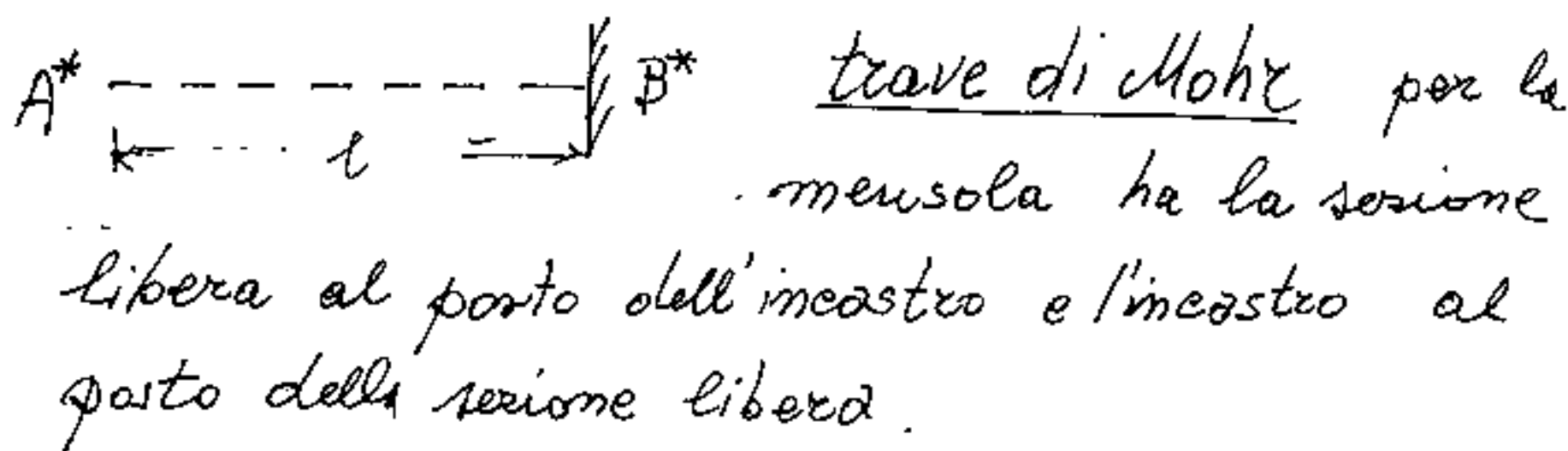
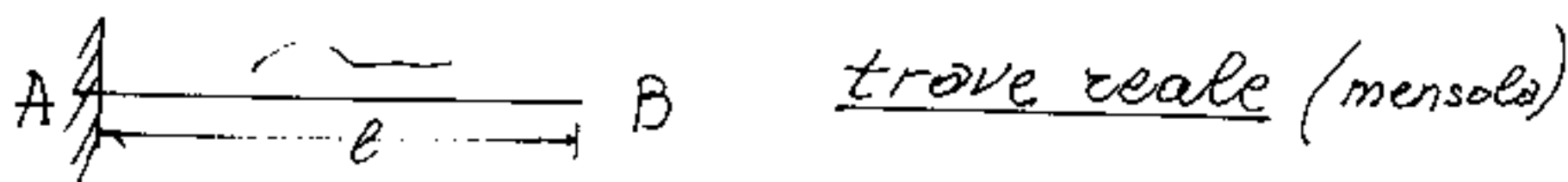
Ma se consideriamo: $\frac{M}{EI} = q^*$ come fosse un carico (carico fittizio), il momento fittizio che calcoleremmo per tale carico fittizio è la linea elastica. $\left(\frac{M^*}{EI} = \eta \right)$
(I valori fittizi si asteriscono.)

Il taglio fittizio: $\frac{T^*}{EI} = \varphi$.

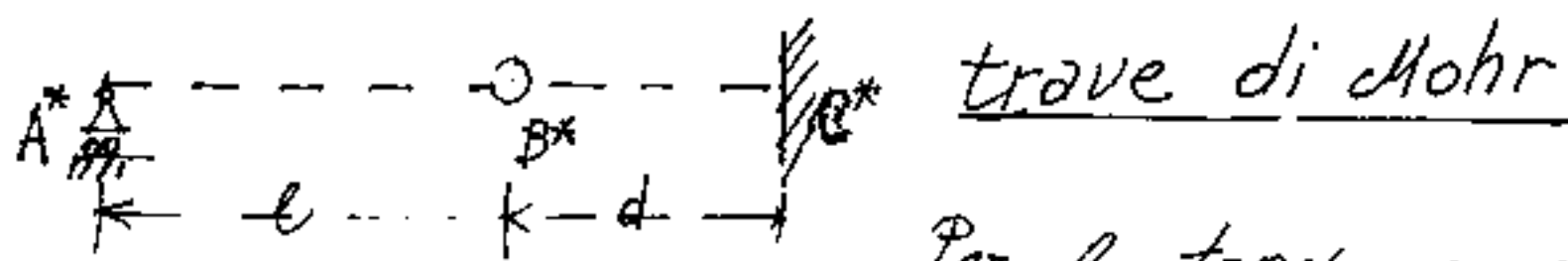
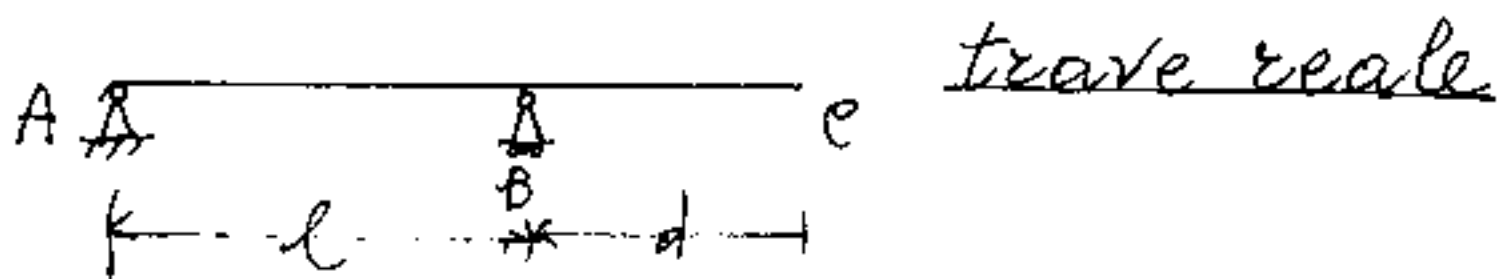
Però dobbiamo ricordare che ciò vale solo sulle travi di Mohr.

Le travi di Mohr si disegnano a tratteggio in corrispondenza della trave reale.

Esse sono:



Per la trave appoggiata la trave reale e quella di Mohr sono uguali.



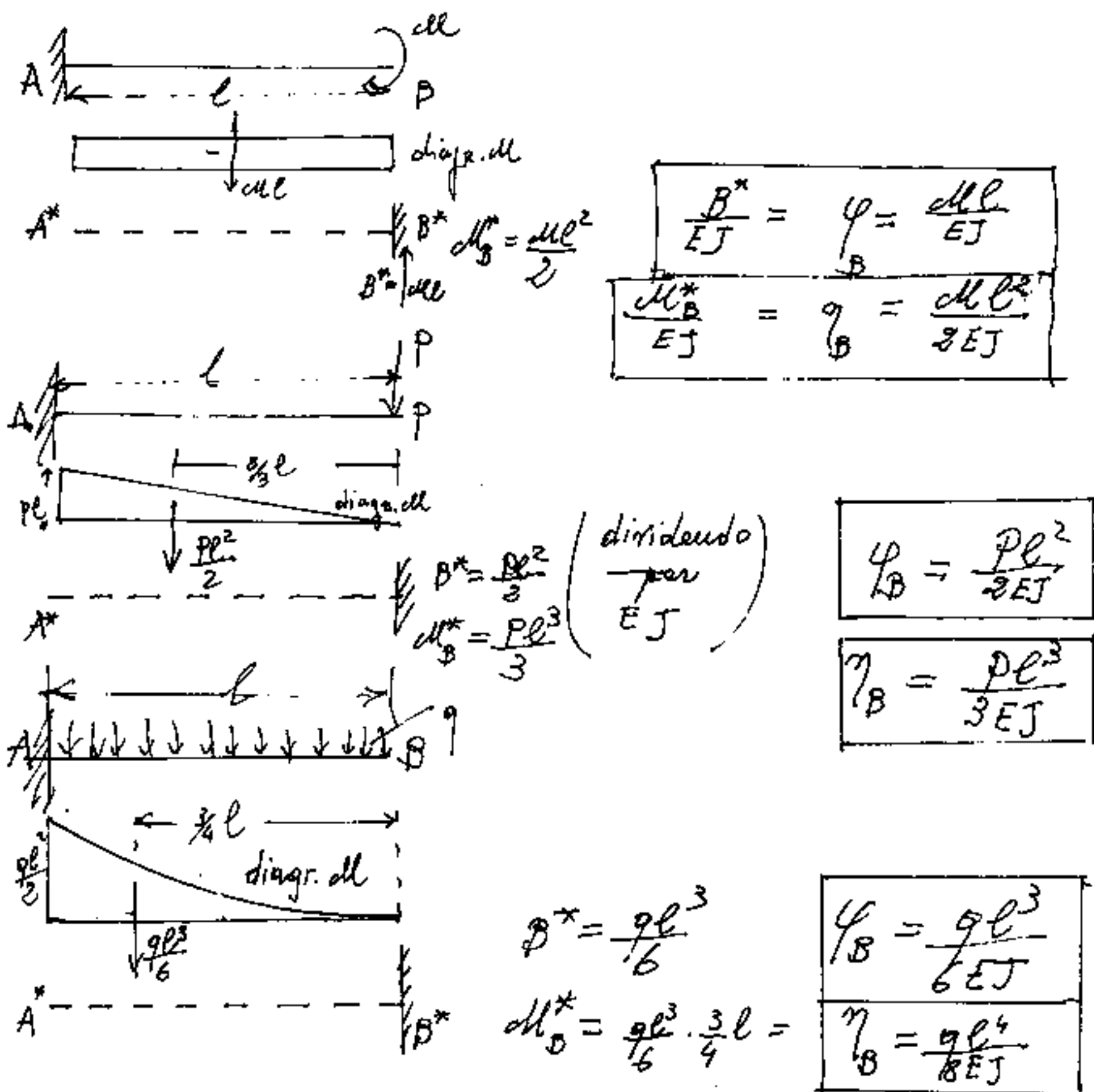
Per la trave a sbalzo poiché sulla trave di Mohr la sezione libera diventa un incastro, la mensola di Mohr C^*B^* sarà portante la trave A^*B^* cioè in B^* avremo

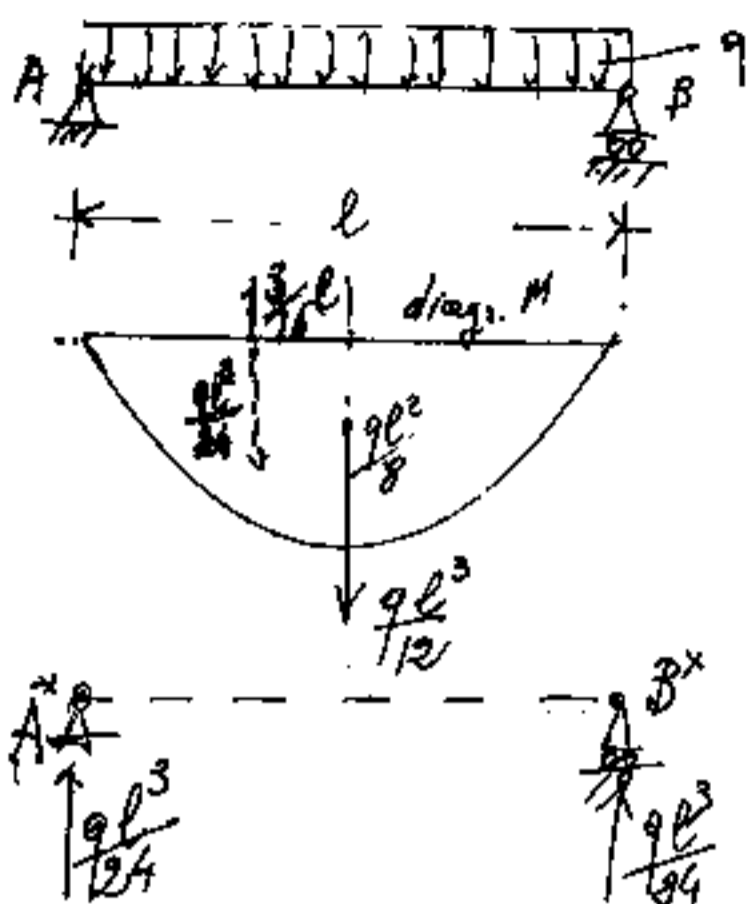
una cerniera che interrompe la struttura.
 La trave di Mohr deve rimanere isostatica.

L'applicazione è veramente semplice:
 Se $EJ = \text{cost.}$ ci riserviamo di dividere dopo.

Caricata la trave di Mohr col diagramma dei momenti flettenti (carico fittizio), si colloca la M^* e T^* ; $\frac{dM^*}{EJ} = \eta$; $\frac{T^*}{EJ} = \varphi$

facciamo degli esempi





$$A^* = B^* = \frac{q l^3}{24} ; \quad \varphi_A = \varphi_B = \frac{q l^3}{24 E J}$$

$$M_{\frac{l}{2}}^* = + \frac{q l^3}{24} \cdot \frac{l}{2} - \frac{q l^3}{24} \cdot \frac{3}{16} l = \frac{5}{384} q l^4$$

$$f = \eta_{\frac{l}{2}} = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{E J}$$

Abbiamo ripetuto gli stessi esempi calcolati con la linea elastica, per rendere evidente la snellezza del metodo di Mohr, oltre a risparmiare per ogni esercizio una doppia integrazione oltre al calcolo delle costanti di integrazione.

Il metodo di Mohr porta anche a vedere come da "q" carico, con una sequenza di integrazioni si arrivi ad $EJ\eta$, e viceversa da $EJ\eta$ con una sequenza di derivazioni si arrivi a q.

$$T = \int q dx ; \quad -M = \int T dx ; \quad EJ\eta' = \int M dx ; \quad EJ\eta = \int EJ\eta' dx$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \eta' \quad \frac{d\eta'}{dx} = \eta'' = \frac{-M}{EJ} ; \quad \frac{d\eta''}{dx} = \eta''' = \frac{T}{EJ} ; \quad \frac{d\eta'''}{dx} = \eta'''' = \frac{q}{EJ}$$

Se ricordiamo che ove la derivata prima è zero si ha un max o min della funzione, ed ove la derivata seconda è zero si ha un flesso; una semplice scorsa delle derivate ora scritte ci dice che, ove il momento flettente è zero, la linea elastica presenta un flesso, e la rotazione della sezione è max o min. Ciò si poteva arguire anche dalle curvature e considerare le fibre tese e le fibre compresse. Se estendiamo queste osservazioni a tutta la sequenza delle derivate, troveremo interessantissimi riscontri.

η = linea elastica

$\eta' = \text{tg } \varphi \approx \varphi =$ rotazioni delle sezioni

$\eta'' = \frac{-M}{EJ} = \frac{1}{R} =$ curvatura

$\eta''' = \frac{-T}{EJ} =$ Taglio riferito all'unità di rigidità a flessione

$\eta^{IV} = \frac{+q}{ES} =$ Carico distribuito riferito c.s.

Per $EJ =$ unitario :

η

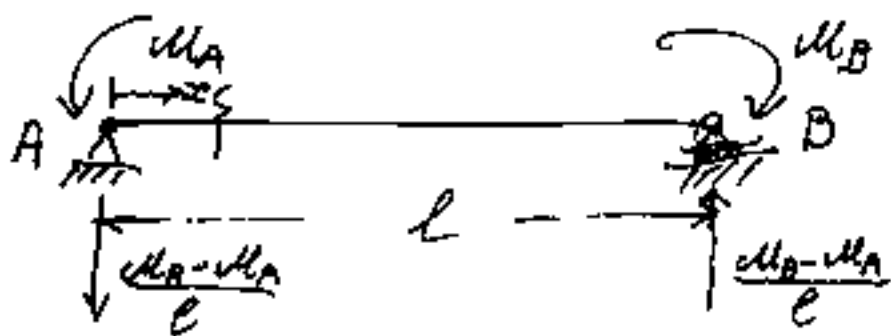
$\eta' = \varphi$

$\eta'' = \varphi' = -M$

$\eta''' = \varphi'' = -M' = -T$

$\eta^{IV} = \varphi''' = -M'' = -T' = q$

Una importante applicazione dell'analogia di Mohr.

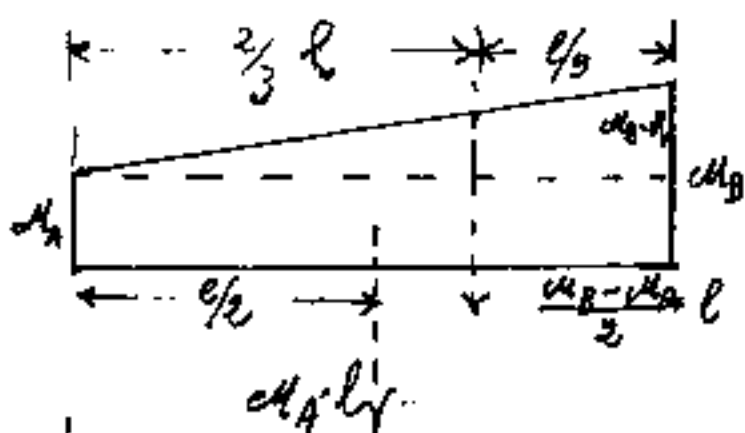


Sia $|u_B| > |u_A|$

Trave semplicemente appoggiata soggetta, nelle sezioni terminali, ai momenti

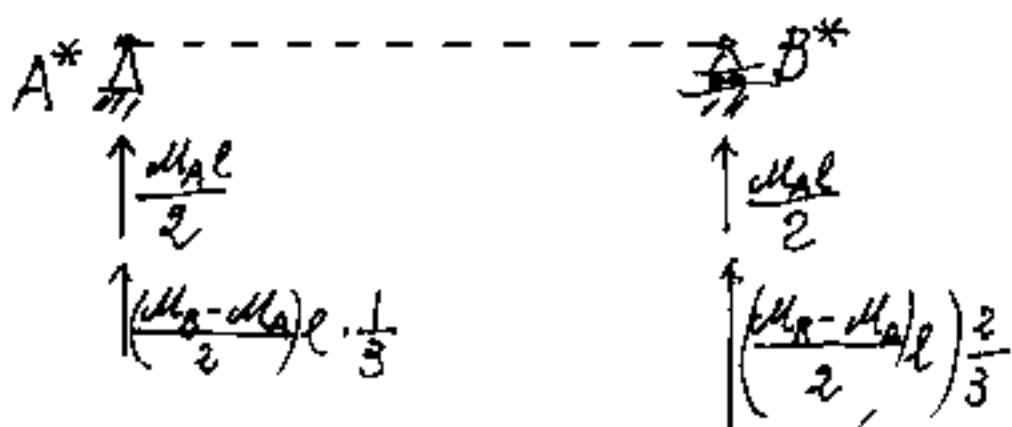
ti M_A ed M_B per cui: $R_A = R_B = \frac{M_B - M_A}{l}$

$$M_x = -M_A - \left(\frac{M_B - M_A}{l}\right)x$$



consideriamo il diagramma M un carico fittizio e ne carichiamo la trave di Mohr.

Avremo le reazioni vincolari:

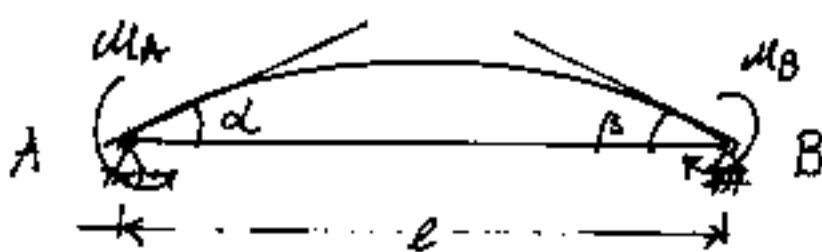


$$A^* = \frac{3M_A l}{6} - \frac{M_A l}{6} + \frac{M_B l}{6};$$

$$A^* = \frac{l}{6} (2M_A + M_B)$$

$$B^* = \frac{3M_A l}{6} - \frac{2M_A l}{6} + \frac{2M_B l}{6};$$

$$B^* = \frac{l}{6} (M_A + 2M_B)$$



quindi gli angoli di rotazione delle sezioni terminali sono:

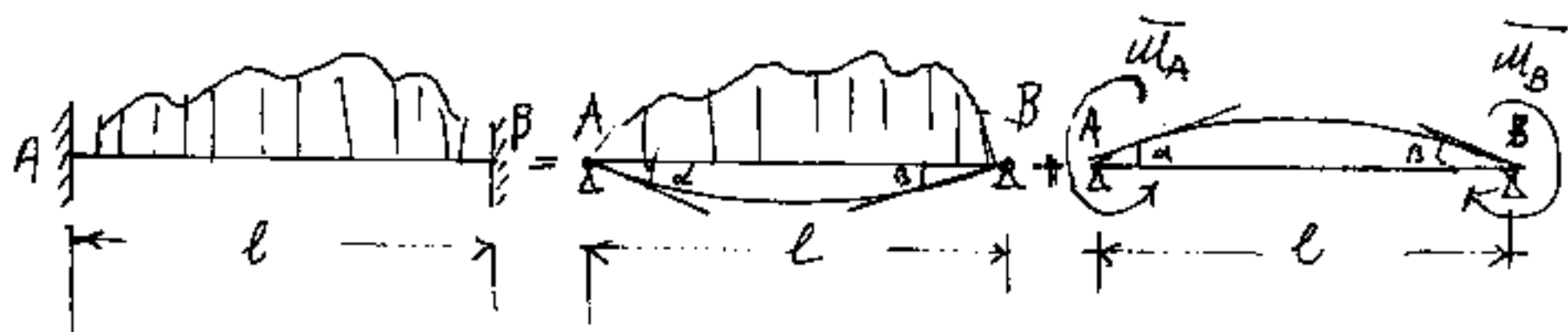
formula importante per l'equazione dei tre momenti sulla trave continua.

$$\alpha = \frac{l}{6EJ} (2M_A + M_B)$$

$$\beta = \frac{l}{6EJ} (M_A + 2M_B)$$

Riduzione alla trave perfettamente incastrata

Si dicono: momenti d'incastro perfetto (per distinguerli, si soprallineano: \bar{M}_A ; \bar{M}_B) quei momenti che tendono nulle le rotazioni delle sezioni terminali, avute per effetto dei carichi sulla trave semplicemente appoggiata. Cioè \bar{M}_A ed \bar{M}_B da soli sulla trave semplicemente appoggiata, generano in A e B gli stessi angoli α e β (diverso opposto) di quelli dovuti ai carichi.

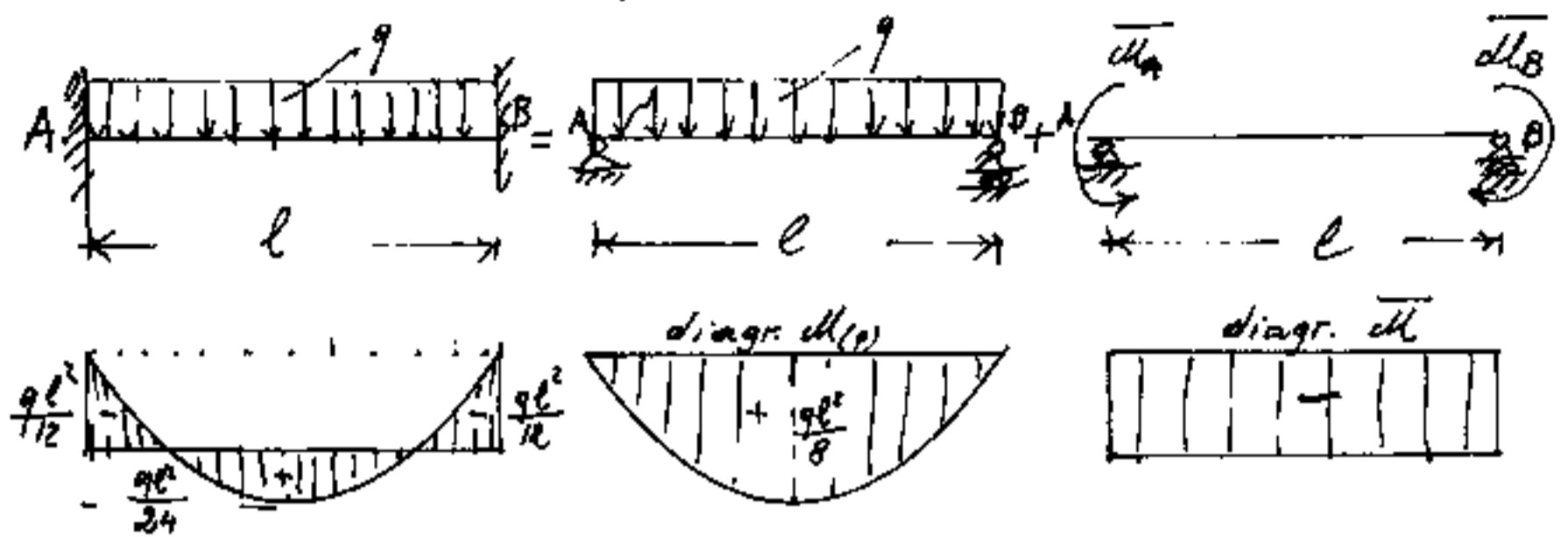


Tutto ciò implica che, se interessano le rotazioni delle sezioni terminali per effetto di un carico, e per quel carico conosciamo i momenti d'incastro perfetto, basta applicare la formula

$$\begin{cases} \alpha = \frac{-l}{6EJ} (2\bar{M}_A + \bar{M}_B) \\ \beta = \frac{-l}{6EJ} (2\bar{M}_B + \bar{M}_A) \end{cases}$$

Il segno meno per indicare che \bar{M}_A ed \bar{M}_B devono prendersi di segno opposto.

Facciamo un esempio



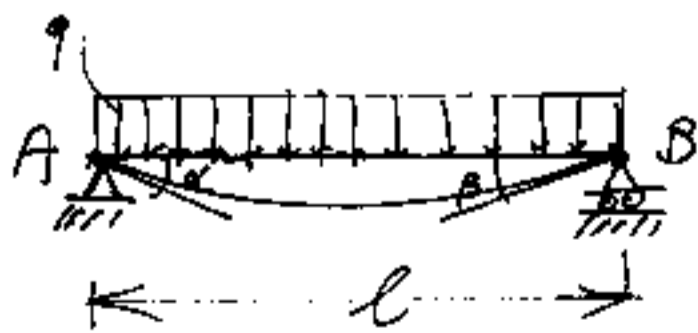
Sovrapponendo i due diagrammi: $M(q)$ ed \bar{M} , i segni più e meno sovrapposti si elidono, i restanti costituiscono il diagramma del momento sulla trave incastrata.

Le aree dei due diagrammi $M(q)$ ed \bar{M} debbono essere uguali ed opposte affinché la trave di Mohr abbia reazioni nulle:

$$-\bar{M}l = \frac{ql^2}{8} l \cdot \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\bar{M} = -\frac{ql^2}{12}}$$

valore del momento d'incastro perfetto per un carico distribuito.

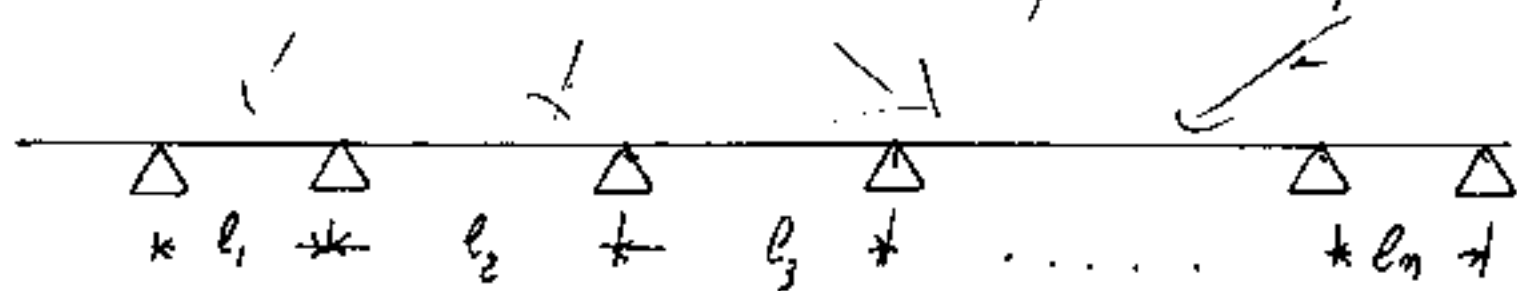


$$\alpha = \frac{l}{6EJ} \left(2 \frac{ql^2}{12} + \frac{ql^2}{12} \right) = \frac{ql^3}{24EJ}$$

$$\beta = \frac{l}{6EJ} \left(\frac{ql^2}{12} + 2 \frac{ql^2}{12} \right) = \frac{ql^3}{24EJ}$$

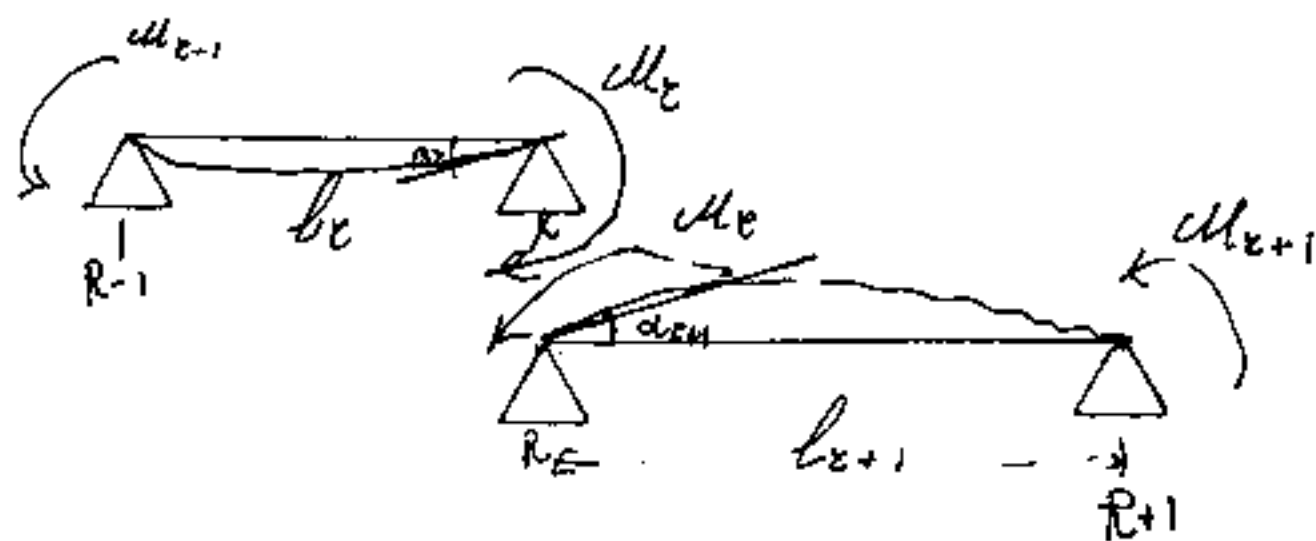
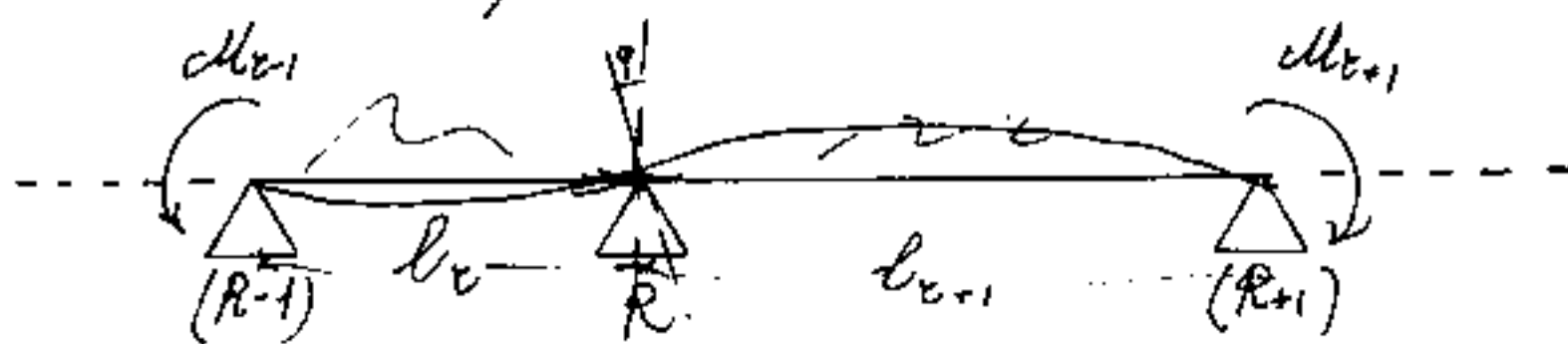
valori che avevamo già calcolato con diversi procedimenti.

L'equazione dei tre momenti
e la trave continua a più campate



Una trave continua su n appoggi (di cui uno è una cerniera, e gli altri carrelli) è $(n-2)$ volte iperstatica; quindi occorrono $(n-2)$ equazioni.

Consideriamo due generiche campate consecutive (prese a due a due consecutive ve ne sono tante quante volte è iperstatica: $n-2$)



La restante trave a sinistra trasmette il momento M_{r-1}
 la restante trave a destra trasmette il momento M_{r+1}
 Sull'appoggio intermedio R , le due campate si trasmettono il momento M_r , per la continuità della trave

$$\beta_r = -\alpha_{r+1}$$

(forma base dell'equazione dei tre momenti)

Infatti la rotazione della sezione su R sarà:

$\gamma = \beta_x$ se consideriamo la sezione R appartenente ad (l_x)

$\gamma = \alpha_{x+1}$ se consideriamo la sezione R appartenente ad (l_{x+1})

Sviluppiamo l'equazione: $\beta_x = -\alpha_{x+1}$ per

ogni campata si possono calcolare le rotazioni delle sezioni terminali utilizzando l'applicazione di Mohr, e distinguendo le rotazioni dovute ai momenti nelle sezioni terminali, da quelle dovute ai carichi sulla campata (che trasformiamo in momenti d'incastro perfetto)

$$\beta_x = \frac{l_x}{6E_x J_x} \left[\overset{\substack{\text{dovuti ai momenti} \\ \text{sulle ter. term.}}}{(2M_x + M_{x-1})} - \overset{\substack{\text{(dovute ai carichi)} \\ \text{camp.}}}{(2\bar{M}_x + \bar{M}_{x-1})} \right]$$

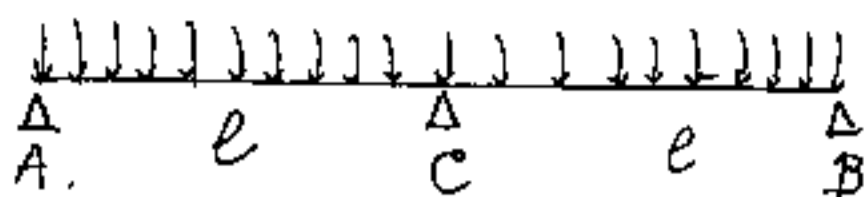
$$\alpha_{x+1} = \frac{l_{x+1}}{6E_{x+1} J_{x+1}} \left[(2M_x + M_{x+1}) - (2\bar{M}_x + \bar{M}_{x+1}) \right] \quad (\beta_x = -\alpha_{x+1})$$

$$\frac{l_x}{6E_x J_x} \left[(2M_x + M_{x-1}) - (2\bar{M}_x + \bar{M}_{x-1}) \right] = - \frac{l_{x+1}}{6E_{x+1} J_{x+1}} \left[(2M_x + M_{x+1}) - (2\bar{M}_x + \bar{M}_{x+1}) \right]$$

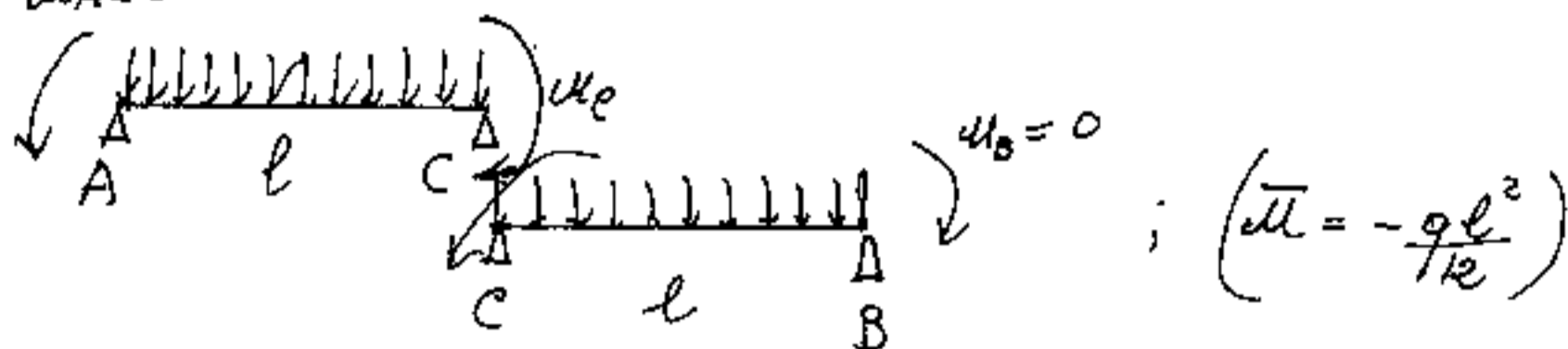
E questa l'equazione dei tre momenti in forma estesa.

facciamo alcuni esempi.

Un esempio semplice



$u_A = 0$



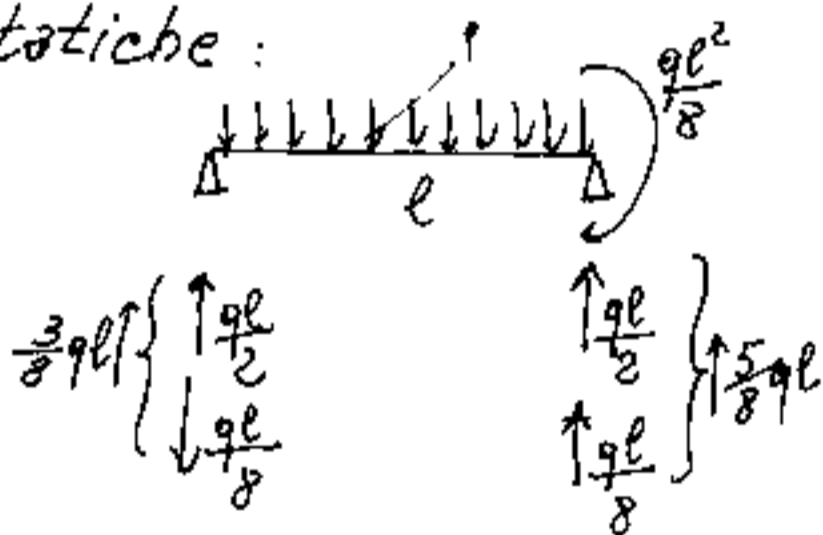
essendo $l_1 = l_2$ ed $EI = \text{cost}$ l'equazione si riduce:

$$\left[(2u_C + 0) + \left(2 \frac{ql^2}{12} + \frac{ql^2}{12} \right) \right] = - \left[(2u_C + 0) + \frac{ql^2}{12} \right]$$

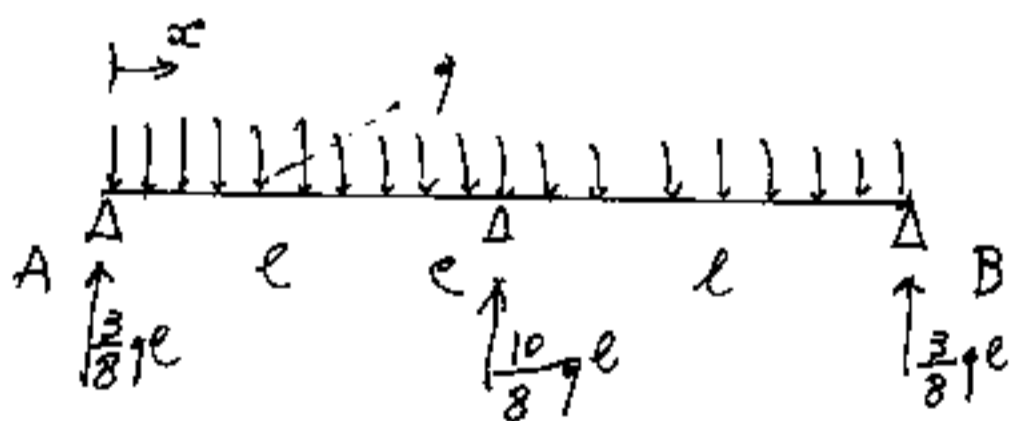
$$4u_C = -\frac{2ql^2}{4}$$

$$u_C = -\frac{ql^2}{8}$$

La trave su tre appoggi è ridotta così a due isostatiche:



is simmetrica



$$T_x = \frac{3}{8} ql - qx$$

$$T_x = 0 \quad x = \frac{3}{8} l$$

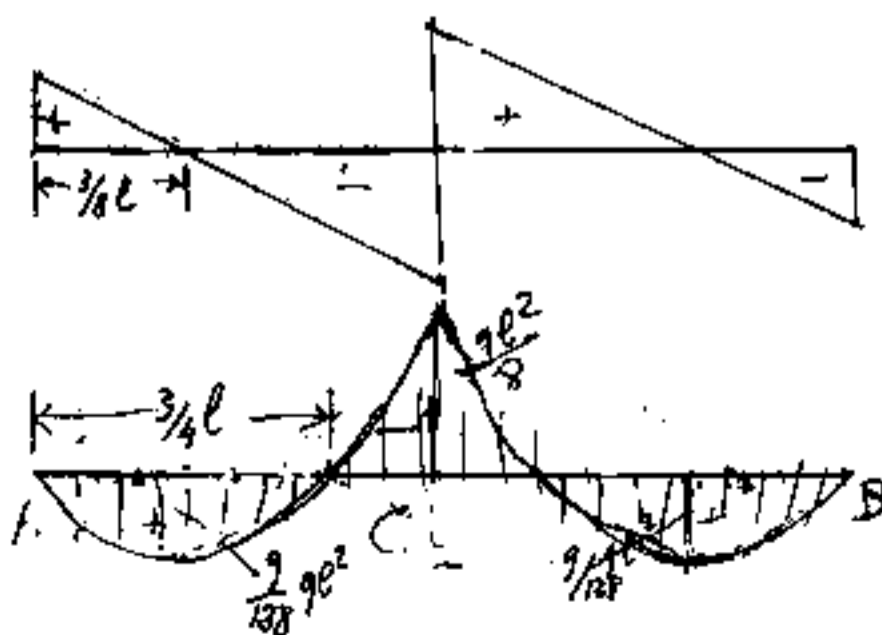
$$M_{xx} = \frac{3}{8} qlx - \frac{qx^2}{2}$$

$$M'_{xx} = 0 \quad x = \frac{3}{4} l$$

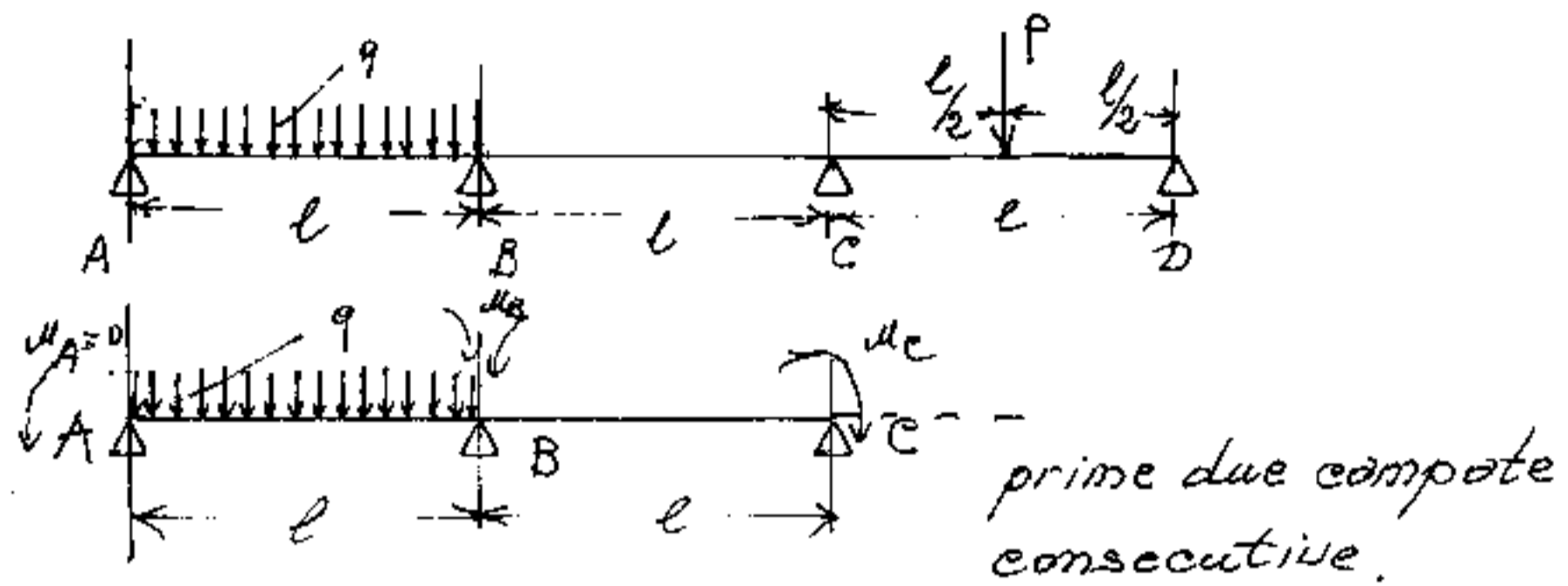
$$M_{\text{max}} = \left(\frac{9}{64} - \frac{9}{128} \right) ql^2 = \frac{9ql^2}{128}$$

diagramma T

diagramma M



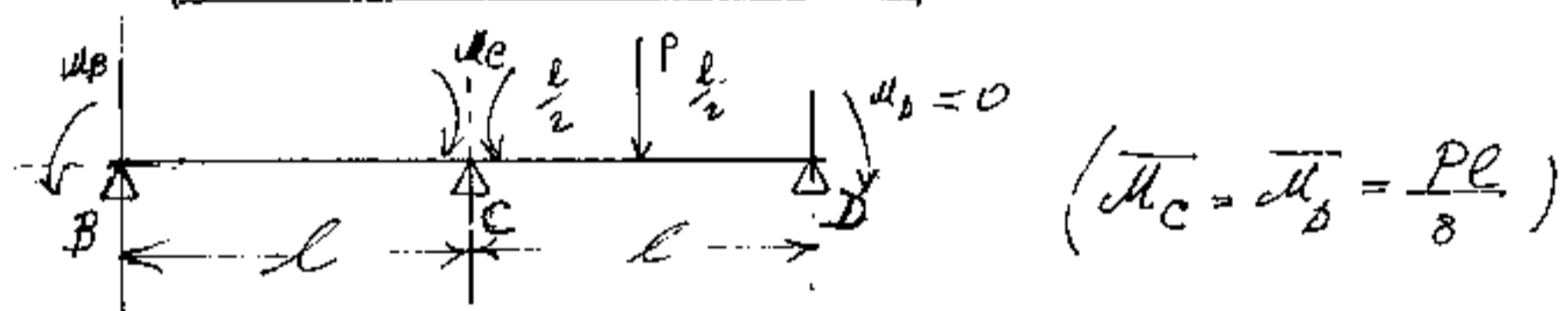
Facciamo un esempio a 3 campate, (occorrono due equazioni) ($l/EJ = \text{cost}$)



$$(2u_A + 3u_B) - (u_A + 2u_B) = -(2u_B + u_C) - (u_B + u_C)$$

$$2u_B + \frac{ql^2}{12} + \frac{2ql^2}{12} = -(2u_B + u_C - (0 + 0))$$

$$\boxed{4u_B + u_C = -\frac{ql^2}{4}} \quad \text{I}^a \text{ equazione.}$$



$$(u_B + 2u_C) - (0 + 0) = -\left[(2u_C + u_D) + \left[\frac{3Pl}{8} + \frac{Pl}{8} \right] \right]$$

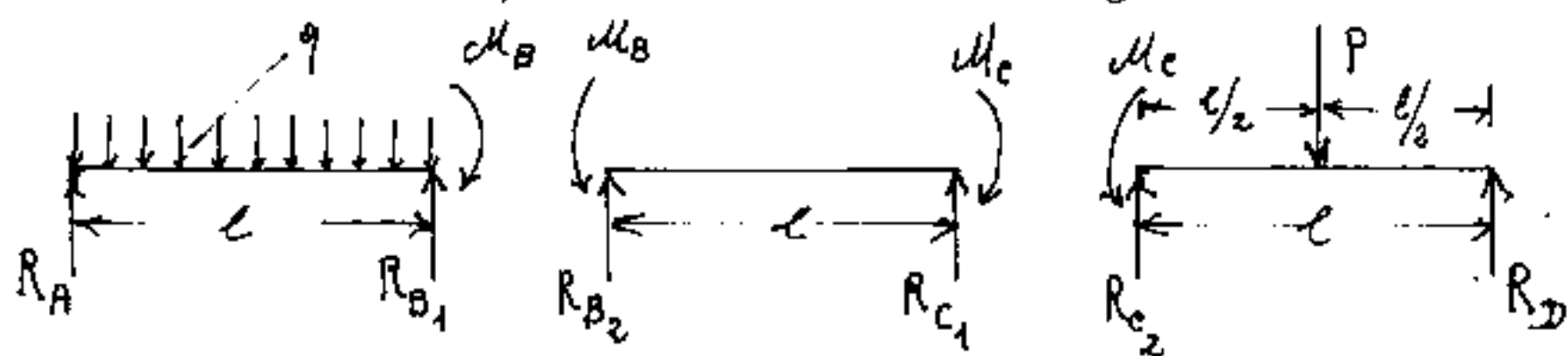
$$\boxed{4u_C + u_B = -\frac{3Pl}{8}} \quad \text{II}^a \text{ equazione}$$

$$\Delta \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 15; \quad \begin{vmatrix} -\frac{ql^2}{4} & 1 \\ -\frac{3Pl}{8} & 4 \end{vmatrix} = (-9l^2 + \frac{3Pl}{8}); \quad \boxed{u_B = \frac{1}{15} \left(-\frac{9l^2}{4} + \frac{3Pl}{8} \right)}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -\frac{9l^2}{4} \\ 1 & -\frac{3Pl}{8} \end{vmatrix} = -\frac{3Pl}{8} + \frac{9l^2}{4} = \frac{l}{4}(9l - 6P) \quad \boxed{u_C = \frac{l}{60}(9l - 6P)}$$

Una volta risolto qualunque problema, prima di dare i risultati, è bene verificarli. (ciò soprattutto in scienza delle costruzioni).

Nel nostro caso abbiamo ridotta la trave continua su quattro appoggi, a tre travi isostatiche semplicemente appoggiate:



ove con l'equazione dei tre momenti av-
biamo calcolato M_B ed M_C e restano da
calcolare le residue reazioni isostatiche:

$$R_A; R_B = R_{B_1} + R_{B_2}; R_C = R_{C_1} + R_{C_2}; R_D.$$

Per verificare occorre un diverso procedimento di calcolo. Cogliamo l'occasione per presentare un procedimento di calcolo, direi universale, applicabile in statica ed in scienza, sia per il calcolo delle incognite, sia per il calcolo delle de-
formazioni. È Il principio dei Lavori Virtuali

Per il quale, Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813) non ha esi-
tato ad affermare che le leggi dell'equilibrio trovate,
o quelle che verranno trovate in futuro, non sono altro
che il principio dei lavori virtuali diversamente espresso. !

cf. Colaninetti - Scienza delle costruzioni - Cfr. Enciclopedia delle Matematiche Elementari III

Il principio dei Lavori Virtuali

$$\sum \delta L_v = 0$$

Condizioni di validità del principio:

Affinché la somma di tutti i lavori virtuali sia nulla:

Il sistema delle forze: deve:
essere equilibrato

Il sistema degli spostamenti: deve:

a) nel caso isostatico (corpi indeformabili o rigidi)

essere compatibile coi vincoli

b) nel caso iperstatico o interessante l'elasticità dei corpi,
essere congruente

e ciò comprende essere compatibile coi vincoli.

Congruo = adeguato, esprime che le deformazioni elastiche interne debbono essere "adeguate" alle deformazioni esterne (freccie nelle travi e rotazioni di sezione)

La Costatazione base.

Il sistema delle forze (equilibrato) è indipendente dal sistema degli spostamenti (congruente).

Questa affermazione può lasciare perplessi.

Perciò facciamo qualche considerazione.

Un sistema di forze equilibrato, rimane equilibrato

qualunque sia la struttura od il corpo cui è applicato. Il sistema degli spostamenti varia con la struttura o corpo cui è applicato lo stesso sistema di forze equilibrato.

Due forze unitarie, uguali e contrarie, agenti sulla stessa retta di azione, sono applicate nelle sezioni estreme di due diversi corpi; uno avente per asse un segmento, l'altro avente per asse un semicerchio:



È ovvio che le deformazioni elastiche interne dei due corpi sono molto diverse fra loro anche se lo spostamento delle sezioni A, B fosse lo stesso nei due casi.

Se, ai fini del principio dei Lavori Virtuali, il sistema delle forze ed il sistema degli spostamenti, sono indipendenti fra loro, uno dei due può essere quello reale, l'altro arbitrariamente possiamo sceglierlo noi, e non essendo reale, lo diciamo "virtuale". Abbiamo le seguenti possibilità, che commentiamo in tabella.

sistema delle forze (equilibrato)	sistema degli spostamenti	NOTE
Reale	Reale	Si usa pochissimo solo per verifiche.
<u>Reale</u>	<u>Virtuale</u> (compatibile coi vincoli)	si usa in statica, (corpi rigidi) per il calcolo delle reazioni vincolari o di certe sollecitazioni in sezioni prefissate
<u>Virtuale</u>	<u>Reale</u> (certamente congruente)	Si usa in scienza delle costruzioni per il calcolo { delle reazioni iperstatiche delle deformazioni
Virtuale	Virtuale	Si possono fare studi speciali (ma si usa mai)

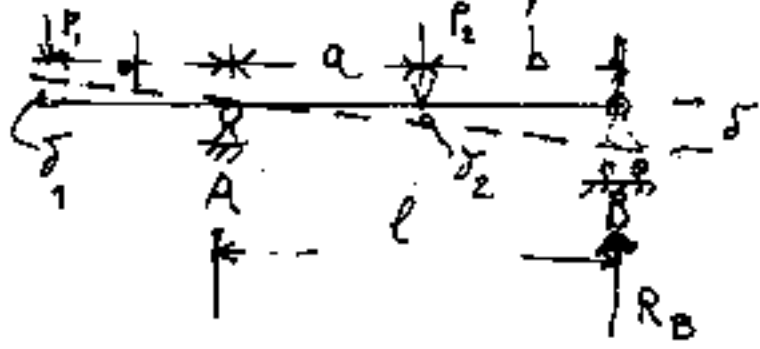
Applicazione del principio dei lavori virtuali ai sistemi rigidi

Si attribuisce uno spostamento virtuale piccolissima nella sezione e nella direzione dello sforzo (forza, momento, sollecitazione) agente in quel punto.

Per dare lo spostamento virtuale abbiamo dovuto sopprimere il vincolo attraverso il quale si esercitava lo sforzo cercato.
 Ciò ha reso labile la struttura, ove i singoli pezzi rigidi hanno spostamenti mutui dipendenti dallo spostamento virtuale.

Queste possibilità di movimenti sono dette: "cinematismi" ove, noto uno spostamento, possono dedursi tutti gli altri.

Alcuni esempi di cinematismi



Tolto il vincolo (cavallo in B) posso attribuire a B lo spostamento: δ .

Per similitudine di triangoli: $\delta : l = \delta_1 : d = \delta_2 : a$

da cui $\delta_1 = \frac{d}{l} \delta$; $\delta_2 = \frac{a}{l} \delta$; δ

Calcolati gli spostamenti possiamo applicare i Lav. Vir. tenendo presente che il lavoro è positivo se forza e spostamento hanno lo stesso verso, negativo se la direzione della forza è opposta a quello dello spostamento. Perciò

- $P_1 \delta_1$ (negativo perché direzioni opposte)
- + $P_2 \delta_2$ (positivo perché direzioni concordi)
- $R_B \delta$ (negativo perché abbiamo arbitrariamente attribuito ad R_B verso opposto a δ)

$$\sum \delta \text{ var. } \frac{1}{2} = 0 = -P_1 \left(\frac{d}{l} \delta \right) + P_2 \left(\frac{a}{l} \delta \right) - R_B \delta = 0$$

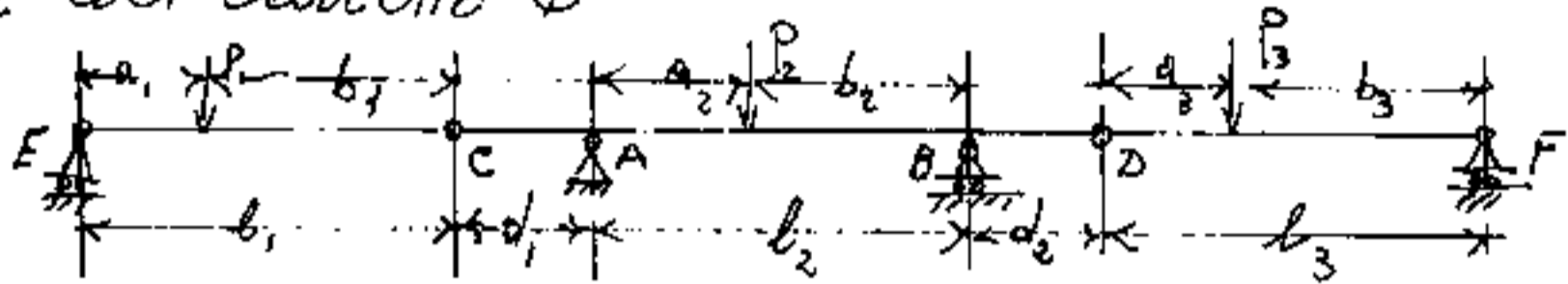
$$R_B = \frac{a P_2 - d P_1}{l}$$

Notiamo che il verso da noi attribuito ad R_B è giusto se: $a P_2 > d P_1$
 se: $(a P_2 = d P_1)$ si ha: $R_B = 0$.

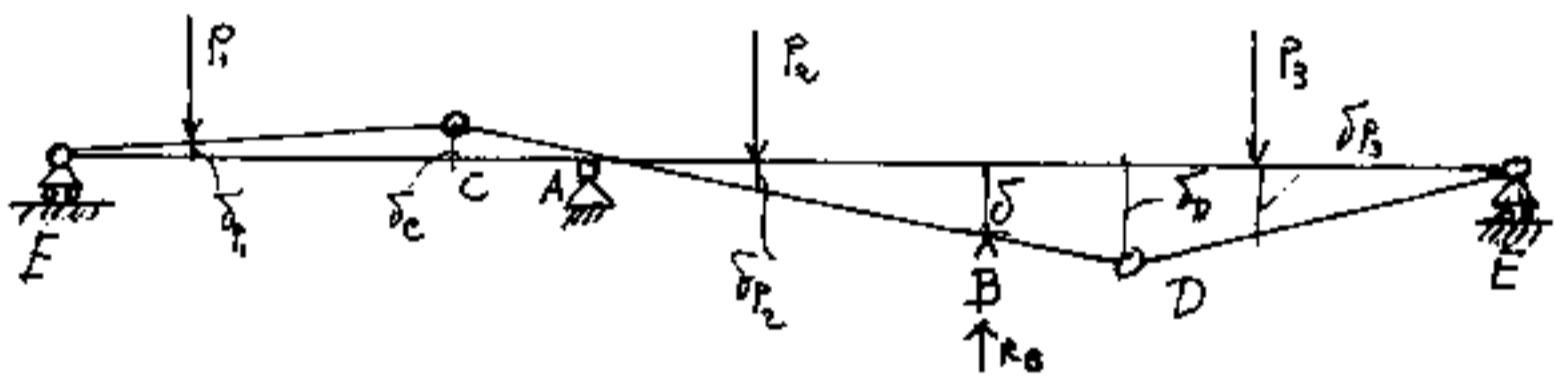
Consideriamo una trave di Gerber.

(È detta trave di Gerber, una trave a più campate complessivamente isostatica)

Supponiamo, per la trave in figura, di volere la reazione del carrello B



Togliamo il carrello B ed attribuiamo a B uno spostamento arbitrario piccolissimo δ (spostamento virtuale), ovvero:



$$\delta : l_2 = \delta_c : d_1 \quad \Rightarrow \quad \delta_c = \frac{\delta d_1}{l_2}$$

$$\delta_c : l_1 = \delta_{p_1} : a_1 \quad \Rightarrow \quad \delta_{p_1} = \frac{a_1 \delta_c}{l_1} \quad , \quad \boxed{\delta_{p_1} = \delta \frac{d_1 a_1}{(l_1 l_2)}}$$

$$\delta_D : (l_2 + d_2) = \delta : l_2 \quad \Rightarrow \quad \delta_D = \frac{\delta (l_2 + d_2)}{l_2}$$

$$\delta_D : l_3 = \delta_{p_3} : b_3 \quad \Rightarrow \quad \delta_{p_3} = \frac{\delta_D b_3}{l_3} \quad , \quad \boxed{\delta_{p_3} = \delta \frac{b_3 (l_2 + d_2)}{(l_2 l_3)}}$$

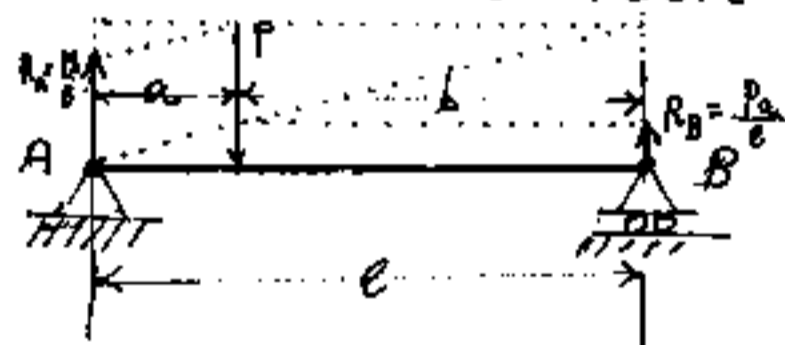
$$\delta_{p_2} : a_2 = \delta : l_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta_{p_2} = \delta \frac{a_2}{l_2}}$$

$$\boxed{-P_1 \delta \frac{d_1 a_1}{(l_1 l_2)} + P_2 \delta \left(\frac{a_2}{l_2} \right) - R_B \delta + P_3 \delta \left(\frac{b_3 (l_2 + d_2)}{l_2 l_3} \right) = 0 = \delta L_V}$$

$$\boxed{R_B = \frac{+P_3 b_3 (l_2 + d_2) + P_2 l_1 l_2 a_2 - P_1 d_1 a_1 l_3}{l_1 \cdot l_2 \cdot l_3}}$$

L'applicazione del Principio dei Lavori Virtuali ai Sistemi rigidi, cioè assumendo "virtuale" il sistema degli spostamenti, implica una trattazione assai più complessa di quella ora esposta e che ci riserviamo di esporre. Ma seguendo lo stile di ... "ripartire da zero"... esponiamo un esempio ancora più semplice di quelli esposti, perché rimanga nella mente lo "spostamento virtuale" della forza reale incognita.

Trovare le reazioni vincolari della trave semplicemente appoggiata e soggetta ad un carico concentrato verticale P , ed asseriamo le analogie con altri metodi di calcolo che già abbiamo esposto,



con altri metodi di calcolo che già abbiamo esposto,

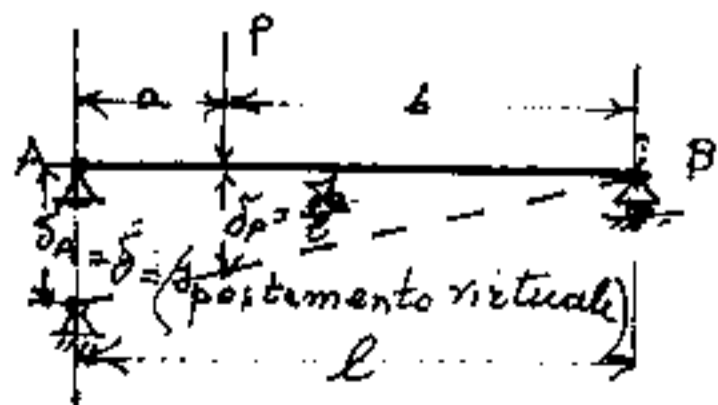


$$\sum L_v = 0:$$

$$-R_B \delta_B + P \delta_P = 0$$

$$-R_B \delta + P \frac{\delta a}{l} = 0$$

$$(\delta_P : \delta = a : l) \quad \boxed{R_B = \frac{P a}{l}}$$



$$\sum L_v = 0 ; (-R_A \delta_A + P \delta_P) = 0$$

$$-R_A \delta + P \frac{\delta b}{l} = 0$$

$$(\delta_P : \delta = b : l) \quad \boxed{R_A = \frac{P b}{l}}$$

Passiamo ai sistemi elastici.

Applicazione del principio dei Lavori Virtuali ai Sistemi elastici

Si hanno due casi di applicazione che trattiamo separatamente:

- a) Per il calcolo delle incognite iperstatiche,
- b) Per il calcolo delle deformazioni

Calcolo delle incognite iperstatiche.

Assumiamo come "Sistema delle forze fittizie o virtuali" una forza unitaria ($=1$) posta nella sezione e nella direzione dell'incognita cercata.

Poiché trattasi di strutture iperstatiche, esse possono sbloccarsi togliendo il vincolo (ed i vincoli) eccedenti e sostituendoli con le loro azioni che indicheremo con X', X'' , X''' ecc. (Questo simbolismo è quello utilizzato dal

Belluzzi: O. Belluzzi - Scienza delle Costruzioni - Vol I - Zanichelli - Bologna;

X_2' = prima incognita iperstatica, (le derivate non c'entrano))

Si hanno così strutture isostatiche equivalenti, e se togliamo i carichi e le incognite iperstatiche otteniamo le strutture dette isostatiche principali.

E' sempre bene evidenziare, disegnando, la struttura data, le possibili strutture equivalenti, e le conseguenti isostatiche principali.

Il lavoro Virtuale si distingue in lavoro esterno: (che è il prodotto della forza fittizia per il suo spostamento reale); ed in lavoro interno (che è il prodotto delle sollecitazioni fittizie per le deformazioni reali). Poiché: Lavoro esterno = Lavoro interno, hanno segni opposti la loro somma è sempre zero.

Le deformazioni reali le calcoliamo in funzione delle sollecitazioni reali.

$$\Delta l = \sum \frac{Nl}{EA} ; \varphi = \int \frac{M dx}{EJ} ; \gamma = \int \frac{X T dx}{GA} ; \delta = \int \frac{q dl t dx}{G I_p}$$

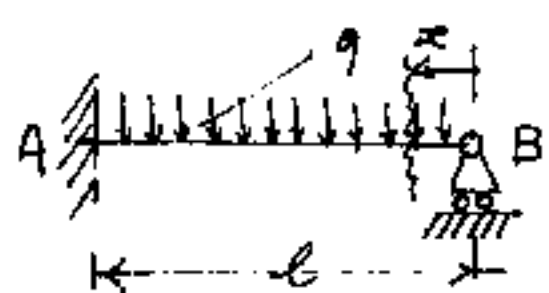
Al fine di semplificare i calcoli, se sblocciamo a terra, la forza fittizia = 1, non ha spostamento, per cui: Lavoro virtuale esterno = zero = L_v interno.

Se indichiamo con M' la sollecitazione fittizia, avremo l'espressione che si usa comunemente nei lavori virtuali in campo elastico:

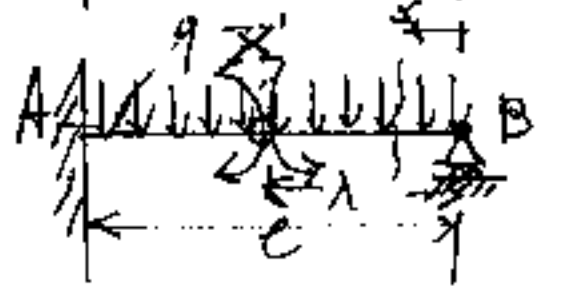
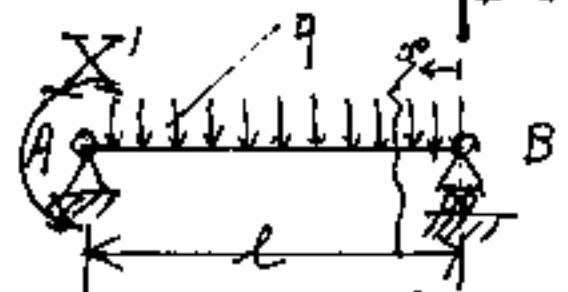
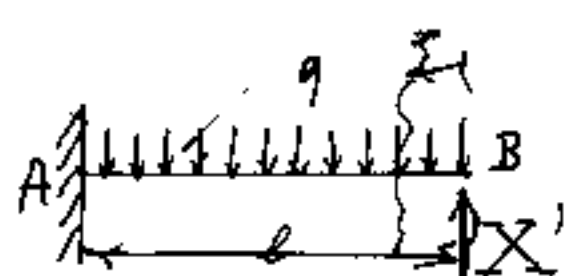
$$\sum \int \frac{M' M dx}{EJ} = 0$$

È estesa a tutte le aste della struttura.

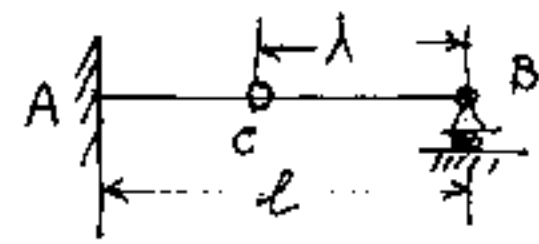
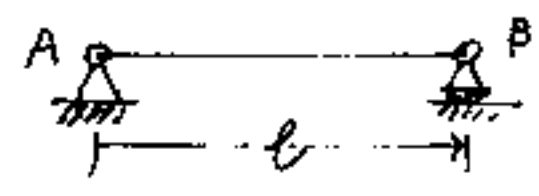
Facciamo un esempio assai semplice che permette di far capire piú semplicemente il procedimento.



(struttura data)



strutture
equivalenti



isostatiche
principali

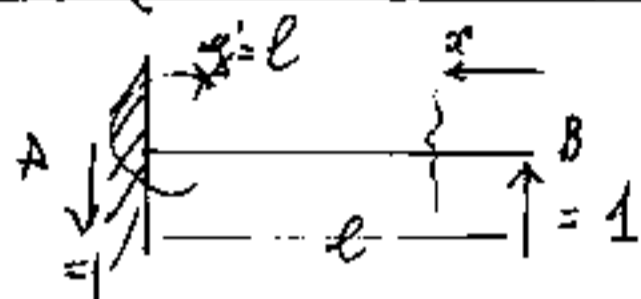
Scelta una isostatica principale (per esempio la prima) Nel sistema delle forze fittizie la carichiamo con la sola forza = 1 nella sezione e nella direzione della incognita cercata; calcoliamo

le reazioni, equilibrando il sistema, e calcoliamo le sollecitazioni fittizie: N' ; T' ; M' ; M_t' .

prodotte dalla forza fittizia = 1

Indicheremo con A' , A'' , A''' ... il sistema forze fittizie.

A' (sistema forze fittizie)



$$N'_{BA} = 0 ; T'_{BA} = -1 ; M'_{BA} = +xe$$

$$M_t'_{BA} = 0$$

Indichiamo con B il sistema degli spostamenti reali (è uno solo qualunque siano le incognite)

Le sollecitazioni reali si calcolano per sovrapposizione degli effetti e cioè quelle dovute ai soli carichi esterni (si indicano N_0 , M_0 , T_0 , M_{t_0}) e quelle dovute alle incognite X^1, X^2, \dots, X^n che saranno X^1 volte; X^2 volte... X^n volte quelle calcolate con la forza unitaria in A^1 ; A'' ... A^n . cioè:

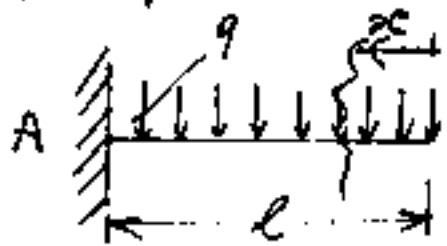
$$N = N_0 + N^1 X^1 + N^2 X^2 + \dots + N^n X^n$$

$$T = T_0 + T^1 X^1 + T^2 X^2 + \dots + T^n X^n$$

$$M = M_0 + M^1 X^1 + M^2 X^2 + \dots + M^n X^n$$

$$M_t = M_{t_0} + M_t^1 X^1 + M_t^2 X^2 + \dots + M_t^n X^n$$

B) Spostamenti reali.



Carichiamo l'isostatico principale
 le cui soli carichi esterni e cal-
 coliamo N_0 ; M_0 ; T_0 ; M_x .

$$N_0 = 0; \quad M_0 = -\frac{qx^2}{2}; \quad \left(\text{si trascura } T \right)$$

vere sollecitazioni:

$$M = M_0 + M'X'$$

$$M = -\frac{qx^2}{2} + xX'$$

(da cui la vera deformazione reale $d\varphi = \int \left(-\frac{qx^2}{2} + xX' \right) \frac{dx}{EI}$)

Calcolo dei Lavori Virtuali:

(esterno) $L_e = \left(\text{forza fittizia} \right) \left(\text{spostamento reale} \right)$
 $\left(1 \right) \left(0 \text{ carrello non cedevole} \right) = L_e = 0$

(interno) $L_i = \left(\text{sollecitazione fittizia} \right) \left(\text{deformazione reale} \right) = L_e$
 $\left(M' \right) \left(\frac{dM dx}{EI} \right) = L_i = L_e = 0$

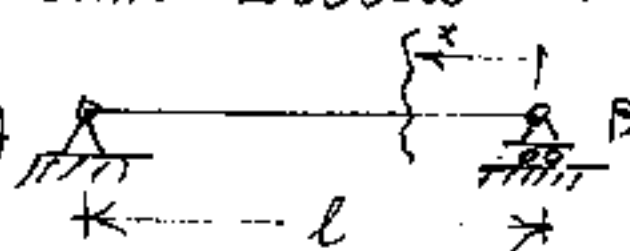
$$L_i = 0 = \int_0^l \frac{dM dx}{EI} = \int_0^l \left(x \right) \left(-\frac{qx^2}{2} + xX' \right) \frac{dx}{EI} = 0$$

se: $EI = \text{costante}$: $\int_0^l \left(-\frac{qx^3}{2} + x^2X' \right) dx = -\frac{ql^4}{8} + \frac{l^3}{3} X' = 0$

$$X' = \frac{3}{8} ql$$

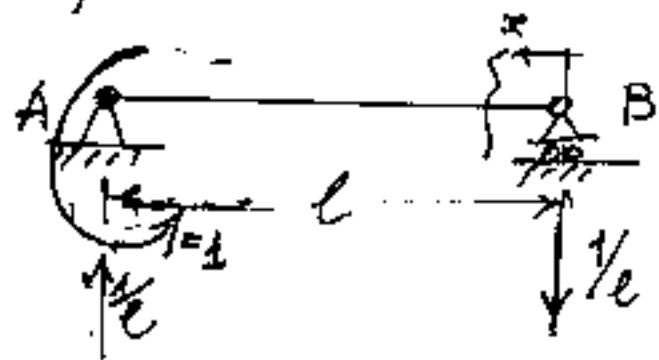
Abbiamo così ridotta ad isostatica la nostra struttura
 ove completando il calcolo delle reazioni vincolari

abbiamo:

Se avessimo scelto la seconda isostatica principale:  , il calcolo col principio

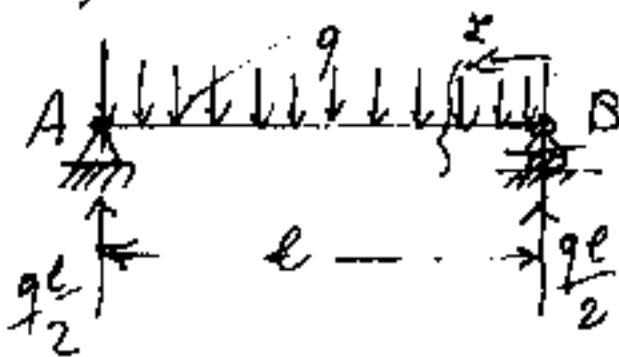
dei lavori virtuali sarebbe stato:

A') Sistema forza fitt ($N=0$; trascuriamo T)



$$M' = -\frac{1}{l}x$$

B') Sistema spost. reali



$$M_0 = \frac{q}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

$$M = \frac{q}{2}x - \frac{qx^2}{2} - \left(\frac{1}{l}x\right)X'$$

$$\delta_c = 0 = \delta_i = \int_0^l \frac{M' M_0 dx}{EJ} = \int_0^l \left(-\frac{1}{l}x\right) \left(\frac{q}{2}x - \frac{qx^2}{2} - \frac{x}{l}X'\right) dx = 0$$

$$\int_0^l \left(-\frac{qx^2}{2} + \frac{qx^3}{2l} + \frac{x^2 X'}{l}\right) dx = -\frac{ql^3}{24} + \frac{ql^3}{24} + \frac{l^3 X'}{3l^2} = 0$$

$$X' = \frac{ql^2}{8}$$

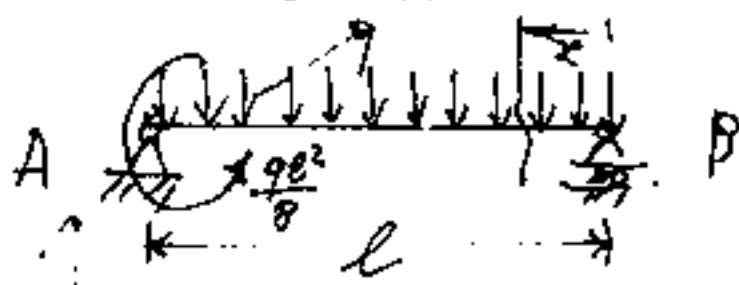
positivo quindi è giusto

il verso di X prefissato (abbiamo prefissato X negativo).

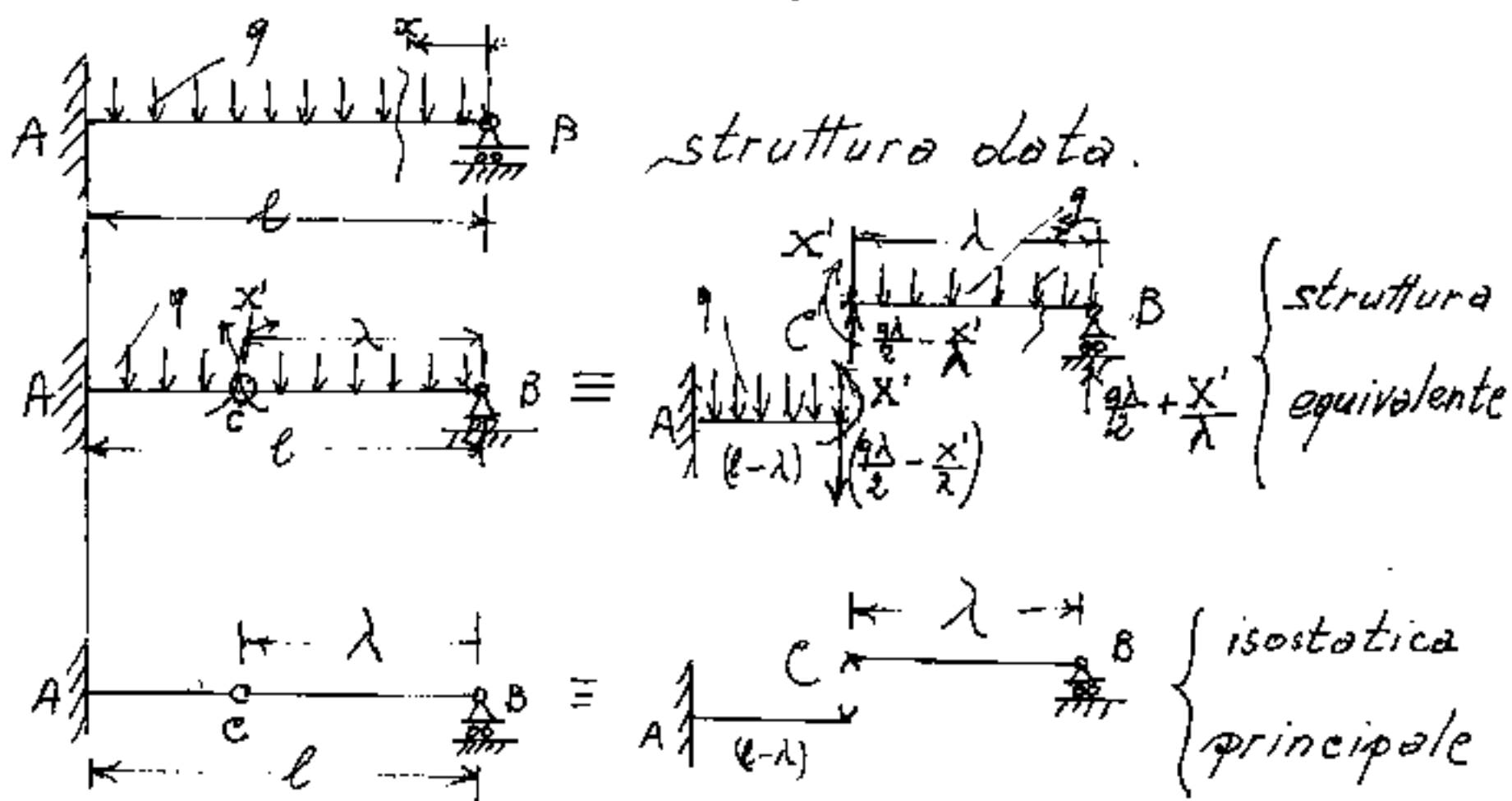
Le incognite conviene prefissarle positive così i Lav. Virtuali

Le restituiscono col loro segno.

Abbiamo così ridotta ad isostatica la nostra struttura.

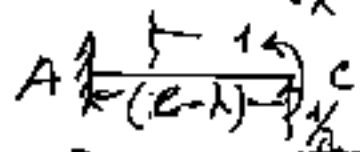
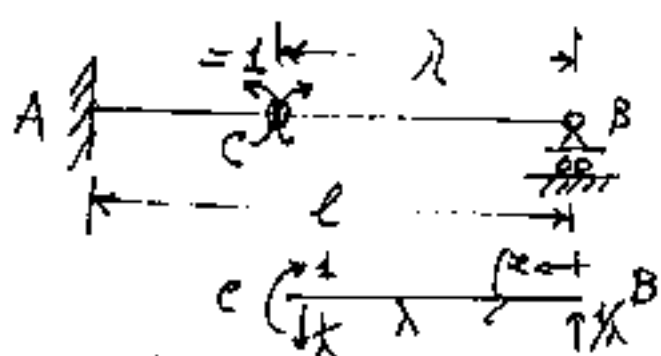


Se avessimo scelto la terza isostatica principale, con la posizione di C definita da $\lambda = \bar{BC}$; $\bar{CA} = (l - \lambda)$; occorre fare attenzione, perché questa struttura principale è scindibile in due isostatiche. Ripetiamo tutti i passaggi.



Applichiamo i lavori virtuali

1) sistema forze fittizie

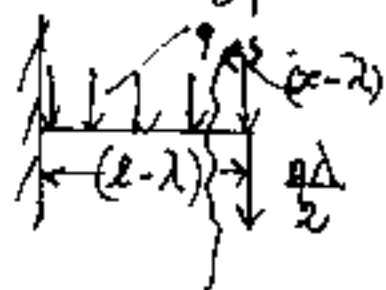
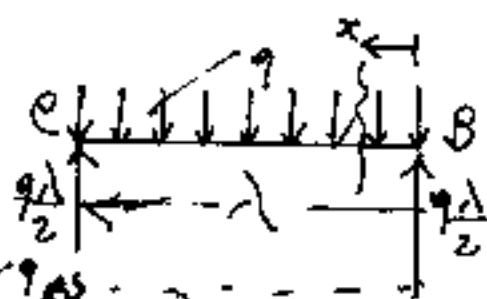
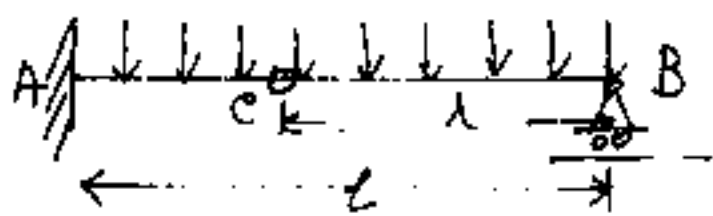


$$\mu'_{BC} = + \frac{\lambda}{\lambda}$$

$$\mu'_{CA} = + \left(1 + \frac{\lambda - \lambda}{\lambda}\right) = + \frac{\lambda}{\lambda} = \mu'_{CA}$$

Carichiamo l'isostatica principale con una forza = 1 nella sezione e nella direzione dell'incognita. Iperstatica e calcoliamo le sollecitazioni fittizie. (μ')

B) Sistema spostamenti reali



Carichiamo l'isostatica principale con i soli carichi esterni e calcoliamo le sollecitazioni dei carichi: $M^0 \dots$

$$\boxed{\mathcal{M}_{Be}^0 = +\frac{q\lambda x}{2} - \frac{qx^2}{2}}$$

$$\mathcal{M}_{CA}^0 = -\frac{q\lambda}{2}(x-\lambda) - \frac{q(x-\lambda)^2}{2}$$

$$\mathcal{M}_{CA}^0 = -\frac{q\lambda x}{2} + \frac{q\lambda^2}{2} - \frac{qx^2}{2} + q\lambda x - \frac{q\lambda^2}{2}$$

$$\boxed{\mathcal{M}_{CA}^0 = +\frac{q\lambda x}{2} - \frac{qx^2}{2}}$$

Calcoliamo, per sovrapposizione degli effetti, le vere (reali sollecitazioni)

$$\boxed{\mathcal{M} = \mathcal{M}^0 + \mathcal{M}'X'}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{M}_{Be} &= \frac{q\lambda x}{2} - \frac{qx^2}{2} + \frac{x}{\lambda} X' \\ \mathcal{M}_{CA} &= \frac{q\lambda x}{2} - \frac{qx^2}{2} + \frac{x}{\lambda} X' \end{aligned}}$$

Calcoliamo i lavori virtuali

La sollecitazione fittizia in c è mutua e poiché la sezione c è in effetti priva di cerniera, non può esservi rotazione relativa fra gli estremi c delle travi \overline{BC} e \overline{CA} perciò il lavoro virtuale esterno è nullo.

Il lavoro virtuale interno è per ciò nullo.

Essendo: $EJ = \text{cost}$ possiamo scrivere:

$$\sum \int \mathcal{M}' \mathcal{M} dx = 0$$

calcoliamo $\mathcal{M}' \mathcal{M}$:

$$\mathcal{M}'_{Be} \mathcal{M}_{Be} = \frac{q\lambda}{2} \frac{x^2}{\lambda} - \frac{qx^3}{2\lambda} + \frac{x^2}{\lambda^2} X' = \boxed{\frac{qx^2}{2} - \frac{qx^3}{2\lambda} + \frac{x^2}{\lambda^2} X'}$$

$$\mathcal{M}'_{CA} \mathcal{M}_{CA} = \boxed{\frac{qx^2}{2} - \frac{qx^3}{2\lambda} + \frac{x^2}{\lambda^2} X'}$$

$$\int_{Be}^{\lambda} \left(\frac{qx^2}{2} - \frac{qx^3}{2\lambda} + \frac{x^2}{\lambda^2} X' \right) dx = +\frac{q\lambda^3}{6} - \frac{q\lambda^3}{8} + \frac{\lambda}{3} X'$$

$$= \boxed{\frac{q\lambda^3}{24} + \frac{\lambda}{3} X'}$$

$$\int_{CA}^{\lambda} \left(\frac{qx^2}{2} - \frac{qx^3}{2\lambda} + \frac{x^2}{\lambda^2} X' \right) dx = \frac{ql^3}{6} - \frac{ql^4}{8\lambda} + \frac{l^3}{3\lambda^2} X'$$

$$- \frac{q\lambda^3}{6} + \frac{q\lambda^3}{8} - \frac{\lambda X'}{3}$$

$$\mathcal{L}_{CA} = \frac{ql^3}{6} - \frac{ql^4}{8\lambda} - \frac{q\lambda^3}{24} + \frac{l^3}{3\lambda^2} X' - \frac{\lambda X'}{3}$$

$$\mathcal{L}_{Be} = \frac{q\lambda^3}{24} + \frac{\lambda X'}{3}$$

$$\mathcal{L}_i = 0 = \frac{ql^3}{6} - \frac{ql^4}{8\lambda} + \frac{l^3}{3\lambda^2} X'$$

$$X' = -\frac{q\lambda^2}{2} + \frac{3ql\lambda}{8} = \boxed{\frac{q\lambda}{8} (3l - 4\lambda)} = X'$$

per $\lambda = 0 \rightarrow X' = 0$

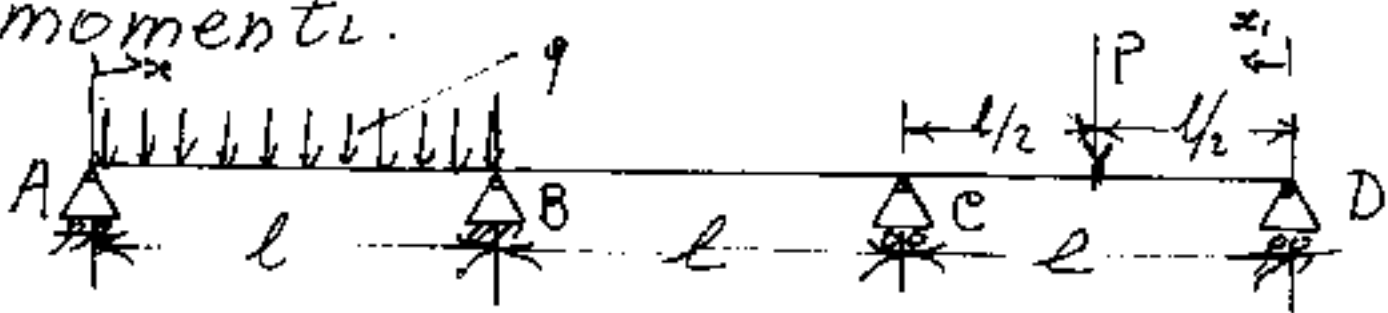
$\lambda = l \rightarrow X' = -\frac{ql^2}{8}$

$\lambda = \frac{3}{4}l \rightarrow X' = 0$

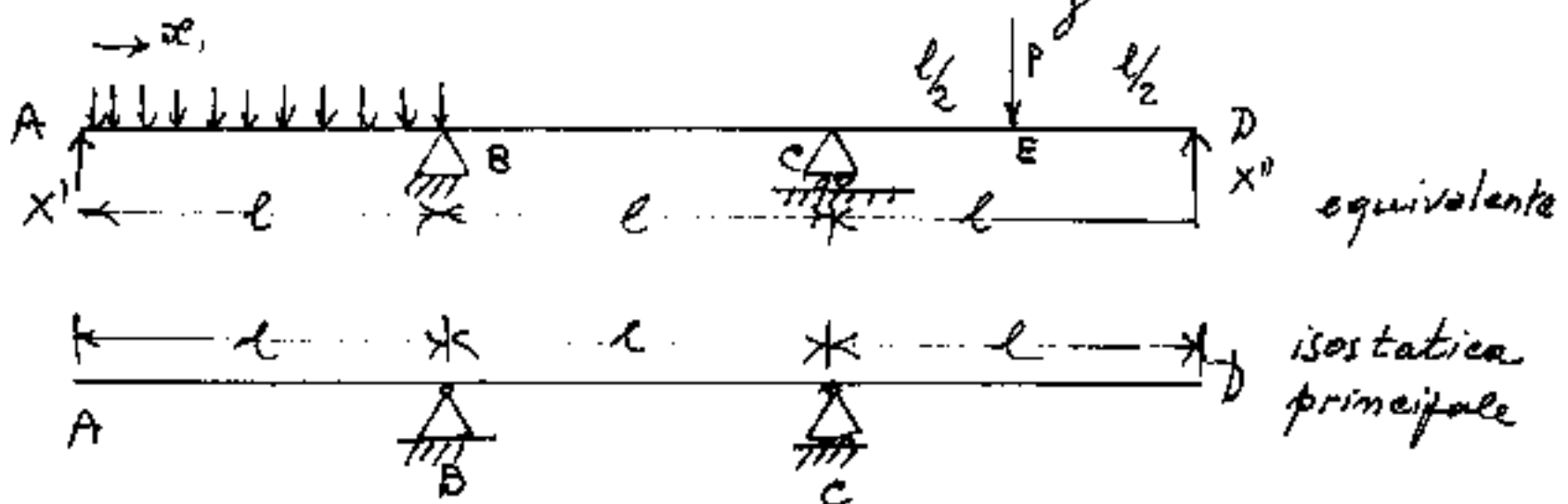
$\lambda = \frac{3}{8}l \rightarrow X' = \frac{+9}{128} ql^2$

} valori che già conosciamo.

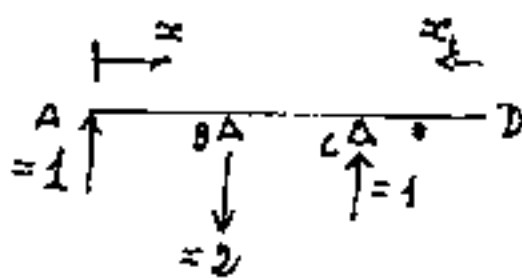
Supponiamo di voler risolvere coi lavori virtuali la trave continua a tre campate che abbiamo risolto con l'equazione dei tre momenti.



Fra le tante isostatiche principali, noi scegliamo quella che sopprime gli appoggi A e D e li sostituisce con le incognite X' e X''



A') s.f.f.

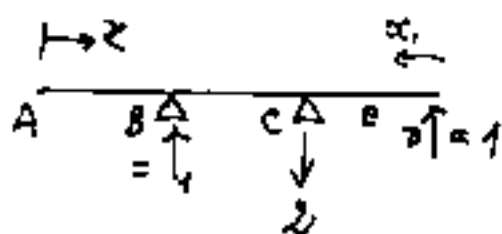


$$M'_{AB} = +x$$

$$M'_{BC} = x - 2x + 2l = (2l - x)$$

$$M'_{DE} = M'_{EC} = 0$$

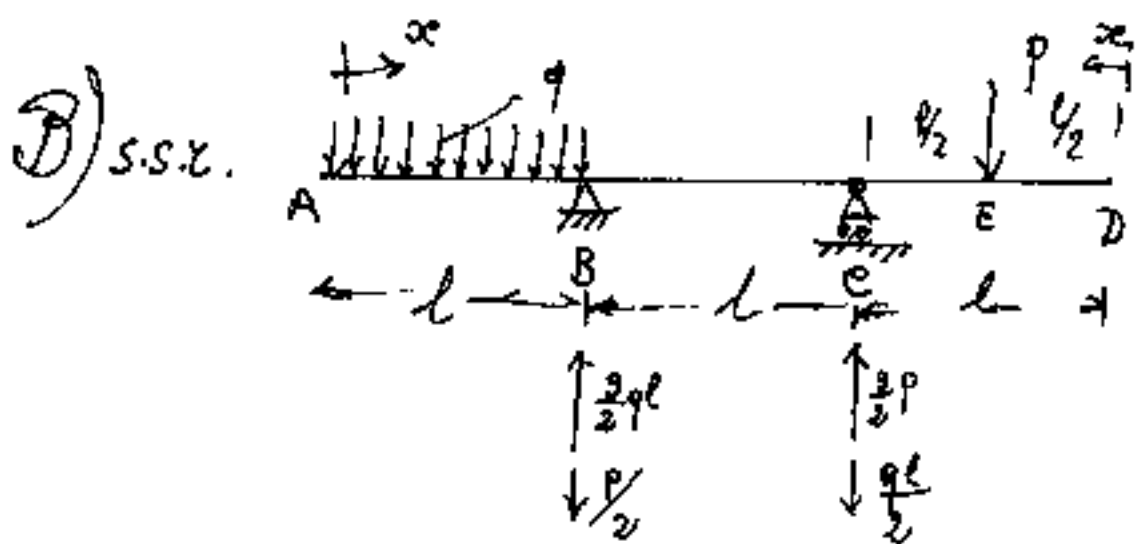
A'') s.f.f.



$$M''_{AB} = 0$$

$$M''_{BC} = (x - l)$$

$$M''_{DE} = M''_{EC} = x_1$$



$$M^0_{AB} = -\frac{qx^2}{2}$$

$$M^0_{BC} = \frac{ql^2}{2} - qlx + \frac{3}{2}qlx - \frac{3}{2}ql^2 - \frac{P}{2}x + \frac{P}{2}l =$$

$$= -ql^2 + \frac{qlx}{2} - \frac{P}{2}x + \frac{P}{2}l$$

$$M^0_{DE} = 0$$

$$M^0_{EC} = -Px_1 + \frac{Pl}{2}$$

$$M_{AB} = -\frac{qx^2}{2} + xX' + 0$$

$$M_{BC} = -ql^2 + \frac{qlx}{2} - \frac{P}{2}x + \frac{P}{2}l + (2l-x)X' + (x-l)X''$$

$$M_{DE} = 0 + 0 + x_1X''$$

$$M_{EC} = -Px_1 + \frac{Pl}{2} + 0 + x_1X''$$

$$M'M_{AB} = -\frac{qx^3}{2} + x^2X'$$

$$M'M_{BC} = (2l-x) \left[ql^2 + \frac{qlx}{2} - \frac{P}{2}x + \frac{Pl}{2} + (2l-x)X' + (x-l)X'' \right]$$

$$M'M_{DE} = 0$$

$$M''_{AB} M = 0$$

$$M''_{BC} M = (x-l) \left[-ql^2 + \frac{qlx}{2} - \frac{Px}{2} + \frac{Pl}{2} + (2l-x)X' + (x-l)X'' \right]$$

$$M''_{DE} M = (x_1)X + x_1 X''$$

$$M''_{EC} M = (x_1) \left(-Px_1 + \frac{Pl}{2} + x_1 X'' \right)$$

Integriamo: $\int M' u dx = 0$

$$\int_0^l \frac{-qx^3}{2} + x^2 X' dx = \boxed{-\frac{ql^4}{8} + \frac{l^3}{3} X'}_{(AB)'}$$

$$\int_l^{2l} -2ql^3 + ql^2 x + 2ql^2 x - qlx^2 - Plx + \frac{Px^2}{2} + Pl^2 - \frac{Plx}{2} + (4l^2 - 4lx + x^2)X' + (2lx - 2l^2 - x^2 + lx)X'' dx$$

$$\int_l^{2l} -2ql^3 + 2ql^2 x - \frac{qlx^2}{2} - \frac{3}{2}Plx + \frac{Px^2}{2} + Pl^2 + (4l^2 - 4lx + x^2)X' + (3lx - 2l^2 - x^2)X'' dx$$

$$= -2ql^3(2l-l) + 2ql^2 \left(\frac{4l^2-l^2}{2} \right) - \frac{ql}{2} \left(\frac{8l^3-l^3}{3} \right) - \frac{3}{2}Pl \left(\frac{4l^2-l^2}{2} \right) + \frac{P}{2} \left(\frac{8l^3-l^3}{3} \right) + Pl^2(2l-l) +$$

$$+ \left[+ (4l^2(2l-l) - 4l \left(\frac{4l^3-l^2}{2} \right) + \frac{8l^3-l^3}{3}) \right] X'$$

$$+ \left[3l \left(\frac{4l^2-l^2}{2} \right) - 3l^2(2l-l) - \left(\frac{8l^3-l^3}{3} \right) \right] X''$$

$$= -2ql^4 + 3ql^4 - \frac{7}{6}ql^4 - \frac{9}{4}Pl^3 + \frac{7}{6}Pl^3 + Pl^3 +$$

$$+ [4l^3 - 6l^3 + \frac{7}{3}l^3] X'$$

$$+ \left[\frac{9}{2}l^3 - 2l^3 - \frac{7}{3}l^3 \right] X'' =$$

$$= \boxed{-\frac{ql^4}{6} - \frac{Pl^3}{12} + \frac{l^3}{3} X' + \frac{l^3}{6} X''}_{(BC)'}$$

$$\boxed{(DE)', (EC)' = 0}$$

$$(AB)'' + (BC)' + (0)'$$

$$\left(-\frac{9l^4}{8} + \frac{l^3}{3} X'\right) + \left(-\frac{9l^4}{16} - \frac{Pl^3}{12} + \frac{l^3}{3} X' + \frac{l^3}{6} X''\right) = 0$$

$$\frac{+79l^4}{34} - \frac{Pl^3}{12} + \frac{2}{3} l^3 X' + \frac{l^3}{6} X'' = 0$$

simplifichiamo:

$$\boxed{4X' + X'' = \left(\frac{P}{2} + \frac{79l}{4}\right)} \quad \text{I}^a \text{ equazione}$$

Integriamo: $\int u'' u dx = 0$

$$\boxed{(AB)'' = 0}$$

$$\int_{l}^{2l} \left[-9l^2 x + 9l^3 + \frac{9lx^2}{2} - \frac{9lx}{2} - \frac{P}{2} x^2 + \frac{Pxl}{2} + \frac{Pxl}{2} - \frac{P}{2} l^2 + \right. \\ \left. + [2lx - 2l^2 - x^2 + lx] X' \right. \\ \left. + [x^2 - 2lx + l^2] X'' \right] dx =$$

$$\int_{l}^{2l} \left[-\frac{3}{2} 9l^2 x + 9l^3 + \frac{9lx^2}{2} + \frac{P}{2} (-x^2 + 2lx - l^2) + \right. \\ \left. + [3lx - 2l^2 - x^2] X' + (x^2 - 2lx + l^2) X'' \right] dx =$$

$$= -\frac{3}{2} 9l^2 \left(\frac{4l^2 - l^2}{2}\right) + 9l^3 (2l - l) + \frac{9l}{12} \left(\frac{8l^3 - l^3}{3}\right) + \frac{P}{2} \left(\left[\frac{8l^3 - l^3}{3}\right] + 2l \left(\frac{4l^2 - l^2}{2}\right) - l^2 (l - l) \right) +$$

$$\left[3l \left(\frac{4l^2 - l^2}{2}\right) - 2l^2 (2l - l) - \left(\frac{8l^3 - l^3}{3}\right) \right] X'$$

$$\left[\frac{8l^3 - l^3}{3} - 2l \left[\frac{4l^2 - l^2}{2}\right] + l^2 (2l - l) \right] X'' =$$

$$= -\frac{99l^4}{4} + 9l^4 + \frac{7}{6} 9l^4 - \frac{7}{6} Pl^3 + \frac{3}{2} Pl^3 - \frac{Pl^3}{2} +$$

$$+ \left(\frac{9}{2} l^3 - 2l^3 - \frac{7}{3} l^3\right) X' + \left(\frac{7}{3} l^3 - 3l^3 + l^3\right) X'' =$$

$$= \boxed{\frac{+9l^4}{12} - \frac{Pl^3}{6} + \frac{l^3}{6} X' + \frac{l^3}{3} X''} \quad (BC)''$$

$$\int_0^{l/2} +x_1^2 X'' dx_1 = \boxed{+\left(\frac{l^3}{24}\right) X''} \quad (DE)''$$

$$\int_{l/2}^l -\left(P x_1^2 + \frac{Pl x_1}{2} + x_1^2 X''\right) dx_1 =$$

$$= -P\left(\frac{l^3 - l^3/8}{3}\right) + \frac{Pl}{2}\left(\frac{l^2 - l^2/4}{2}\right) + \left(\frac{l^3 - l^3/8}{3}\right) X''$$

$$= -\frac{7}{24} Pl^3 + \frac{3}{16} Pl^3 + \left(\frac{7}{24} l^3\right) X''$$

$$\boxed{\frac{-5}{48} Pl^3 + \frac{7}{24} l^3 X''} \quad (EC)''$$

$$\frac{9l^4}{3} - \frac{Pl^3}{6} + \frac{l^3}{6} X' + \frac{l^3}{3} X'' + \frac{l^3}{24} X'' + \frac{5}{48} Pl^3 + \frac{7}{24} l^3 X'' = 0$$

$$\frac{9l^4}{3} - \frac{13}{48} Pl^3 + \frac{l^3}{6} X' + \frac{2l^3}{3} X'' = 0$$

$$\boxed{X' + 4X'' = +\frac{9l}{12} + \frac{13}{8} P} \quad \text{II}^a \text{ equazione}$$

$$\boxed{-16X' - 4X'' = -79l - 2P} \quad \text{I}^a \text{ equazione moltiplicata per } (-4)$$

$$15X' = -\frac{139l}{2} - \frac{3}{8} P$$

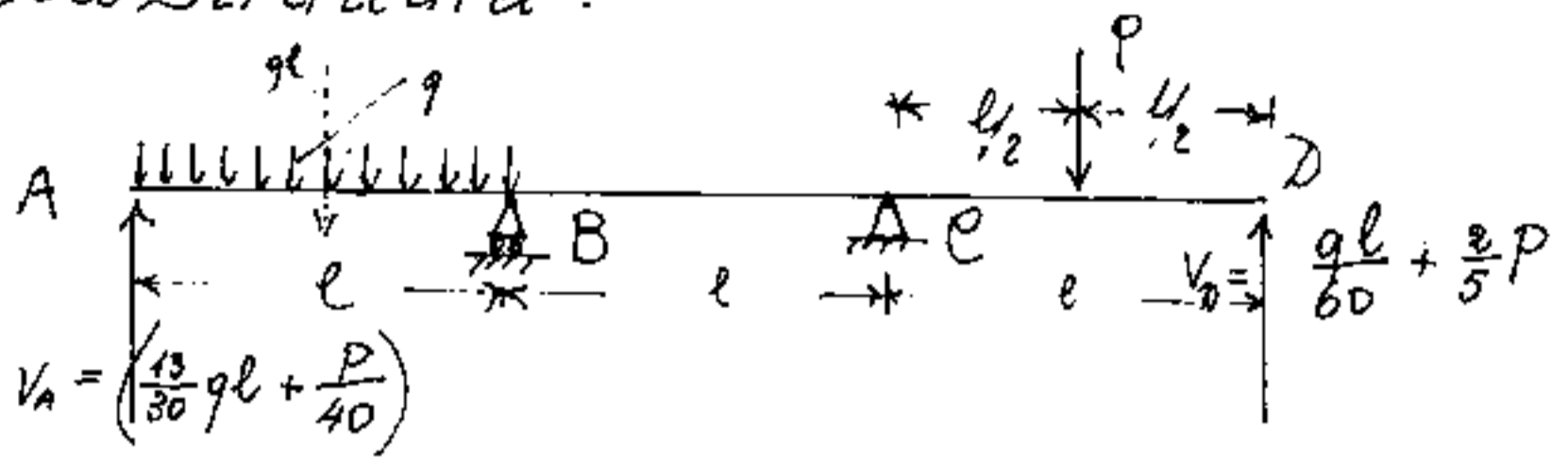
Sommando:

$$\boxed{X' = \frac{13}{30} 9l + \frac{P}{40}}$$

$$\begin{array}{r} -4X' - 16X'' = -29l - \frac{13}{2} P \\ 4X' + X'' = +\frac{7}{4} 9l + P/2 \\ \hline -15X'' = -\frac{9l}{4} - 6P \end{array}$$

$$\boxed{X'' = \frac{9l}{60} + \frac{2}{5} P}$$

Abbiamo così ridotta ad isostatica la nostra struttura:



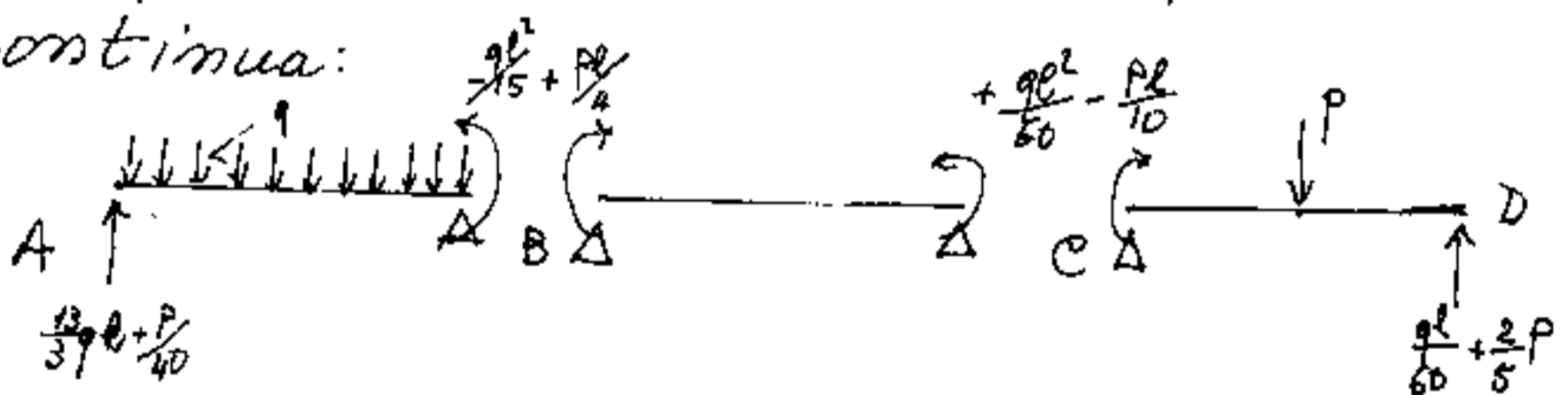
$$M_B = -\frac{ql^2}{2} + \frac{13}{30}ql^2 + \frac{Pl}{40} = \boxed{-\frac{ql^2}{15} + \frac{Pl}{40}}$$

$$M_C = -\frac{Pl}{2} + \frac{ql^2}{60} + \frac{2}{5}Pl = \boxed{+\frac{ql^2}{60} - \frac{Pl}{10}}$$

Sono gli stessi valori che avevamo calcolato con l'equazione dei tre momenti (che risulta verificata).

Si noti com'è più snello il procedimento dell'equazione dei tre momenti per la trave continua.

Completiamo la risoluzione di questa trave continua:



Mancano le reazioni degli appoggi intermedi: R_B ; R_C ; che possono calcolarsi come somma

delle reazioni sulle singole campate, oppure direttamente dall'isostatica principale.

Poiché sappiamo che per calcolare le reazioni sulla trave isostatica si uguagliano i momenti calcolati nella stessa sezione per forze a destra con quelli calcolati per forze a sinistra si ha:

$$M_{(B)}^{(sim)} = -\frac{ql^2}{15} + \frac{Pl}{40}$$

$$M_{B}^{dest.} = +\frac{Pl}{60} \cdot 2l + \frac{2P}{5} \cdot 2l - P \cdot \frac{3l}{2} + V_c l =$$

$$= +\frac{ql}{30} - \frac{7}{10}P + V_c = -\frac{ql}{15} + \frac{P}{40}$$

$$V_c = -\frac{2ql}{30} - \frac{ql}{30} + \frac{28}{40}P + \frac{P}{40}$$

$$\boxed{V_c = -\frac{ql}{10} + \frac{29}{40}P}$$

$$M_c^{dest.} = \frac{ql^2}{60} - \frac{Pl}{10}$$

$$M_c^{sin.} = \frac{13}{30}ql \cdot 2l + \frac{P}{40} \cdot 2l + ql \cdot \frac{3l}{2} + V_B l$$

$$= -\frac{19}{30}ql + \frac{P}{20} + V_B = \frac{ql}{60} - \frac{P}{10}$$

$$V_B = \frac{39}{60}ql - \frac{3}{20}P$$

$$\boxed{V_B = \frac{13}{20}ql - \frac{3}{20}P}$$

In scienza delle costruzioni, occorre continuamente verificare, e, via via correggere gli eventuali errori.

Le verifiche si operano con le due equazioni canoniche della statica, durante gli sviluppi algebrici occorre verificare che le espressioni siano "dimensionalmente" omogenee.

ora verifichiamo: $\sum F = 0$ cioè: $V_A + V_B + V_C + V_D = ql + P$

$$V_A = \frac{13}{30} ql + \frac{P}{40} = +\frac{26}{60} ql + \frac{1}{40} P$$

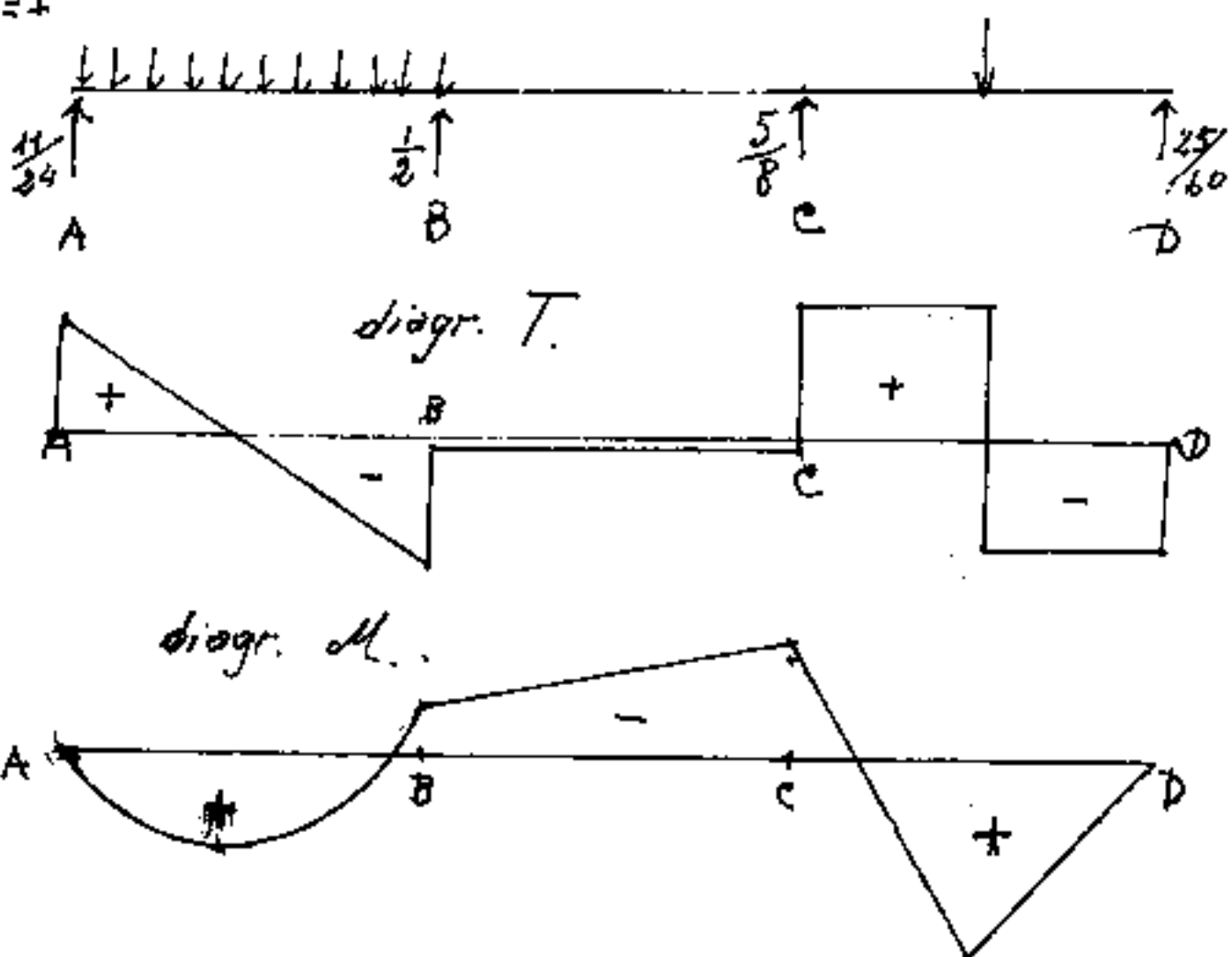
$$V_B = \frac{13}{20} ql - \frac{3}{20} P = +\frac{39}{60} ql - \frac{6}{40} P$$

$$V_C = -\frac{1}{10} ql + \frac{99}{40} P = -\frac{6}{60} ql + \frac{29}{40} P$$

$$V_D = +\frac{9l}{60} + \frac{2}{5} P = \frac{+1}{60} ql + \frac{16}{40} P$$

$$= \frac{+60}{60} ql + \frac{40}{40} P$$

Se: $P = ql = 1$

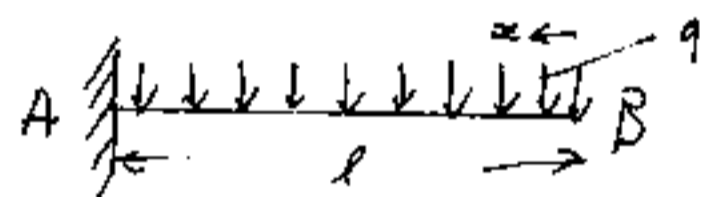


Il principio dei Lavori Virtuali applicato al calcolo delle deformazioni

Per il calcolo delle deformazioni la struttura deve essere già resa isostatica.

Nel sistema delle forze fittizie si pone una forza (od un momento) uguale ad uno, nella sezione e nella direzione dello spostamento (od angolo di rotazione) cercato.

Per esempio, si vuol conoscere la freccia in B della struttura:



A) f.p. $M' = -1x = -x$

B) m.x. $M'' = M = -\frac{qx^2}{2}$

Lavoro Esterno $\eta_B \cdot (1)$

Lavoro interno $\int_0^l \frac{M' M'' dx}{EJ} = \int_0^l \frac{qx^3}{2EJ} dx = \boxed{\eta_B = \frac{ql^4}{8EJ}}$

Della stessa struttura l'angolo di rotazione in B



$$M' = -1$$

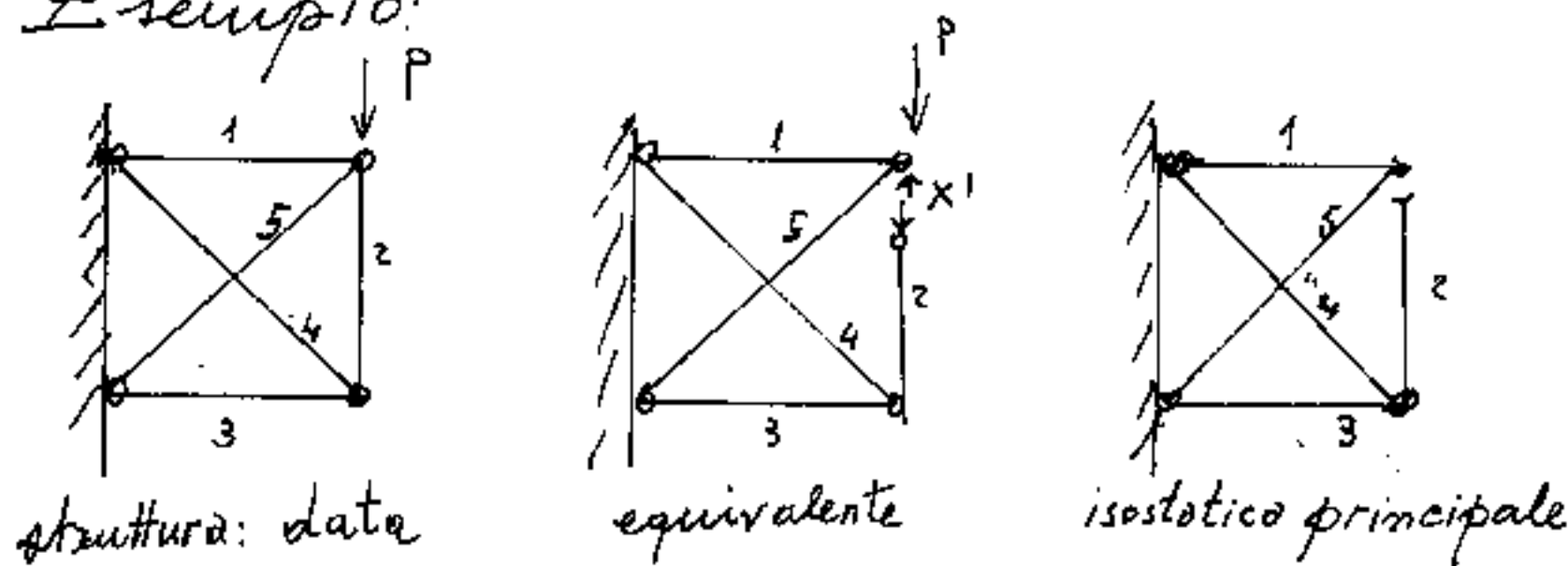
$$\varphi_B = \int_0^l \frac{M' M'' dx}{EJ} = \int_0^l \left(-1 \cdot \left(-\frac{qx^2}{2EJ} \right) \right) dx = \boxed{\varphi_B = \frac{ql^3}{6EJ}}$$

Il principio dei lavori virtuali nelle strutture reticolari iperstatiche

Si seziona l'asta (o le aste), pendoli eccedenti, presso le cerniere d'attacco. Nel taglio si pone la forza fittizia = 1 (che non farà lavoro esterno se il taglio ha spessore nullo, trattandosi di forza mutua).

(Conviene esporre i calcoli in tabelle.)

Esempio:

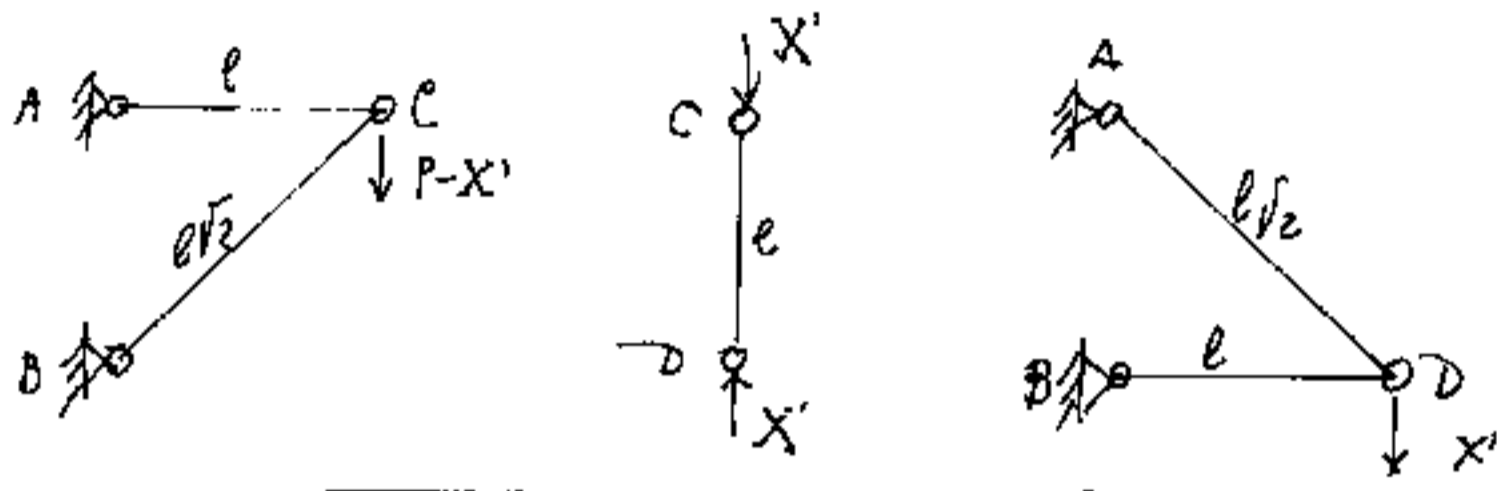


asta	l	N'	N^0	N	$\alpha = \frac{N'N^0 l}{EA}$	Note
1	1	-1	+P	$P - X'$	$\frac{l}{EA} (-P + X')$	$\Delta_e = 0$ (forza mutua)
2	1	-1	0	$-X'$	$\frac{l}{EA} + X'$	
3	1	-1	0	$-X'$	$\frac{l}{EA} + X'$	
4	$\sqrt{2}$	$+\sqrt{2}$	0	$+X'\sqrt{2}$	$\frac{l}{EA} 2X'\sqrt{2}$	
5	$\sqrt{2}$	$+\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	$(-P\sqrt{2} + X'\sqrt{2})$	$\frac{l\sqrt{2}}{EA} (-P + X')$	

$$\Delta_i = \frac{l}{EA} \left[(3 + 4\sqrt{2})X' - P(1 + 2\sqrt{2}) \right] = 0$$

$$X' = P \frac{1 + 2\sqrt{2}}{3 + 4\sqrt{2}} = P \frac{13 - 2\sqrt{2}}{23} = (0,4422)P$$

Facciamo un discorso diverso, (anche se la struttura potrà essere verificata con uno dei teoremi sul Lavoro elastico, che esporremo dopo i Lavori Virtuali) cioè consideriamo le deformazioni delle strutture isostatiche:



$$N'_{AC} = +1 ; N'_{CD} = -\sqrt{2} ; N_{AC} = (P-X') ; N_{CB} = -(P-X')\sqrt{2} ; \eta_c = \frac{(P-X')l}{EA} + \frac{2(P-X')\sqrt{2}l}{EA}$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{X'l}{EA}$$

$$N'_{BD} = -1 ; N'_{AD} = +\sqrt{2} ; N_{BD} = -X' ; N_{AD} = +X'\sqrt{2} ; \eta_b = \frac{X'l}{EA} + \frac{2X'\sqrt{2}l}{EA}$$

poiché deve essere: $(\eta_c = \Delta l_{CD} + \eta_b)$ avremo:

$$\frac{Pl - X'l}{EA} + \frac{P2\sqrt{2}l - X'2\sqrt{2}l}{EA} = \frac{X'l}{EA} + \frac{X'l}{EA} + \frac{2X'\sqrt{2}l}{EA}$$

$$P(1+2\sqrt{2})l = (3+4\sqrt{2})l X'$$

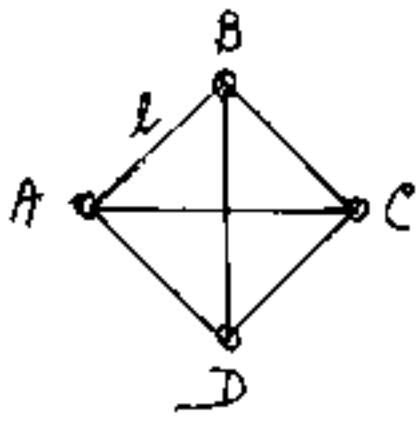
da cui:

$$X' = \frac{(1+2\sqrt{2}) P}{(3+4\sqrt{2})}$$

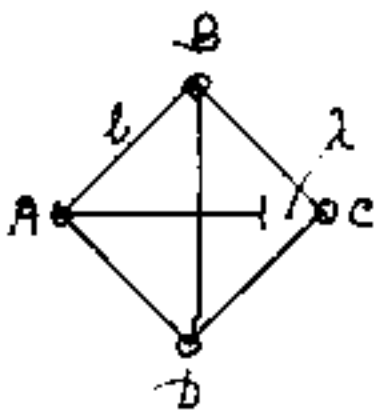
che verifica il calcolo precedente.

Dilatazioni termiche o difetti di montaggio.

Se in una struttura reticolare iperstatica, una o più aste sono più lunghe o più corte della distanza fra le cerniere di attacco; la diversità di lunghezza può essere provocata per dilatazione termica ($\Delta l = \alpha l \Delta t$) oppure può essere un difetto di fabbricazione, in ogni caso se svincoliamo l'asta irregolare in una delle cerniere di attacco, si può ridurre ad isostatica la struttura, e quindi applicare i lavori virtuali ove il lavoro esterno non sarà nullo, ma il prodotto della forza fittizia unitaria per Δl .

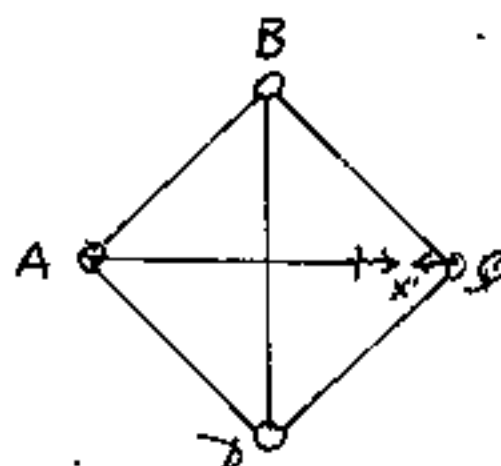


Consideriamo la maglia quadrata ABCD di lato l e completa di diagonali AC e BD. (una volta internamente iperstatica).



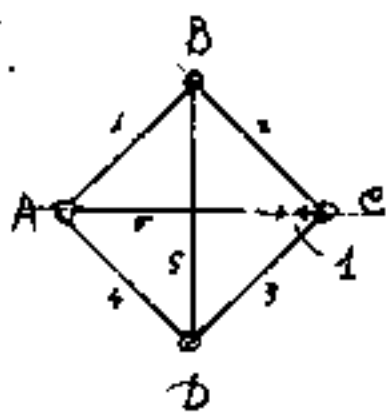
Supponiamo che la diagonale \overline{AC} sia stata fornita più corta di λ (oppure subisca un raffreddamento $-\Delta t$ tale che: $\lambda = \alpha (l\sqrt{2}) \Delta t$; $\alpha =$ coeffi-

ciente di dilatazione termica (per il ferro $\alpha = 0,000012$) (la lunghezza di $\overline{AC} = l\sqrt{2}$).



La struttura equivalente evidente è lo sforzo X' che si deve compiere per montare l'asta fornita più corta, e dimostra come la diversa temperatura in una asta rispetto alle altre (salto termico Δt) provochi autotensioni in tutte le aste della struttura iperstatica, mentre provoca una leggera configurazione diversa se la struttura è isostatica, ma non provoca tensioni; infatti se la struttura quadrata ABCD se non avesse la diagonale BD, la diagonale \overline{AC} più corta di $l\sqrt{2}$ farebbe diventare un rombo la configurazione di ABCD, ma nessuna asta entrerebbe in tensione.

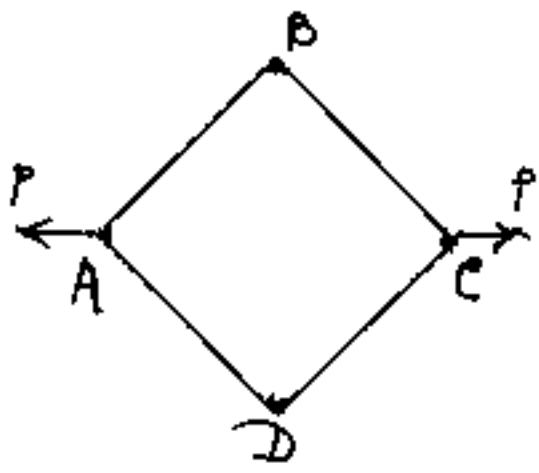
Applichiamo i Lavori Virtuali:



Asta	l	N'	N	$\frac{l}{EA} N'N$	Note
AB	1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{X'}{\sqrt{2}}$	$\frac{X'}{2}$	se Δ è la diversità in lunghezza $\Delta l = \lambda$
BC	1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{X'}{\sqrt{2}}$	$\frac{X'}{2}$	
CD	1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{X'}{\sqrt{2}}$	$\frac{X'}{2}$	
DA	1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{X'}{\sqrt{2}}$	$\frac{X'}{2}$	
BD	$\sqrt{2}$	+1	+ X'	$X'\sqrt{2}$	Lavoro esterno $l_e = 1 \cdot \lambda$
AC	$\sqrt{2}$	+1	+ X'	$X'\sqrt{2}$	

$$L_i = X' \left(\frac{4}{2} + 2\sqrt{2} \right) \frac{l}{EA} = \lambda$$

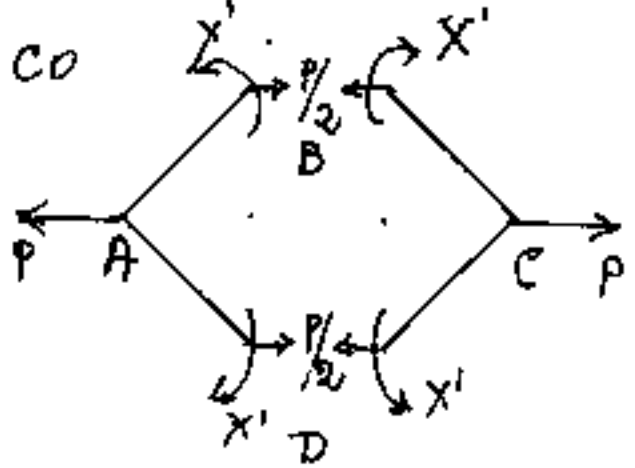
$$X' = \frac{\lambda EA}{l} \left(\frac{1}{2(1+\sqrt{2})} \right)$$



Consideriamo il nostro telaio quadrato ABCD coi vertici collegati a incastro anzichè cernierati e togliamo le diagonali, sia caricato in

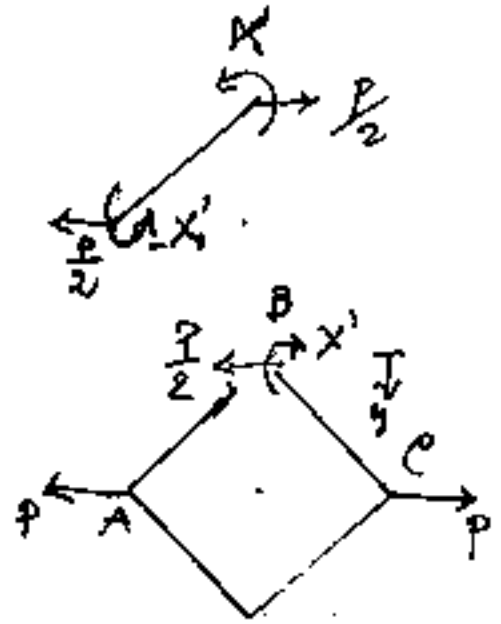
AC con due forze uguali e contrarie, P.

Una struttura chiusa è 3 volte internamente iperstatica infatti attraverso una sezione si trasmette: N, T, M. In questo caso tenendo conto delle simmetrie della struttura e del carico



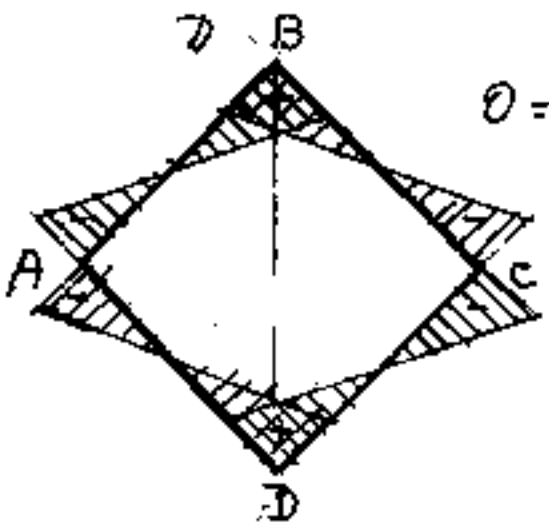
l'incognita si riduce alla sola M. Basta considerare metà od anche $\frac{1}{4}$ di struttura ove la coppia $\frac{P}{2} \frac{l}{\sqrt{2}}$ deve essere equilibrata da due momenti

uguali $X' = \frac{Pl}{4\sqrt{2}}$



Coi lavori virtuali, rilevato che le sezioni ABCD per simmetria non ruotano avremo $\delta e = 0$; $M_y = (\frac{P}{2}y + X')$

$$0 = \int_0^{l/\sqrt{2}} (X' - \frac{P}{2}y) dy = (X' \frac{l}{\sqrt{2}} - \frac{Pl^2}{8}) = 0 \quad \boxed{X' = \frac{Pl}{4\sqrt{2}}}$$

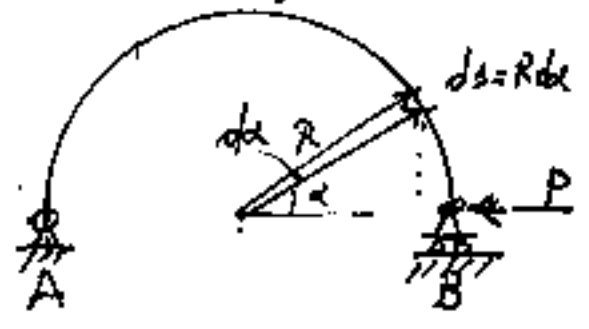


diagr. M.

Strutture archiformi (curve)

È necessario che le sezioni, nelle strutture in genere, siano individuate da un solo parametro. Poiché il tronchetto elementare ha per basi le dimensioni della sezione e per lunghezza il differenziale della lunghezza della struttura. Così le aste rettilinee hanno per asse longitudinale l'asse x (o l'asse y o z). avranno il differenziale: dx (o dy, dz, ds). Nelle strutture circolari, con raggio costante, le sezioni sono individuate dall'angolo α , che, un raggio variabile forma con un raggio preso come origine. Il differenziale della lunghezza dell'arco è $ds = R d\alpha$.

Poiché il differenziale della lunghezza di una curva qualsiasi espressa cartesianamente in $y = f(x)$, ha: $ds = \sqrt{(y')^2 + 1} dx = \sqrt{(f'(x))^2 + 1} dx$; questa formula è valida in generale.

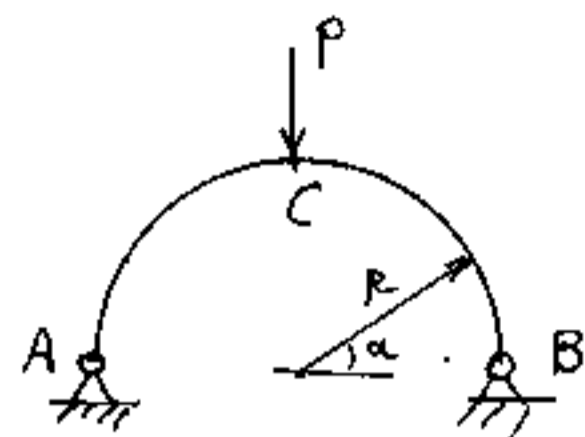


Trovare lo spostamento del carrello B; $M' = -1 (R \sin \alpha)$; $M = -P (R \sin \alpha)$

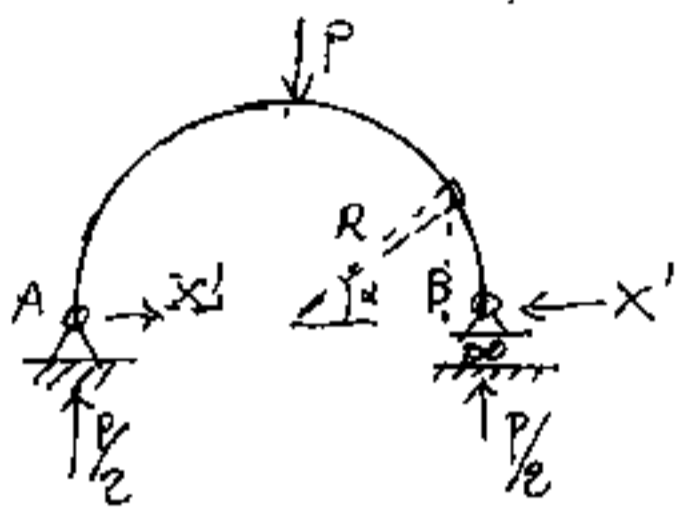
$$\delta = \int_0^{\pi} R^2 \sin^2 \alpha \frac{R d\alpha}{EJ} = \frac{R^3 P}{EJ} \int_0^{\pi} \sin^2 \alpha d\alpha =$$
$$\delta = \frac{PR^3}{EJ} \left[\frac{\sin 2\alpha + 2\alpha}{2} \right]_0^{\pi}$$

$$\delta = \frac{PR^3 \pi}{2EJ}$$

Arco cernierato alla base e caricato simmetricamente al centro C.



Trascurando le deformazioni dorate a T ed N sblocciamo la cerniera B



$$dl' = -1 (R \sin \alpha)$$

$$M = + \frac{P}{2} R (1 - \cos \alpha) - X (R \sin \alpha)$$

$$L_e = 0 ; L_i = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{dl' M ds}{R} = 0$$

$$2 \int_0^{\pi/2} \left[(-R \sin \alpha) \left(\frac{P}{2} R - \frac{P}{2} R \cos \alpha \right) + X R \sin^2 \alpha \right] R d\alpha$$

$$2 R^3 \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{P}{2} \sin \alpha + \frac{P}{2} \sin \alpha \cos \alpha + X \sin^2 \alpha \right) d\alpha = 0$$

$$\left[\frac{P}{2} \cos \alpha + \frac{P}{2} \frac{\sin^2 \alpha}{2} + X \frac{-\sin \alpha \cos \alpha + \alpha}{2} \right]_0^{\pi/2} = 0$$

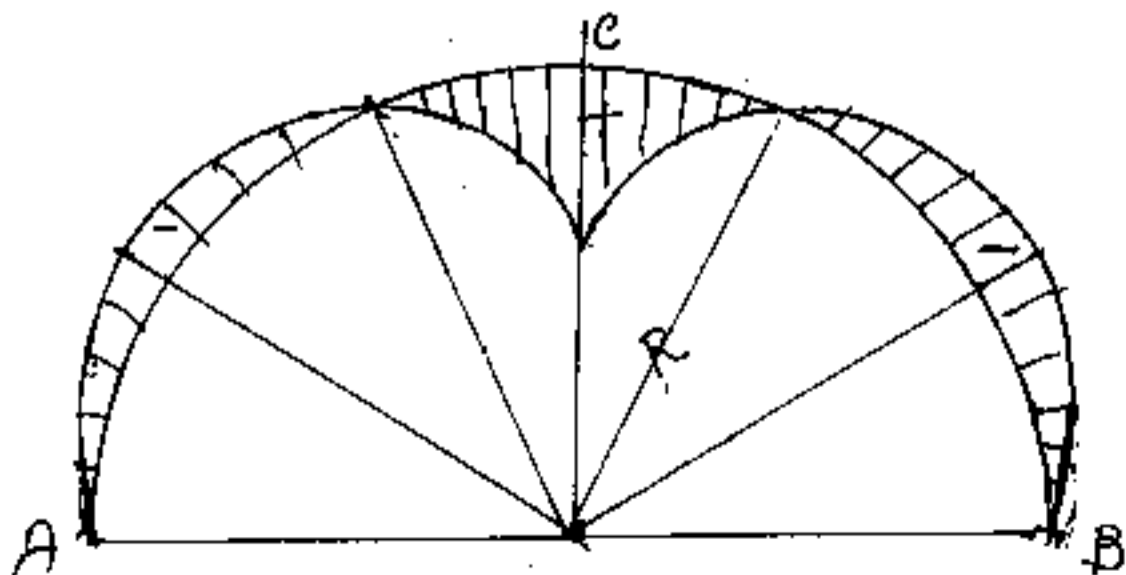
$$\left[\frac{P}{2} (-1) + \frac{P}{2} \left(\frac{1}{2} \right) + X \frac{0 + \pi/2}{2} \right] = \frac{+P}{4} = X \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{X' = \frac{P}{\pi}}$$

Il diagramma dei momenti diventa:

$$M = PR \left[\frac{1 - \cos \alpha}{2} - \frac{\sin \alpha}{\pi} \right] = 0 \text{ per } \alpha = 64^\circ 51' 41,8''$$

$$\frac{dM}{d\alpha} = PR \left[\frac{\sin \alpha}{2} - \frac{\cos \alpha}{\pi} \right] = 0 \text{ per } \alpha = 32^\circ 28' 53,9''$$

$$M_{\max} = -PR(0,09272\dots) ; M_c = +PR(0,329058\dots)$$



diagr. M.

Le strutture reticolari

Sono in genere strutture portanti costituite di aste cernierate agli estremi, quasi sempre isostatiche internamente ed esternamente. Le aste sono spesso metalliche, ma possono essere in legno, od anche in altri materiali.

Sono reticolari le capriate per le coperture dei tetti, le mensole per coperture in aggetto, le strutture di certi ponti, fino alla costruzione di volte e cupole, oppure gru, ecc.

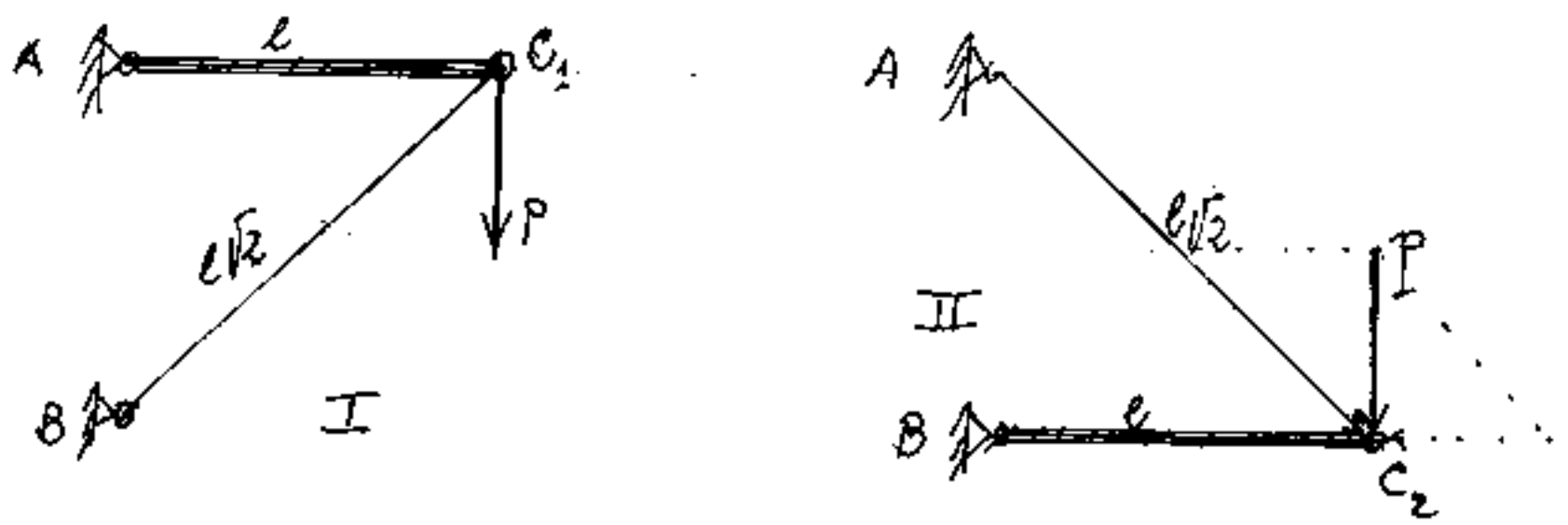
Se analizziamo punto per punto le tensioni interne di una struttura piena (trave piena) troviamo delle linee di flusso delle tensioni normali di trazione e compressione, normali fra loro ove il taglio è nullo, tali tensioni sono dette tensioni principali le loro direzioni, in quel punto, sono dette direzioni principali, l'insieme delle linee di trazione e delle linee di compressione sono dette: linee isostatiche. Torneremo su questo argomento, trattando il cerchio di Mohr.

Caratteristica delle strutture reticolari è che le aste, in genere, sono solo tese o solo

comprese (come le linee isostatiche);
Però dobbiamo evidenziare subito la notevole diversità fra aste tese ed aste compresse, infatti, mentre un'asta tesa non presenta anomalie o instabilità, qualunque sia la lunghezza dell'asta; per le aste compresse invece c'è una lunghezza limite oltre la quale l'asta si rompe prima per inflessione dovuta all'instabilità elastica, spesso chiamata carico di punta, nel senso che data una lunghezza dell'asta superiore alla lunghezza limite (travi snelle) esiste un carico limite (carico di punta) oltre il quale si verifica l'instabilità elastica. Invece per travi più corte della lunghezza limite (travi tozze) la rottura avviene per compressione, per travi snelle con carico inferiore al carico di punta, non si verifica l'instabilità e la compressione è molto lontana dalla rottura. (Tratteremo dettagliatamente l'instabilità).

Allo scopo di esercitare l'occhio del progettista, presentiamo i due casi più semplici di struttura reticolare costituita da una mensola, di due sole aste, caricata

nel nodo. Essendo fissi i vincoli A e B di



ancoraggio delle aste che debbono sostenere il peso P , queste possono essere disposte in due modi: come in I o come in II.

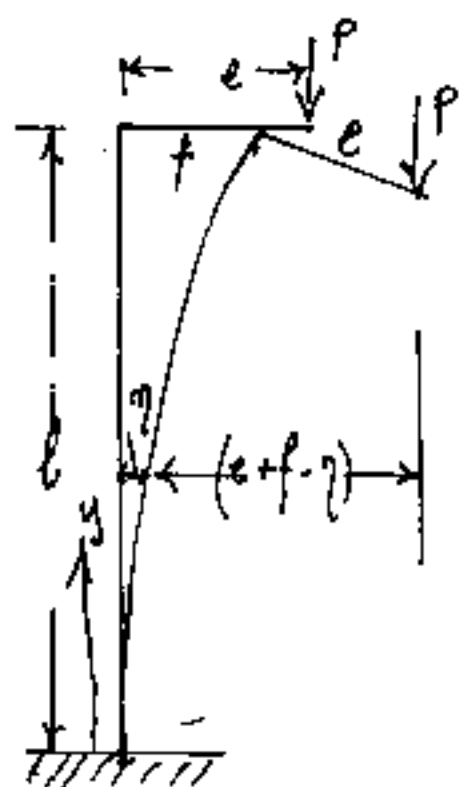
Scomponendo il carico P nelle due direzioni delle aste si nota che nel primo caso l'asta più corta: AC_1 (lunga l) è soggetta alla componente minore del carico (P) ed è tesa; mentre l'asta più lunga BC_1 (lunga $l\sqrt{2}$) è soggetta alla componente maggiore del carico ($P\sqrt{2}$) ed è compressa ove la lunghezza ed il carico dovrebbero essere limitati per evitare ...

Nel II caso avviene l'opposto ed è quindi più economica e più assicurante per la stabilità. Abbiamo ingrossato l'asta più corta perché destinata ad essere compressa e perché l'occhio si abitui a vedere, anche prima dei calcoli, l'inflattersi del filo BC_1 .

L'instabilità elastica (carico di punta)

Per poter trattare compiutamente le strutture reticolari, trattiamo subito il carico di punta, riservandoci nel seguito un capitolo sull'instabilità (argomento sviluppato dal Belluzzi nel IV. Volume della sua *Scienza delle Costruzioni*, ma già introdotto nel I' Vol)

Consideriamo la mensola in figura corri-



cata eccentricamente, essa de-
formandosi sposta la retta di
azione del carico tanto che
il momento nella sezione ge-
nerica distante y diventa:

$$-M = P(e + f - \eta)$$

Se applichiamo la linea elastica, si ha:

$$\eta'' = \frac{-M}{EJ} = \frac{P}{EJ}(e + f - \eta)$$

cioè:

$$\boxed{\eta'' + \frac{P}{EJ}(\eta - e - f) = 0}$$

Equazione differenziale del secondo ordine,
incompleta, lineare, non omogenea.

Risolvendo questa equazione ed imponendo (vi
sono due costanti di integrazione) che il carico P sia
tale da portare al collasso a terra la struttura

si ha il carico critico di Eulero:

$$P_E = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$$

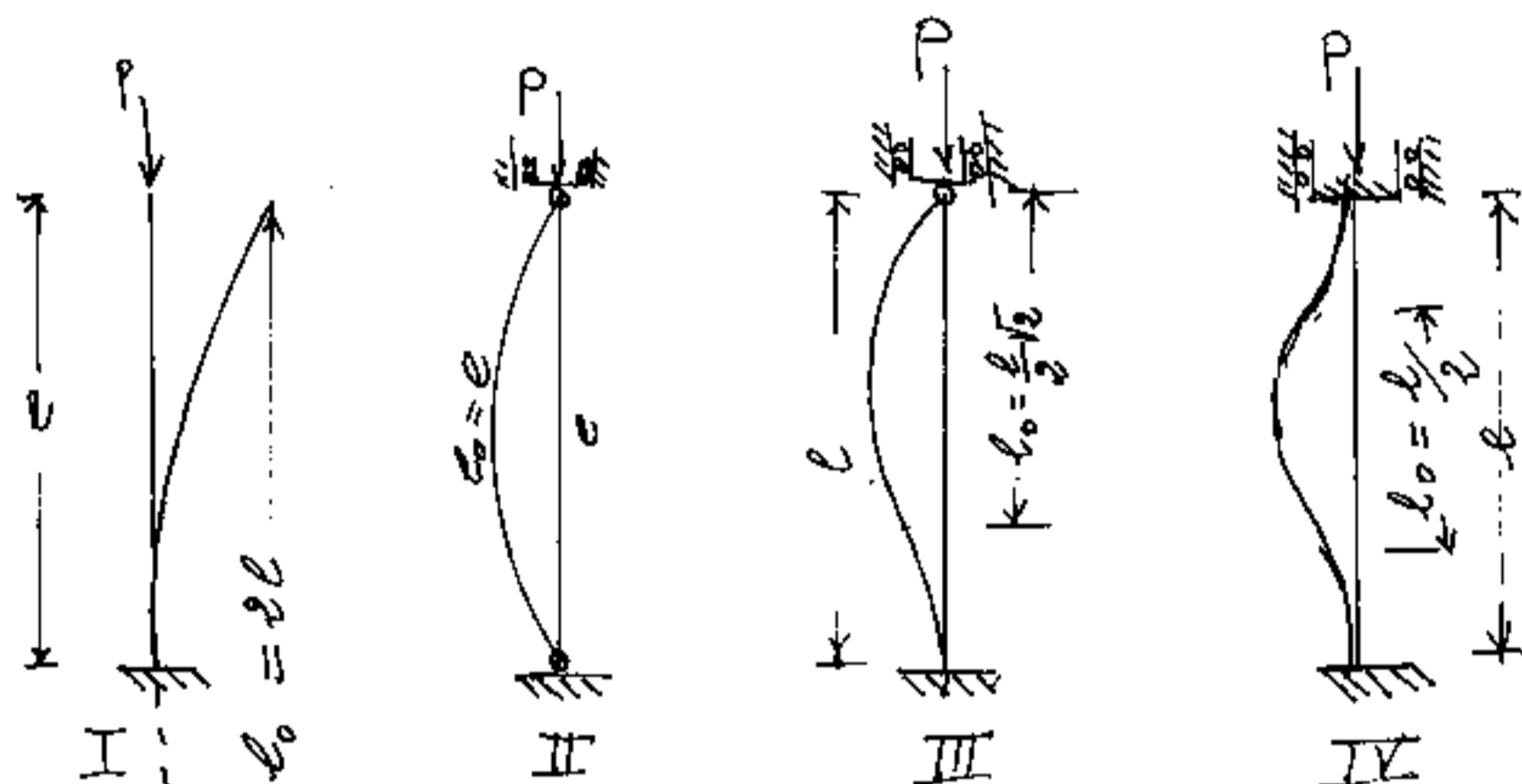
Si noti che nella formula di Eulero non figura l'eccentricità "e" quindi si può pensare (con Eulero) che il collasso a terra si avrebbe anche con $e=0$ (o infinitesimo). Cioè quando il carico baricentrico sull'asta raggiunge il valore di P_E , si ha lo scatto improvviso d'inflessione fino alla rottura. È ovvio che se la sezione dell'asta ammette J diversi, l'inflessione avviene secondo il J minimo.

Eulero chiamò carico critico questo carico:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EJ_{min.}}{4l^2}$$

Prendendo una stecca da disegno dritta, flessibile, piuttosto lunga, si può comprimere assialmente con una mano aumentando via, via, il carico, ad un certo punto avverrà lo scatto dell'inflessione e bisogna essere pronti a cessare la compressione per non rompere la stecca, poiché il momento flettente aumenta con la deformazione che aumenta con M .

La formula di Eulero può essere generalizzata, si considerano quattro tipi di vincolo:



Abbiamo indicato con $l_0 = l_a$ lunghezza libera d'inflessione e la formula generalizzata diventa:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{l_0^2}$$

applicandola al I caso torna Eulero.

Limiti di validità della formula di Eulero.

Poniamo: $J_{min} = \rho^2 A$

ovv: ρ = raggio giratore d'inerzia (minimo)

A = area della sezione:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E \rho^2 A}{l_0^2}$$

La formula può scriversi:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E A}{l_0^2 / \rho_{min}^2}$$

ove ponendo:

$$\frac{l_0}{\rho_{min}} = \underline{\lambda} = \underline{\text{rapporto di snellezza.}}$$

l'equazione diventa:

$$P_{crit} = \frac{E \pi^2 A}{\lambda^2}$$

e dividendo per A

$$\frac{P_{crit.}}{A} = \boxed{\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}} \quad \text{tensione critica}$$

detta σ_c la tensione di rottura a compressione semplice si ha:

$$\boxed{\sigma_{crit} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \sigma_c}$$

cioè la rottura per instabilità elastica può precedere la rottura per compressione semplice oppure essere circa contemporanea, oppure la rottura a compressione semplice può avvenire prima che si verifichi l'instabilità elastica.

Poiché π ed E sono costanti tutto ciò dipende dal rapporto di snellezza λ

Chiameremo: "torze" le travi che hanno un piccolo rapporto di snellezza: $l_0 = \text{piccolo}$; $\rho_{min} = \text{grande}$.

per esse σ_{crit} è grande e maggiore di σ_c
cioè aumentando il carico si arriva prima
al carico di rottura che al carico critico.

Diremo invece "snelle" le travi per le quali si
ha un rapporto di snellezza grande: $l_0 = \text{grande}$,
 $f_{min} = \text{piccolo}$, per esse σ_{crit} è piccolo e molto
minore di σ_c ; cioè, un piccolo carico anche
molto minore del carico ammissibile a compres-
sione, provoca l'instabilità elastica. (una stes-
sola di un foglio di carta, che tesa può sostenere
alcuni grammi, compressa spesso si inflette per il
proprio peso.)

Abbiamo paragonato la σ_{crit} alla σ_c
(tensione di rottura per compressione semplice,
in effetti prima di σ_c si verifica $\sigma_s =$
(tensione di snervamento) e prima ancora $\sigma_e =$
(tensione limite di elasticità) ed infine $\sigma_p =$
(tensione limite di proporzionalità) cioè
limite di validità della legge di Hooke;
ed il Belluzzi, confronta: $\sigma_e = \sigma_{crit} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} \leq \sigma_p$
con σ_p e ricava:

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \lambda_{lim.}$$

Il limite del rapporto di snellezza.

Formule per il calcolo di travi corte compresse

Lo sviluppo industriale e soprattutto lo sviluppo delle reti ferroviarie, ove la necessità di costruire tettoie e tralicci realizzati con travi reticolari in ferro, portò presto l'interesse per il calcolo delle aste compresse che, per economia, avrebbero avuto un alto rapporto di snellezza, mentre per la sicurezza occorreva distribuire l'area di ferro in modo da evitare l'instabilità elastica.

Gli studi in materia furono molteplici, si ricordano le formule di Tetmajer (Zurigo 1896) di tipo lineare: $\sigma_{crit} = a - b\lambda$ che si assume i valori:

ferro omogeneo:	$\sigma_{crit} = 3100 - 11,4\lambda$	con $\lambda \leq 105$
ferro saldato:	$\sigma_{crit} = 3030 - 12,9\lambda$	" $\lambda \leq 112$
legno:	$\sigma_{crit} = 293 - 1,94\lambda$	" $\lambda \leq 100$
Ghisa:	$\sigma_{crit} = 7760 - 120\lambda + 0,53\lambda^2$	" $\lambda \leq 80$

Le Ferrovie Italiane nel 1916 emettono le norme per le costruzioni metalliche, ed impongono per il ferro omogeneo un carico di sicurezza ridotto

$$\sigma_{amm} = K = K \quad \text{per } \lambda \leq 30$$

$$\text{"} \quad = K(1,207 - 0,0059\lambda) \quad \text{per } 30 \leq \lambda \leq 105$$

$$\text{"} \quad = K(5300/\lambda^2) \quad \text{per } \lambda > 105$$

Il metodo ω

Il metodo è stato introdotto nelle norme ufficiali tedesche nel 1925 e modificato nel 1940, è il metodo a tutt'oggi riconosciuto valido in Italia ed all'estero, per il calcolo delle travi caricate di punta.

ω è il coefficiente riduttore della tensione di sicurezza ammissibile per compressione semplice per avere la σ_{amm} a carico di punta $\sigma_{a.p.}$

$$\sigma_{a.p.} = \frac{\sigma_{amm}}{\omega} = \frac{K}{\omega}$$

ω è tabulato in funzione di λ .

Per il ferro omogeneo ed acciaio da tempo si usavano i simboli:

Aq 37 = ferro omogeneo con tensione di rottura

$$\sigma_r = 3700 \frac{Kg}{cm^2}; \quad \sigma_{amm} = 1200 \frac{Kg}{cm^2}$$

Aq 48 = ferro semi duro con tensione di rottura

$$\sigma_r = 4800 \frac{Kg}{cm^2}; \quad \sigma_{amm} = 1600 / 1800 \frac{Kg}{cm^2}$$

Aq 52 = acciaio con $\sigma_r = 5200 \frac{Kg}{cm^2}; \quad \sigma_{amm} = 1800 / 2000 \frac{Kg}{cm^2}$

per questi tre tipi di Acciaio di qualità il Belluzzi, nel I volume della sua scienza delle costruzioni, riporta le tabelle di ω in funzione di λ riferite alle Norme tedesche, ed una seconda tabella sempre riferita

alle norme tedesche, corretta nel 1940
ove i valori di w sono in genere più piccoli dei
corrispondenti nella precedente tabella.

Nel "Colombo" - Manuale dell'Ingegnere - edizione
Hoeppli 66^a - 70^a dell'anno 1933 a pag 599 sono
riportate due tabelle di coefficienti w in funzio-
ne di λ , la prima relativa alle aste compresse in
acciaio colato e riporta gli stessi valori delle
prime norme tedesche relative ad A937.

La seconda tabella è relativa alle aste compres-
se in acciaio ad elevato limite elastico e corrispon-
dono alla prima tabella delle norme tedesche per
l'A9 52. (Le tabelle del Colombo variano λ di uno in uno,
le tabelle del Belluzzi variano λ di 10 in 10)

La legislazione italiana, dopo la seconda guerra
mondiale ha prescritto le "norme per la disci-
plina delle opere in conglomerato cementizio
armato normale e precompresso, ed a struttura
metallica" con questo titolo la Libreria dello
Stato riporta un fascicolo del 1972 ove sono
riportate le leggi: 5-XI-1971 n° 1086 e D.M. 30/5/1972
ove figurano tabelle che riportano i valori di w .

Successivi aggiornamenti delle norme si trovano nel DM. 30-5-1974.

Le definizioni degli acciai sono variate infatti Ag 34 viene definito Fe B 22 ove 22 è la tensione di snervamento in Kg/mm^2 . (2200 Kg/cm^2)

Fe B 32 con $\sigma_s \geq 5000 Kg/cm^2$. Ma viene anche definito: A 38 ove 38 si riferisce allo snervamento. (A = acciaio; Ag = Acciaio di qualità). Nel successivo decreto Fe B 22 diventa Fe B 22 K.

Poiché la normativa imposta per legge varia il progettista dovrà aggiornarsi all'ultima normativa pervenuta. (È un problema tecnologico).

Noi, riferendoci ad aste compresse nelle quattro condizioni di vincolo già precisate e per sezioni costanti e simmetriche rispetto agli assi principali d'inerzia, noto lo sforzo normale N , per progettare l'asta compressa, caricata di punta, si prefissa un λ_n arbitrario (per es. 120 per il ferro) e dalle tavole si ricava w quindi essendo nota la σ_{amm} (per il ferro ordinario 1200 Kg/cm^2) si trova la tensione ammissibile a carico di punta $\sigma_{n,p} = K = \frac{\sigma_{amm}}{w}$, quindi dividendo: $\frac{N}{K} = A$ si trova l'area

della sezione del profilato necessaria allo scopo. Però i profilati in commercio presentano aree diverse maggiori o minori di quella calcolata sulla base del λ arbitrario proposto. Si sceglie il profilato che abbia un'area immediatamente superiore; dalle tabelle del profilato si trova P_{min} e si calcola λ_{n+1} , quindi si riparte assumendo per λ un intermedio fra λ_n e λ_{n+1} (per es $\frac{\lambda_n + \lambda_{n+1}}{2}$) si ripete il calcolo finché $\lambda_n \cong \lambda_{n+1}$.

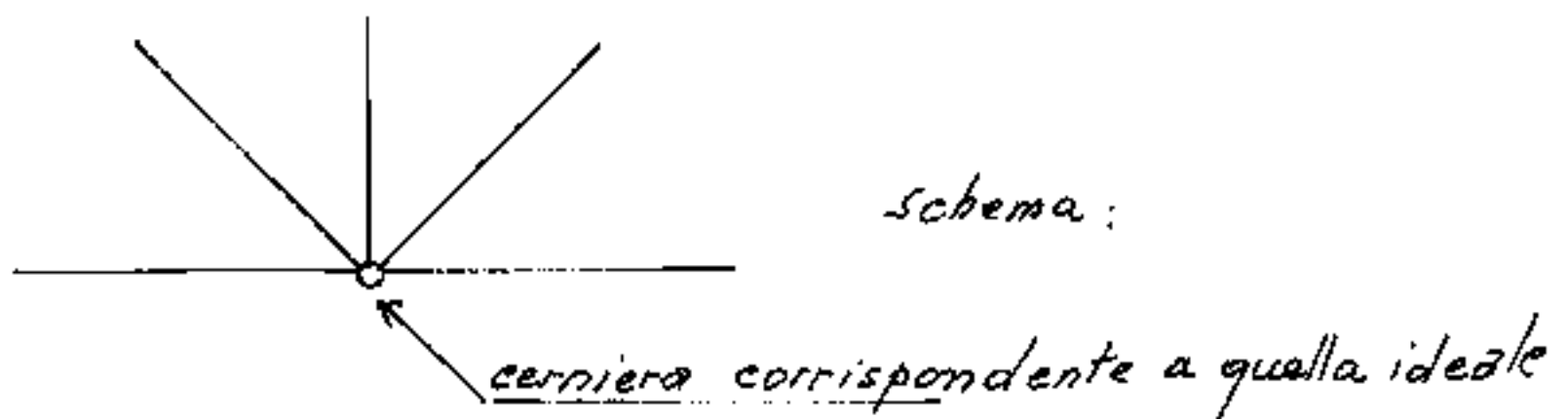
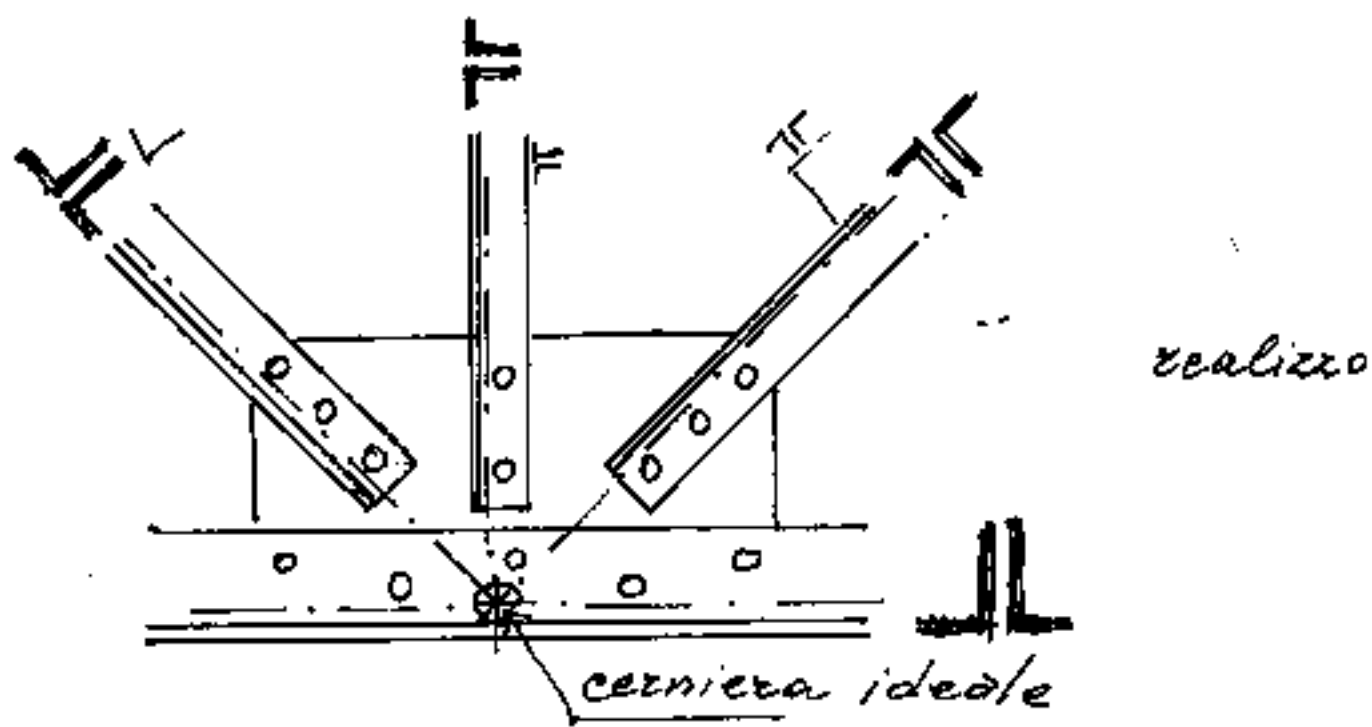
Cioè si compila la tabella:

$N = \text{nota}$; $\sigma_{amm} = \text{nota}$; $l_0 = \text{nota}$:

λ_m	w	$\sigma_p = K$	$A = \text{area calcolata}$	$A_p = \text{area del profilato}$	P_{min}	λ_{n+1}
λ_m (arbitraria)	dalle tabelle	$K = \frac{\sigma_{amm}}{w}$	$A = \frac{N}{K}$	—	—	—
—	—	—	—	dalle tabelle A_p	dalle tabelle P_{min}	$\lambda_{n+1} = \frac{l_0}{P_{min}}$
$\left(\frac{\lambda_m + \lambda_{n+1}}{2}\right)$	id	id	id	—	—	—
—	—	—	—	id	id	id
id	id	id	id	—	—	—
—	—	—	—	id	id	id

Naturalmente, in modo più grossolano la progettazione può ridursi al Perit/grado di sicurezza (ove Perit sia minore del σ_{amm} ammissibile). Il grado di sicurezza q non inferiore a 5 data la pericolosità.

Poiché le incavallature metalliche sono costituite di profilati, le cui giunzioni possono essere saldate o chiodate, nei nodi viene posta una lastra di collegamento detta fazzoletto. I profilati sono doppi e stanno simmetricamente dalle due parti del fazzoletto. Gli assi baricentrici alle sezioni dei profilati che concorrono sullo stesso fazzoletto, debbono incontrarsi in un punto che sarà considerato, ai fini del calcolo, la cerniera (ideale) di collegamento.

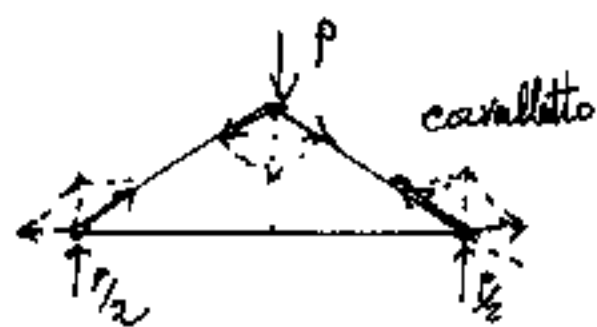
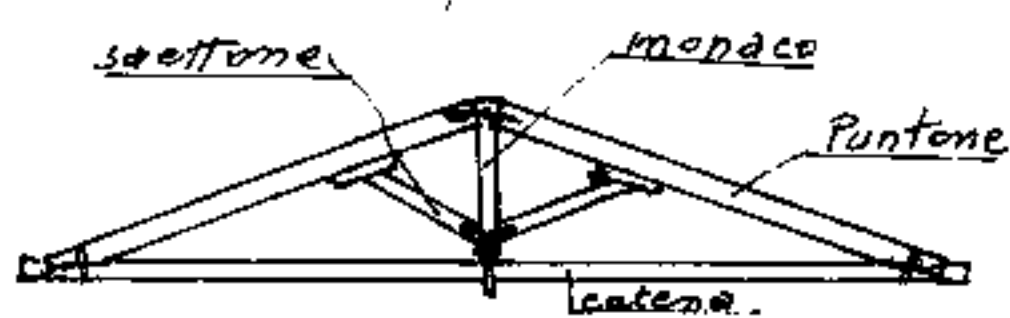


Metodi di calcolo degli sforzi normali nelle aste delle strutture reticolari

Consideriamo strutture reticolari isostatiche, con aste scariche, cernierate nei nodi, dove sono i carichi. Cioè composte di pendoli.

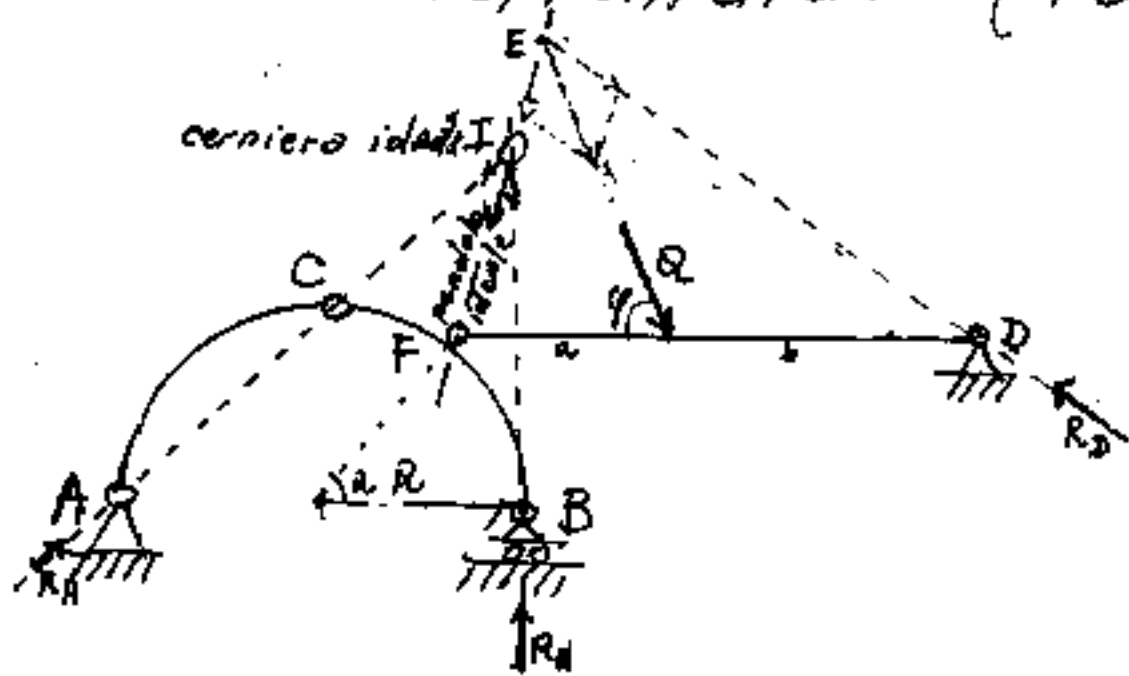
Il calcolo può effettuarsi graficamente, o analiticamente per i vari tipi di struttura.

Le capriate, o incavallature, destinate a sostenere le falde pendenti dei tetti di larghi capannoni o chiese; partono da un semplice triangolo costituito da due puntoni ed una catena (tesa). Spesso i due puntoni, al colmo, premono contro un corto trave verticale detto monaco, ove all'altra estremità ha un reggi-catena. Talvolta al monaco si aggiungono due saettoni per limitare l'inflessione dei puntoni. Queste capriate, in legno sono comuni nelle nostre chiese francescane.



La scomposizione del carico ci dà la grandezza degli sforzi di trazione e compressione.

Ai fini del calcolo è bene ricordare che in una struttura reticolare isostatica, con aste qualsiasi, (curve o rettilinee), purché cernierate agli estremi, cariche o scariche, le aste cariche possono essere considerate una alla volta, le restanti aste scariche corrispondono ad un vincolo ideale di grado tre, costituito da un vincolo di grado uno e da un vincolo di grado due, cioè l'asta carica diventa come una trave semplicemente appoggiata di facile risoluzione. Per sovrapposizione degli effetti si calcola l'intera struttura. (Per esempio: data la



struttura isostatica ABCDE carica sull'asta FD del carico Q, per quanto detto, poiché

in D c'è un vincolo di grado due (cerniera) in F la struttura ACB deve corrispondere ad un vincolo di grado uno (reale o ideale). Le azioni del pendolo (a terra) AC e del carrello (a terra) B equivalgono alla cerniera ideale a terra I

Per cui la trave \overline{FD} risulta vincolata (o terra) dalla cerniera reale D (vincolo di grado due direttamente a terra) e dal pendolo ideale \overline{IF} (vincolo di grado uno, a terra tramite il pendolo \overline{AC} e l'azione del carrello B).

Poiché ogni asta può idealmente equipararsi ad una trave isostatica, semplicemente appoggiata; poiché un insieme di carichi comunque complesso e agente su una trave, può sempre ridursi (ai soli fini del calcolo delle reazioni isostatiche) ad un sistema equivalente costituito da una sola forza risultante; applicando la regola generale per la risoluzione grafica delle reazioni vincolari, la quale dice: "prolungare le rette di azione del vincolo di grado uno (reale o ideale) e della retta di azione della risultante dei carichi fino a determinare il punto comune E (punto di equilibrio). Tracciare da E la retta di azione del vincolo di grado due, riportare su E la risultante dei carichi e scomporla secondo le rette di azione dei due vincoli"

Considerando cariche una alla volta le aste, per sovrapposizione degli effetti si equilibra la struttura.

Il Diagramma Cremoniano

Il Diagramma Cremoniano, detto anche diagramma reciproco, è, in scala forze, il diagramma degli sforzi normali delle aste della struttura cui il diagramma si riferisce.

Ad ogni "nodo" della struttura, corrisponde una "maglia" (poligono) sul cremoniano, e viceversa.

Le aste che concorrono in un nodo della struttura, sono ivi disegnate in scala lunghezza, esse, intorno al nodo, si susseguono in un certo ordine ciclico che corrisponde all'ordine ciclico con cui si susseguono i segmenti della maglia che, in scala forze, ne rappresentano lo sforzo normale.

Le aste del nodo ed i corrispondenti segmenti delle maglie sono paralleli.

Per distinguere le aste compresse dalle aste tese, si usò ingrossare lo spessore del segno dei segmenti che ne rappresentano lo sforzo, e del segno delle aste stesse.

I carichi debbono essere nei modi della struttura internamente ed esternamente isostatica.

Per realizzare il diagramma cremoniano di una struttura, occorre:

I) Disegnare con la massima precisione perché in fondo il diagramma deve chiudere.
La struttura disegnata in scala lunghezze, il diagramma in scala forze.

Disegnata la struttura con i carichi occorre:

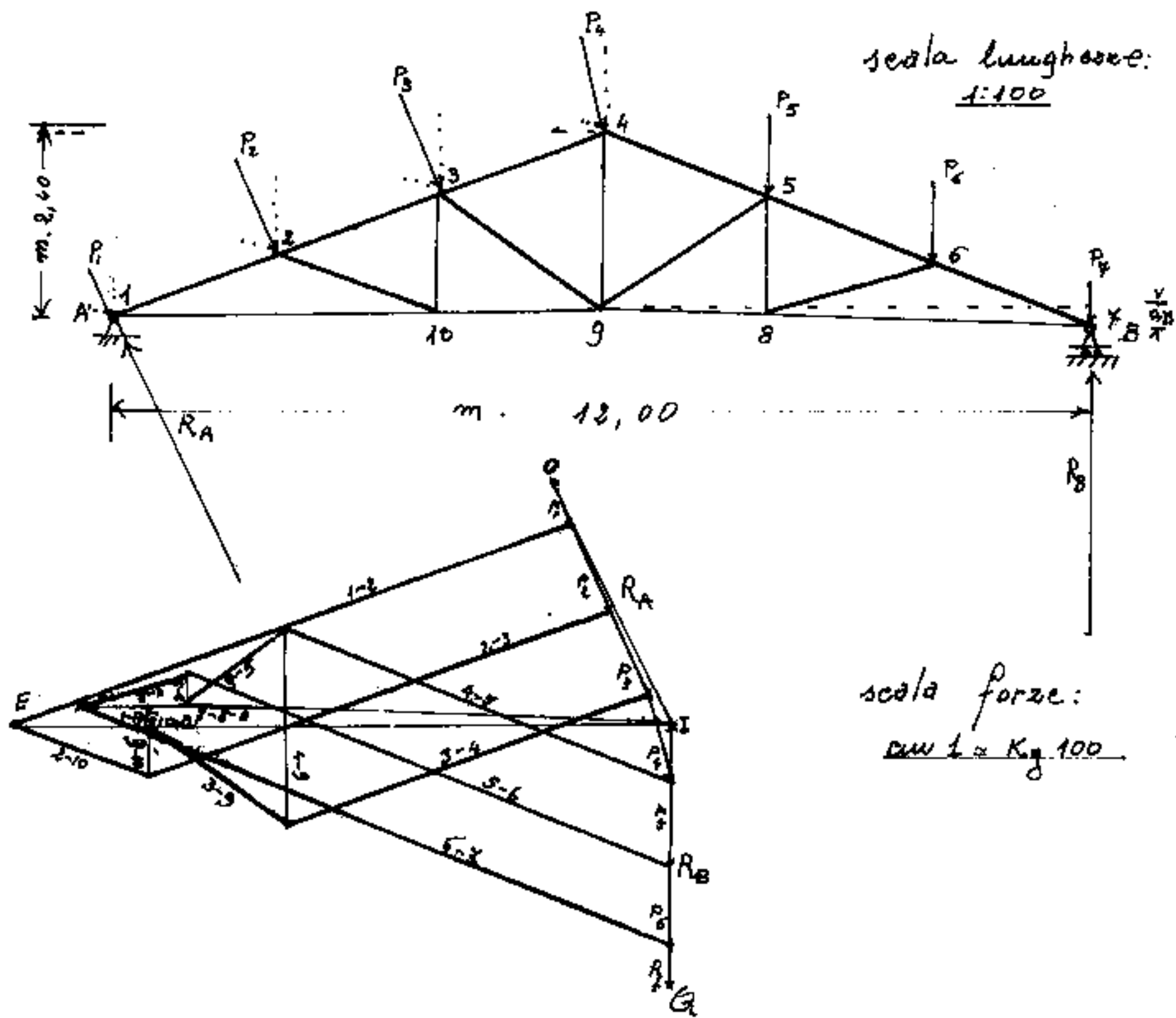
- I) Numerare i nodi in ordine ciclico (per esempio con verso orario)
- II) Fare il poligono delle forze rispettando l'ordine dei nodi includendovi le reazioni vincolari che devono essere precalcolate
- III) Iniziare l'esame del primo nodo della struttura ove le aste e le forze che vi concorrono o debbono essere esaminate in sequenza ciclica (per esempio oraria) lasciando per ultime le due aste ove lo sforzo è ancora incognito. Se le aste incognite sono più di due si passa ad un nodo adiacente che permetta di ridurre a due le aste incognite.

IV) Ogni forza ed ogni asta che hanno in comune il nodo, considerate nell'ordine ciclico prefissato deve avere nello stesso ordine con la stessa sequenza un segmento parallelo nella maglia del cartesiano, che deve essere chiusa.

V) Ripercorrendo in sequenza i lati della maglia, se per esempio percorriamo il segmento parallelo ad una asta, dobbiamo riguardare sul nodo come se ci muovessimo sull'asta, anziché sul segmento della maglia, e se il nostro moto "va verso il nodo" l'asta è un puntone ed il segmento in scala forza il valore della compressione. Se sfugge dal nodo è un tirante la cui intensità è la lunghezza del segmento in scala forza. (Il nostro percorrere è il verso delle forze agenti).

Allo scopo di chiarire meglio, diamo il dettaglio per la realizzazione del diagramma Cremoniano di una capriata inglese soggetta nei nodi al peso del tetto ed alla spinta del vento.

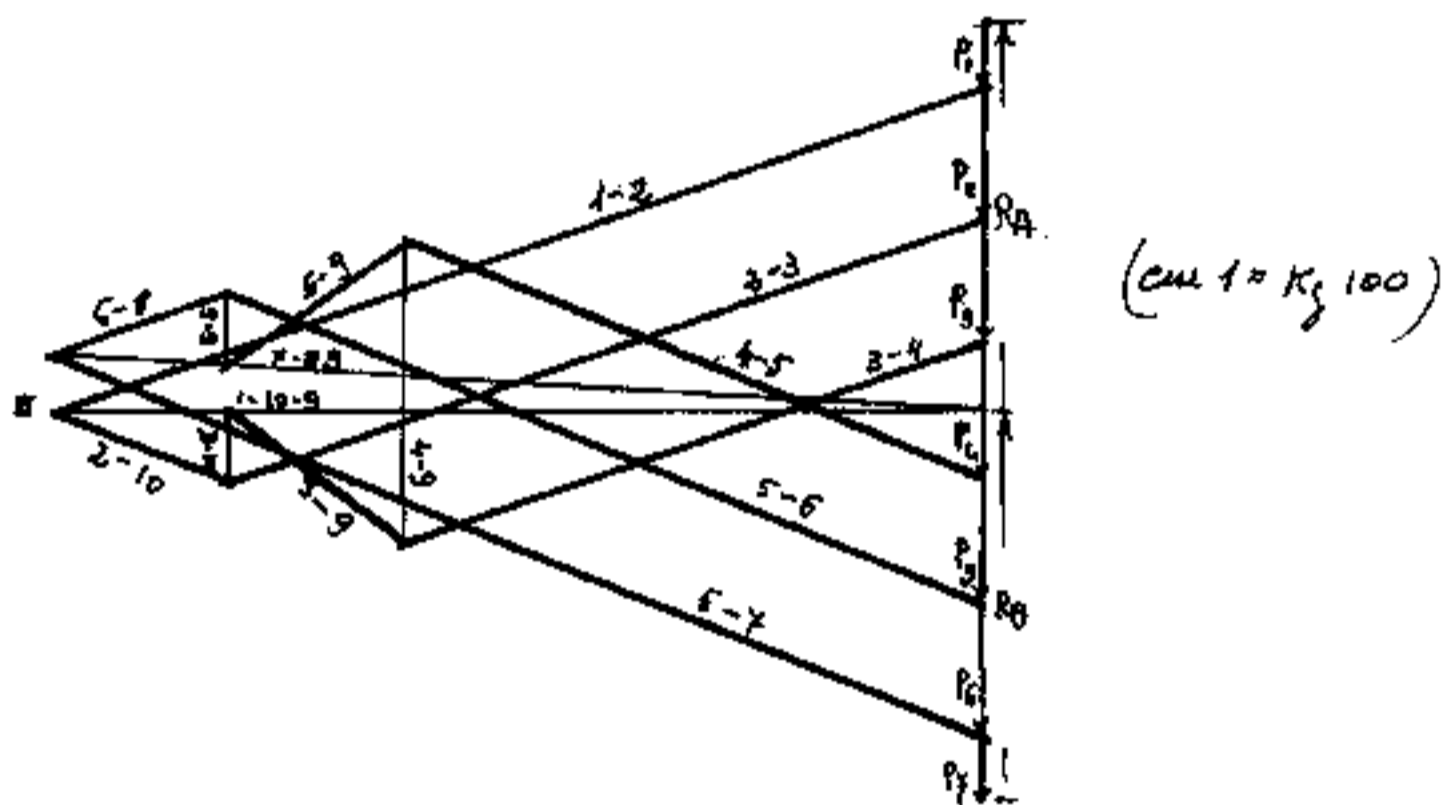
Cremoniano per una Capriata Inglese



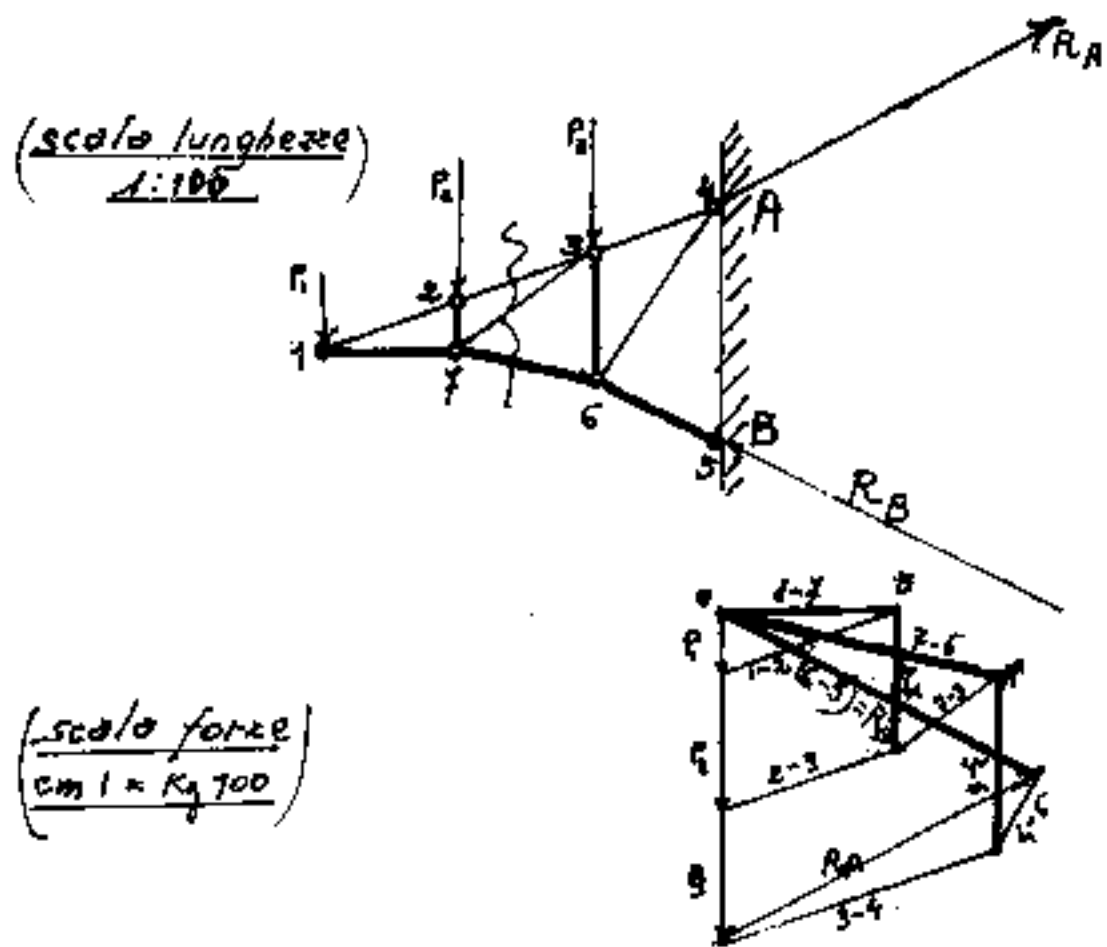
Tracciato il poligono delle forze OQ , chiuso dalle reazioni $R_B = \overline{QI}$ ed $R_A = \overline{IO}$; nel nodo 1 troviamo in ordine ciclico R_A , P_1 , asta 1-2, asta 1-10; perciò iniziando da I si percorre R_A fino ad O , quindi si percorre P_1 , poi tracciamo la parallela all'asta 1-2 e chiudiamo la maglia tracciando da I la parallela ad 1-10. Notiamo che percorrendo la parallela ad 1-2 verso E sulla struttura la percorrenza è verso il nodo 1, perciò 1-2 è puntone; mentre da E ad I per chiudere la maglia, sfuggiamo dal nodo 1 perciò l'asta 1-10 è tirante. Passiamo al nodo 2 ove in

ordine ciclico troviamo: asta (1-2) compressa, forza P_2 ,
asta (2-3), asta (3-10). Dovendo spingere verso il no-
do 2 iniziamo a percorrere lo sforzo dell'asta 1-2
sulla maglia a partire da E, poi troviamo l'in-
tensità (in scolo) della forza P_2 e da qui tracciam-
mo la parallela alla (2-3), e chiudiamo la maglia in
E con una parallela alla (2-10); la (2-3) va verso il
nodo 2 (puntone), la (2-10) sfugge da 2 (tirante). (I puntone
si disegnano con segno ingrossato). Non possiamo an-
dare nel nodo 3 perché vi sono tre aste incognite:
in ordine ciclico la (3-4), la (3-9), la (3-10); Nel nodo 10 vi
sono solo due aste incognite, in ordine ciclico abbia-
mo: (10-1), (10-2), (10-3), (10-9). La (10-1) che noi abbiamo
calcolato come (1-10), ha una intensità che per tirare
il nodo 10 inizia da I e va fino ad E, ove troviamo
la (2-10) che comprime il nodo 10, quindi tracciamo il
tirante parallelo alla (10-3) che richiude la maglia
col tirante F_1 . Ora possiamo andare nel nodo 3, ove,
per lasciare per ultime le aste incognite, ciclica-
mente dobbiamo iniziare dalla (3-10), che, essendo
un tirante, inizia in F, poi troviamo già predispo-
sta la (2-3), poi la forza P_3 da qui la parallela
alla (3-4) puntone e chiude in F la parallela alla (3-9)
pure puntone. Si continua così fino a chiudere il cerchio.

È interessante confrontare il Cremoniano della struttura soggetta ai carichi ed alla spinta del vento, con la struttura soggetta ai soli carichi verticali (esclusa anche la componente verticale della spinta del vento). Fatto il poligono delle forze, si procede esattamente come descritto



Si nota come l'azione del vento diminuisce lo sforzo normale di alcune aste e lo aumenta in altre (per esempio diminuisce sulla (1-2) ed aumenta sulla (6-7).) ciò provoca una contrazione del diagramma Cremoniano. Se il vento tirasse dall'altra parte si avrebbe il diagramma simmetrico cioè gli sforzi della (1-2) e della (6-7) si scambierebbero come tutte le altre aste simmetriche.



Consideriamo la tettoia ad una folda (pensilina) in figura e tracciamo il cremoniano, ove si nota come le aste seguono le tensioni delle linee isostatiche.

che che si avrebbero se la struttura fosse piena. Consideriamo un altro metodo di calcolo:

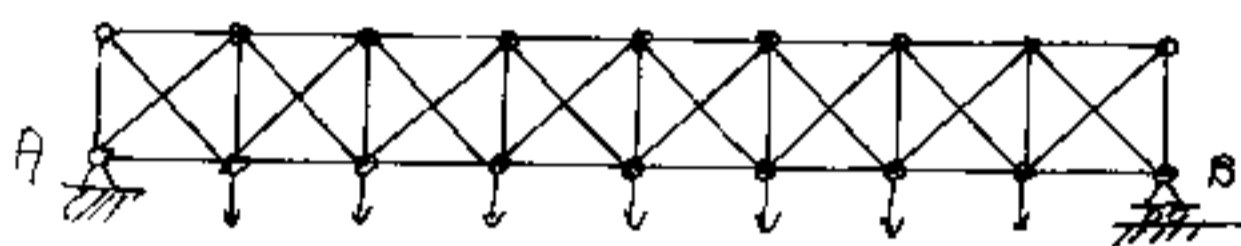
Metodo di Ritter (o sezioni di Ritter)

Le sezioni di Ritter dividono la struttura in due parti tagliando tre aste non concorrenti nello stesso nodo.

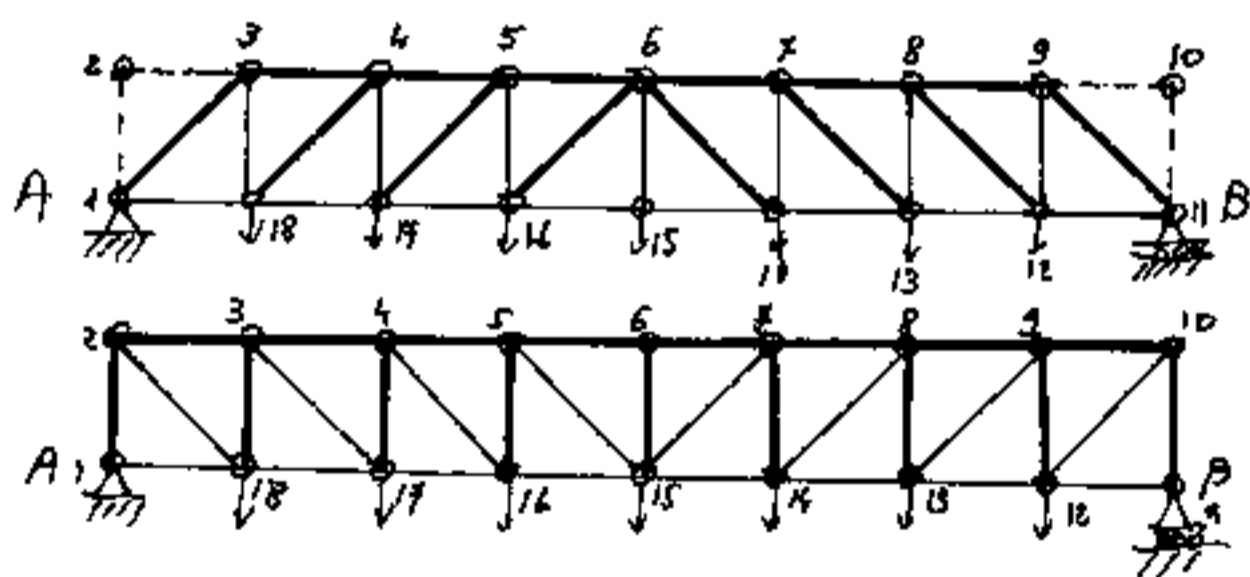
Il nodo comune a due aste tagliate è detto polo della terza asta.

Se vogliamo conoscere lo sforzo in una asta calcoliamo (per forze a sinistra, o per forze a destra) il momento nel polo dell'asta e lo dividiamo per la distanza del polo dall'asta. Per esempio l'asta (7-6) ha per polo il nodo 3 distante cm 90 (circa), il momento nel nodo 3 $M_3 = -50 \times 2 - 100 \times 1 = -300 \text{ Kg m}$; $N_{7-6} = \frac{300}{0,9} = 222 \text{ Kg}$.
(valori misurati graficamente)

Una struttura molto interessante è la trave a correnti orizzontali, spesso costituita da elementi quadrati con diagonali, che si possono fra loro combinate in modo da poter essere utilizzata per ponti di emergenza.



La trave si presenta come in figura e sarebbe tante volte iperstatica quante sono le aste eccedenti; tuttavia, condizioni di simmetria, consentono di considerare la struttura in due isostatiche alle quali assegnamo metà carichi per poi ricomporre la struttura una volta calcolate le aste.

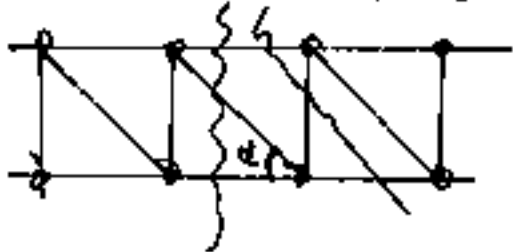


Si noti che la seconda trave (trave di Mohnie) è più razionale perché le aste compresse (i ritti) sono più corte delle aste tese (le diagonali), per le verifiche a carico di punta sono meno snelle. Viceversa la prima trave (trave di Howe) (diagonali tozze)

Nelle travi a correnti paralleli le aste di parete hanno il polo all'infinito, per esse non è applicabile il metodo di Ritter, che calcola i momenti nel polo. Però possiamo considerare due casi:

I) La sezione divide la diagonale inclinata di α sui correnti orizzontali

II) La sezione divide il tetto.



Poiché attraverso la sezione deve trasmettersi lo sforzo di Taglio, cioè la componente verticale della risultante delle forze a destra, deve equilibrarsi con la componente verticale della risultante delle forze a sinistra e non possono trasmettersi coi correnti orizzontali, ma solo con le aste di parete. Perciò lo sforzo sulla diagonale sarà: $S_d = T / \sin \alpha$ mentre lo sforzo sul tetto, (asta verticale): $S_v = T$.

Il segno del taglio ci dice se tali aste sono tese o compresse.

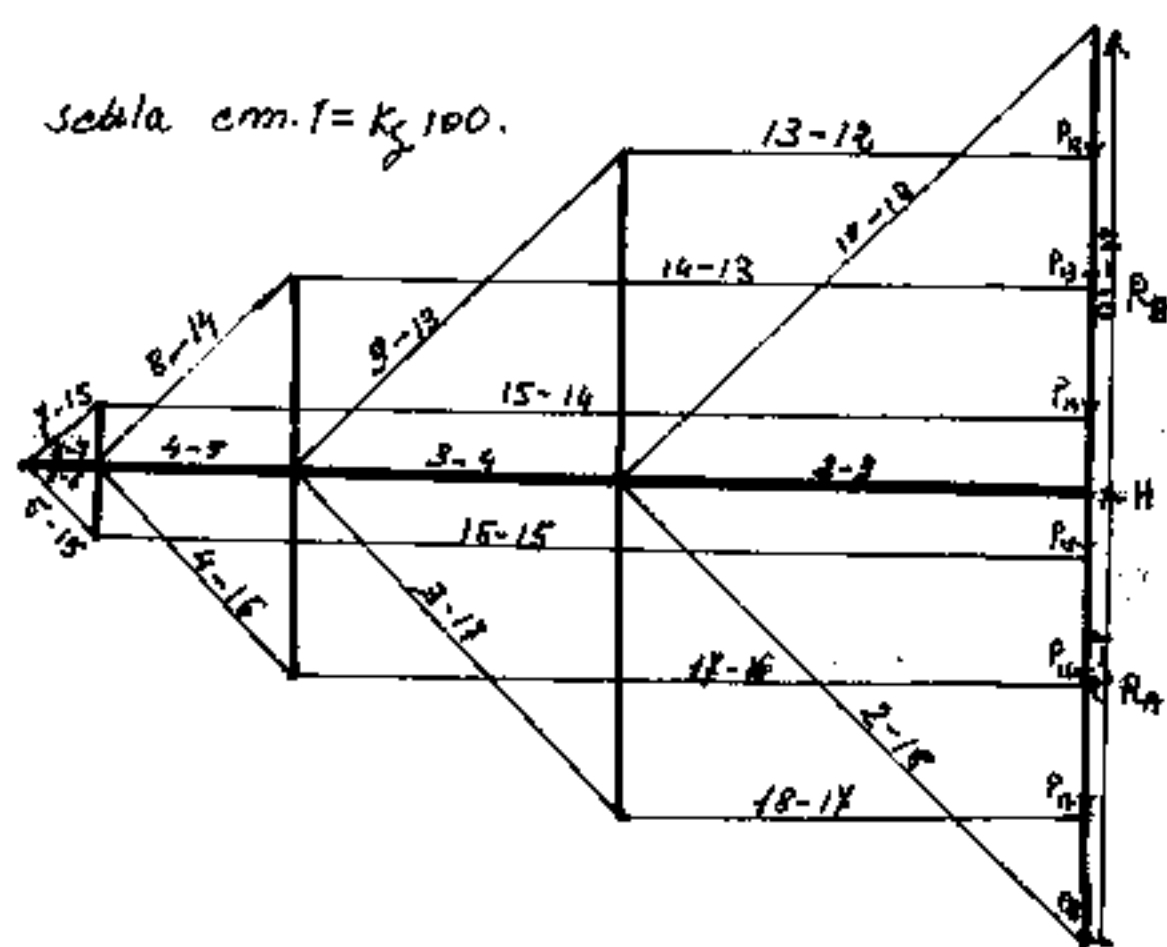
Un altro metodo è

L'equilibrio dei nodi

ove nodo per nodo la somma delle azioni dovute ai carichi ed agli sforzi delle aste deve

essere nulla. Se nella struttura iniziale in ogni modo vi sono aste di sforzo incognito in numero maggiore di due, non possiamo partire col cremoniano, per cui occorre trovare metodi diversi (Ritter, equilibrio dei nodi, Culman, situazioni particolari ecc.)

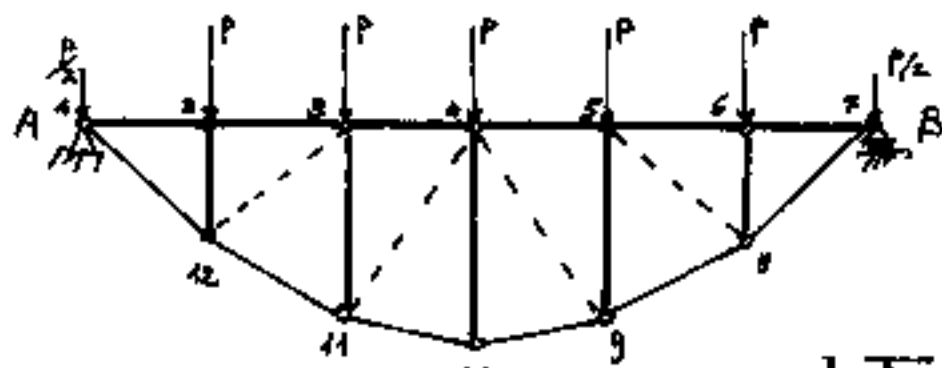
Facciamo il cremoniano della trave di Mohrié con carichi verticali sul corrente inferiore. (già disegnata) Si noti che le aste (1-2) ed (11-10) sono



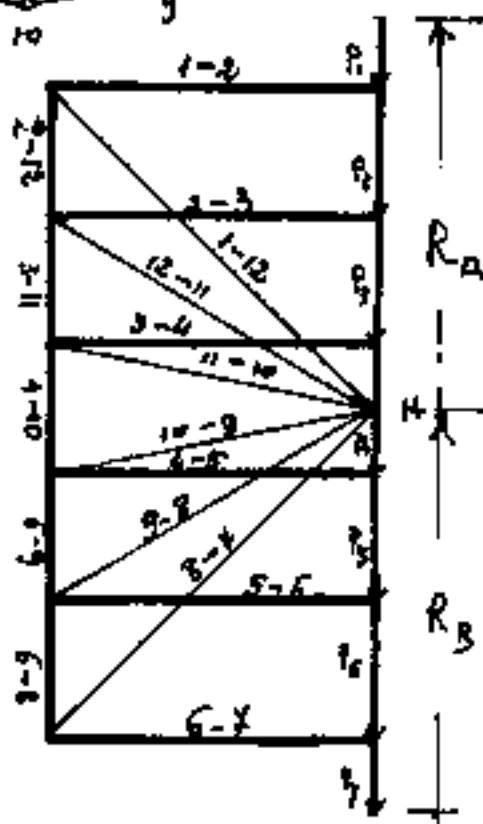
comprese da R_A ed R_B ; che le aste (1-18); ed (11-12) non hanno sforzo, salvo solo ad evitare la labilità delle aste (1-2) ed (11-10).
 Notare che l'asta

(6-15) ha sforzo nullo (Taglio = zero), mentre le aste (5-6) e (6-7) hanno il massimo assoluto di tensione (compressione). Nel diagramma, mentre gli sforzi di trazione, asta per asta hanno il loro segmento rappresentativo della intensità; gli sforzi di compressione delle aste del corrente superiore sono tutti esposti sulla stessa retta a partire da H.

Travi funicolari dette anche travi paraboliche, sono quelle travi le cui aste inferiori (o superiori) hanno la stessa pendenza dei lati del corrispondente poligono funicolare, ove la retta di chiusura corrisponde al corrente orizzontale e le rette di azione dei carichi ai vertici (aste verticali). Le aste di parete non hanno sforzi.

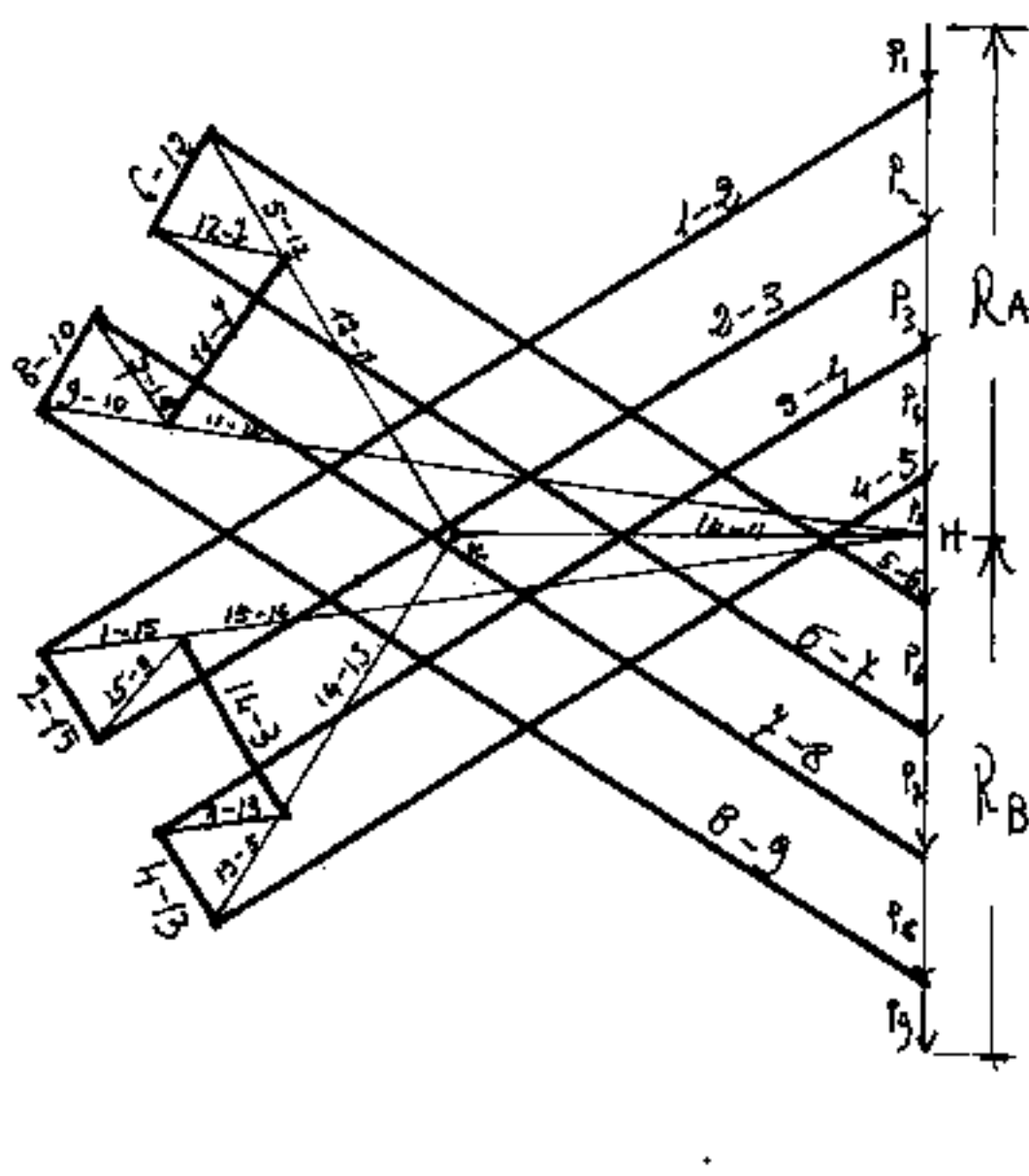
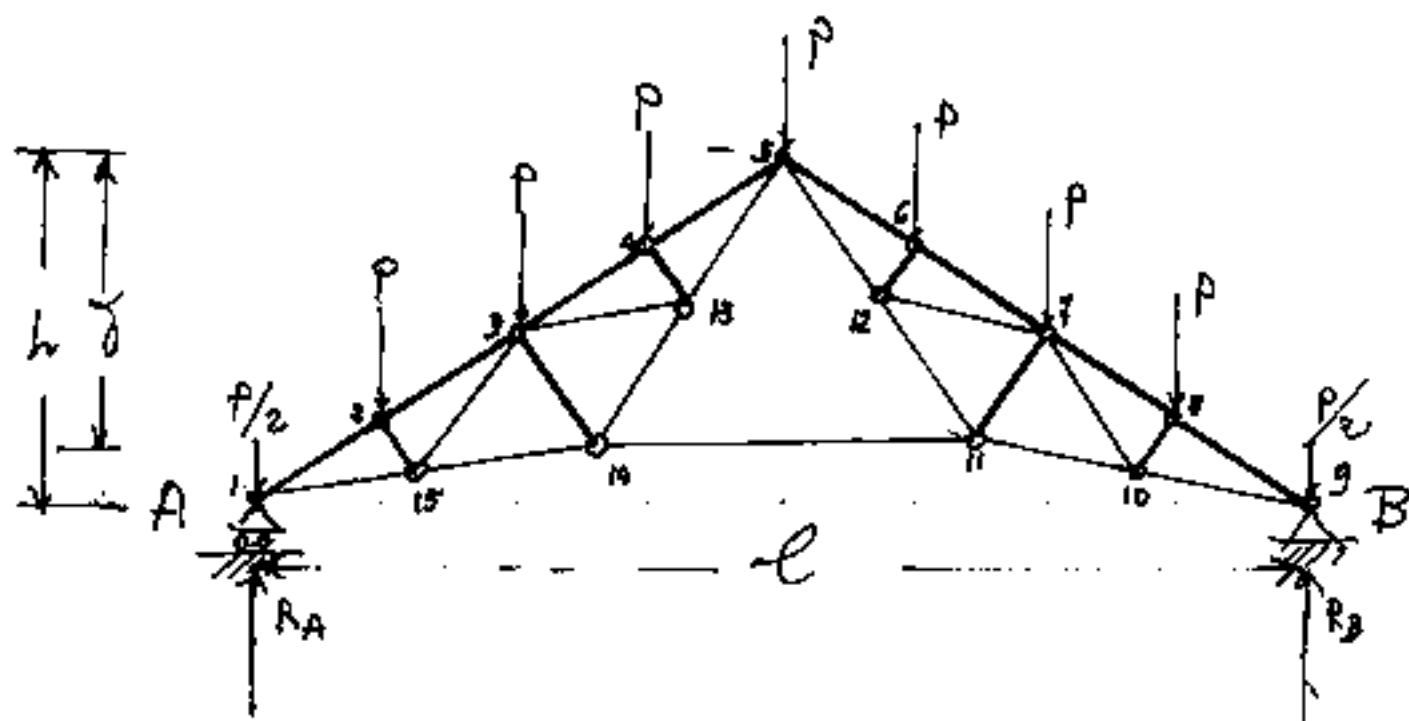


Le aste (3-12), (4-11), (5, 9), (5-8) risultano non avere sforzi, mentre le aste verticali hanno sforzi pari ai carichi che sostengono.



Analogo trave può essere disegnata per poligoni di compressione (polo a sinistra del poligono delle forze)

Trave Polonceau (o capriata Polonceau)



valori approssimati

aste	N (kg)
(1-2)(8-9)	-820
(2-3)(7-8)	-765
(3-4)(6-7)	-718
(4-5)(5-6)	-655
(1-15)(4-10)	+700
(2-15)(8-10)	-83
(3-13)(7-10)	+100
(3-14)(7-11)	-155
(3-13)(7-12)	+105
(15-16)(10-11)	+585
(14-13)(11-12)	+250
(4-13)(5-12)	-83
(13-5)(12-5)	+350
(14-11)	+365

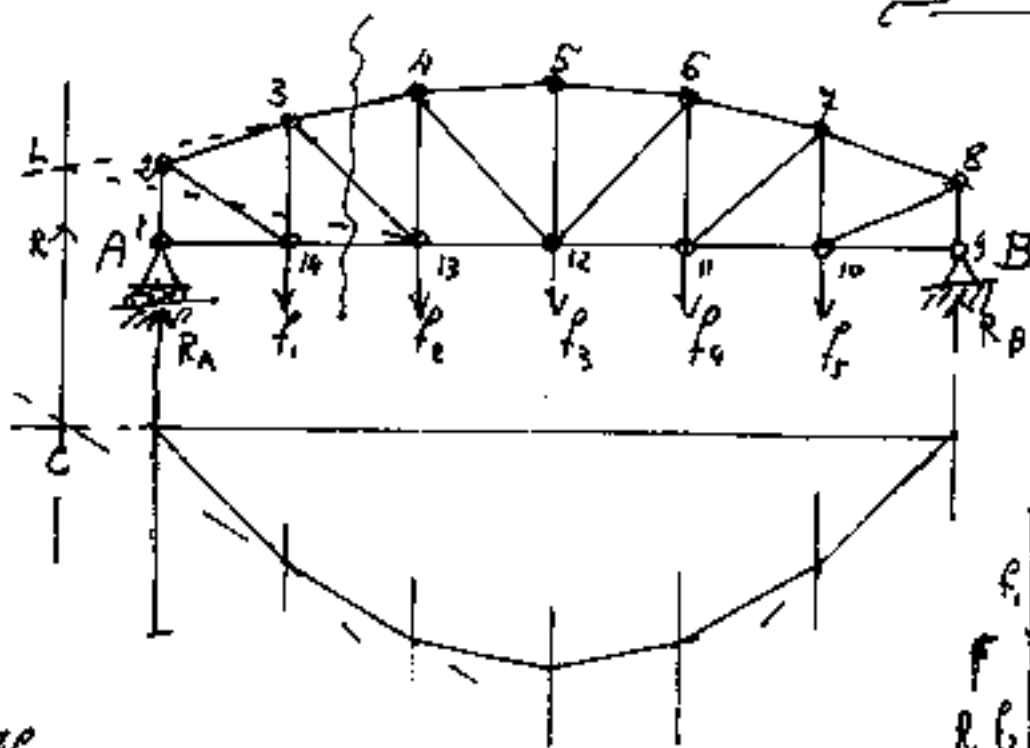
Il cremoniano per la capriata Polonceau presenta difficoltà dopo il nodo 2 infatti i nodi 3 e 14 presentano tre aste incognite, però con una sezione di Ritter possiamo calcolare lo sforzo nell'asta (14-11) infatti: $M_5 = 0$

$$N_{(14-11)} = \left[\left(+R_A - \frac{P}{2} \right) \frac{4l}{8} - P \frac{3l}{8} - P \frac{2l}{8} - \frac{Pl}{8} \right] \frac{1}{\delta}$$

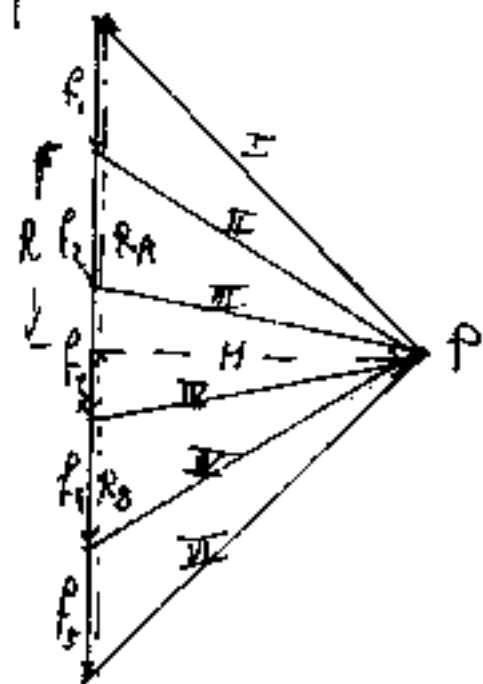
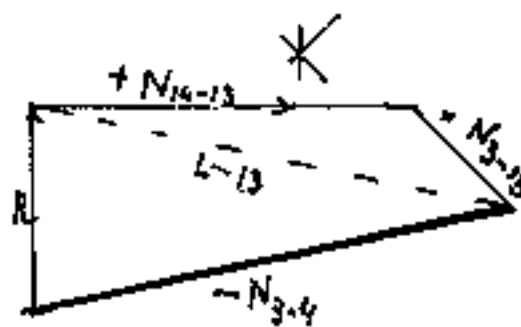
che riportata in (H-K) permette di completare il Cremoniano.

Metodo di Culmann

Scale 1:100



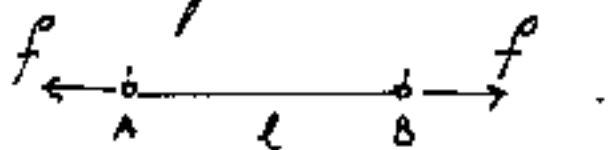
Scale forze
cm. 1 = Kg 100



Data la trave in figura e tracciato il relativo poligono funicolare, il metodo di Culmann consiste nella divisione di una forza in tre direzioni, ove le direzioni sono date da tre aste, non concorrenti, che, sezionate, dividono in due la trave. Mentre ricordando che la retta di chiusura del poligono funicolare è la parallela alla retta H che, nel poligono delle forze separa R_B da R_A , quindi il punto C comune alla retta di chiusura ed al lato del poligono funicolare interessato dalla sezione è il punto ove passa la risultante R delle forze a sinistra. Prolungando l'asta 3-4 possiamo trovare le direzioni per scomporre R .

Teoremi sul lavoro elastico

Consideriamo un corpo elastico ed un sistema equilibrato di forze che agisca su di esso. Per fare un esempio semplice, consideriamo un'asta soggetta nelle sezioni terminali da due forze assiali uguali e contrarie.



L'esempio è semplice perché trascuriamo le contrazioni trasversali e consideriamo la F uniformemente ripartita in tutte le sezioni $\sigma = \frac{F}{A} = \frac{N}{A}$. E non consideriamo le possibili dispersioni di energia per effetto termico all'atto di applicazione o di rimozione della forza.

Detti: L_e = Lavoro esterno compiuto dalla forza,
 L_i = Lavoro = energia elastica, interna accumulata nel solido elastico.

avremo:

$$\boxed{L_e = L_i}$$

Il lavoro elastico interno, od energia elastica interna può essere riferito ad elementi di volume infinitesimi nei quali può dividersi il corpo, con ciò si può tener conto delle tensioni e delle deformazioni in tutte le direzioni, cioè dalle contrazioni trasversali.

Abbiamo già dimostrato che il lavoro elastico è la metà del prodotto dello spostamento per il valore finale dell'azione.

Quindi l'espressione completa di \mathcal{L}_i è:

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV$$

per la legge di Hooke: $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$; per le contrazioni trasversali $\varepsilon_x = \frac{1}{m}(\sigma_y + \sigma_z)$; $\varepsilon_y = \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_z)$; $\varepsilon_z = \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_y)$; e che: $G\gamma = \tau$ avviene:

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2} \left[\int_V \left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}{E} \right) dV - \frac{1}{mE} \int_V (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_x + \sigma_z \sigma_x + \sigma_z \sigma_y) dV + \frac{1}{2G} \int_V (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) dV \right]$$

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2E} \int_V (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) dV - \frac{1}{mE} \int_V (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) dV + \frac{1}{2G} \int_V (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) dV.$$

Se invece di sostituire le deformazioni sostituiamo le tensioni si ha:

($e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$)

$$\mathcal{L}_i = G \int_V \left[\frac{e^2}{m-2} + \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) \right] dV$$

In funzione delle sollecitazioni:

$$\mathcal{L}_i = \int \frac{N^2 ds}{2EA} + \int \frac{M^2 ds}{2EJ} + \int \chi \frac{T ds}{GA} + \int \rho \frac{M_c ds}{GJ_p}$$

Nelle travi ove si possono trascurare (o non vi sono) le deformazioni dovute ad N ed a T di fronte alle deformazioni dovute ad M ; e conosciamo l'equazione della linea elastica, il lavoro interno elastico può esprimersi:

$$L_i = \frac{1}{2} \int EJ \eta''^2 dx$$

Nelle travi reticolari, estendendo la Σ a tutte le aste:

$$L_i = \sum \frac{Nl}{2EA}$$

Il teorema di Clapeyron

"Il lavoro compiuto dalle forze agenti su una struttura in equilibrio è indipendente dall'ordine con cui sono applicate le forze e vale la metà della somma dei prodotti delle forze per i loro spostamenti finali cioè misurati dopo l'applicazione dell'ultima forza."

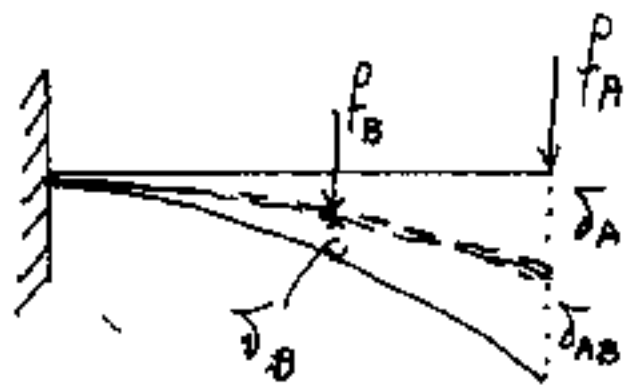
$$L_e = \frac{1}{2} \sum P_j \delta_j + M \varphi$$

Ove P ed M sono agenti esterni applicati.

Teorema di Betti

Detto anche del lavoro mutuo o indiretto.

Il teorema di Clapeyron parla di spostamenti finali, cioè già considera che un sistema di forze A, ottenuto l'equilibrio, si sposti ulteriormente per effetto della successiva applicazione del sistema di forze B.



$$L_A = \frac{1}{2} P_A \delta_A$$

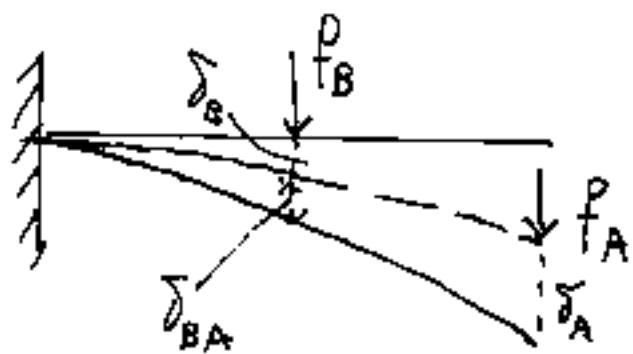
$$L_B = \frac{1}{2} P_B \delta_B$$

$$L_{AB} = \frac{1}{2} P_A \delta_{AB}$$

Consideriamo due sole forze P_A e P_B prima applichiamo P_A poi P_B .

$$L_c = \frac{1}{2} (P_A \delta_A + P_B \delta_B + P_A \delta_{AB})$$

La formula esprime che nel lavoro elastico non vale la sovrapposizione degli effetti perché c'è il lavoro mutuo: $L_{AB} = \frac{1}{2} P_A \delta_{AB}$.



Invertendo l'ordine delle forze si ha:

$$L_B = \frac{1}{2} P_B \delta_B$$

$$L_A = \frac{1}{2} P_A \delta_A$$

$$L_{BA} = \frac{1}{2} P_B \delta_{BA}$$

$$L_c = \frac{1}{2} (P_A \delta_A + P_B \delta_B + P_B \delta_{BA})$$

Ma il teorema di Clapeyron assicura che il lavoro elastico finale è indipendente dall'ordine con cui sono applicate le forze, perciò:

$$\frac{1}{2} (f_A \delta_A + f_B \delta_B + f_A \delta_{AB}) = \frac{1}{2} (f_A \delta_A + f_B \delta_B + f_B \delta_{BA})$$

$$L_e = L_{(A)} + L_{(B)} + L_{(A,B)} = L_{(A)} + L_{(B)} + L_{(B,A)}$$

- cioè. $L_{(A,B)} = L_{(B,A)}$

È questo il teorema di Betti:

"Il lavoro indiretto che compie il sistema di forze A per effetto dell'applicazione del sistema di forze B è uguale al lavoro indiretto che compirebbe il sistema B applicato per primo, per effetto della successiva applicazione del sistema A."

Il teorema di Betti implica già che:

$$f_A \delta_{AB} = f_B \delta_{BA}$$

qualora f_A ed f_B fossero unitarie ed anche semplicemente uguali si avrebbe:

$$\delta_{AB} = \delta_{BA}$$

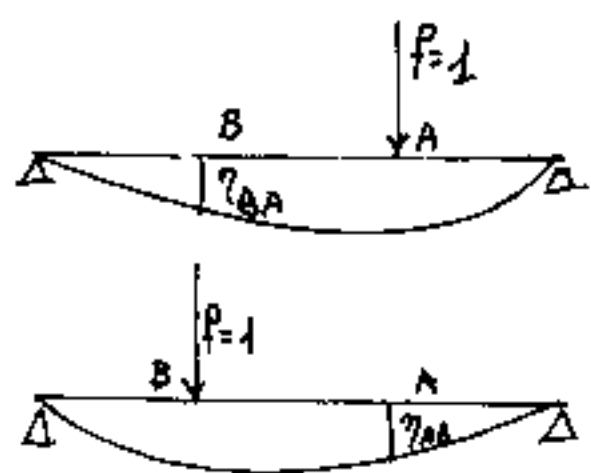
Il teorema di Maxwell.

Per un corpo elastico fissato a vincoli non cedevoli anelasticamente, esprime:

"Lo spostamento di un punto A valutato in direzione α , provocato da una forza unitaria agente in un punto B in direzione β , è uguale allo spostamento di B in direzione β quando in A agisce una forza unitaria in direzione α ."

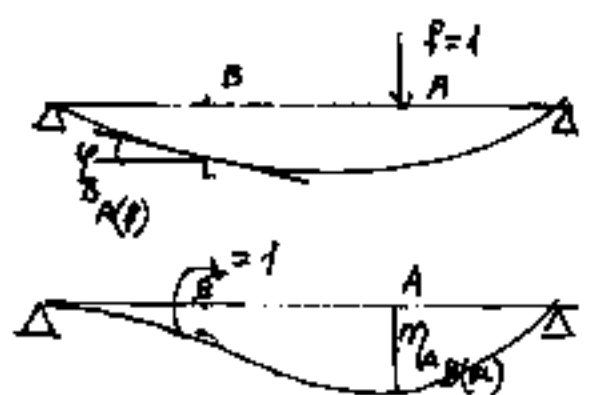
È facile vedere come il teorema di Maxwell sia un caso particolare del teorema di Betti.

Il teorema di Maxwell è fecondo di applicazioni in particolare per le sue estensioni.



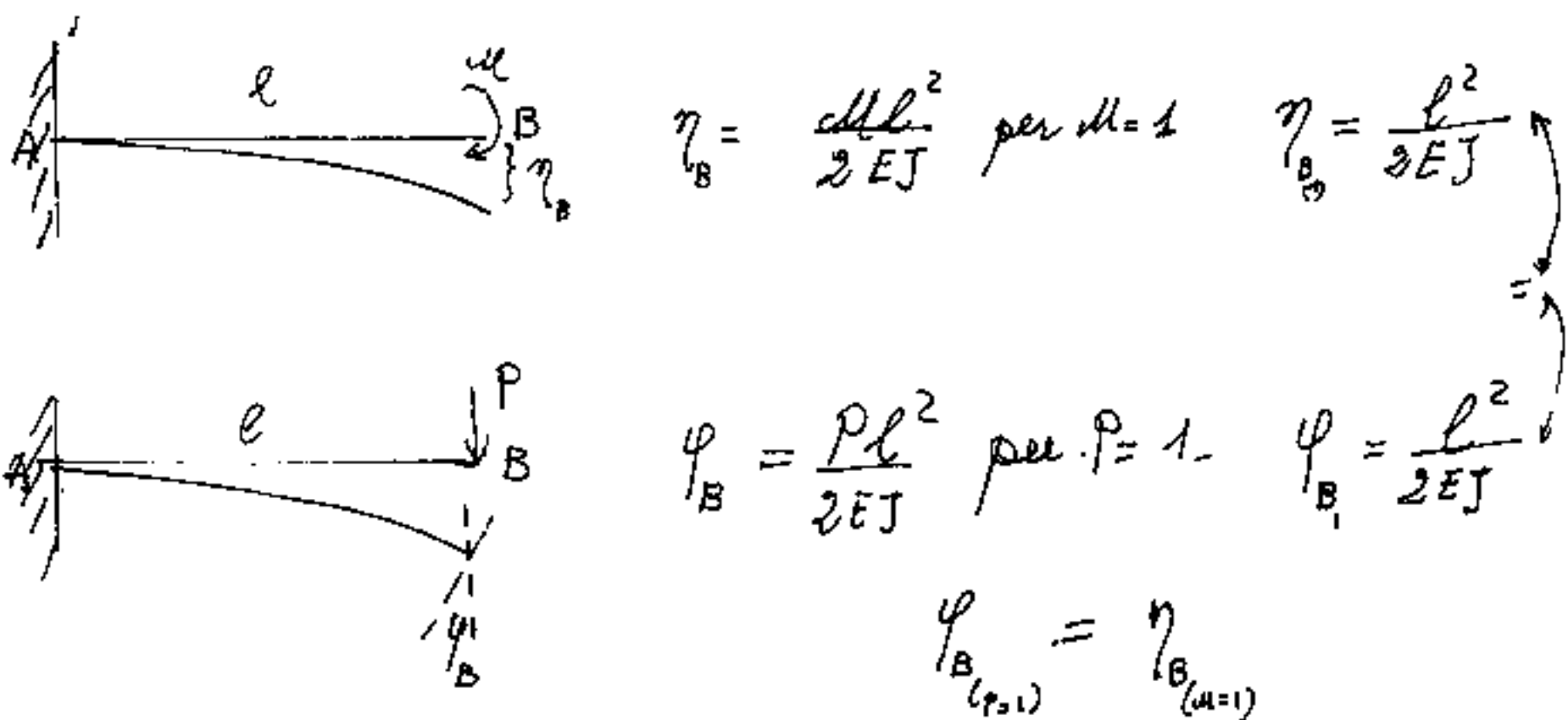
$$\eta_{AB} = \eta_{BA}$$

Estensioni del teorema di Maxwell.



$$\varphi_{BA(M)} = \eta_{AB(M)}$$

La rotazione di una sezione B per effetto di una forza unitaria in A equivale alla freccia in A provocata da un momento unitario in B.



I teoremi delle condizioni di minimo

I fenomeni naturali sono tali che la Natura tende ad ottenere il massimo risultato col minimo sforzo o dispendio. Da ciò derivano una molteplicità di teoremi:

Teorema di Menabrea

Esprime "In una struttura iperstatica a vincoli rigidi i valori che assumono le incognite iperstatiche sono tali da rendere minimo il lavoro elastico"

Un altro teorema molto simile al teorema di Menabrea è il teorema di Castigliano.

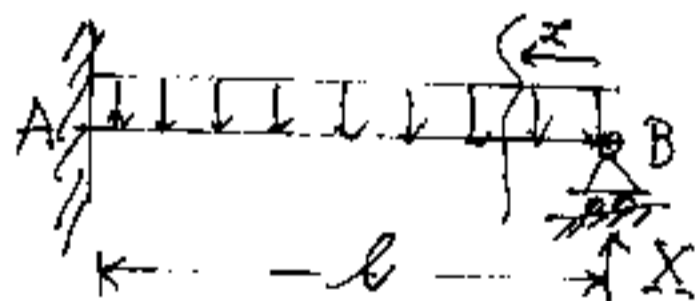
Il Teorema di Castigliano

Che dice: "La derivata parziale del lavoro di deformazione, espresso in funzione delle forze esterne, fatta rispetto ad una di tali forze, è uguale allo spostamento del suo punto di applicazione, valutato nella direzione e verso della forza stessa"

Qualora la forza sia l'incognita iperstatica di un vincolo rigido esterno, il δ è nullo per cui: $\frac{\partial L_i}{\partial X} = \delta = 0$

ma uguagliare a zero la derivata è una condizione di massimo o di minimo per cui applicando il teorema di Menabrea avremo la stessa formula.

Per esempio volendo calcolare la X su una trave a noi nota:



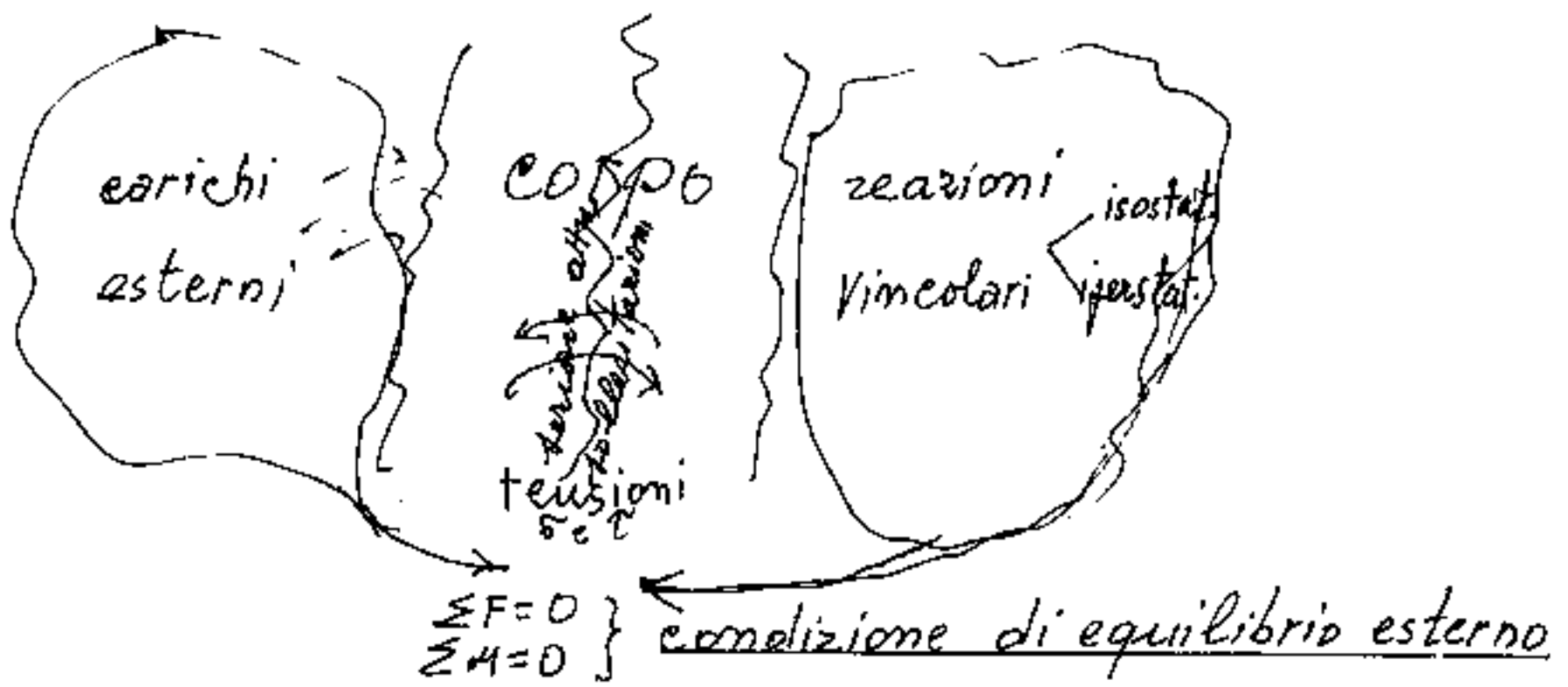
$$L_i = \int \frac{dU}{2EJ} dx; \quad \frac{\partial L_i}{\partial X} = \int \frac{dU}{EJ} \frac{\partial U}{\partial X} dx$$

$$U = \left(X \cdot x - \frac{q x^2}{2} \right); \quad \frac{\partial U}{\partial X} = x$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial X} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \left(X x^2 - \frac{q x^3}{2} \right) dx = \frac{1}{EJ} \left(\frac{X l^3}{3} - \frac{q l^4}{8} \right) = \delta = 0$$

$$X = \frac{3}{8} q l \quad (\text{risultato noto}).$$

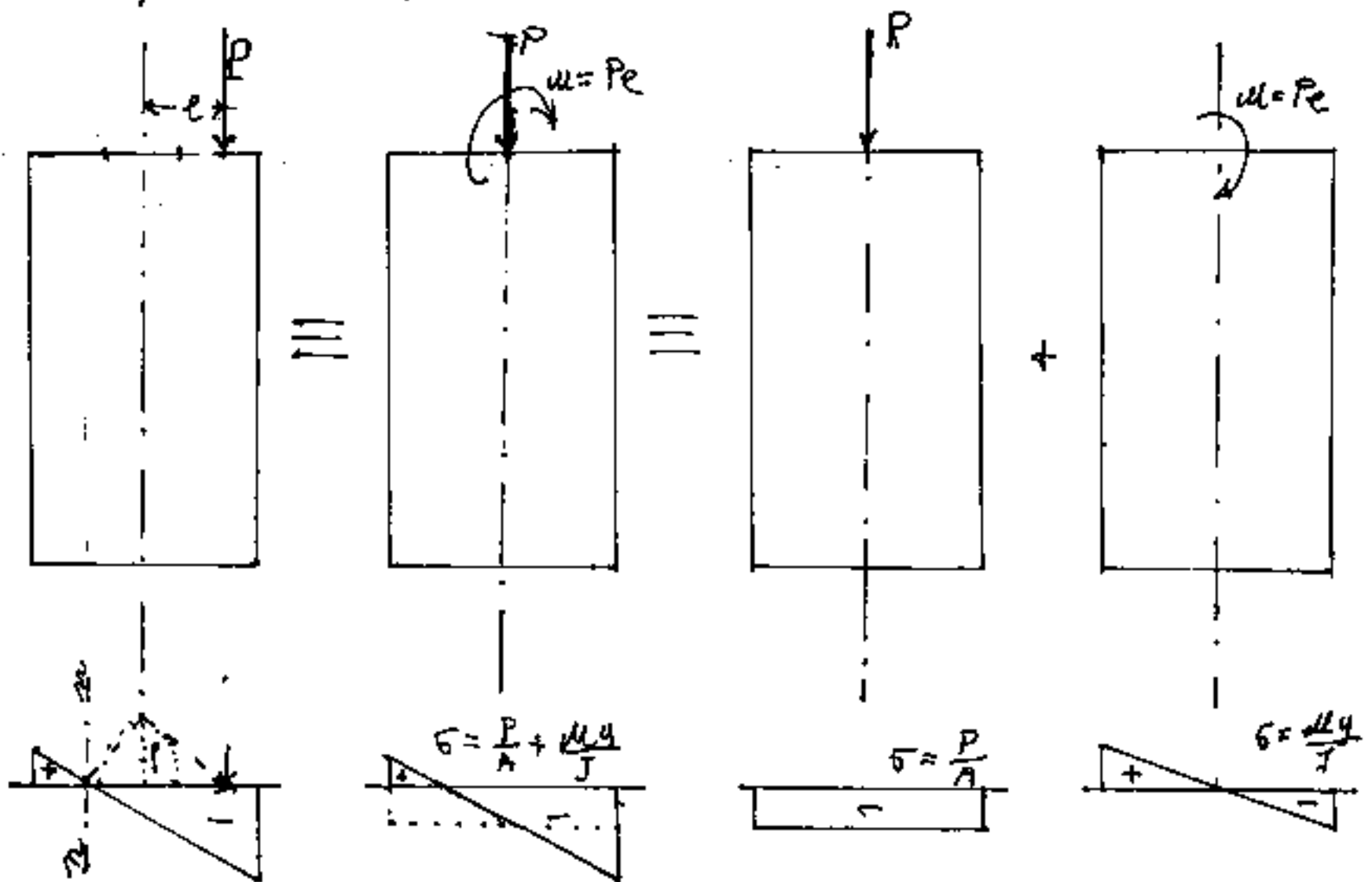
Le sollecitazioni Composte



Le quattro sollecitazioni N, M, T, M_t , provocano due tipi di tensioni σ e τ .

$$\sigma = \frac{N}{A}; \quad \sigma = \frac{My}{J}; \quad \tau = \frac{TS}{J_b}; \quad \tau = \frac{M_t r}{J_p} \text{ o } \frac{M_t}{J_p} r$$

La pressoflessione



si noti l'asse neutro costruito con l'antipolarità rispetto all'ellisse d'inerzia (v. geometria delle masse).

Quando in un pilastro il carico non è ba-
ricentrico, ma presenta una eccentrici-
tà "e" oltre allo sforzo normale si verifica
flessione: (se il carico è P, $M = Pe$).

Poiché entrambe le sollecitazioni producono
tensioni normali σ , queste si sommano al-
gebricamente: $\sigma = \left(\frac{P}{A} \pm \frac{My}{J} \right)$ che possiamo

scrivere: $\sigma = \frac{P}{A} \pm \frac{(Pe)y}{A \rho^2} = \sigma = \frac{P}{A} \left(1 \pm \frac{ey}{\rho^2} \right)$

da cui si ricava per $\sigma = 0$, (asse neutro)

$y_n = \rho^2 / e$ cioè: $\boxed{y_n : \rho = \rho : e}$ che è la

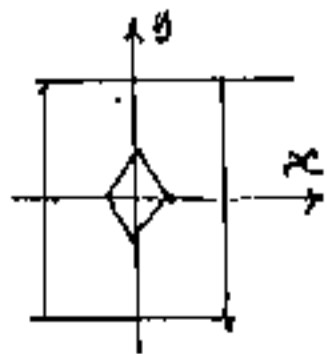
condizione di antipolarità rispetto all'el-
lisse centrale d'inerzia.

Poiché i pilastri in muratura non resistono
a trazione, il caso limite lo abbiamo
quando l'asse neutro n-n è tangente la sezione,

se la sezione è alta h abbiamo: $\rho = \frac{h\sqrt{3}}{6}$; $\rho^2 = \frac{h^2}{12}$

$y = \frac{h}{2}$; $e = \rho^2 / y = \frac{h^2}{12} \cdot \frac{1}{h/2} = \frac{h}{6}$; $\boxed{e = h/6}$ teoriamo

così la zona detta nocciolo, che è entro
il terzo medio nelle sezioni rettangolari.



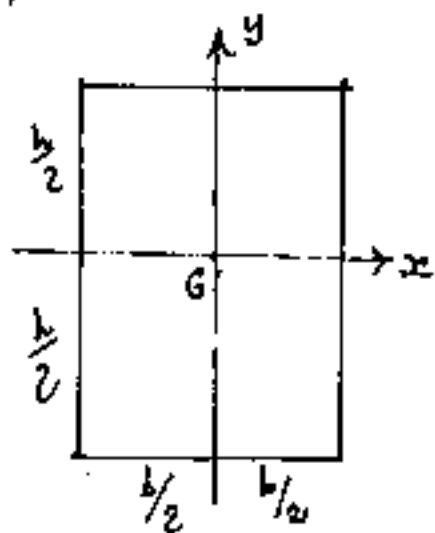
L'eccentricità può essere in x
ed in y, per cui avremo due mo-
menti M_x , ed M_y ed ai fini

delle verifiche a presso flessione interessano le massime tensioni per cui:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Mx_e}{W_x} + \frac{My_e}{W_y}$$

ove W è il modulo di resistenza che è dato dal momento d'inerzia diviso per la distanza della fibra più lontana dall'asse di inflessione baricentrico.

Per il rettangolo:



$$W_x = \frac{J_{xx}}{h/2} = \frac{bh^3}{12} \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6} = \frac{Ah}{6}$$

$$W_y = \frac{J_{yy}}{b/2} = \frac{hb^3}{12} \frac{2}{b} = \frac{hb^2}{6} = \frac{Ab}{6}$$

Quindi per il rettangolo la σ_{max} può scrivere si:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{P y_e}{Ah/6} + \frac{P x_e}{Ab/6}$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{6 y_e}{h} + \frac{6 x_e}{b} \right)$$

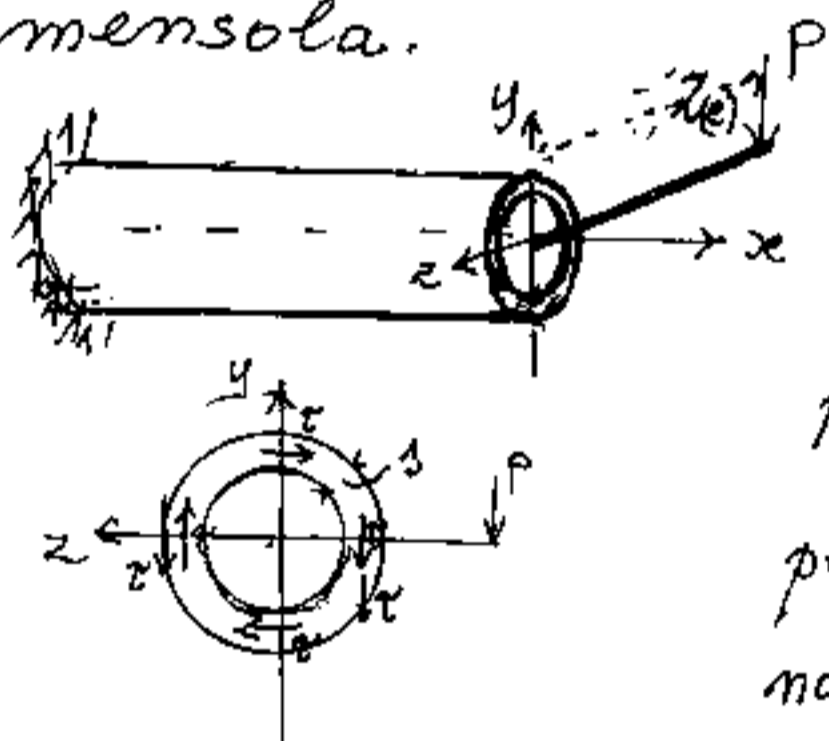
ove: $e = (x_e, y_e)$ sono le coordinate di e .

Se il carico è di trazione si ha la tensione flessione.

Per questa parte è opportuno riguardare la geometria delle masse che abbiamo trattato.

Le sollecitazioni composte di taglio e momento torcente, che entrambe generano le tensioni tangenziali τ , ci portano fuori dai sistemi piani, quindi ci limitiamo ad un cenno.

Consideriamo una mensola con sezione a corona circolare, gravata da un carico eccentrico rispetto all'asse della mensola.



$$M_t = P \cdot z(e)$$

$$M_f = P x$$

$$T = P$$

Possiamo definire la τ_{media} per i tubolari sottili $\tau = \frac{M_t}{2ws}$ notiamo che la τ dovuta ad

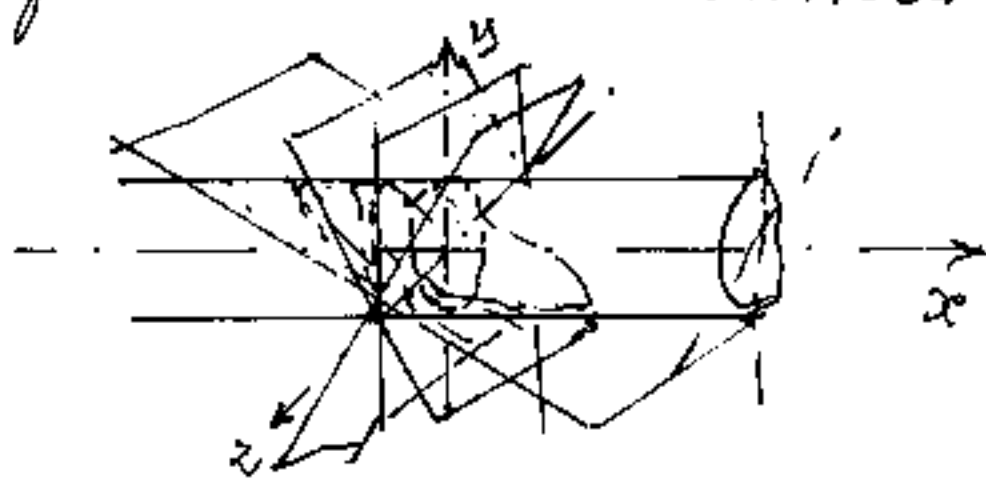
M_t è diretta normalmente al raggio del tubo mentre la τ dovuta a T è in direzione y ovvero quindi, agli estremi del diametro su z , la τ_{max} e la τ_{min} . Inoltre la mensola è anche inflessa, dovremo combinare la tensione τ tangenziale nella sezione con la σ normale alla sezione. Nasce così il problema che viene risolto dal cerchio di Mohr.

Il cerchio di Mohr

Il cerchio detto di Mohr, per i sistemi piani di forze sarebbe stato primo proposto da Rankine, mentre il Mohr ne avrebbe esteso l'applicazione ai sistemi di forze spaziali.

I) Per i sistemi piani di forze

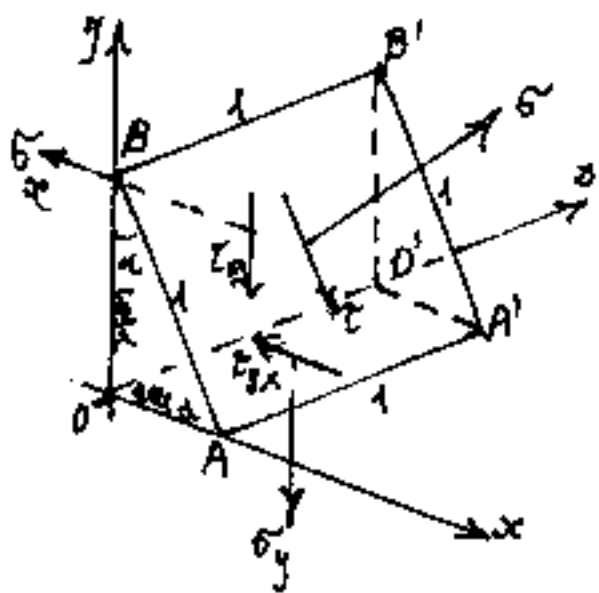
Considerato un solido astiforme, con l'asse coincidente con l'asse x , e gli assi y e z giacenti sui diametri principali d'inerzia della sezione. In una qualsiasi sezione de-



finita dalla coordinata x , consideriamo il fascio di piani passante per l'asse z , varianti con l'angolo α che essi formano col piano di sezione normale alla x . Nei nostri calcoli, delle tensioni abbiamo considerato un cubetto ove le tensioni normali erano $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, mentre le tensioni tangenziali erano $\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}$; che per i sistemi piani di forze si riducono a: $\sigma_x, \sigma_y; \tau_{xy} = \tau_{yx}$; ove σ_x è normale ai piani di giacitura x ; σ_y è normale ai

Piani di giacitura y . Se facciamo ruotare l'asse x fino a sovrapporsi alle y , ad ogni angolo α corrisponde una retta inclinata, che è retta di giacitura dei piani delle nostre sezioni e dei loro paralleli.

Consideriamo il piano generico di giacitura definita dalla retta inclinata di α e spostiamolo parallelamente a se stesso in modo che nel I° quadrante xy , la traccia sul piano xy intercettata fra gli assi x ed y sia un segmento unitario



cio \overline{AB} come pure unitari siano i segmenti AA' e BB' estratti dalle tracce sui piani xz ed yz ; avremo così un prisma

a base triangolare retta e di altezza unitaria sulle cui facce laterali agiscono $\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y, \tau_{yx}, \sigma, \tau$ e precisamente:

su $OBB'O'$ di area $(1)(\cos\alpha) = \cos(\alpha)$, agiscono σ_x e τ_{xy}

su $OAA'O'$ di area $(1)(\sin\alpha) = \sin(\alpha)$, agiscono σ_y e τ_{yx}

su $AA'B'A'$ di area $(1)(1) = 1$, agiscono σ e τ

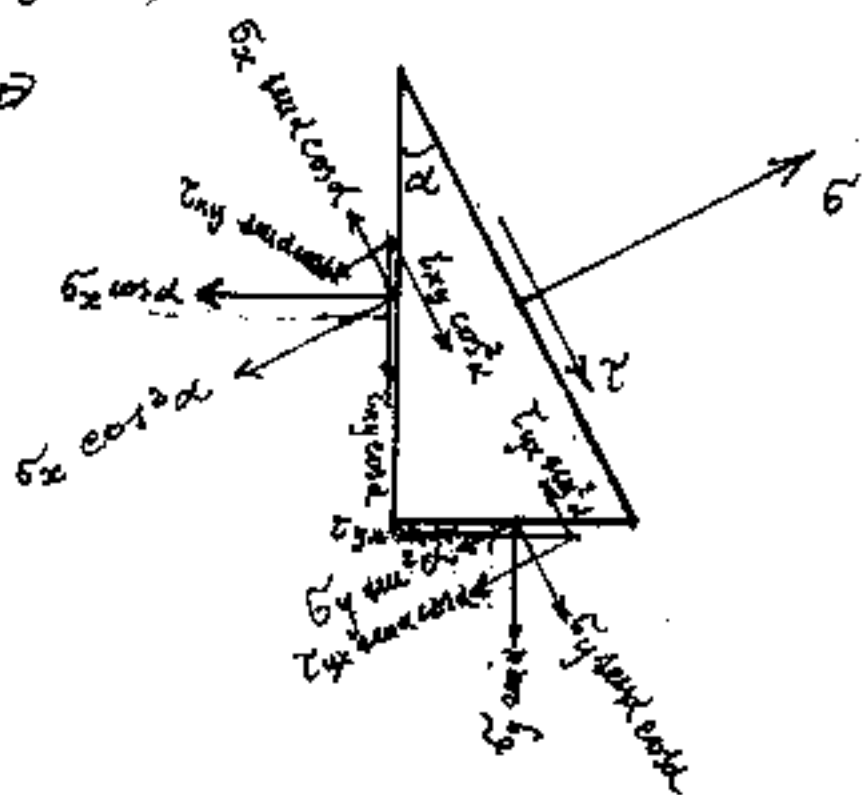
Se moltiplichiamo le tensioni (kg/cm^2) per le aree su cui agiscono (cm^2) otteniamo un sistema di forze che scomponiamo in direzione $\sigma_{(x)}$ e τ , per equilibrarle.

Occorre anche precisare che $\bar{\sigma}_y$ è spesso nulla, (il Colommetti la considera già nulla nell'equilibrio del prisma, vedi Vol II del suo *Scienza delle Costruzioni*)

Il prisma soggetto, (in generale) alle forze da equilibrare sarà: (vedi figura)

La figura è uno schema

non in scala, ove i versi delle forze sono segnati come agenti a trazione le tensioni normali, e le tensioni tangenziali, che.



Convergono nello spigolo retto, portano a formule che avrebbero segni diversi se divergessero.

Per l'equilibrio avremo:

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_x \cos^2 \alpha + \bar{\sigma}_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{yx} \sin \alpha \cos \alpha \\ \bar{\tau} = \bar{\sigma}_x \sin \alpha \cos \alpha - \bar{\sigma}_y \sin \alpha \cos \alpha - \tau_{xy} \cos^2 \alpha + \tau_{yx} \sin^2 \alpha \end{cases}$$

ma: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$; $(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \bar{\sigma}_x \cos^2(\alpha) + \bar{\sigma}_y \sin^2(\alpha) + \tau_{xy} \sin(2\alpha) \\ \bar{\tau} &= \frac{(\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y)}{2} \sin(2\alpha) - \tau_{xy} \cos(2\alpha) \end{aligned}$$

Formule che consentono di calcolare le tensioni $\bar{\sigma}$ e $\bar{\tau}$ agenti su una sezione generica inclinata di α rispetto alla sezione normale all'asse x . Sulla quale è stato calcolato $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Ci domandiamo se fra tutti i possibili α non vi sia un particolare α_0 nel quale la $\tilde{\sigma}$ diventa massima o minima; a tal fine uguagliamo a zero la derivata di $\tilde{\sigma}$ rispetto ad α .

$$\frac{d\tilde{\sigma}}{d\alpha} = -2\tilde{\sigma}_x \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + 2\tilde{\sigma}_y \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + \tilde{\tau}_{xy} 2 \cos(2\alpha) = 0$$

cambiando i segni e dividendolo per due si ha:

$$\boxed{\frac{(\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_y)}{2} \operatorname{sen}(2\alpha_0) - \tilde{\tau}_{xy} \cos(2\alpha_0) = 0}$$

Espressione identica a quella della $\tilde{\tau}$, cioè il valore α_0 di α , che annulla la derivata e cioè tende max o min la $\tilde{\sigma}$, per quel valore di α_0 la $\tilde{\tau}$ si annulla.

Si può dire più semplicemente che nella sezione ove la $\tilde{\sigma}$ è max o min la $\tilde{\tau}$ è zero.

$$\boxed{\operatorname{tang}(2\alpha_0) = \frac{+\tilde{\tau}_{xy}}{(\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_y)/2}}$$

Sappiamo che $\operatorname{tg}(\varphi) = \operatorname{tg}(180^\circ + \varphi)$; cioè $\operatorname{tang}(2\alpha) = \operatorname{tang}[2(90^\circ + \alpha)]$
per cui:

$$\boxed{\left. \begin{array}{l} \alpha_0 \\ 90^\circ + \alpha_0 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{+\tilde{\tau}_{xy}}{(\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_y)/2} \right)}$$

Esistono quindi due piani ortogonali inclinati

rispettivamente di α_0 e $90^\circ + \alpha_0$ ove la σ è massima, nell'altro minima, su entrambi $\tau = 0$.

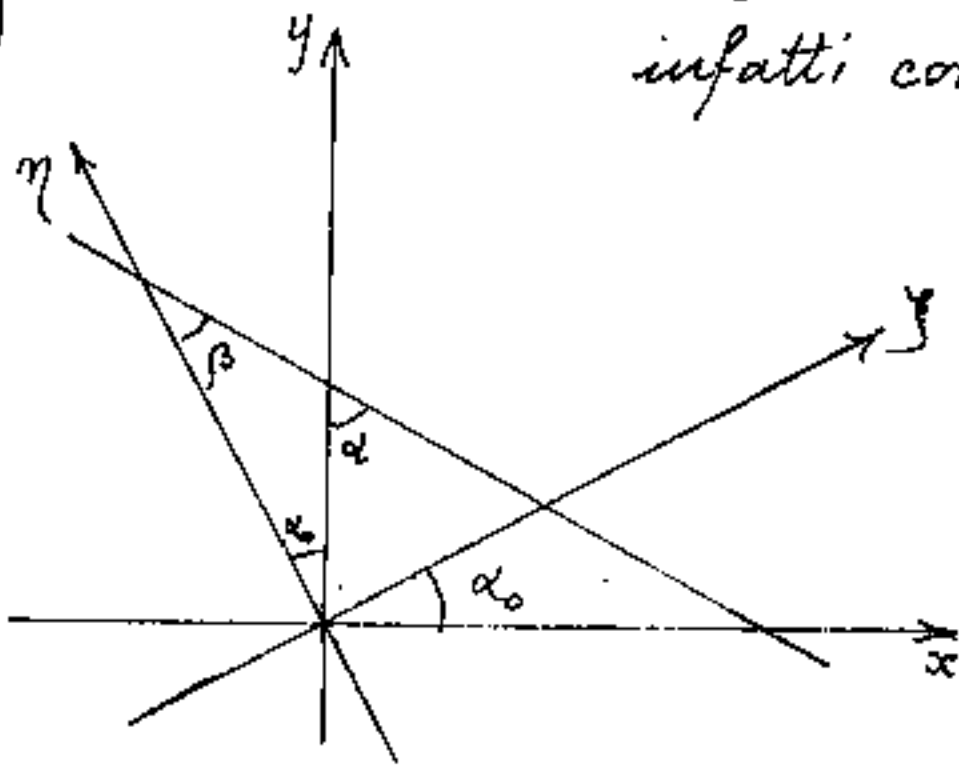
Assumiamo le rette di giacitura di questi piani come nuovi assi di riferimento che indicheremo con ξ ed η , sarà un sistema di assi ruotato di α_0 rispetto agli assi x, y e le direzioni ξ ed η saranno dette:

direzioni principali

e le tensioni σ_ξ e σ_η saranno dette

tensioni principali

Volendo riferire le tensioni su sezioni ad angolo variabile rispetto a questi nuovi assi, indicheremo con β tale angolo (da non confondere con α)
infatti come si vede $\beta = (\alpha - \alpha_0)$



Le formule della σ e della τ diventano: ($\tau_{\xi\eta} = 0$)

$$\sigma = \sigma_\xi \cos^2 \beta + \sigma_\eta \sin^2 \beta$$
$$\tau = \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{2} \right) \sin 2\beta$$

Ricordiamo che:

$$\cos 2\beta = (\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta) \begin{cases} = (1 - 2\operatorname{sen}^2 \beta) \\ = (2\cos^2 \beta - 1) \end{cases} \quad \text{da cui:}$$

$$\operatorname{sen}^2 \beta = \frac{1 - \cos(2\beta)}{2}; \quad \cos^2 \beta = \frac{1 + \cos(2\beta)}{2}$$

sostituendo nella formula della σ si ha:

$$\sigma = \tilde{\sigma}_x \left(\frac{1 + \cos(2\beta)}{2} \right) + \tilde{\sigma}_y \left(\frac{1 - \cos(2\beta)}{2} \right)$$

sviluppando per evidenziare $\cos(2\beta)$

$$\sigma = \frac{\tilde{\sigma}_x + \tilde{\sigma}_y}{2} + \left(\frac{\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_y}{2} \right) \cos(2\beta)$$

che possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \left[\sigma - \left(\frac{\tilde{\sigma}_x + \tilde{\sigma}_y}{2} \right) \right] = \left(\frac{\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_y}{2} \right) \cos(2\beta) \\ \tau = \left(\frac{\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_y}{2} \right) \operatorname{sen}(2\beta) \end{cases}$$

Elevando a quadrato le due uguaglianze e sommando membro a membro, poiché $(\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta) = 1$ si ha:

$$\boxed{\left[\sigma - \left(\frac{\tilde{\sigma}_x + \tilde{\sigma}_y}{2} \right) \right]^2 + \tau^2 = \left(\frac{\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_y}{2} \right)^2}$$

equazione di un cerchio del tipo:

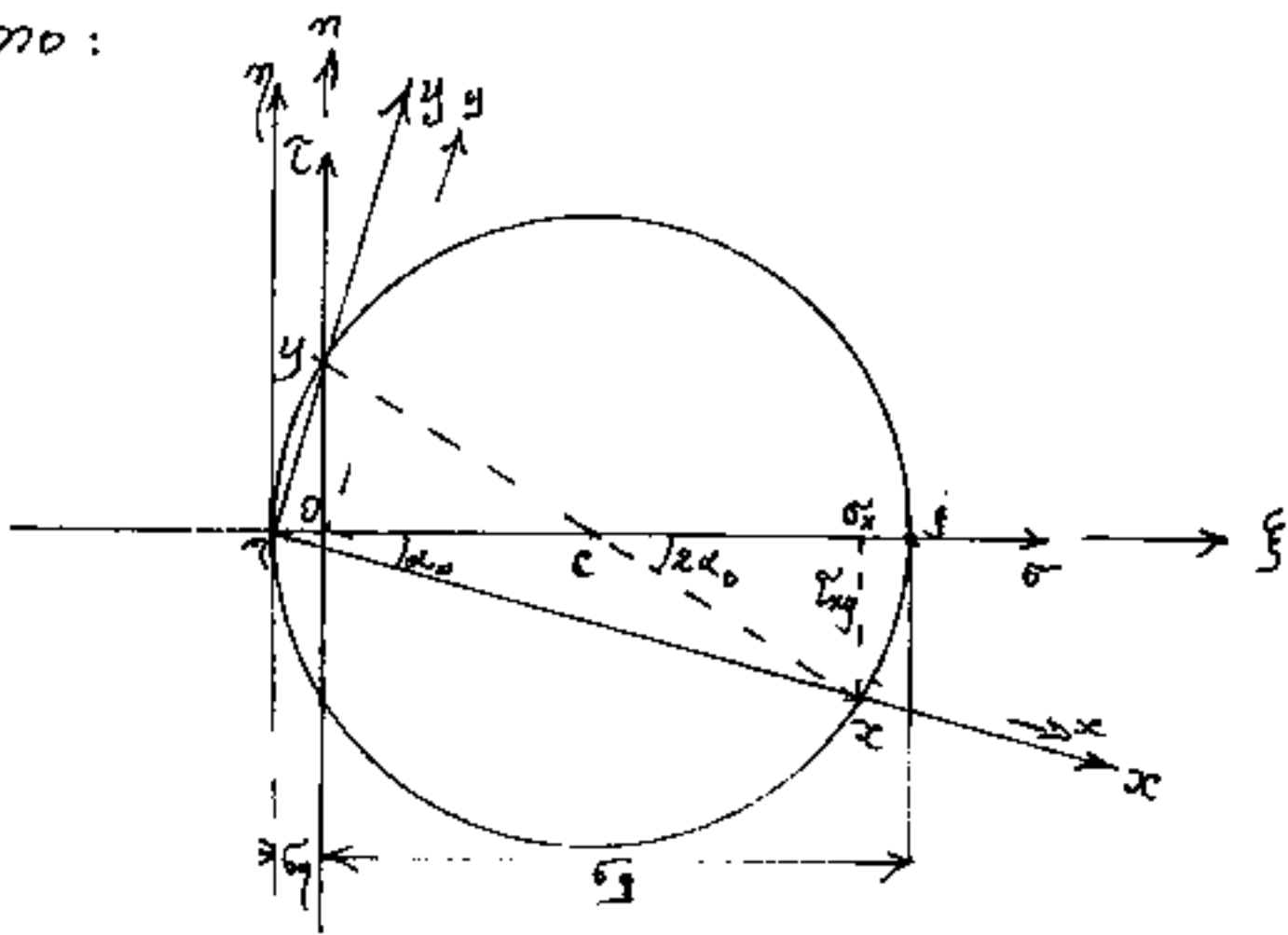
$$(x - a)^2 + y^2 = R^2$$

cioè spostato di a in ascisse $\left[a = \left(\frac{\tilde{\sigma}_x + \tilde{\sigma}_y}{2} \right) \right]$; $\left[R = \left(\frac{\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_y}{2} \right) \right]$

se in ascisse poniamo le σ ed in ordinate le τ .

Poiché ad ogni punto della circonferenza di Mohr corrisponde una giacitura, noi considereremo direzione ξ il punto della σ_ξ e la normale a ξ sarà la direzione " η ".

Come caso pratico supponiamo di conoscere $\sigma_y = 0$; σ_x (che riportiamo in ascisse) ove $\sigma_x/2$ è il centro del cerchio e consideriamo $-\tau_{xy}$, avremo:

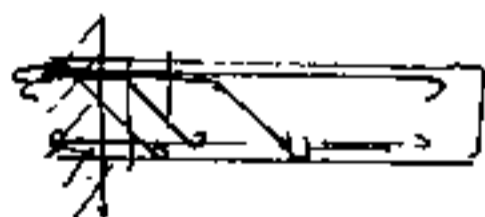


Ove unendo il punto x di coordinate: $(\sigma_x; \tau_{xy})$ col punto y di coordinate: $(-\sigma_y; 0)$ otteniamo α_0 e considerando η come nuovo centro assi traslati (le direzioni non cambiano), ritroviamo le direzioni degli assi principali ξ ed η e le direzioni degli assi del nostro solido.

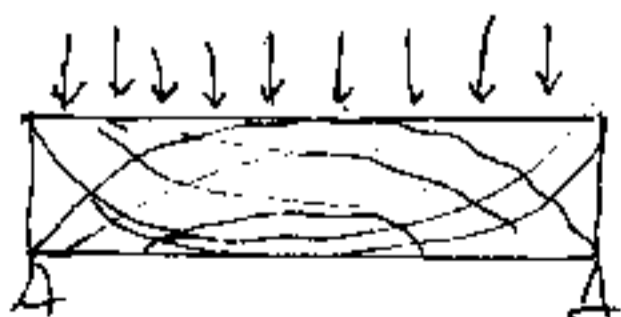
(L'equazione del cerchio è riferita agli assi principali σ e τ .)

Le linee isostatiche

Se, per ciascun punto di ciascuna sezione del nostro solido, tracciamo il cerchio di Mohr, e da esso eleviamo le direzioni principali rispetto alle direzioni dei nostri assi x ed y , possiamo riportare tali direzioni nel punto considerato tracciandovi una crocetta ortogonale. Poiché $\sigma_y = 0$, σ_x e σ_z hanno segni opposti, ricordando i tratti di crocetta dello stesso segno (trazione o compressione) otteniamo delle linee chiamate isostatiche che indicano il fluire delle tensioni all'interno del solido e sono indispensabili per decidere la configurazione dei ferri nel cemento armato.

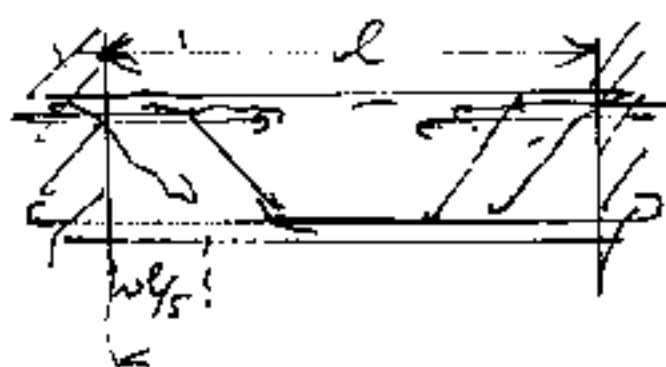


ferri in C.A.



linee di trazione

linee di compressione

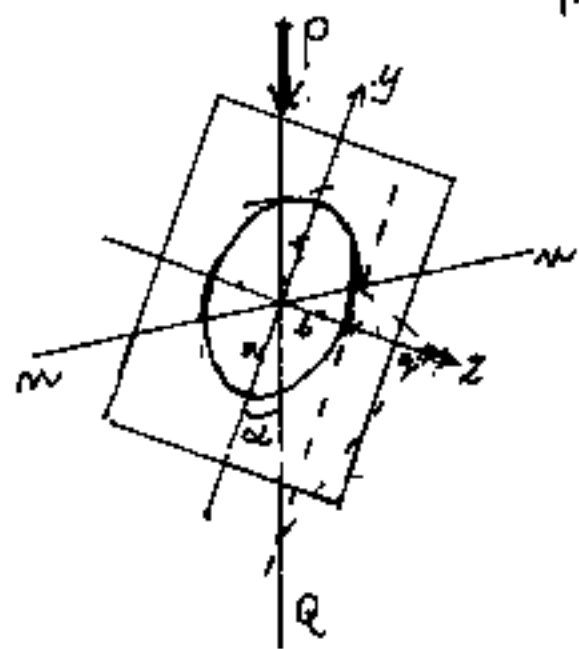
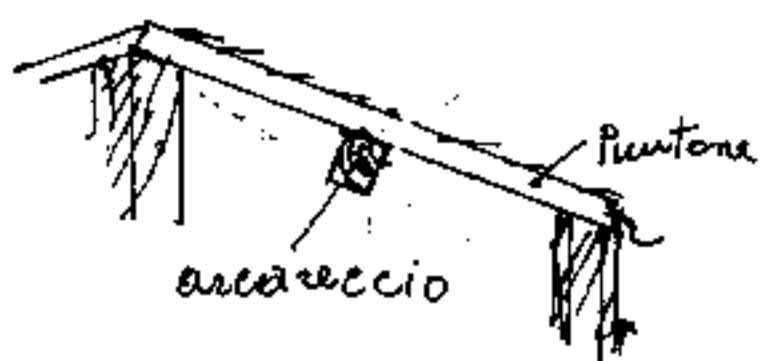


ferri in una trave
incentrata

La flessione deviata

Quando la direzione dei carichi non coincide con uno dei diametri principali dell'ellisse d'inerzia della sezione del solido inflesso, si ha la flessione deviata.

Sono soggetti a flessione deviata gli arcatecci (o terrere), cioè le travi dei tetti che hanno l'asse perpendicolare alle



linee di massima pendenza della falda.

Spesso sostengono puntoni.

Se i carichi agiscono secondo la retta \overline{PQ} , l'asse neutro è il diametro coniugato al diametro giacente su \overline{PQ} . In figura si è accennata

la costruzione del diametro coniugato dell'ellisse per tracciare l'asse neutro $n-n$. (v. II vol)

Se α è l'angolo della retta PQ dei carichi con l'asse y ed M è il momento dei carichi

$$M_y = M \cos \alpha ; \quad M_z = M \sin \alpha ; \quad \text{La } \sigma_{\max}$$

sarà

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = M \left(\frac{\cos \alpha}{W_y} + \frac{\sin \alpha}{W_z} \right)$$

ove W_y e W_z sono i moduli di resistenza.
 È notevole che se l'inflessione avviene solo secondo z o solo secondo y l'asse della trave e la sua linea elastica vi ma ng ono nello stesso piano. Invece nella flessione deviata la deformazione è spaziale. (Basta provare con una stecca flessibile).

Se un arcareccio ha un momento massimo dovuto ai carichi di $1480 \text{ Kgcm} = 148000 \text{ Kgcm}$ ed è su una falda inclinata di 30° per cui $\cos \alpha = 0,866$; $\sin \alpha = 0,5$; se la sezione dell'arcareccio in legno è 20×30 avremo

$$W_y = \frac{20 \cdot 30^2}{6} ; \quad W_z = \frac{30 \cdot 20^2}{6}$$

$$\sigma_{\max} = 148000 \left(\frac{0,866}{\frac{20 \cdot 30^2}{6}} + \frac{0,5}{\frac{30 \cdot 20^2}{6}} \right) =$$

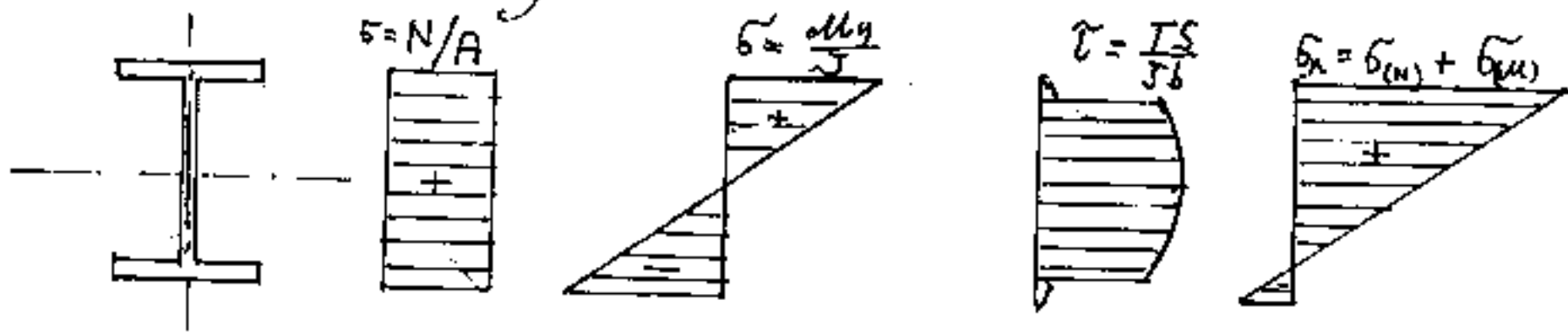
$$\sigma_{\max} = 1480 \left(\frac{0,866}{30} + \frac{0,5}{30} \right) = 1480 (0,05386)$$

$$\sigma_{\max} = 79,7 \text{ Kg/cm}^2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{ammisibile} \\ \text{per il legno} \end{array} \right)$$

Le verifiche di resistenza

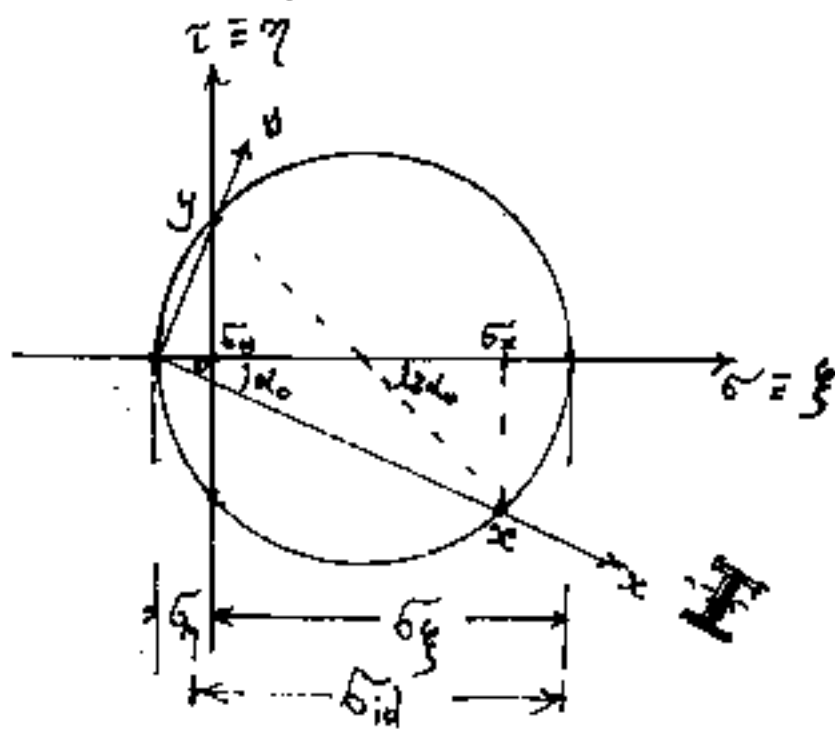
I) Per i sistemi piani di forze

Consideriamo una sezione ove si verificano i seguenti diagrammi di tensione:



(In questo caso prevale la tensione flessione: $(\sigma_N + \sigma_M)$)

Per aggiungere le τ ci avvaliamo del cerchio di Mohr e riteniamo più cimentati i punti sotto l'ala superiore.

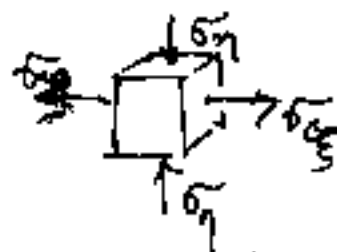


$\sigma_y = 0$. Il raggio R del cerchio di Mohr: $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$

Le tensioni principali, σ_ξ e σ_η (di segno opposto) sono date da:

$$\sigma_\xi = \frac{\sigma_x}{2} + R \quad ; \quad \sigma_\eta = \frac{\sigma_x}{2} - R$$

Sul cubetto all'intorno del punto più cimentato si verifica l'azione di



σ_ξ e σ_η , secondo le direzioni principali e possiamo aggiungere la loro azione secondo la tensione ideale: $\sigma_{id} = \left(\sigma_\xi - \frac{\sigma_\eta}{m}\right)$; ma essendo $\sigma_\eta < 0$ si sommano e dovrà essere $\sigma_{id} < \sigma_{amm}$.

z) Per i sistemi spaziali

Indichiamo con 1, 2, 3 le direzioni principali lasciando x, y, z all'asse ed ai diametri principali dell'ellisse, nelle sezioni del nostro solido. ($\bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_1$); ($\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_2$); ($\bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_3$).

Le verifiche di resistenza consistono nel l'imporre una limitazione che può essere nelle tensioni, ma più propriamente può essere nelle dilatazioni, perciò avremo:

$$(1) \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} \left(\bar{\sigma}_1 - \frac{\bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3}{m} \right) \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} \left(\bar{\sigma}_2 - \frac{\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_3}{m} \right) \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} \left(\bar{\sigma}_3 - \frac{\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2}{m} \right) \end{cases}$$

chiameremo tensioni ideali:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{1id} = E \varepsilon_1 = \left(\bar{\sigma}_1 - \frac{\bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3}{m} \right) \\ \bar{\sigma}_{2id} = E \varepsilon_2 = \left(\bar{\sigma}_2 - \frac{\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_3}{m} \right) \\ \bar{\sigma}_{3id} = E \varepsilon_3 = \left(\bar{\sigma}_3 - \frac{\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2}{m} \right) \end{cases}$$

Le equazioni (1) possono scriversi:

$$\begin{cases} m\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_3 = mE\varepsilon_1 \\ -\bar{\sigma}_1 + m\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_3 = mE\varepsilon_2 \\ -\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2 + m\bar{\sigma}_3 = mE\varepsilon_3 \end{cases}$$

Il determinante dei coefficienti sarà:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & -1 & -1 \\ -1 & m & -1 \\ -1 & -1 & m \end{vmatrix} \text{ (simmetrico rispetto alla diagonale)}$$

Togliendo alla I e III riga la II riga ed aggiungendo alla II colonna la I e III colonna abbiamo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (m+1) & 0 & 0 \\ -1 & (m-2) & -1 \\ 0 & 0 & (m+1) \end{vmatrix} = (m+1)^2 (m-2)$$

I tre determinanti delle incognite ξ_1 ; ξ_2 ; ξ_3 sono:

$$(Em) \begin{vmatrix} \xi_1 & -1 & -1 \\ \xi_2 & m & -1 \\ \xi_3 & -1 & m \end{vmatrix} = \Delta_1; \quad (Em) \begin{vmatrix} m & \xi_1 & -1 \\ -1 & \xi_2 & -1 \\ -1 & \xi_3 & m \end{vmatrix} = \Delta_2; \quad (Em) \begin{vmatrix} m & -1 & \xi_1 \\ -1 & m & \xi_2 \\ -1 & -1 & \xi_3 \end{vmatrix} = \Delta_3$$

Risolvendo otteniamo:

$$\begin{cases} \Delta_1 = (mE)(m+1) [\xi_1 (m-1) + \xi_2 + \xi_3] \\ \Delta_2 = (mE)(m+1) [\xi_1 + (m-1)\xi_2 + \xi_3] \\ \Delta_3 = (mE)(m+1) [\xi_1 + \xi_2 + (m-1)\xi_3] \end{cases}$$

per cui si ha:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{mE}{(m+1)(m-2)} [(m-1)\xi_1 + \xi_2 + \xi_3] \\ (2) \quad \xi_2 &= \frac{mE}{(m+1)(m-2)} [\xi_1 + (m-1)\xi_2 + \xi_3] \\ \xi_3 &= \frac{mE}{(m+1)(m-2)} [\xi_1 + \xi_2 + (m-1)\xi_3] \end{aligned}$$

Posto: $G = \frac{Em}{2(m+1)}$ e sostituendo:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2G}{(m-2)} [(m-1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3] \\ \text{(2 bis)} \quad \sigma_2 &= \frac{2G}{(m-2)} [\varepsilon_1 + (m-1)\varepsilon_2 + \varepsilon_3] \\ \sigma_3 &= \frac{2G}{(m-2)} [\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (m-1)\varepsilon_3] \end{aligned}$$

Sommando le (2) si ha:

$$(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{Em}{(m+1)(m-2)} (m+1) [\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3]$$

ed essendo:

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = e = \text{dilatazione cubica}$$

$$(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{Em}{(m-2)} e$$

Le (2 bis) possono scriversi:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{2G}{(m-2)} [(m-2)\varepsilon_1 + e] = \sigma_x = 2G \left[\varepsilon_x + \frac{e}{(m-2)} \right] \\ \sigma_2 = \frac{2G}{(m-2)} [(m-2)\varepsilon_2 + e] = \sigma_y = 2G \left[\varepsilon_y + \frac{e}{(m-2)} \right] \\ \sigma_3 = \frac{2G}{(m-2)} [(m-2)\varepsilon_3 + e] = \sigma_z = 2G \left[\varepsilon_z + \frac{e}{(m-2)} \right] \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2G \left[\varepsilon_1 + \frac{e}{m-2} \right] \\ \sigma_2 &= 2G \left[\varepsilon_2 + \frac{e}{m-2} \right] \\ \sigma_3 &= 2G \left[\varepsilon_3 + \frac{e}{m-2} \right] \end{aligned}$$

(Vedasi anche Bellucci - Scienza delle Costruzioni - Vol. III pag. 5)

Se K' e K'' sono rispettivamente i carichi di sicurezza a trazione ed a compressione, la condizione di resistenza sarà in generale

$$\bar{\sigma}_{1id} \leq \frac{K'}{K''} ; \bar{\sigma}_{2id} \leq \frac{K'}{K''} ; \bar{\sigma}_{3id} \leq \frac{K'}{K''}$$

se $K' = K'' = K$

$$\bar{\sigma}_{1id} \leq K ; \bar{\sigma}_{2id} \leq K ; \bar{\sigma}_{3id} \leq K$$

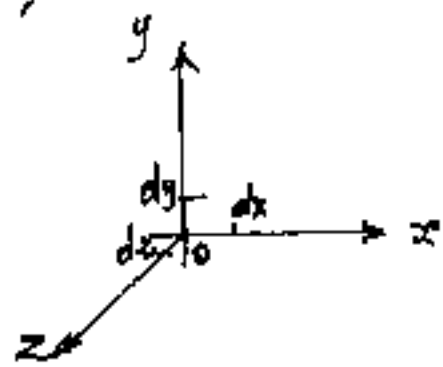
Pero' nelle prove a rottura di vari materiali è stata notata una diversità di comportamento fra i materiali fragili e non fragili. (Per esempio la strizione nei provini di ferro a trazione; o scorcimenti a 45° o addirittura elicoidali per prove a compressione) Cio' fece supporre l'azione degli sforzi tangenziali e poiche' nel piano, dal cerchio di Mohr è rilevabile che la τ_{max} è a 45° (90° al centro) e vale: $\tau_{max} = \frac{(\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_1)}{2} = \frac{(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)}{2}$ fu proposta dal Mohr e dal Guest, per lo spazio tridimensionale, la verifica di sicurezza sul carico di sicurezza per scorcimento K_s ,

$$\text{cioè: } \left| \frac{\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2}{2} \right| \leq K_s ; \left| \frac{\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_3}{2} \right| \leq K_s ; \left| \frac{\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_1}{2} \right| \leq K_s$$

Ma anche questa verifica non è accettata da altri, ordinariamente si adotta una tensione principale ideale da verificare ammissibile ($\leq K$).

Distribuzione delle tensioni intorno ad un punto (cenni di teoria dell'elasticità)

Come sappiamo sull'elemento infinitesimo di materiale (punto materializzato) si verificano tre dilatazioni: $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)$ e tre scorrimenti mutui $(\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ riferiti agli assi di riferimento: x, y, z .



Consideriamo il punto "0" al centro assi, vertice di un cubetto infinitesimo che costituisce il punto materializzato (cioè a meno di infinitesimi di ordine superiore tutti i vertici del cubetto coincidono con 0).

Siano: ξ, η, ζ , le componenti secondo x, y, z dello spostamento di 0, ma anche gli spigoli del cubetto infinitesimo si deformano per cui avremo in x per un estremo:

$$\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$$

in altre parole:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

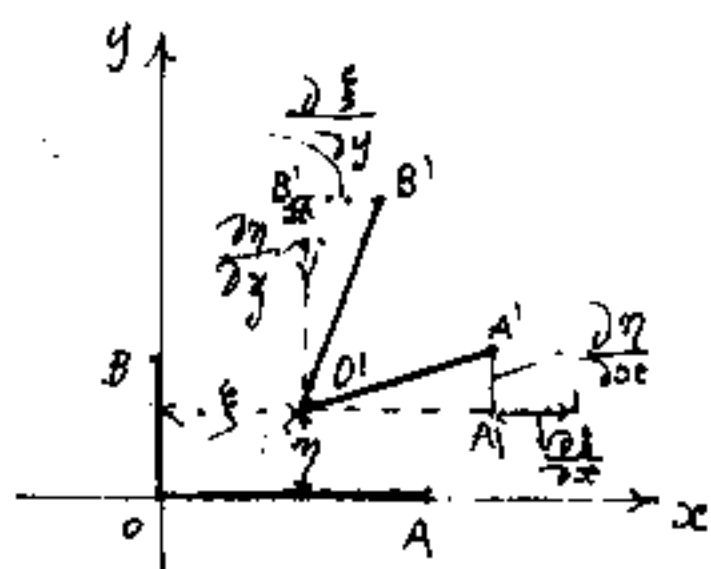
$$\boxed{\epsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}}$$

analogamente:

$$\epsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

Ma le tre componenti dello spostamento variano da punto a punto, perciò avremo che la componente ξ oltre: $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ avrà anche: $\frac{\partial \xi}{\partial y}$; e $\frac{\partial \xi}{\partial z}$ ed analogamente le altre.



Consideriamo due segmenti \overline{OA} , ed \overline{OB} piccolissimi, quando O va in O' (non consideriamo la z) il segmento \overline{OA} è divenuto $\overline{O'A'}$ per la

variazione $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, ma anche η ha subito oltre che la variazione $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ di \overline{OB} in $\overline{O'B'}$ anche la variazione $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ per cui $\overline{O'A'}$ diventa $\overline{O'A'}$

Si noti lo scorrimento relativo in x che avviene per effetto di $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ e lo scorrimento relativo per effetto di $\frac{\partial \eta}{\partial x}$, e si noti come ciò implichi la variazione dell'angolo retto $AOB = A'O'B'$ che diventa: $A'O'B'$, cioè l'angolo retto fra le direzioni x, y

è variato di
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Riepilogando avremo:

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}} ; \quad \boxed{\varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}} ; \quad \boxed{\varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}} ;$$

$$\boxed{\gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}} ; \quad \boxed{\gamma_{xz} = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}} ; \quad \boxed{\gamma_{yz} = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}}$$

Se definiamo la dilatazione cubica come il rapporto fra l'incremento di volume ΔV ed il volume stesso V , cioè $\boxed{e = \frac{\Delta V}{V}}$; se consideriamo che un cubetto di spigoli x, y, z , per aumentare di volume (o diminuire) dovrà variare gli spigoli di $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, avremo che:

$$\Delta V = (x + \Delta x)(y + \Delta y)(z + \Delta z) - (x \cdot y \cdot z)$$

sviluppando e semplificando si ha:

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta x y z + \Delta y x z + \Delta z x y + \Delta x \Delta y z + \Delta x \Delta z y + \Delta y \Delta z x}{x \cdot y \cdot z}$$

$$e = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z} + \frac{\Delta x \Delta y}{x \cdot y} + \frac{\Delta x \Delta z}{x z} + \frac{\Delta y \Delta z}{y z}$$

cioè:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z$$

e trascurando i prodotti fra le dilatazioni, viene assunto:

$$\boxed{e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}$$

Ciò vale solo se trattasi di spostamenti infinitesimi.

Nelle relazioni che generalizzano la legge di Hooke fra deformazioni e tensioni:

$$\begin{cases} E \varepsilon_x = \left(\bar{\sigma}_x - \frac{\bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z}{m} \right) \\ E \varepsilon_y = \left(\bar{\sigma}_y - \frac{\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_z}{m} \right) \\ E \varepsilon_z = \left(\bar{\sigma}_z - \frac{\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y}{m} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} G \gamma_{xy} = \tilde{\tau}_{xy} \\ G \gamma_{xz} = \tilde{\tau}_{xz} \\ G \gamma_{yz} = \tilde{\tau}_{yz} \end{cases}$$

figurano le tre "costanti elastiche": E, m, G , determinate approssimativamente da vari sperimentatori, con risultati diversi, cioè di larga approssimazione. Le tre costanti sono legate dalla relazione:

$$\boxed{G = \frac{m}{2(m+1)} E} \quad ; \quad \boxed{m = \frac{2G}{E - 2G}}$$

ed anche:

$$E (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \left(\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z - \frac{2\bar{\sigma}_x + 2\bar{\sigma}_y + 2\bar{\sigma}_z}{m} \right)$$

$$\boxed{E e = \left(\frac{m-2}{m} \right) (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z)}$$

Relazione che abbiamo già trovato per:

$$\boxed{(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3) = \frac{e m E}{m-2}} \quad \text{che esprime: essere costante}$$

in un punto la somma delle tensioni, qualunque sia il sistema di riferimento di assi cartesiani ortogonali cui si riferiscono le tensioni. Se: $\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_y = \bar{\sigma}_z = p$

$$\boxed{e = \frac{3p(m-2)}{E(m)}}$$

Lo stato di tensione in un punto è determinato se conosciamo le tensioni: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$, che si verificano sui piani normali agli assi x, y, z in un intorno di un punto.

Per il punto consideriamo un piano definito dai coseni direttori della retta di giacitura (comune ai suoi paralleli).

Gli angoli che la retta di giacitura (normale al piano) forma con gli assi x, y, z siano: α, β, γ . (Ricordando che l'angolo formato da due piani è uguale all'angolo delle rette di giacitura, e ricordando che l'area di un intorno del punto se proiettata è moltiplicata per il coseno.) Se consideriamo unitaria l'area sul piano all'intorno del punto, l'area proiettata sui piani normali ad x, y, z , diventa $1 \cdot \cos \alpha, 1 \cdot \cos \beta, 1 \cdot \cos \gamma$ e se moltiplichiamo le tensioni agenti su tali piani per le aree su cui agiscono otterremo le forze: $\sigma_x \cos \alpha, \sigma_y \cos \beta, \sigma_z \cos \gamma, \tau_{xy} \cos \alpha, \tau_{xz} \cos \alpha, \tau_{yz} \cos \beta$. Se Proiettiamo tali forze sulla normale al piano e la dividiamo per l'area (unitaria) si ha $\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \beta + \sigma_z \cos^2 \gamma + \tau_{xy} \cos \alpha \cos \beta + \tau_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + \tau_{yz} \cos \beta \cos \gamma$. —

L'espressione: $E_e = \left(\frac{m-2}{m}\right)(\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z)$ che può
scriversi:

$$(\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z) = \text{cost.}$$

cioè che per ogni terna di direzioni ortogonali
all'intorno del punto, è costante la somma delle
tensioni.

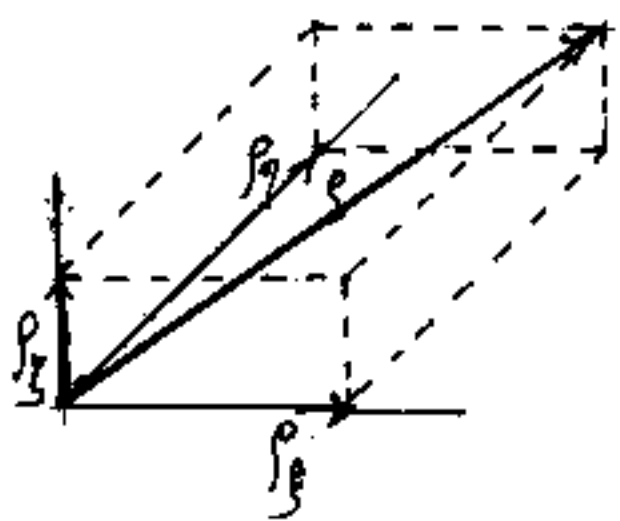
Fra tutte le possibili terne ortogonali all'intor-
no del punto consideriamo una terna: ξ, η, ζ ,
(direzioni principali) caratterizzata dall'assenza
di tensioni tangenziali sui piani di giacitura
 ξ, η, ζ . Le tensioni normali: $\bar{\sigma}_\xi, \bar{\sigma}_\eta, \bar{\sigma}_\zeta$,
che spesso vengono indicate con $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3$,
sono dette: tensioni principali, ed abbiamo
una $\bar{\sigma}_\xi$ ($\bar{\sigma}_1$) che è massima; $\bar{\sigma}_\zeta$ ($\bar{\sigma}_3$) che è
minima; $\bar{\sigma}_\eta$ ($\bar{\sigma}_2$) intermedia; fra tutte le possi-
bili tensioni in direzione generica.

Se assumiamo come assi di riferimento le
direzioni principali: ξ, η, ζ ; se α, β, γ sono gli
angoli che una retta di giacitura forma ora con
le direzioni: ξ, η, ζ , (anziché x, y, z), la tensione
sul piano di tale retta di giacitura sarà:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_\xi \cos^2 \alpha + \bar{\sigma}_\eta \cos^2 \beta + \bar{\sigma}_\zeta \cos^2 \gamma$$

essendo nulli: $\bar{\tau}_{\xi\eta} = 0$; $\bar{\tau}_{\xi\zeta} = 0$; $\bar{\tau}_{\eta\zeta} = 0$.

Possiamo arrivare alla stessa formula avendo assunti: ξ, η, ζ , come assi di riferimento. Moltiplicando le tensioni per le aree su cui agiscono, abbiamo le componenti dell'azione sul piano avente per giacitura $\alpha_\xi, \beta_\eta, \gamma_\zeta$ cioè: $P_\xi = \tilde{\sigma}_\xi \cos \alpha_\xi$; $P_\eta = \tilde{\sigma}_\eta \cos \beta_\eta$; $P_\zeta = \tilde{\sigma}_\zeta \cos \gamma_\zeta$;



$$P^2 = \tilde{\sigma}_\xi^2 \cos^2 \alpha_\xi + \tilde{\sigma}_\eta^2 \cos^2 \beta_\eta + \tilde{\sigma}_\zeta^2 \cos^2 \gamma_\zeta$$

proiettando gli sforzi sulla normale al piano e dividendo per l'area unitaria si ha:

$$\sigma = P_\xi \cos \alpha_\xi + P_\eta \cos \beta_\eta + P_\zeta \cos \gamma_\zeta$$

$$\sigma = \tilde{\sigma}_\xi \cos^2 \alpha_\xi + \tilde{\sigma}_\eta \cos^2 \beta_\eta + \tilde{\sigma}_\zeta \cos^2 \gamma_\zeta$$

e la τ sul piano generico

$$\tau = \sqrt{P^2 - \sigma^2}$$

esprimendo i coseni come rapporto fra sforzi e tensioni poiché: $\cos^2 \alpha_\xi + \cos^2 \beta_\eta + \cos^2 \gamma_\zeta = 1$

avremo anche:

$$\frac{P_\xi^2}{\tilde{\sigma}_\xi^2} + \frac{P_\eta^2}{\tilde{\sigma}_\eta^2} + \frac{P_\zeta^2}{\tilde{\sigma}_\zeta^2} = 1$$

essendo gli sforzi variabili con gli angoli possiamo scrivere:

$$\frac{\xi^2}{\tilde{\sigma}_\xi^2} + \frac{\eta^2}{\tilde{\sigma}_\eta^2} + \frac{\zeta^2}{\tilde{\sigma}_\zeta^2} = 1$$

che è l'equazione dell'ellissoide delle tensioni, o di Lamé.

con centro nel punto considerato, coincide con il centro assi: ξ, η, ζ , pensiamo una sfera di raggio unitario. Ogni punto della superficie sferica avrà per coordinate:

$$x_p = \cos(\alpha_\xi) \quad ; \quad y_p = \cos(\beta_\eta) \quad ; \quad z_p = \cos(\gamma_\zeta)$$

Il raggio che unisce il centro con P, insiste su una retta, che è retta di giacitura del piano per O e dei suoi paralleli, compreso il piano tangente in P.

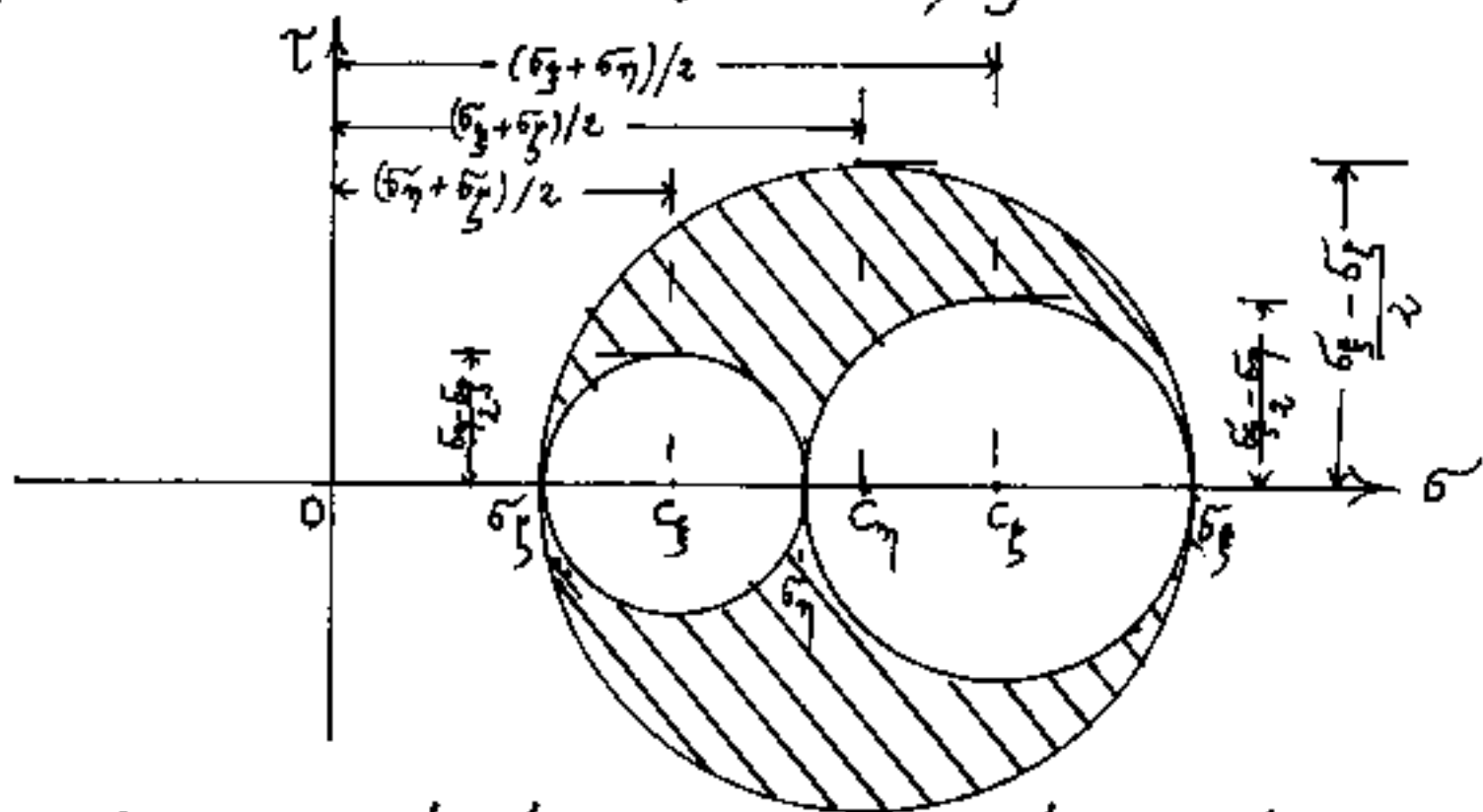
Se a noi sono note: $\bar{\sigma}_\xi, \bar{\sigma}_\eta, \bar{\sigma}_\zeta$; (tensioni principali) e vogliamo le tensioni $\bar{\sigma}$ e $\bar{\tau}$ su un piano generico definito dai coseni direttori $\cos \alpha_\xi, \cos \beta_\eta, \cos \gamma_\zeta$, della sua retta di giacitura, possiamo avvalerci dei cerchi di Mohr nello spazio, che si ottengono sovrapponendo nel sistema piano di assi: $\bar{\sigma}, \bar{\tau}$, i tre cerchi di Mohr per il piano relativi alle coppie: $\bar{\sigma}_\xi, \bar{\sigma}_\eta$; $\bar{\sigma}_\xi, \bar{\sigma}_\zeta$; $\bar{\sigma}_\eta, \bar{\sigma}_\zeta$.

I tre cerchi avranno il centro sulle ascisse $\bar{\sigma}$ rispettivamente: $\frac{\bar{\sigma}_\xi + \bar{\sigma}_\eta}{2}$; $\frac{\bar{\sigma}_\xi + \bar{\sigma}_\zeta}{2}$; $\frac{\bar{\sigma}_\eta + \bar{\sigma}_\zeta}{2}$;

e per raggio: $\frac{\bar{\sigma}_\xi - \bar{\sigma}_\eta}{2}$; $\frac{\bar{\sigma}_\xi - \bar{\sigma}_\zeta}{2}$; $\frac{\bar{\sigma}_\eta - \bar{\sigma}_\zeta}{2}$.

Per costruirli basta riportare in ascisse $\bar{\sigma}$

i tre valori $\bar{\sigma}_\xi$, $\bar{\sigma}_\eta$, $\bar{\sigma}_\zeta$ ed avremo i tre cerchi di Mohr per lo spazio, fra loro tangenti la zona tratteggiata in figura è detta Arbello di



Mohr, a ciascun punto di essa corrisponde una direzione. Per capirne il funzionamento occorre ricordare alcune proprietà degli angoli della retta di giacitura:

$$\cos^2(\alpha_\xi) + \cos^2(\beta_\eta) + \cos^2(\gamma_\zeta) = 1$$

ogni angolo deve essere maggiore del complementare di ciascuno degli altri due, cioè:

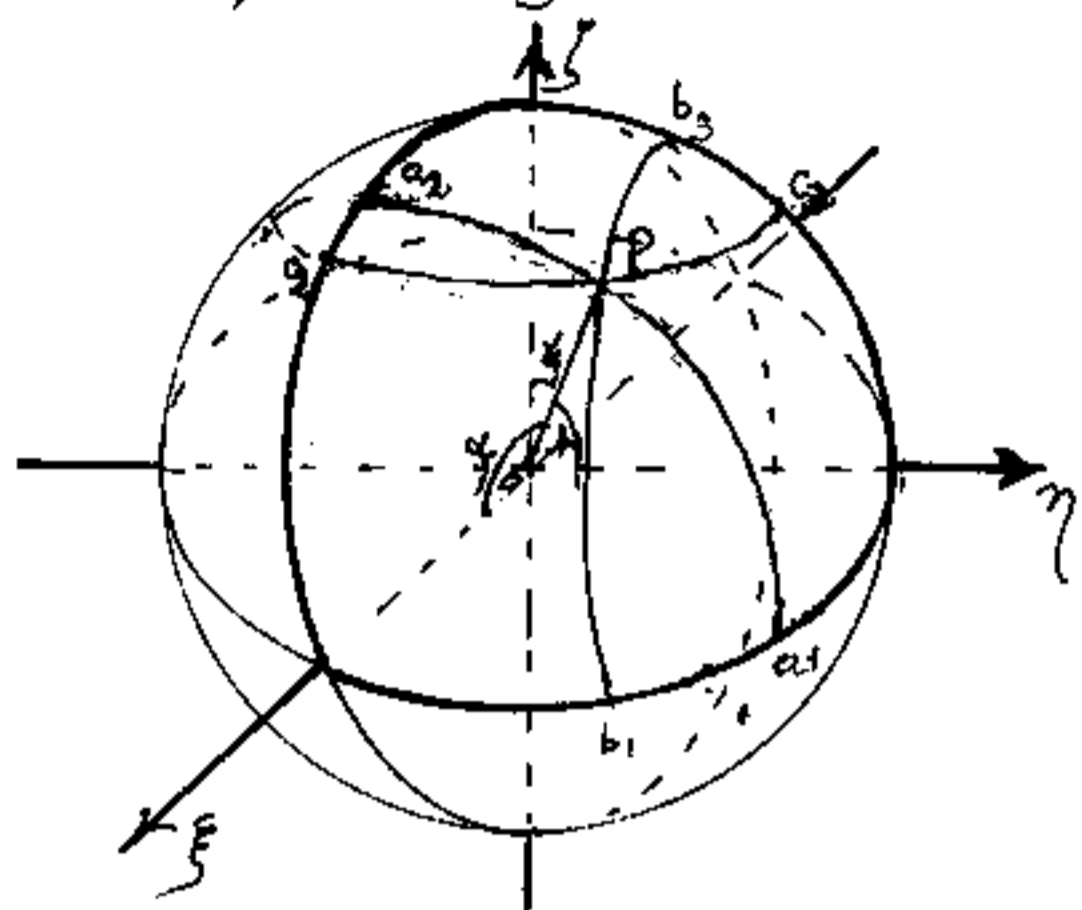
$$\alpha_\xi > (90 - \beta_\eta); \quad \alpha_\xi > (90 - \gamma_\zeta);$$

$$\beta_\eta > (90 - \alpha_\xi); \quad \beta_\eta > (90 - \gamma_\zeta);$$

$$\gamma_\zeta > (90 - \alpha_\xi); \quad \gamma_\zeta > (90 - \beta_\eta);$$

Infatti se due angoli fossero complementari giacerebbero nello stesso piano; e se fossero inferiori, non potrebbero incontrarsi sulla stessa retta.

Per capire meglio, torniamo alla nostra sfera e consideriamo un punto P sulla sua superficie.



Il raggio \overline{OP} è sulla retta di giacitura che forma gli angoli

$\alpha_\zeta, \beta_\eta, \delta_\xi$ con gli assi.

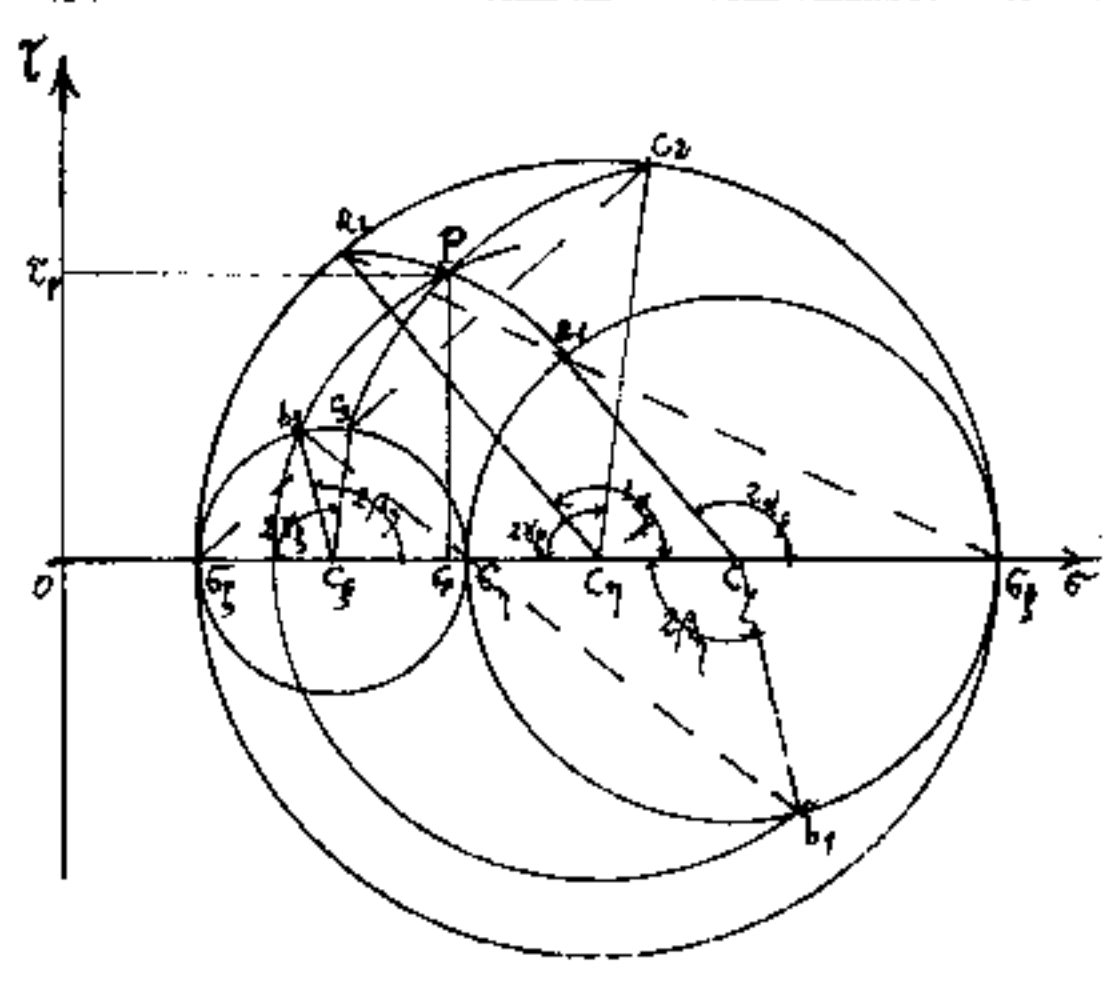
Consideriamo le superfici coniche di vertice O , generate dalle rette che hanno costante un angolo direttore, tali superfici coniche incontrano la sfera secondo tre circonferenze passanti P , ciascuna luogo geometrico di angolo direttore costante.

A noi interessa il primo ottante della superficie sferica, che incontra i piani: $\xi\eta, \xi\zeta, \delta\eta\zeta$ secondo tre cerchi che hanno in comune i punti $a_1, a_2, b_1, b_3, c_2, c_3$ e i cerchi passanti per P . (P è definito da tre archi di cerchio che passano rispettivamente per a_1, a_2 ad $\alpha_\zeta = \text{cost}$; per b_1, b_3 per $\beta_\eta = \text{cost}$; per c_2, c_3 per $\delta_\xi = \text{cost}$.)

Nel cerchio di Mohr per sistemi piani abbiamo visto che a ciascun punto della circonferenza corrisponde una giacitura; che l'angolo al centro fra i raggi di due punti di giacitura è doppio dell'angolo fra le due rette di giacitura (o i due piani). Da ciò due punti diametralmente opposti nel cerchio di Mohr riflettono rette di giacitura (piani) ortogonali; gli angoli alla circonferenza, essendo metà degli angoli al centro possono individuare le giaciture.

(vedi: verifiche di resistenza per i sistemi piani)

Nel caso delle tre circonferenze di Mohr per i sistemi spaziali: $(\alpha_\xi + \beta_\eta) > 90^\circ$ ($\frac{\pi}{2}$) i punti corrispondenti a giaciture non sono più sulle circonferenze, ma sarà lo spazio compreso fra le circonferenze stesse. Se in questo spazio fissiamo un generico punto P relativo ad una certa giacitura,



una certa giacitura, e per P facciamo passare i tre archi di cerchio (ad angolo di giacitura costante) di centri: C_ξ, C_η, C_ζ , notiamo

che l'arco di cerchio di centro C_3 incontrerà le altre due circonferenze di Mohr nei punti a_1 ed a_2 ; analogamente, l'arco di centro C_7 determinerà b_1 e b_3 ed infine l'arco di centro C_5 darà c_2 e c_3 . (gli indici: 1, 2, 3; individuano i cerchi).

Però la determinazione non è unica, infatti abbiamo una coppia di a_1 , una coppia di a_2 , ... ecc. cioè una coppia di ciascuna lettera, perché gli archi prolungati intersecano i cerchi in altri due punti. Poiché i cerchi di Mohr possono considerarsi proiettati sui tre piani: $\xi\eta$, $\xi\zeta$, $\eta\zeta$, ove ciascuna

asse figura quindi appartenente a due piani diversi cioè a due cerchi diversi, anche gli angoli dei coseni direttori con tale asse saranno doppi al centro di due cerchi diversi. In altre parole unendo

a_1, a_2 la retta deve essere allineata con b_ξ e gli angoli:

$$b_\xi \hat{C}_5 a_1 = b_\xi \hat{C}_7 a_2 = 2\alpha_\xi = 2(65^\circ) \rightarrow \cos^2(65^\circ) = 0,1786$$

analogamente b_1, b_3 allineato con b_η (b_1 e b_3 da banda opposta)

$$b_\eta \hat{C}_5 b_1 = b_\eta \hat{C}_3 b_3 = 2\beta_\eta = 2(52^\circ) \rightarrow \cos^2(52^\circ) = 0,3790$$

ed ancora c_2 e c_3 allineati con b_ζ

$$b_\zeta \hat{C}_7 c_2 = b_\zeta \hat{C}_5 c_3 = 2\delta_\zeta = 2(48,31) \quad \cos^2(48,31) = 0,4424$$

e dovrà essere: $\cos^2(\alpha_\xi) + \cos^2(\beta_\eta) + \cos^2(\delta_\zeta) = 1,0000$

Avendo preso a caso, sul grafico, un punto P , interno al cerchio maggiore ed esterno ai due cerchi interni, possiamo graficamente determinare gli angoli $\alpha_\xi, \beta_\eta, \delta_\zeta$, (verificare che la somma dei quadrati dei loro coseni è uno) che sono gli angoli della retta normale ad un piano per "O" ove si verifica $\tilde{\sigma}_P$ e $\tilde{\tau}_P$. (Supponiamo che la direzione \overline{OP} sia l'asse ox)
 Notiamo che $\tilde{\sigma}_P$ ha una direzione determinata, ma che se spostiamo l'asse τ salvo l'aumento costante delle σ non cambia altro, ciò è giustificato dal fatto che: $(\tilde{\sigma}_\xi + \tilde{\sigma}_\eta + \tilde{\sigma}_\zeta) = (\tilde{\sigma}_x + \tilde{\sigma}_y + \tilde{\sigma}_z)$ come abbiamo dimostrato. Ma $(\tilde{\sigma}_\xi + \tilde{\sigma}_\eta + \tilde{\sigma}_\zeta)$ aumenterebbe del triplo di $\tilde{\sigma}_P$ che è unica per ogni P .

Nel piano di P c'è una $\tilde{\tau}$ rilevabile dai cerchi di Mohr e che andrà scomposta in $\tilde{\tau}_{Py}$ e $\tilde{\tau}_{Pz}$ avendo preso $\tilde{\sigma}_P = \tilde{\sigma}_x$.

Consideriamo: $\tilde{\sigma}_\xi = 7$; $\tilde{\sigma}_\eta = 3$; $\tilde{\sigma}_\zeta = 1$;

$$\tilde{\sigma}_\xi \cos \alpha_\xi = 2,958327832 \quad ; \quad \tilde{\sigma}_\xi \cos^2 \alpha_\xi = 1,250243366 \quad ; \quad (\tilde{\sigma}_\xi \cos \alpha_\xi)^2 = 8,751703563$$

$$\tilde{\sigma}_\eta \cos \beta_\eta = 1,846984426 \quad ; \quad \tilde{\sigma}_\eta \cos^2 \beta_\eta = 1,137117157 \quad ; \quad (\tilde{\sigma}_\eta \cos \beta_\eta)^2 = 3,41135147$$

$$\tilde{\sigma}_\zeta \cos \delta_\zeta = 0,665100031 \quad ; \quad \tilde{\sigma}_\zeta \cos^2 \delta_\zeta = 0,442358052 \quad ; \quad (\tilde{\sigma}_\zeta \cos \delta_\zeta)^2 = 0,442358052$$

$$\tilde{\sigma}_P = 2,829718575 \quad ; \quad P^2 = 12,60541308$$

$$\tilde{\tau}_P = \sqrt{P^2 - \tilde{\sigma}_P^2} = 2,144319442$$

$$P = 3,55041027$$

Valori confortati dalla verifica sul grafico.

Le Deformazioni

Lo studio delle deformazioni è fondamentale, non solo in scienza delle costruzioni, ma anche in una molteplicità di fenomeni fisici di cui faremo cenno.

Dovremo considerare le deformazioni nelle travi, sui solidi non astiformi, sulle strutture, a telaio o reticolari.

Per introdurre il problema partiamo da osservazioni molto semplici. Consideriamo un elastico al quale si appenda un peso che inizialmente sosteniamo con una mano. Poi gradualmente abbassiamo la mano, l'elastico si allungherà, noi sentiremo diminuire il peso nella mano, e l'elastico continuerà a deformarsi finché non avrà accumulato al suo interno l'energia elastica necessaria a sostenere il peso.

In questo esperimento, noi vediamo ciò che ordinariamente viene chiamata "forza" come l'azione di energia elastica vincolata.

Lo stesso avviene se comprimiamo (o tendiamo) una molla. Nascono così gli strumenti detti dinamometri

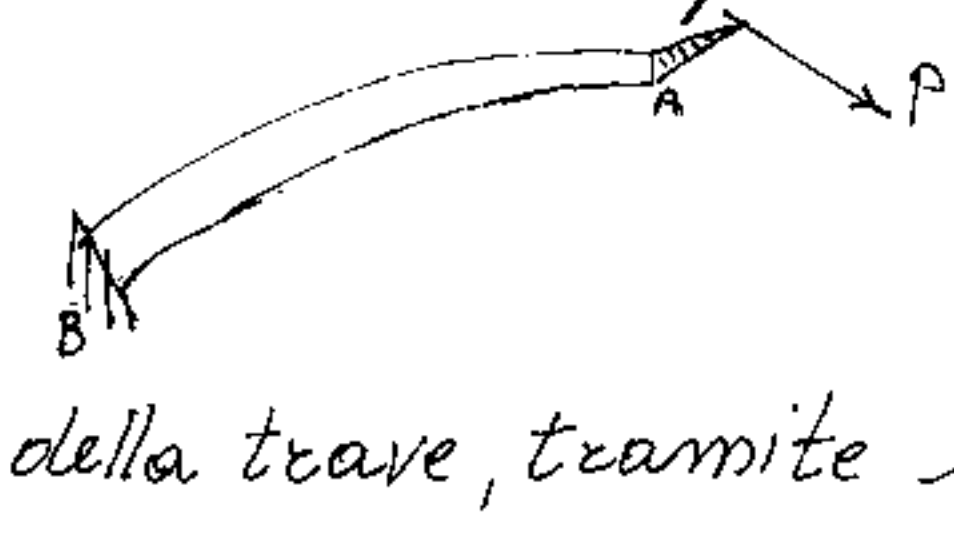
ove un indice si sposta su una scala graduata in unita' di peso, o di forza, e quindi indica il peso o la forza che ha provocato lo spostamento.

L'azione forza puo' essere centrifuga, elettrica, magnetica, ecc.

Abbiamo gia' studiato la deformazione a flessione con la linea elastica, con l'analogia di Mohr ed abbiamo ripetuto i calcoli con i lavori virtuali, consideriamo ora altri modi.

L'ellisse di elasticita'

L'ellisse di elasticita' si basa sulla proporzionalita' fra sforzi e deformazioni, si applica a travi curvilinee a sezione variabile. (leggermente curvilinee con piccola variazione di sezione) soggette ad una forza P agente in una sezione della trave, mantenendo, in genere, la retta di azione di P fuori della sezione. Come



si vede in figura la forza P agisce nella sezione A

della trave, tramite un braccio rigido.

Spesso la trave è una mensola e la forza P agisce nella sezione terminale. La retta di azione di P è complanare all'asse della trave, e parallela ad uno dei diametri principali d'inerzia. affinché, l'asse deformato, resti complanare.

1.11. La traccia della sezione A sul piano $(A)T$ - - - π - - - π piano sia in (A) dopo la deformazione ovviamente dovrà esistere un punto C intorno al quale ruotato.

Il centro C dipende solo dalla retta di azione P .
L'angolo φ dipende dalla intensità di P .

Esiste quindi una corrispondenza biunivoca fra i centri C e le rette di azione di P .

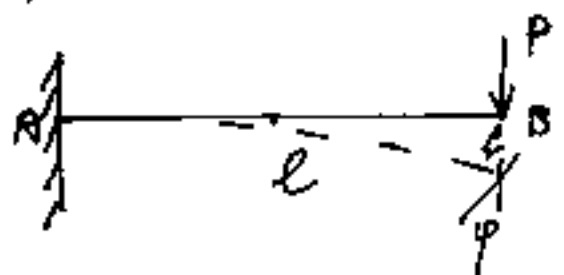
Intorno a C avviene una rotazione, quindi la retta di P corrispondente a C non potrà mai passare per C . (la corrispondenza non ha elementi autoconiugati)

Se per C facciamo passare un'altra retta r , corrispondente al centro C_1 allora la retta di C passerà per C_1 . (La corrispondenza è involutoria) Quindi la corrispondenza fra le rette r ed i centri C_1 è biunivoca, non ha elementi autoconiugati, è involutoria, cioè

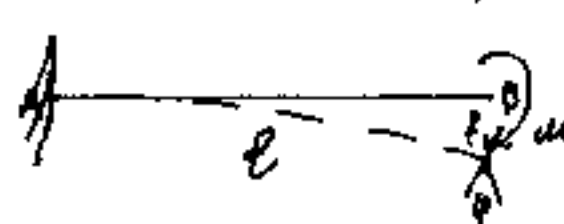
è una polarità e la sua conica è immaginaria. Ma analogamente alla polarità determinata dall'ellisse d'inerzia, anche qui considereremo i simmetrici c' dei centri e rispetto al centro elastico della trave "O"

Questa nuova polarità è un'ellisse reale di centro "O". ed è l'ellisse di elasticità relativa alla sezione A (se la trave è a mensola si chiama anche ellisse terminale, essendo A l'estremo libero)

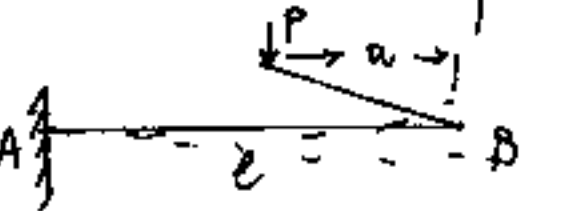
Prima di continuare calcoliamo la freccia e la rotazione della sezione terminale di una mensola nei seguenti tre casi:



$$f_B = \frac{Pl^3}{3EJ} ; \quad \varphi = \frac{Pl^2}{2EJ}$$



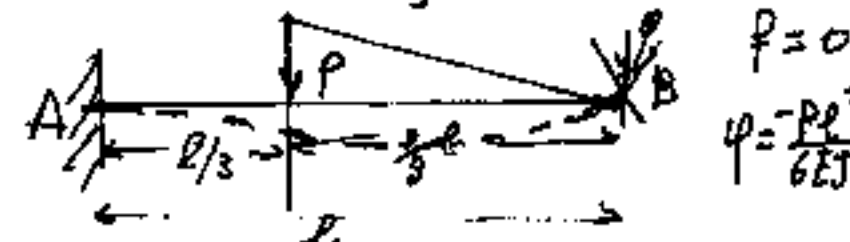
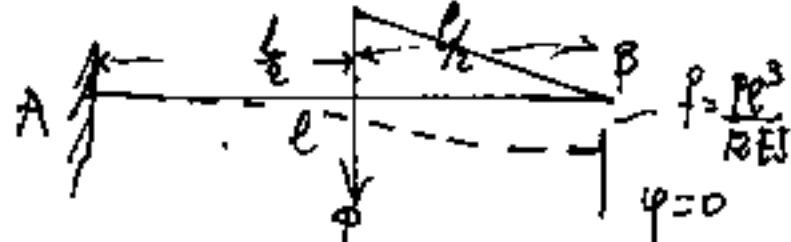
$$f_B = \frac{Pl^3}{2EJ} ; \quad \varphi = \frac{Pl^2}{EJ}$$



$$f = \frac{Pl^3}{3EJ} - \frac{Pal^2}{2EJ}$$

$$\varphi = \frac{Pl^2}{2EJ} - \frac{Pal}{EJ} ; \quad f=0 \rightarrow 2l=3a \rightarrow a = \frac{2}{3}l \rightarrow \varphi = \frac{Pl^2}{2EJ} - \frac{Pl^2}{3EJ}$$

$$\varphi=0 \rightarrow a = l/2 ; \rightarrow f = \frac{Pl^3}{3EJ} - \frac{Pl^3}{4EJ} = f = \frac{Pl^3}{12EJ} ; \quad \varphi = -\frac{Pl^2}{6EJ}$$



quindi per $a > \frac{2}{3}l$ la sezione B si innalza.

Il peso elastico

Abbiamo già introdotto il peso elastico \mathcal{G} come l'inverso della rigidità a flessione semplice:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{W} = \frac{I}{EJ} ; \quad \boxed{\varphi = \mathcal{M} \mathcal{G}} ; \quad \mathcal{G} = \frac{\varphi}{\mathcal{M}} ;$$

Cioè il peso elastico è l'attitudine della struttura a far compiere lavoro elastico al momento flettente applicato. ($\mathcal{L} = \frac{d\mathcal{U}}{d\mathcal{M}} \mathcal{G}$)

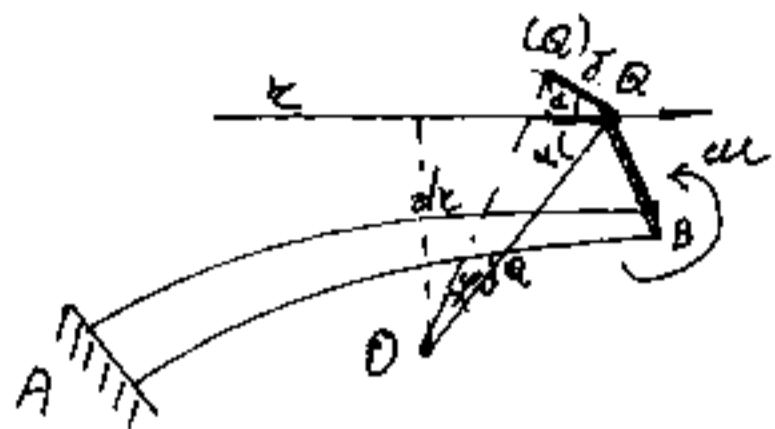
Si può riguardare il peso elastico come il valore della deformazione angolare φ per effetto di una coppia unitaria ($\mathcal{M}=1$).

Ma una rotazione avviene intorno ad un centro, che chiameremo: centro elastico "O", quando la rotazione è provocata da una coppia cioè da una forza infinitesima a distanza infinita. In altre parole le rette all'infinito hanno il centro (antipolo) in "O".

Mentre ad ogni retta in campo finito corrisponde un centro C di rotazione. Se la retta passa per "O" il centro C è all'infinito, si verifica una traslazione senza rotazione ($\varphi=0$)

Quindi per la mensola uniforme "O" è ad $\frac{l}{2}$ affinché la retta passando per O non dia rotazione alla sezione B. (C all'infinito)

Se consideriamo una mensola qualsiasi anche ad asse curvilineo ed a sezioni variabili, soggetta ad una coppia M nella sezione terminale B , e connesso a B vi sia

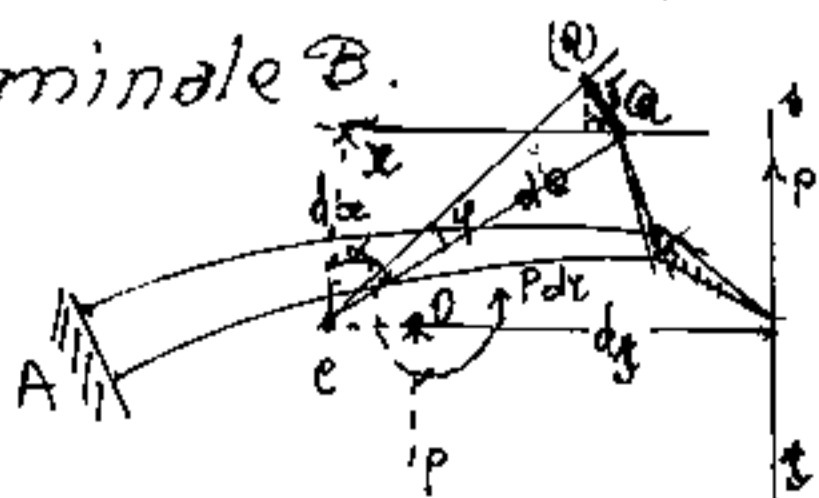


il punto Q che dista da O , $d_Q = \overline{OQ}$, il punto Q per effetto della rotazione φ andrà in Q' ove: $\overline{QQ'} = \delta = \varphi d_Q = M \int \frac{1}{EI} d_Q$.

Se per Q consideriamo la retta z che forma l'angolo α con δ la proiezione dello spostamento δ su z sarà $\delta \cos \alpha = \delta_x = M \int \frac{1}{EI} d_Q \cos \alpha = M \int \frac{1}{EI} dx$.

Quindi lo spostamento secondo una retta z provocato da una coppia è dato dal prodotto della coppia per il peso elastico, per la distanza della retta dal centro elastico O .

La rotazione di una sezione provocata da una forza agente secondo una retta z connesso ad un punto unito alla sezione terminale B .



$$\varphi = M \int \frac{1}{EI} = P \int \frac{1}{EI} dx$$

Spostamento secondo una retta z .

$$\delta_x = \delta \cos \alpha = P \int \frac{1}{EI} dx \cos \alpha$$

$$\delta_x = P \int \frac{1}{EI} dx \cdot dx \cos \alpha$$

Se pensiamo che il peso elastico Q sia distribuito nella trave, come fosse una massa, avremo che l'ellisse centrale d'inertzia di queste "masse" è l'ellisse di elasticità.

Attenzione l'ellisse d'inertzia si riferisce alla sezione, l'ellisse di elasticità alla trave.

Entrambi gli ellissi sono ellissi di Culman, entrambi determinano un'antipolarità:

l'ellisse centrale d'inertzia fra assi neutri e centri di sollecitazione.

l'ellisse di elasticità fra rette e centri di rotazione.

Il centro elastico "O" è il baricentro delle "masse" ΔQ ove: $Q = \epsilon \Delta Q$.

Quando parliamo di rotazione o spostamento di una sezione intendiamo anche i punti o corpi vigilamente (non elasticamente) ad essa connessi.

I) La rotazione di una sezione dovuta ad M
 $\varphi = M \cdot Q$ (Q della trave)

II) Lo spostamento dovuto ad M secondo una retta
 $\delta_c = M Q d_c$ (ove: $Q \cdot d_c = S_c =$ momento statico)

III) La rotazione dovuta a P :
 $\varphi = P d_s Q =$ (ove $Q \cdot d_s = S_s =$ momento statico)

IV) Lo spostamento dovuto a P (sulla retta x)
 $\delta_x = P Q d_s d_x$ (ove $Q d_s d_x = I_{sx} =$ momento centrifugo)

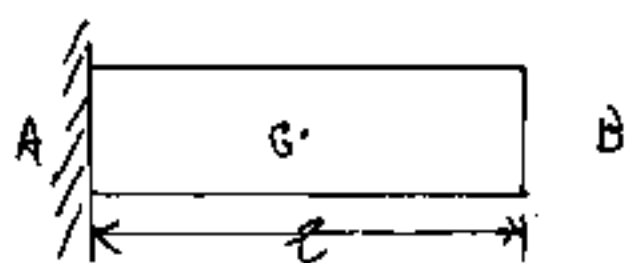
IV.) Lo spostamento dovuto a P (sulla retta sd di P)

$$\delta_s = P G d_s^2 \quad (\text{ove } G d_s^2 = \underline{\text{momento d'inerzia}})$$

Questa sintesi dei casi possibili è basilare per la risoluzione degli esercizi.

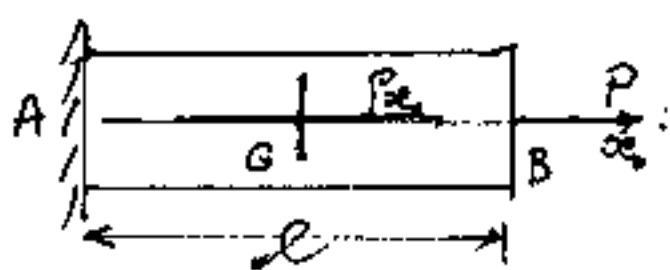
Lavoro elastico

$$L = \frac{M \varphi}{2} = \frac{dM^2 \varphi}{2} \quad ; \quad L = \frac{P \delta_s}{2}$$



Nella trave a sezione costante

$$G = \frac{E}{2} \quad ; \quad \varphi = dM \frac{G}{J} \quad ; \quad J = \frac{I}{E}$$



Se la retta di azione di P passa per G (coincidente con O) sappiamo che lo spostamen-

to: $\delta_{x0} = \frac{Pl}{EA}$; $\delta_{x0} = P J_{x0} = P \cdot G \rho_{x0}^2$ ove ρ_{x0} è il semiasse trasversale dell'ellisse: si noti: $G \rho_{x0}^2 = \frac{I}{EA} = \frac{I}{EJ} J_{x0}^2$

$$\rho_{x0} = \rho_{\text{fiancata}} = \sqrt{J/A} = \frac{h}{2} \sqrt{3}$$



Se la forza P agisce nella sezione terminale B in direzione y, e cerchiamo lo spostamento secondo y, tenendo anche conto del taglio

sappiamo: $\delta_y = \frac{Pl^3}{3EJ} + \chi \frac{Pl}{GA}$ (ove $G = E \left(\frac{m}{2m+2} \right)$)

con l'ellisse: $\delta_y = P J_y = P [J_{y0} + G \left(\frac{l}{2} \right)^2] = P \left[G \rho_{y0}^2 + G \frac{l^2}{4} \right] =$

$$\delta_y = P \left(\frac{l}{EJ} \left(\rho_{y0}^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right) \right) ; \quad \frac{l}{EJ} \left(\rho_{y0}^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right) = \left(\frac{l^3}{3EJ} + \frac{\chi l}{GA} \right) ; \quad \boxed{\rho_{y0}^2 = \frac{l^2}{12} + \chi \frac{EJ}{GA}}$$

Lo studio dei cavi flessibili

Le funi brande (catenaria)

La parola brande deriva da brandire che è un vibrare molto accentuato da un lenteggiamento. Funi braude venivano così chiamate dagli antichi toscani, le funi o corde lenteggianti, ben sapendo che la configurazione di equilibrio di una fune, corda, o catena, appesa agli estremi e soggetta solo al proprio peso, uniformemente distribuito nella sua lunghezza non era una conica, né archi di cerchio.

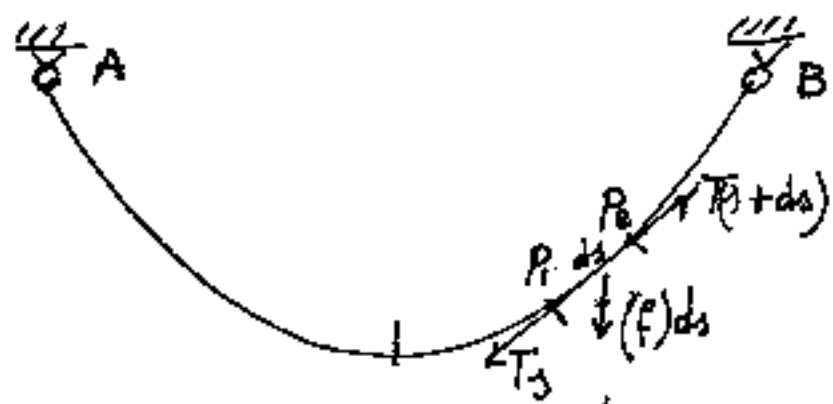
Il discorso era semplice: una fune o catena appesa agli estremi è tutta tesa, se noi ribaltiamo il piano di tale curva, essa diventerebbe tutta compressa, quindi per fare le centine di archi ribaltati veniva fissata una corda su un tavolato verticale con distanza pari all'imposta dell'arco e facendola lenteggiare fino alla freccia desiderata; lasciata l'impronta sul tavolo, questo veniva segato e costituiva la centina.

Per generazioni, studiosi si sono impegnati per definire matematicamente questa curva. Le Mach racconta che Jean e Jacques Bernouilli (1600-1700), passeggiando per Basilea si proposero il problema di quale fosse la configurazione di equilibrio di una catena, di peso uniforme, sospesa agli estremi, e convennero che la configurazione doveva essere tale da avere il baricentro nella posizione più bassa.

Risposta esatta, ma la formula fu trovata con la trigonometria iperbolica. La curva si chiama catenaria ed è un coseno iperbolico: $y = a \cosh(\frac{x}{a})$;

Ci proponiamo di ricavare la formula. (Cfr. Bollettino Ingegneri N 10 ottobre 1972 e N 12 1972, C. Brogi - Su alcuni aspetti delle curve funicolari).

consideriamo la nostra catena, inestendibile, appesa agli estremi A, B, composta di infiniti elementi $P_1 P_2 = ds$, individuati da una lunghezza s ed $s+ds$. (con origine arbitraria).



In p_1 e p_2 , figurano le tensioni: $T(s)$ e $T(s+ds)$ tangenti
 la curva e l'elemento soggetto alla forza $f(ds)$.
 l'equilibrio è espresso dalla relazione vettoriale

$$\vec{f} ds + \vec{T}(s) + \vec{T}(s+ds) = 0$$

Se fissiamo un verso di misura degli archi e
 proiettiamo le forze su un sistema di assi cartesiani,
 posto $f_x = X$; $f_y = Y$; $f_z = Z$; si ha:

$$\begin{cases} X ds - T_x(s) + T_x(s+ds) = 0 \\ Y ds - T_y(s) + T_y(s+ds) = 0 \\ Z ds - T_z(s) + T_z(s+ds) = 0 \end{cases}$$

ricorrendo lo sviluppo in serie di Taylor:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R$$

si ha

$$T_x(s+ds) = T_x(s) + ds \frac{dT_x}{ds} + K ds^2$$

sostituendo e dividendo per ds e semplificando:

si ha:

$$\begin{cases} X + \frac{dT_x}{ds} + K ds = 0 \\ Y + \frac{dT_y}{ds} + K ds = 0 \\ Z + \frac{dT_z}{ds} + K ds = 0 \end{cases}$$

e per ds tendente a zero

$$\begin{cases} X + \frac{dT_x}{ds} = 0 \\ Y + \frac{dT_y}{ds} = 0 \\ Z + \frac{dT_z}{ds} = 0 \end{cases}$$

ed essendo $T(s)$ tangente alla curva i suoi
 coseni direttori saranno: $\frac{dx}{ds}$; $\frac{dy}{ds}$; $\frac{dz}{ds}$;
 ed anche: $T_x = T(s) \frac{dx}{ds}$; $T_y = T(s) \frac{dy}{ds}$; $T_z = T(s) \frac{dz}{ds}$;
 sostituendo:

$$\begin{cases} X + \frac{d\left(T(s) \frac{dx}{ds}\right)}{ds} = 0 \\ Y + \frac{d\left(T(s) \frac{dy}{ds}\right)}{ds} = 0 \\ Z + \frac{d\left(T(s) \frac{dz}{ds}\right)}{ds} = 0 \end{cases}$$

essendo: $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$

si ha un sistema di equazioni da integrare
 nelle incognite x, y, z, T .

Consideriamo ora che la forza agente sul
 l'elemento sia il peso, che per unita' di lunghezza
 la indichiamo con "q", e poniamo che il
 campo gravitazionale agisca secondo y

avremo:

$$\begin{cases} \frac{d\left(T(s) \frac{dx}{ds}\right)}{ds} = 0 \\ \frac{d\left(T(s) \frac{dy}{ds}\right)}{ds} = q \\ \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 \quad (\text{curva piana}) \end{cases}$$

Integrando le prime due equazioni:

$(T(s) = T)$ (*) $\begin{cases} T \frac{dx}{ds} = H = \text{costante} \\ T \frac{dy}{ds} = qs + b \end{cases}$

Se poniamo l'origine degli archi nel vertice ova
 $T \frac{dy}{ds} = \text{ovvero: } b=0.$

Quadrando e sommando:

$$T^2 \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right] = H^2 + q^2 s^2$$

cioè:

$$T^2 = H^2 + q^2 s^2$$

$$T = q \sqrt{\left(\frac{H}{q} \right)^2 + s^2}$$

sostituendo:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{qs}{T} = \frac{s}{\sqrt{\left(\frac{H}{q} \right)^2 + s^2}}$$

posto: $H/q = a$; $\frac{dy}{ds} = \frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}}$

integrando:

$$y = \int \frac{s ds}{\sqrt{a^2 + s^2}} = \sqrt{a^2 + s^2} + c$$

Se spostiamo l'origine di $-a$ in y : $c=0$

$$\boxed{y = \sqrt{a^2 + s^2}}$$

$$s = \sqrt{y^2 - a^2}$$

$$\boxed{T = qy}$$

(le ordinate dei punti per q
sono le tensioni)

dividendo: $T \frac{dy}{ds} = qs$ per $T \frac{dx}{ds} = H = qa$, abbiamo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a} = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a}$$

$$x = a \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} = a \left(\ln(\sqrt{y^2 - a^2} + y) + c \right)$$

($a = \text{cost}$)

$$x = a \left[\ln \left[\frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a} \right)^2 - 1} \right] + \frac{c}{a} \right]$$

Dovendo essere per $x=0$; $y=a$; $\frac{y}{a}=1$

$\ln(1)=0$ per cui $C_1=0$.

quindi:

$$\frac{x}{a} = \ln \left[\frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1} \right]$$

$$e^{\frac{x}{a}} = \frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}$$

$$\left(e^{\frac{x}{a}} - \frac{y}{a} \right)^2 = \left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1 = e^{\frac{2x}{a}} - 2\frac{y}{a}e^{\frac{x}{a}} + \left(\frac{y}{a}\right)^2$$

$$y = a \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

Ricordando le funzioni iperboliche:

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad ; \quad (a = \frac{H}{q})$$

$$y = \frac{H}{q} \cosh\left(\frac{x}{H/q}\right) = \frac{T}{q}$$

Sono queste le equazioni della catenaria.

$$\frac{T}{H} = \cosh\left(\frac{x}{H/q}\right) \quad ; \quad y = \frac{H}{q} \cosh\left(\frac{x}{H/q}\right) = \sqrt{s^2 + a^2} = \sqrt{s^2 + \frac{H^2}{q^2}}$$

$$\frac{H^2}{q^2} \cosh^2 \frac{x}{H/q} = s^2 + \frac{H^2}{q^2}$$

$$s^2 = \frac{H^2}{q^2} \left(\cosh^2 \frac{x}{H/q} - 1 \right) = \frac{H^2}{q^2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x}{H/q} \right)$$

$$s = a \operatorname{sech} \left(\frac{x}{a} \right)$$

la lunghezza dell'arco di catenaria a partire dal vertice con modulo "a" è il suo iperbolico porremo: $s = L/2$

$$1 = \frac{f^2}{a^2} + \frac{2f}{a} + 1 - \frac{L^2}{4a^2} ;$$

$$\frac{L^2}{4} = f^2 + 2af$$

$$a = \frac{L^2 - 4f^2}{8f}$$

conoscendo la lunghezza della fune e la freccia abbiamo il modulo "a" della catenaria: $(a = \frac{H}{q})$

la tensione al vertice: $H = q \left(\frac{L^2 - 4f^2}{8f} \right)$

si noti che per $f = L/2$ si ha $H = 0$; e che f non può mai essere maggiore di $L/2$

$$y_B = \sqrt{a^2 + (L/2)^2}$$

$$f = \sqrt{a^2 + (L/2)^2} - a$$

Anche: $\ddot{a} = 0$ per $f = \frac{L}{2}$

Ricaviamo la distanza fra gli appoggi:

$$l/2 = a \operatorname{argsh} \left(\frac{L/2}{a} \right)$$

$$\frac{L}{2a} = \operatorname{sech} \left(\frac{l}{2a} \right)$$

$$l = \left(\frac{L^2 - 4f^2}{4f} \right) \operatorname{argsh} \left(\frac{4f}{L^2 - 4f^2} \right)$$

ove sono correlate solo grandezze geometriche, indipendenti da "q" ed "H". da ciò la proprietà delle catenarie:

"Funi della stessa lunghezza, nelle stesse condizioni di vincolo assumono la stessa configurazione di equilibrio indipendentemente dal peso del materiale di cui sono costituite."

Vedi Vol II trigonometria iperbolica

$$\frac{l}{2a} = \operatorname{argsh}\left(\frac{L}{2a}\right) = \ln\left[\frac{L}{2a} + \sqrt{\left(\frac{L}{2a}\right)^2 + 1}\right]$$

$$\boxed{\frac{l}{2a} = \ln\left[\frac{L}{2a} + \sqrt{\left(\frac{L}{2a}\right)^2 + 1}\right]}$$

$$\boxed{l = \left(\frac{L^2 - 4f^2}{4f}\right) \ln\left[\frac{4Lf}{L^2 - 4f^2} + \sqrt{\left(\frac{4Lf}{L^2 - 4f^2}\right)^2 + 1}\right]}$$

abbiamo visto:

$$a = \left(\frac{(L/2)^2}{2f} - \frac{f}{2}\right) \quad , \quad \frac{(L/2)^2}{f} = 2a + f = a + (a + f) = (a + y_B)$$

$$\text{ma: } y_B = \frac{T_B}{q} = \left(\frac{(L/2)^2}{f} - a\right) = \frac{(L/2)^2}{f} - \left(\frac{(L/2)^2}{2f} - \frac{f}{2}\right) = \left(\frac{(L/2)^2}{2f} + \frac{f}{2}\right)$$

$$\boxed{T_B = q \frac{L^2 + 4f^2}{8f} = (q y_B)}$$

Formula che fornisce la tensione agli appoggi

$$\frac{T_B}{H} = \left(q \frac{L^2 + 4f^2}{8f}\right) \left(\frac{8f}{(L^2 - 4f^2)q}\right) = \left(\frac{L^2 + 4f^2}{L^2 - 4f^2}\right)$$

$$\boxed{\frac{T_B}{H} = \frac{(L/2)^2 + f^2}{(L/2)^2 - f^2}}$$

Solo se è nulla la freccia, la tensione al vertice uguaglia la tensione agli appoggi.

$$\boxed{y_B = \frac{(L/2)^2 + f^2}{2f} \quad ; \quad a = (y_B - f)}$$

I rapporti fra gli elementi geometrici della Catenaria.

Il parametro "a" della catenaria, rappresenta l'unità di misura delle lunghezze, che, graficamente è la "distanza" fra il vertice della catenaria V e l'origine degli assi O; cioè $y_v = a$. Quindi nelle rappresentazioni grafiche della catenaria è implicita la scala.

$$\frac{s}{a} = \operatorname{seuh}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2}$$
$$\frac{l/2}{a} = \frac{l}{2a} = \operatorname{seuh}\left(\frac{l/2}{a}\right) = \frac{e^{l/2a} - e^{-l/2a}}{2}$$

} lunghezza arco di catenaria

$$\frac{y}{a} = \operatorname{cosh} \frac{x}{a} = \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2} \quad (\text{ordinata})$$

$$\frac{f}{a} = \left[\operatorname{cosh}\left(\frac{l/2}{a}\right) - 1 \right] = \operatorname{versh}\left(\frac{l/2}{a}\right) \quad (\text{freccia})$$

Cioè ogni catenaria può essere rappresentata da una unica formula:

$$\boxed{y = \operatorname{cosh} X}$$

in generale:

$$\boxed{\lambda = f(\theta)}$$

ove le grandezze geometriche sono espresse nell'unità di misura "a", variabile al variare

delle caratteristiche della catenaria.

Da queste osservazioni è possibile calcolare tutti gli elementi geometrici di una catenaria quando ne sono noti due.

Dei tre elementi statici $q; H; T$; è possibile calcolare il rapporto; basta quindi l'ulteriore cognizione di uno dei tre elementi statici per determinare gli altri due.

Il peso della fune per unità di lunghezza:

q (Kg/me) moltiplicato per l'unità di lunghezza: a (me); abbiamo visto: $q \cdot a = H$

$(\text{Kg}/\text{me})(\text{me}) = (\text{Kg})$: H (Kg) è la tensione nel vertice della catenaria. Quindi H è la componente orizzontale della tensione T che è data da $T = qy$.

Il rapporto fra la lunghezza e la corda

$$\frac{L}{l} = \frac{L/2a}{l/2a} = \frac{\text{seuh}(l/2a)}{(l/2a)} =$$

$$\frac{\text{seuh}(x)}{x} = \underline{\text{ca seuh}(x)}$$

Ci ha suggerito un nuovo operatore che abbiamo rappresentato col simbolo "ca" prefisso alla funzione. (Vedi Vol I).

Il $\text{ra}(f)$ è il rapporto fra la funzione e "l'argomento"
 e $f(x) = \frac{f(x)}{x}$, ma l'argomento può essere funzione di
 funzione, perciò: deve essere evidenziato "l'argomento"
 cui si riferisce il "ra".

Consideriamo il rapporto:

$$\frac{L}{l} = \frac{L/2a}{l/2a} = \frac{\text{senh}(l/2a)}{(l/2a)} = \text{casenh}(l/2a)$$

$$\left(\frac{l}{2a}\right) = \text{argcasenh}\left(\frac{L}{l}\right)$$

$$a = \frac{l/2}{\text{argcasenh}(L/l)}$$

quindi dalle tavole che riportano $\text{casenh}(X)$
 $\text{casenh}(X) = (L/l) \rightarrow \text{argcasenh}[L/l] = X \rightarrow a = \frac{l/2}{X}$.
 è possibile trovare "a" in funzione di L ed l

Se invece sono noti: f ed l

$$f/a = (\cosh(l/2a) - 1)$$

$$f/a = \text{versh}(l/2a)$$

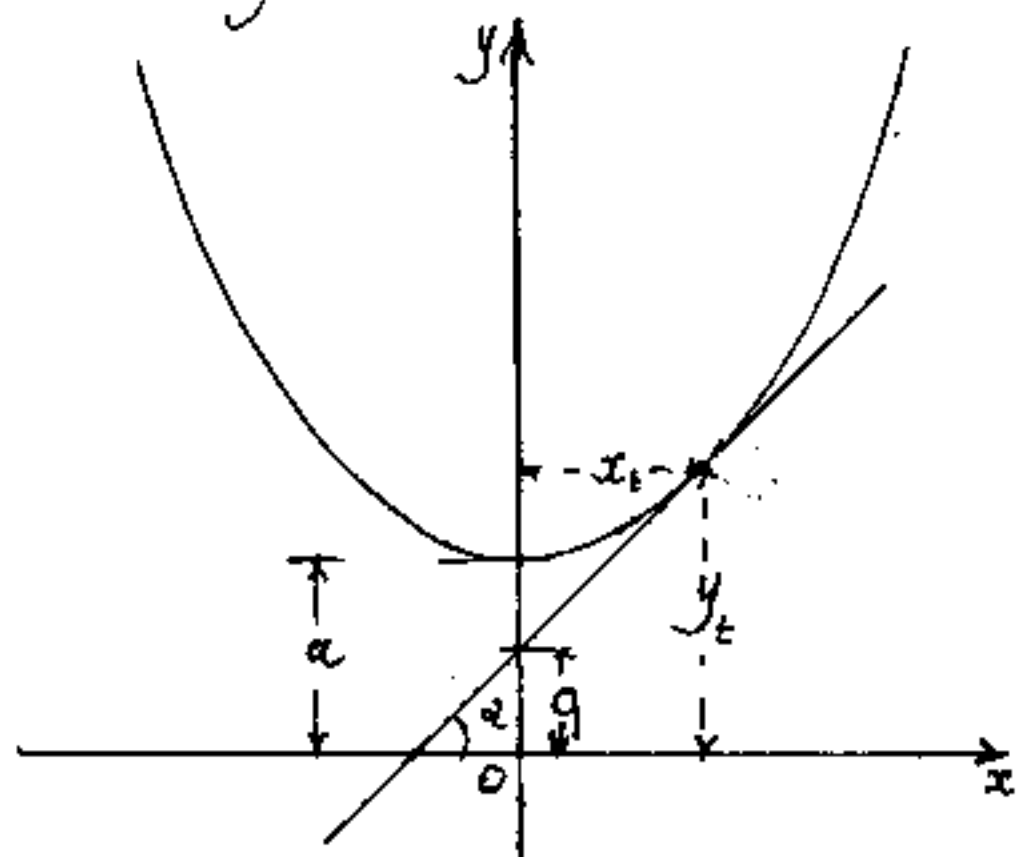
$$\frac{f}{l/2} = \frac{f/a}{\frac{l/2}{a}} = \frac{\cosh(l/2a) - 1}{(l/2a)} = \text{caversh}(l/2a)$$

$$a = \frac{l/2}{\text{caversh}(f/l)}$$

a in funzione di f e di $l/2$ e necessitano le tavole
 di: $\text{caversh}(X)$.

Retta tangente alla catenaria

Supponiamo di voler determinare le coordinate del punto comune alla catenaria ed alla retta ad essa tangente ed inclinata di α rispetto all'asse x .



abbiamo:

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$y' = \sinh\left(\frac{x}{a}\right) = \operatorname{tg}(\alpha)$$

$$x_t = a \cdot \operatorname{arcsinh}(\operatorname{tg} \alpha)$$

$$\sinh^2\left(\frac{x_t}{a}\right) = \operatorname{tg}^2(\alpha)$$

$$\cosh^2\left(\frac{x_t}{a}\right) - 1 = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cosh^2\left(\frac{x_t}{a}\right) = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

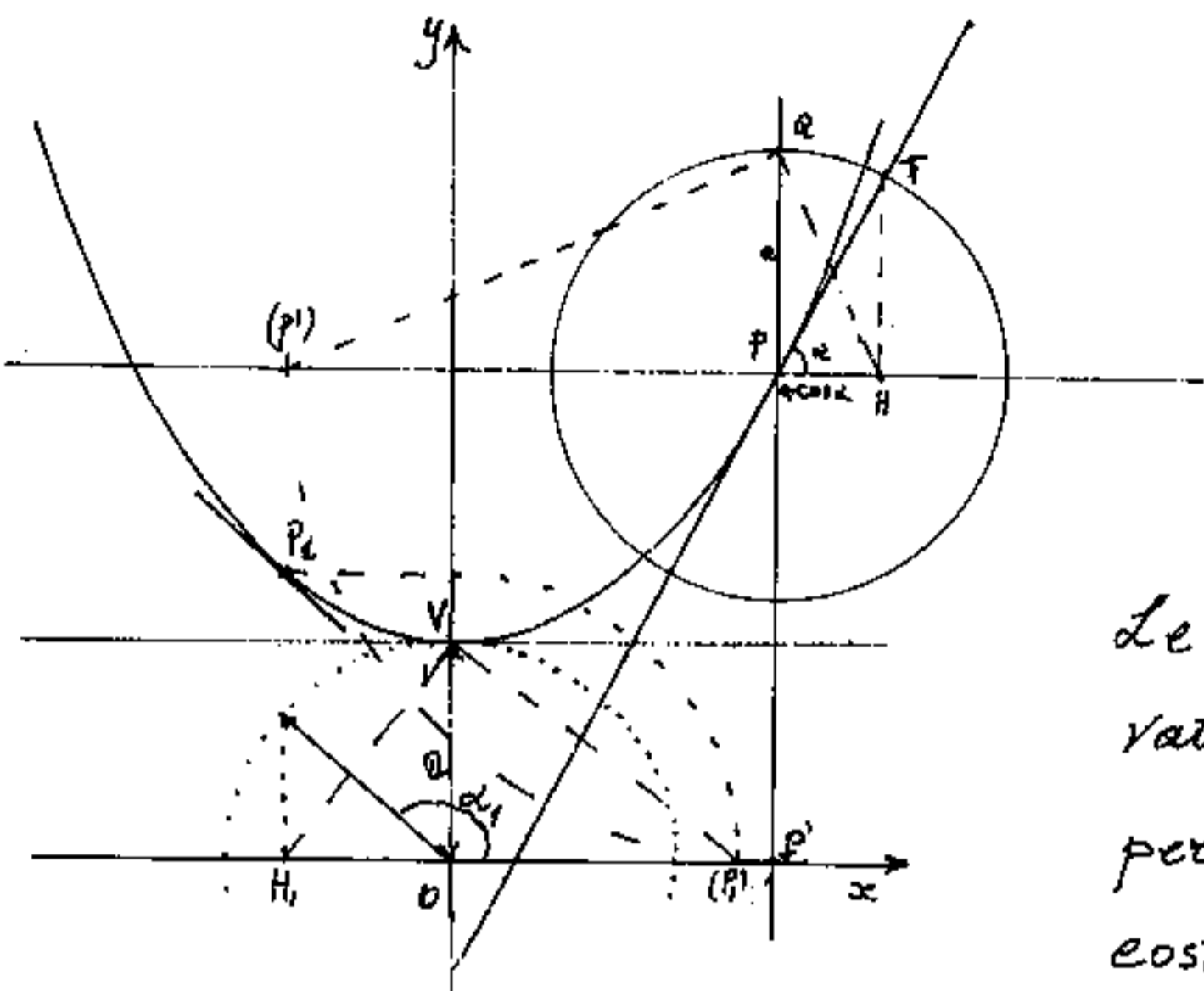
$$\boxed{y_t = \frac{a}{\cos \alpha}}$$

Formula che fornisce immediatamente l'ordinata y_t del punto comune di tangenza in funzione del parametro a della catenaria e dell'inverso del coseno dell'angolo α della retta tangente.

$$\boxed{\begin{aligned} x_t &= a \operatorname{arcsinh}(\operatorname{tg} \alpha) \\ y_t &= a / \cos \alpha \end{aligned}}$$

$$\boxed{x_t = a \operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{\cos \alpha}\right)}$$

$$\boxed{\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\cos \alpha}}$$



Le relazioni trovate: $(y_p = \frac{a}{\cos \alpha})$ permettono oltre costruzioni grafiche:

In particolare se vogliamo "la pendenza", ossia la retta tangente in un punto P della catenaria basta per quel punto tracciare un cerchio di raggio "a", riportare $y_p = \overline{P(P')}$ su un diametro orizzontale unire (P') con Q e da Q la perpendicolare a $\overline{Q(P')}$ che incontrerà in H il diametro orizzontale: $\overline{PH} = a \cos \alpha$; da H la verticale fino a T, e \overline{TP} è sulla retta tangente in P.

Inversamente se vogliamo l'ordinata della catenaria conoscendo α_1 , si traccia in O il cerchio di raggio "a", in O si riporta α_1 , $\overline{OH_1} = a \cos(\alpha_1)$ unito H_1 con V la normale ad H_1V da V trova (P_1) ove $\overline{OP_1} = y_{P_1}$.

(Per altre costruzioni grafiche si vedano i volumi II, III, V, VI tramite indice enciclopedico).

Poiché la retta tangente ha per equazione:

$$y = \operatorname{tang}(\alpha) \cdot x + q$$

ricaviamo: $q = \frac{a}{\cos(\alpha)} - (\operatorname{tg} \alpha) a \operatorname{argsech}(\operatorname{tg} \alpha)$.

Fra tutte le rette tangenti alla catenaria, ce chiamo quella che passa per l'origine degli assi ($q=0$) cioè:

$$1 = \operatorname{sen}(\alpha_0) \operatorname{argsech}(\operatorname{tg} \alpha_0)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha_0) = \operatorname{sech}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha_0}\right)$$

Equazione ove:

$$\left(\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha_0}\right) = 1,199678640257733833916369848641\dots$$

$$e^{1/\operatorname{sen} \alpha_0} = 3,319050141$$

$$e^{-1/\operatorname{sen} \alpha_0} = 0,301291019$$

$$\frac{e^{1/\operatorname{sen} \alpha_0} - e^{-1/\operatorname{sen} \alpha_0}}{2} = \frac{3,017759122}{2} = 1,508879561537 = \operatorname{tg} \alpha_0 = \operatorname{sech}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha_0}\right)$$

$$\alpha_0 = 56^\circ 27' 57",01$$

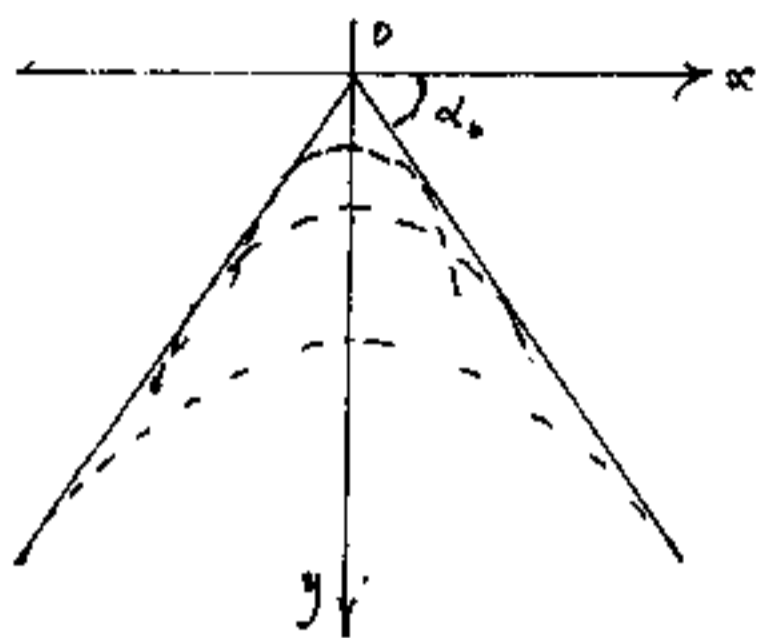
$$\alpha_{0 \text{ rad}} = 0,985514737$$

Le coordinate del punto di tangenza.

$$\begin{aligned} y_{T_0} &= a \operatorname{sec} \alpha_0 = a(1,810170580699) \\ x_{T_0} &= a \operatorname{cosec} \alpha_0 = a(1,1996786402577) \end{aligned}$$

Quindi la retta per l'origine con $(\operatorname{tg} \alpha_0) = 1,50887956$ è una retta limite, ogni retta con $d < \alpha_0$, non taglierà mai catenaria qualunque sia "a".

Meglio: la coppia di rette $y = \pm \operatorname{tg}(\alpha) x$, rappresenta il limite delle catenarie per "a" tendente a zero. Abbiamo disegnato catenarie



comprese per evidenziare il comportamento statico di una parete.

(cfr. Bollettino Ingegneri, n° 2/3 anno 1977, C. Brogi,

su alcuni aspetti delle curve funicolari")

Rette per l'origine degli assi, secanti le catenarie.

Quando $\alpha < \alpha_0$ la retta taglia le catenarie ogni curva in due punti, le cui coordinate sono le radici del sistema:

$$\begin{cases} y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \\ y = \operatorname{tg}(\alpha) x \end{cases}$$

$$x \cdot \operatorname{tg}(\alpha) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)} = x \operatorname{acosh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = x \operatorname{acosh}\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$$x_c = a \cdot \operatorname{arg} \operatorname{acosh}(\operatorname{tg} \alpha)$$

$$y_c = a \operatorname{tanh} \operatorname{arg} \operatorname{acosh}(\operatorname{tg} \alpha)$$

Esaminando i valori di "xacosh(x)" riportati in tabella si rileva che la funzione ammette un minimo per $x = 1,19967864025773\dots$ ove $xacosh(x) = 1,50887956153832\dots$ e ciò conferma che per valori di $tg\alpha < 1,5088795615\dots$ non esistono soluzioni cioè non esistono zette che tagliamo le catenarie.

Facciamo la derivata di $xacosh(x)$

$$\frac{d(xacosh(x))}{dx} = \frac{d\left(\frac{\cosh(x)}{x}\right)}{dx} = \frac{x \operatorname{sech} x - \cosh x}{x^2}$$

se poniamo = zero la derivata abbiamo:

$$\frac{\cosh(x)}{\operatorname{sech} x} = x \quad \coth(x) = x$$

$$\boxed{xacoth(x) = 1}$$

dalle tavole di $xacoth(x)=1$ abbiamo:

$$\boxed{x = \operatorname{ar}xacoth(1) = 1,19967864025773\dots}$$

La derivata di $raf(x)$ in generale = $raf'(x) - rarf(x)$ e se posta uguale a zero si ottiene il valore dell'argomento che l'annulla:

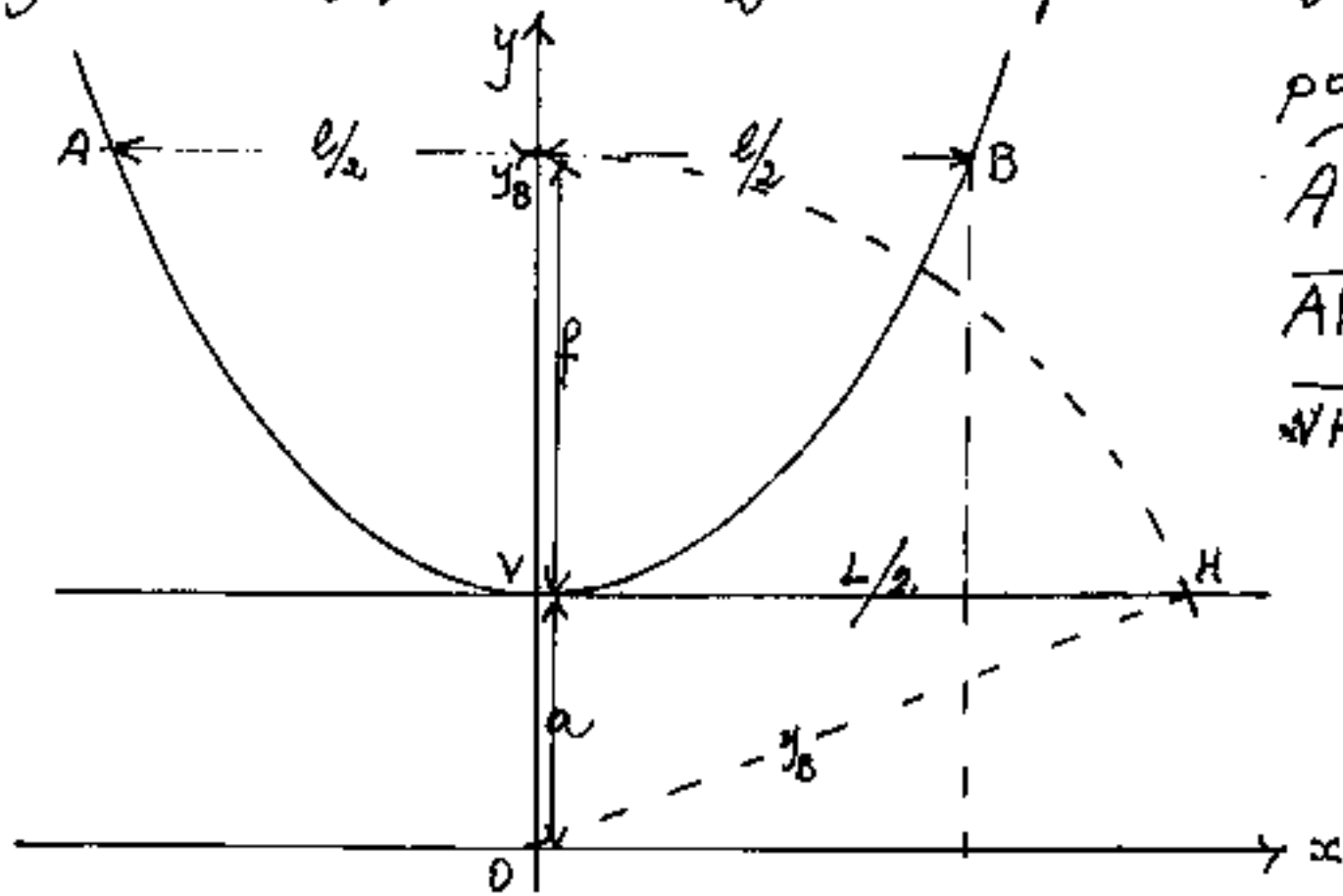
$$\boxed{x = \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

cioè:

$$\boxed{raf(x)/f'(x) = 1}$$

Relazioni fra gli elementi geometrici della Catenaria

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = a \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2} \quad \text{formula generale}$$



poniamo:

$$\widehat{AB} = L$$

$$\overline{AB} = l$$

$$\sqrt{OH} = L/2$$

Ricordiamo

$$\operatorname{sech}^2(x) + 1 = \cosh^2(x)$$

$$\cosh(x) - 1 = \operatorname{versh}(x)$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + a^2}$$

$$y_B = (a + f)$$

$$y_B = a \cosh\left(\frac{l/2}{a}\right) = a \sqrt{\operatorname{sech}^2\left(\frac{l/2}{a}\right) + 1}$$

$$a = \sqrt{y_B^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + f^2 + 2af - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$a = \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - f^2}{2f} = \frac{L^2 - 4f^2}{8f}$$

$$a = \frac{l/2}{\operatorname{argcversh}(f/l/2)}$$

$$a = \frac{l/2}{\operatorname{argcsech}(L/e)}$$

$$f = a \left(\cosh\left(\frac{l/2}{a}\right) - 1 \right)$$

$$f = \left[\left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \right) - a \right]$$

$$f = \frac{-\left(\frac{l}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 (\operatorname{argcsech}(L/e))^2}}{\operatorname{argcsech}(L/e)}$$

(in funzione di a, L)

(" " a, f)

(" " a, l)

(" " y_B, L)

(" " f, L)

(" " f, l)

(" " l, L)

(" " l, L)

(" " a, l)

(" " a, L)

(" " a, L)

(" " a, L)

(" " l, L)

(" " l, L)

$$L = 2\sqrt{f^2 + 2af} \quad (\text{in funzione di } f, a)$$

$$L = 2a \operatorname{sech}\left(\frac{l}{2a}\right) \quad (" \quad " \quad l, a)$$

$$L = l \left(2 \operatorname{sech}\left[\operatorname{argversh}\left(\frac{f}{2/a}\right)\right] \right) \quad (" \quad " \quad f, l)$$

$$l = 2a \left(\operatorname{argversh}\left(\frac{f}{a}\right) \right) \quad (" \quad " \quad f, a)$$

$$l = 2a \left[\operatorname{argsech}\left(\frac{L}{2a}\right) \right] \quad (" \quad " \quad L, a)$$

$$l = \frac{(L^2 - 4f^2)}{4f} \operatorname{argsech}\left[\frac{4fL}{L^2 - 4f^2}\right] \quad (" \quad " \quad L, f)$$

alcuni casi particolari

	$a = 1$	$f = a$	$l/2 = a$	$l/2 = a$
a	1	f	$l/2$	$l/2$
f	$\frac{(\sqrt{1+(l/2)^2} - 1)}{(\cosh(l/2) - 1)}$	a	$(\sqrt{2}-1)a$	$0,543080635a$
$l/2$	$\frac{(\sqrt{f^2+2f})}{(\operatorname{sech}(l/2))}$	$\sqrt{3} a$	a	$1,175201194a$
$l/2$	$\operatorname{argsech}(L/2)$	$1,316957897 \cdot a$	$0,881373587 \cdot a$	a
R	$R_0 = a$	$4a$	$2a$	$2,381097846a$

Relazioni fra gli elementi statici della catenaria

T = tensione in un punto generico della catenaria

T_{max} = " agli attacchi

H = " nel vertice = componente orizzontale di T

P_{max} = peso dell'intera fune

$P/2$ = " del tratto di fune dal vertice all'attacco

q = peso per unità di lunghezza

$l/2$ = semicorda agli attacchi = ascissa max = x_{max}

$l/2$ = semilunghezza max.

a = distanza dal vertice dall'origine degli assi

a = unità grafica delle lunghezze.

$$\boxed{a = \frac{H}{q}} \text{ da cui: } \boxed{H = qa} \quad ; \quad \boxed{q = \frac{H}{a}}$$

$$T_{max} = q\sqrt{(l/2)^2 + a^2} = \sqrt{\left(\frac{qL}{2}\right)^2 + H^2} = \sqrt{\left(\frac{P_{max}}{2}\right)^2 + H^2}$$

$$T_{max} = q(a+f) = (H + qf)$$

$$T_{max} = aq\sqrt{\operatorname{sech}^2\left(\frac{l/2}{2a}\right) + 1} = H\sqrt{\operatorname{sech}^2\left(\frac{ql}{2H}\right) + 1}$$

$$T_{max} = aq\cosh\left(\frac{l/2}{a}\right) = H\cosh\left(\frac{ql/2}{H}\right)$$

$$T = qa\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = H\cosh\left(\frac{qx}{H}\right) = qy; (x \text{ al posto di } l/2)$$

$$q = \frac{(T_{max} - H)}{f} = \frac{P_{max}}{L} = \frac{T}{y} = \frac{H}{a}$$

$$H = (T_{max} - qf) = \sqrt{T_{max}^2 - \left(\frac{P_{max}}{2}\right)^2} = \sqrt{T^2 - \left(\frac{P}{2}\right)^2}$$

Ricordiamo:

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} = (K) \quad ; \quad e^{2x} - 2Ke^x - 1 = 0$$

$$\operatorname{argsech}(K) = \boxed{x = \ln |K + \sqrt{K^2 + 1}|}$$

$$\text{cioè per } K=1 \rightarrow x = \boxed{\ln |1 + \sqrt{2}| = (0,881373587)}$$

$$\operatorname{sech}(0,881373587) = 1$$

$$(\sqrt{1 + \operatorname{tanh}^2} = \operatorname{cosh}) \quad ; \quad \operatorname{cosh}(0,881373587) = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tanh}(0,881373587) = 1/\sqrt{2}$$

$$\operatorname{coth}(0,881373587) = \sqrt{2}$$

$$\text{per } K = \sqrt{3} \rightarrow x = \ln |\sqrt{3} + 2| \rightarrow \operatorname{sech}(\ln |2 + \sqrt{3}|) = \sqrt{3}$$

$$\text{per } K = \sqrt{m} \rightarrow x = \ln |\sqrt{m} + \sqrt{m+1}| \rightarrow \operatorname{sech}(\ln |\sqrt{m} + \sqrt{m+1}|) = \sqrt{m}.$$

Abbiamo già dato le relazioni fra le curve osculatrici della catenaria, ed abbiamo visto (v. Vol I) che l'ellisse si approssima più delle altre coniche, cioè l'ellisse di semiasse: $(\sqrt{3})a$ in x , e $(3)a$ in y con centro in $y = 4a$, $x = 0$ cioè di equazione: $\frac{x^2}{3} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$.

Nel II volume abbiamo dato anche una tavola di confronto con le curve osculatrici.

Prima, la mancanza del nostro operatore "ca", impediva l'esplicitazione di certe incognite e quindi per evitare risoluzioni per tentativi, si distinguono due casi:

Le funzioni iperboliche inverse

Per comodità del lettore riportiamo un quadro delle funzioni iperboliche inverse, già esposte in altri volumi.

$$\begin{aligned} \cosh(x) = K & ; \operatorname{arcosh}[K] = x = \ln |K \pm \sqrt{K^2 - 1}| \\ \operatorname{senh}(x) = K & ; \operatorname{arsenh}[K] = x = \ln |K + \sqrt{K^2 + 1}| \\ \operatorname{tanh}(x) = K & ; \operatorname{artanh}[K] = x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \\ \operatorname{coth}(x) = K & ; \operatorname{arcoth}[K] = x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \\ \operatorname{versh}(x) = K & ; \operatorname{arversh}[K] = x = \ln |(K+1) \pm \sqrt{K^2 + 2K}| \end{aligned}$$

altre relazioni

$$\operatorname{arcosh}\left[\frac{T_{\max}}{H}\right] = \frac{g}{H} \left(\frac{1}{2}\right) = \ln \left| \frac{T_{\max}}{H} \pm \sqrt{\left(\frac{T_{\max}}{H}\right)^2 - 1} \right|$$

$$\boxed{\operatorname{zaversh}(x) = \operatorname{zarsenh}^2(x/2)} \quad (\text{Sansonne}) \quad (\text{infatti}):$$

$$\left[\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 \right) / x \right]^2 = \left(\frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{2} \right)^2 / \frac{x}{2} = \frac{(e^{x/2} - e^{-x/2})^2}{2x}$$

$$\frac{(e^{x/2} - e^{-x/2})^2}{2x} = \frac{e^{2x/2} + e^{-2x/2} - 2e^{x/2}e^{-x/2}}{2x} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x} =$$

$\left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 \right] / x$. Da questa relazione, dividendo ambo i termini per $x/2$ abbiamo:

$$\frac{1}{(x/2)} \operatorname{zaversh}(x) = \frac{1}{(x/2)} \operatorname{zarsenh}^2 \frac{x}{2} ; \frac{2 \operatorname{zaversh}(x)}{x} = \frac{\operatorname{senh}(\frac{x}{2}) \operatorname{senh}(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2}) \cdot (\frac{x}{2})}$$

cioè: $\boxed{\operatorname{zaversh}(x) = \frac{1}{2} (\operatorname{zarsenh}(\frac{x}{2}))^2}$

funi molto tese che venivano considerate a con-
figurazione parabolica;

funi poco tese per le quali si specificano le formule
della catenaria, ma, spesso risolte per tentativi.
(Cfr. O. Belluzzi - Scienza delle Costruzioni Vol I, cap.
115, ed Zanichelli-Bologna).

Si noti che il Belluzzi non utilizza il para-
metro "a" = unità di misura delle lunghezze, ma
senza ricordare che H (Kg) è la tensione nel vertice
e q = Kg per unità di lunghezza: $aq = H$
per cui: $a = H/q$ (formula già nota), pone:

$$\eta = \frac{1}{8} = \frac{P}{l} = \frac{H}{9l} \left(\cosh\left(\frac{9l}{2H}\right) - 1 \right)$$

formula che risolve per tentativi: $\frac{9l}{2H} = 0,4901$.

Noi poniamo: $\frac{P}{l/2} = \frac{2(\cosh(\frac{l/2}{a}) - 1)}{\frac{l/2}{a}} = 2a \operatorname{arversh}\left(\frac{l/2}{a}\right) = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 0,25$

$$\frac{l}{2} = a \left(\operatorname{arversh}\left[0,25\right] \right)$$

$$\frac{l}{2} = a(0,490110397)$$

$$L = 2a \operatorname{sech}(0,490110397) = (1,09937667)a$$

$$L = (1,040518293)l$$

$$qy_0 = S_{\max} = qa \cosh\left(\frac{l}{2a}\right) = qa(1,1225276) = 9l(1,145178315)$$

$$\frac{qH}{q} = 9l \frac{1,145178315}{1,1225276} = (1,020178315)9l$$

$\cosh\left(\frac{l/2}{a}\right) = \cosh\left(\frac{l/2}{H/q}\right) = \cosh\left(\frac{qL}{2H}\right)$; le espressioni sono equivalenti, però nella prima forma vediamo subito che: $l/2/a$ è un numero puro, cioè la lunghezza $l/2 = x$ è misurata nel segmento unitario "a" che va dall'origine degli assi al vertice del coseno iperbolico (catenaria).

($H = K_g =$ tensione nel vertice; $q = K_g/mL =$ peso per unità di lunghezza, $\left(\frac{l/2}{H/q}\right) = \frac{\text{metri}}{K_g / K_g \text{ metri}} = \frac{\text{metri}}{\text{metri}}$, un po' meno evidente).

$$f = (y_B - a) = f = a \left(\cosh\left(\frac{l/2}{a}\right) - 1 \right) = a \operatorname{versh}\left(\frac{l/2}{a}\right)$$

$$\frac{f}{l/2} = \frac{\operatorname{versh}\left(\frac{l/2}{a}\right)}{(l/2/a)} = \operatorname{caversh}\left(\frac{l/2}{a}\right)$$

$$\frac{f}{l} = \frac{1}{2} \operatorname{caversh}\left(\frac{l/2}{a}\right) \quad \left(\frac{l/2}{a}\right) = \operatorname{argcaversh}\left(2 \frac{f}{l}\right)$$

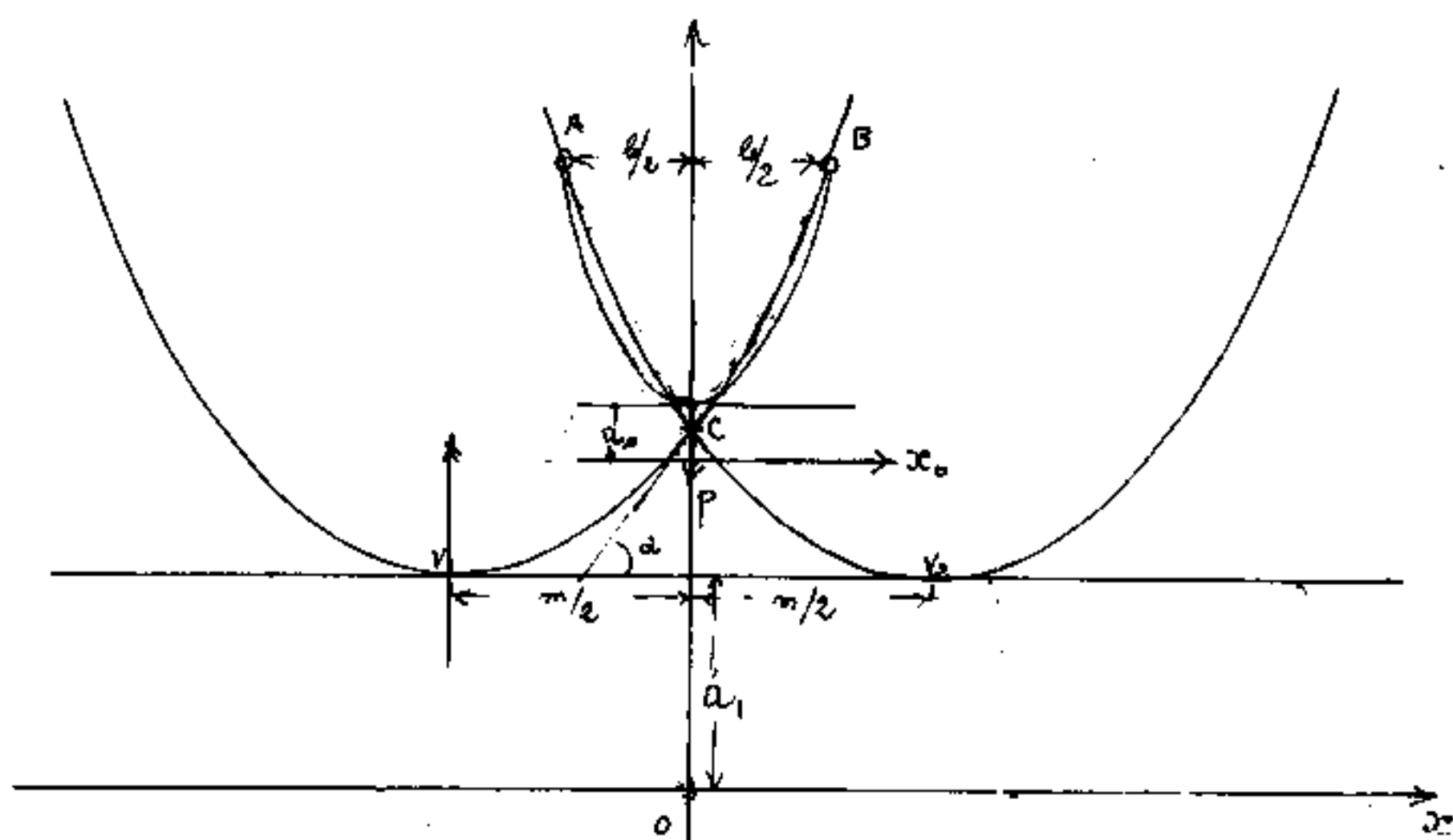
(catenaria)

$\frac{f}{l}$	$\frac{l/2}{a}$	$\operatorname{sech}\left(\frac{l/2}{a}\right)$ $L/2a$	L/l	$\cosh(l/2/a)$ S_{\max}/qa
1/8	0,490110397	0,509968833	1,040518293	1,1225276
1/10	0,394843545	0,40518326	1,026186868	1,0789687
1/12	0,33031895	0,336358689	1,01828457	1,055053159
1/16	0,248715242	0,251287408	1,010341814	1,031089405
1/20	0,199339047	0,20066183	1,006635846	1,0199339
1/25	0,159560547	0,160339743	1,004254	1,01277284
1/30	0,13313656	0,133530223	1,002956843	1,00887577

catenarie traslate orizzontalmente

Il caso che stiamo per studiare, è la base per il calcolo dei cavi soggetti a carichi concentrati.

Consideriamo due catenarie aventi lo stesso modulo "a" e traslate, in modo che la distanza orizzontale dei vertici sia "m" e sia q il peso per unità di lunghezza dei cavi.



$$y_B = a_1 \cosh\left(\frac{m+l_0}{2a_1}\right); \quad y_C = a_1 \cosh\left(\frac{m}{2a_1}\right)$$

$$\sqrt{y_B^2 - a_1^2} = a_1 \operatorname{sech}\left(\frac{m+l_0}{2a_1}\right) = \widehat{VB} = \widehat{AV}_2$$

$$\sqrt{y_C^2 - a_1^2} = a_1 \operatorname{sech}\left(\frac{m}{2a_1}\right) = \widehat{VC} = \widehat{CV}_2$$

$$\widehat{AC} = \widehat{CB} = a_1 \left(\operatorname{sech}\left(\frac{m+l_0}{2a_1}\right) - \operatorname{sech}\left(\frac{m}{2a_1}\right) \right) = \frac{l_0}{2} = a_0 \operatorname{sech}\left(\frac{l_0}{a_0}\right)$$

$$\text{Da cui: } \frac{l_0}{l_0} = \cosh \frac{l_0}{a_0} ; a_0 = \frac{l_0/2}{\operatorname{arccosh}(l_0/2)}$$

$$y_{OB} = a_0 \cosh\left(\frac{l_0/2}{a_0}\right)$$

con ciò abbiamo gli elementi per tracciare l'asse x_0 relativo alla catenaria lunga L_0 sospesa in A e B . Se alla catenaria $A \vee B$ si applica in V_0 un peso P pari ai due tratti \widehat{CV}_1 e \widehat{CV}_2 , cioè:

$$P = 2qa_1 \sinh\left(\frac{m}{2a_1}\right)$$

la catena assume la configurazione ACB . Infatti la tensione in C è data da

$$T_c = qy_c = qa_1 \cosh\left(\frac{m}{2a_1}\right)$$

$$\text{d'altra parte: } \sinh \frac{m}{2a_1} = \operatorname{tg} \alpha ; \operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{\sinh \frac{m}{2a_1}}{\cosh \frac{m}{2a_1}}$$

$$\frac{P}{2} = T_c \operatorname{sen} \alpha = qa_1 \cosh\left(\frac{m}{2a_1}\right) \frac{\sinh \frac{m}{2a_1}}{\cosh \frac{m}{2a_1}}$$

$$\underline{P = 2qa_1 \sinh\left(\frac{m}{2a_1}\right)}$$

Per fissare le idee facciamo il calcolo numerico dell'esempio in figura.

Siamo in cui:

$$a_1 = 2 ; m = 4.5 ; l_0 = 2.50 ; q = \text{peso Kg/cm.}$$

$$x_B = \frac{m+l}{2} = \frac{4.5+2.5}{2} = x_B = 3.5 ; x_c = \frac{m}{2} = \frac{4.5}{2} = 2.25$$

$$y_B = 2 \cosh\left(\frac{3.5}{2}\right) = 5.928375619 ; y_c = 2 \cosh\left(\frac{2.25}{2}\right) = 3.404869316$$

$$(y_B - y_c) = 2.523506303$$

$$\widehat{V_1 B} = 2 \sinh\left(\frac{3.5}{2}\right) = 5.580828733 ; \widehat{V_1 C} = 2 \sinh\left(\frac{2.25}{2}\right) = 2.75564382$$

$$\widehat{V_1 B} - \widehat{V_1 C} = \boxed{2.82526435 = \widehat{CB}} = l_0$$

$$\frac{L_0}{l_0} = \frac{(2) 2,82526435}{2,50} = 2,260211481$$

Il modulo della catenaria AVB sia a_0

$$a_0 = \frac{l_0/2}{\operatorname{argcsinh}(L_0/l_0)}$$

$$a_0 = \frac{2,5/2}{\operatorname{argcsinh}(2,260211481)}$$

$$a_0 = \frac{1,25}{2,38720951} = \boxed{0,523623919 = a_0}$$

$$y_{0B} = a_0 \cosh\left(\frac{l_0/2}{a_0}\right) = 2,873377914$$

$$L_0/2 = a_0 \operatorname{sech}\left(\frac{l_0/2}{a_0}\right) = 2,825264346 = \overline{CB} \quad (\text{torna})$$

$$f_0 = (y_{0B} - a_0) = 2,349753995$$

$$(y_B - y_C) = 2,523507303$$

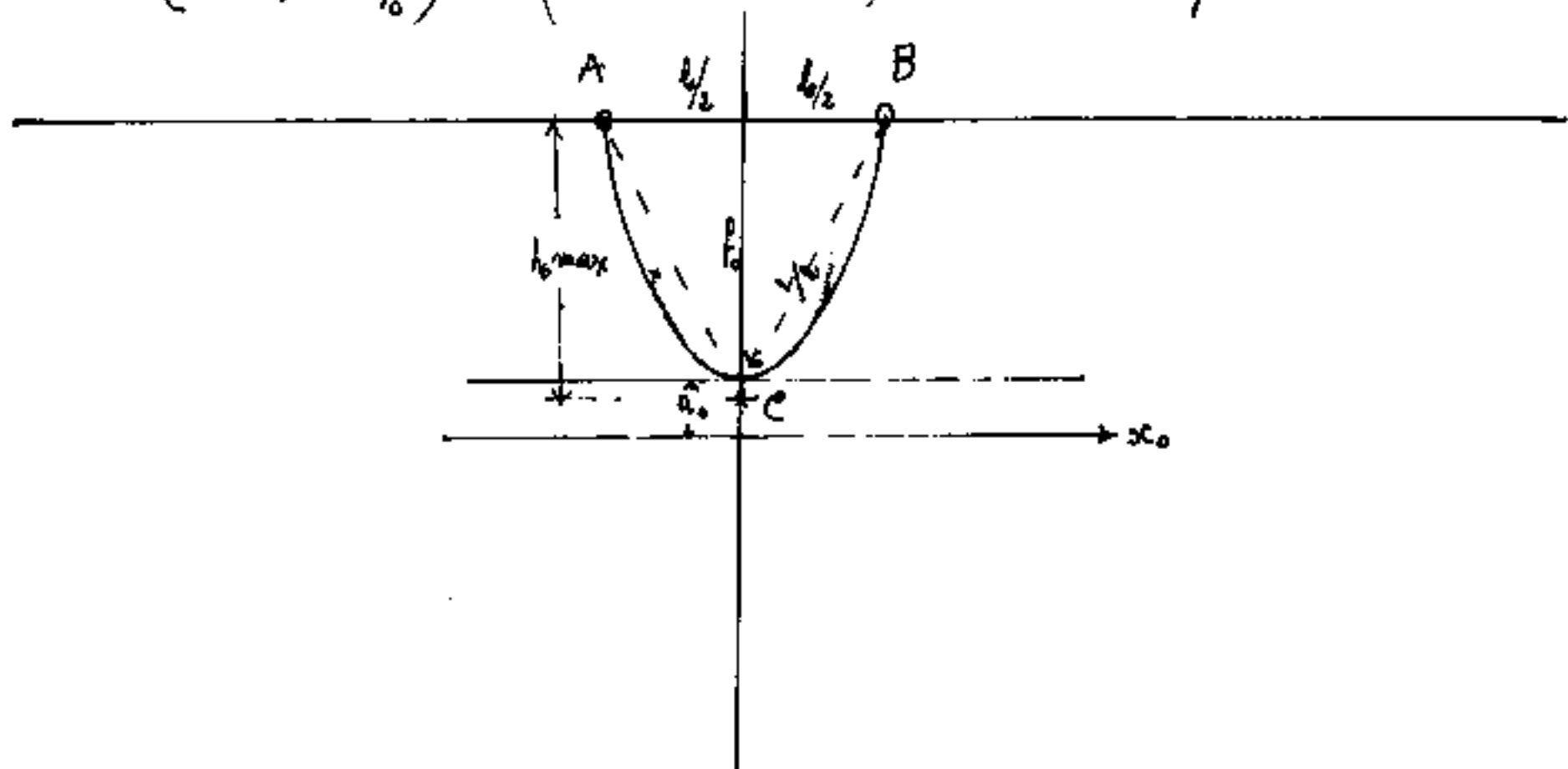
percorso di P da V_0 a C: $\overline{V_0C} = (y_B - y_C) - f_0$

$$\overline{V_0C} = 0,173753308$$

Supponiamo ora di porre sulla catenaria fissata in $\overline{AB} = l_0 = 2,5 \text{ cm.}$; lunga $L_0 = 5,650528702$ di modulo $a_0 = 0,523623919$; un peso $P_1 = nP$; equivale ad attaccare ad $L_0/2$ (tagliando la fune) due pezzi, uno per parte, lunghi: $\frac{nP}{2g} = \overline{V_0C}$.

Il percorso V_0C non diverrà n volte tanto, infatti essendo $\frac{L_0}{2} = 2,82526435$; $\frac{l_0}{2} = 1,25$; per funi inestensibili la massima distanza di C da \overline{AB} sarà: $h_{\max} = \sqrt{\left(\frac{L_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{l_0}{2}\right)^2} = 2,533696637$

$(h_{\max} - f_0) = (0,183942641)$ massimo spostamento di P



Come si vede non v'è proporzione fra azione - peso e spostamento. In campo elastico per piccoli spostamenti si accetta valida la legge di Hooke, ed il lavoro compiuto vale: $\frac{1}{2}(\text{sollecitazione}) \cdot (\text{deformazione})$. La deformazione nell'equilibrio gravitazionale segue leggi diverse, (non lineari).

Supponiamo di aggiungere in V_0 un peso minore di $P = 2q\sqrt{l_0} = (2q)(2,755564382) = q(5,511128764)$ per esempio: $\frac{P}{2}$ cioè: $q(2,755564382)$ per cui $\frac{\sqrt{l_0}}{n} = (1,37778219)$. Dobbiamo calcolare il nuovo " a_n " ed il nuovo " m_n ".

Sappiamo che:

$$L/2 = \widehat{V}_0 B = \widehat{C}_m B = 2,82526435 \text{ (centimetri)}$$

$$\widehat{C}_m \widehat{V}_m = \underline{1,37778219} \quad "$$

$$\widehat{V}_m \widehat{C}_m + \widehat{C}_m B = \widehat{V}_m B = 4,20304654 \quad "$$

d'altra parte:

$$\widehat{V}_m \widehat{C}_m = a_m \operatorname{sech}\left(\frac{m_m/2}{a_m}\right) = 1,37778219$$

$$\widehat{V}_m B = a_m \operatorname{sech}\left(\frac{(m_m+l)/2}{a_m}\right) = 4,20304654$$

Sono due equazioni nelle incognite "a_m" ed "m_m"
($l/2 = 2,5/2 = 1,25$ (centimetri))

$$\frac{m}{2a_m} + \frac{l}{2a_m} = \operatorname{argsech}\left(\frac{4,20304654}{a_m}\right)$$

$$\frac{m}{2a_m} = \operatorname{argsech}\left(\frac{1,37778219}{a_m}\right)$$

$$\frac{l}{2a_m} = \operatorname{argsech}\left(\frac{4,20304654}{a_m}\right) - \operatorname{argsech}\left(\frac{1,37778219}{a_m}\right)$$

si è così ridotto il sistema ad una equazione in una incognita: $a_m = 1,29104356096$ (soluzione)

da cui:

$$\frac{m}{2} = a_m \operatorname{argsech}\left(\frac{1,37778219}{a_m}\right) = 1,291043561 \operatorname{argsech}(1,067184897)$$

$$\frac{m}{2} = (1,291043561)(0,928091688) = \underline{1,198206798} = \frac{m}{2}$$

$$y_B = a_m \cosh\left(\frac{(m+l)/2}{a_m}\right) = 1,291043561 \cosh\left(\frac{1,198206798 + 1,25}{1,291043561}\right)$$

$$y_B = 4,396861803.$$

$$\widehat{V}_B = a_m \operatorname{sech}\left(\frac{(m+e)/2}{a_m}\right) = 1,291043561 \operatorname{sech}\left(\frac{2,448206798}{1,291043561}\right)$$

verifica: $\widehat{V}_B = 4,20304654$

$$y_c = a_m \operatorname{cosh}\left(\frac{m/2}{a_m}\right) = 1,291043561 \operatorname{cosh}\left(\frac{1,198206798}{1,291043561}\right)$$

$$y_c = 1,888141213$$

$$a_m \operatorname{sech}\left(\frac{m/e}{a_m}\right) \text{ verifica} = \widehat{V}_C = 1,37778219$$

$$y_B - y_c = 4,396861803 - 1,888141213 = 2,50872059$$

$$(y_B - y_c) - f = 2,50872059 - 2,349753995 = \underline{0,158966595}$$

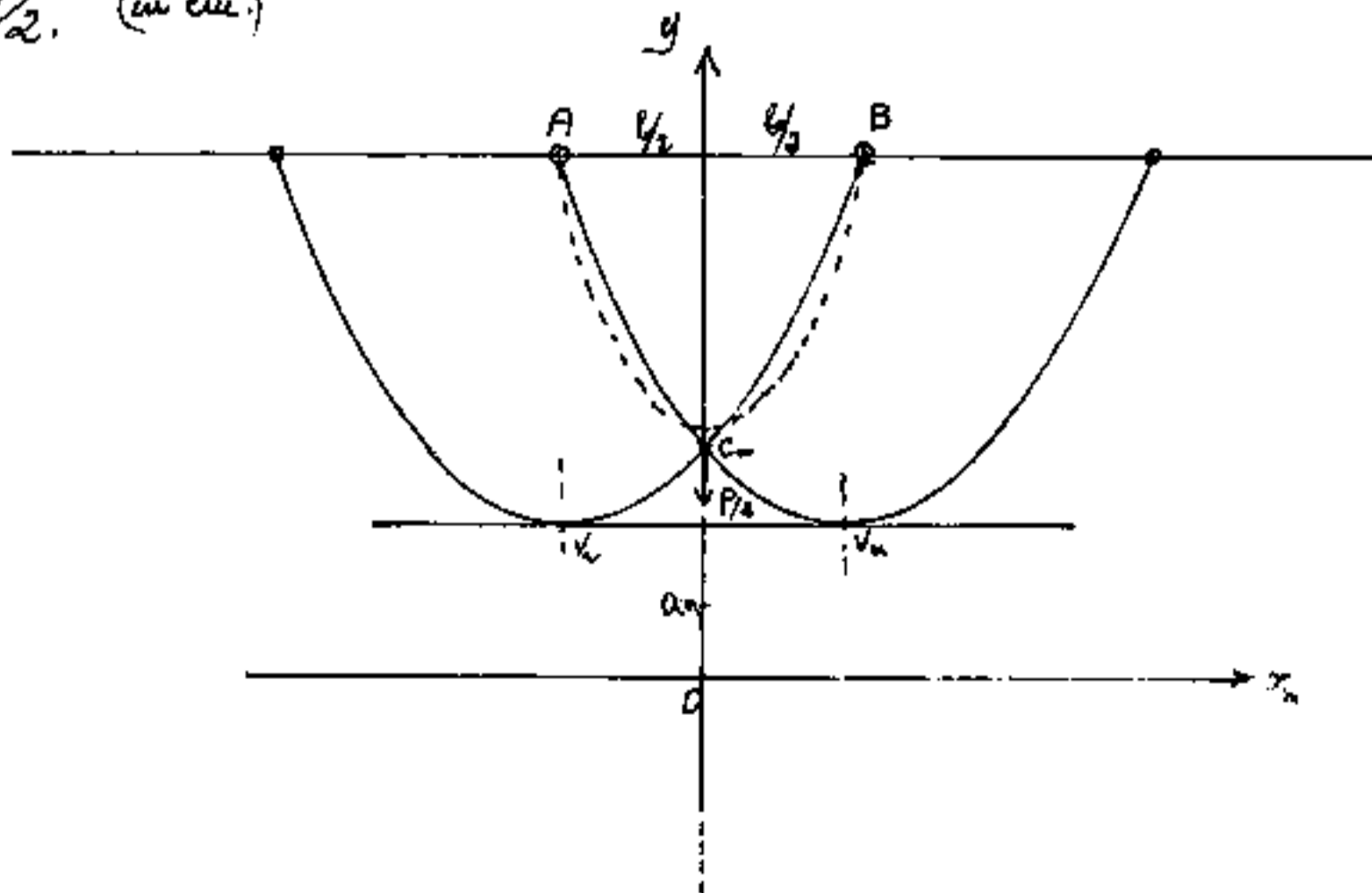
quindi:

massimo spostamento di V_0 , ($P=\infty$): $\delta = 0,183942641$

spostamento con $P = (5,511128764)q$ $\delta = 0,173753308$

" " $P/2 = (2,755564382)q$ $\delta = 0,158966595$

Riportiamo il grafico delle due catenarie dovute a $P/2$. (in cm.)



Per l'equilibrio in C si può pensare che se fissiamo in M ed N le due catenarie e togliamo la catenaria ACB, l'azione di sostegno di ACB può essere riferita all'azione $P/2$ rivolta verso l'alto. cioè se consideriamo una fune lunga:

$$2(\overline{VC} + \overline{CB} + \overline{VC}) = 4\overline{VC} + 2\overline{CB} \text{ appesa ad } \overline{MN}$$

ove $\overline{MN} = (2m + l)$; avremo:

$$(4\overline{VC}_m + 2\overline{CB}_m) = L_e = 4(1,37778219) + 2(2,82526435) = 11,16165746$$

$$(2m + l) = l_e = (2(2,396413596) + 2,5) = 7,292827192$$

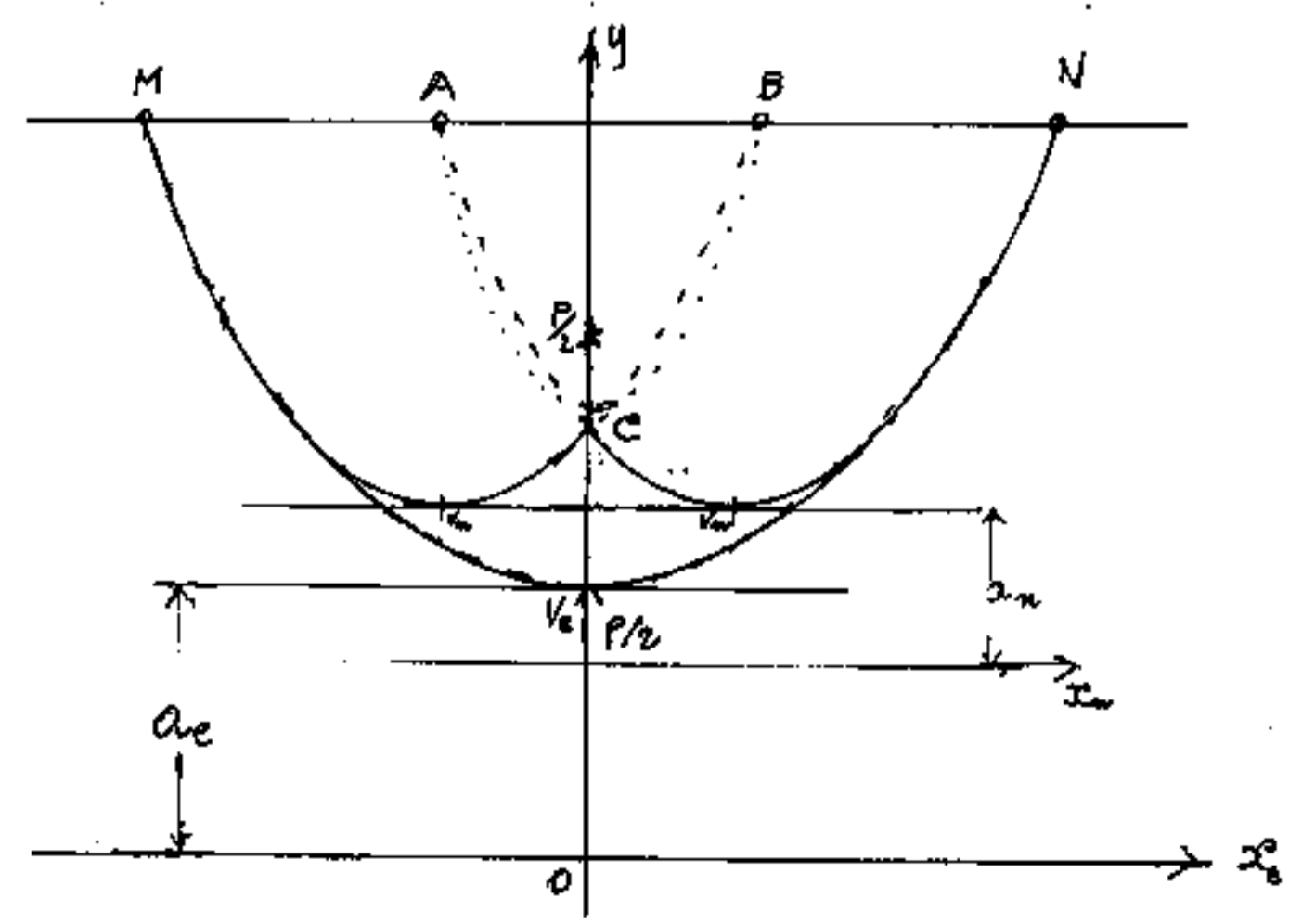
$$\frac{L_e}{l_e} = \frac{11,16165746}{7,292827192} = 1,530498004$$

$$a_e = \frac{l/2}{\operatorname{arccosh}(L_e/l_e)} = \frac{7,292827192/2}{\operatorname{arccosh}(1,530498004)} = \frac{3,646413596}{1,665031385}$$

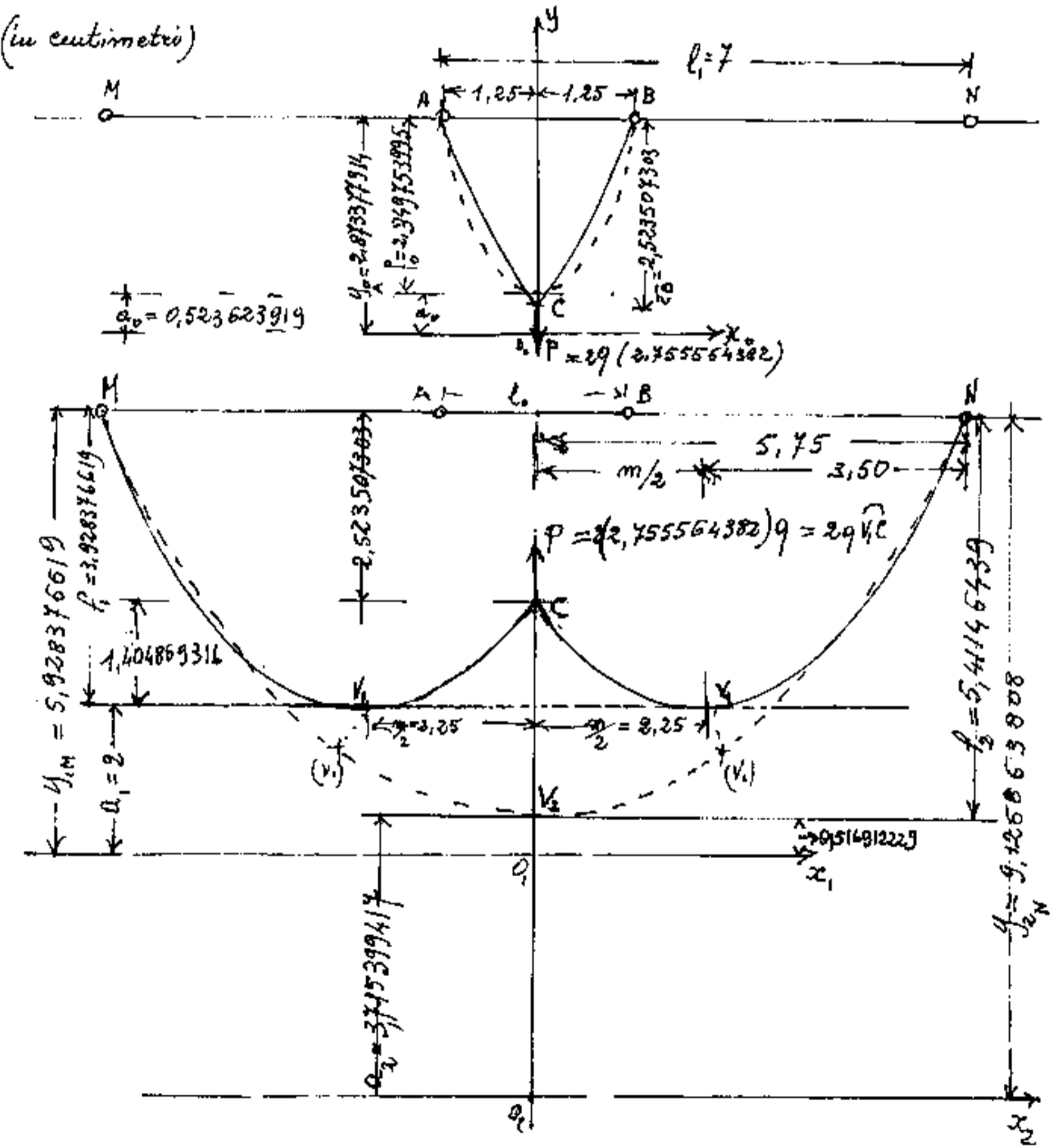
$$a_e = 2,189996915$$

$$y_N = a_e \cosh\left(\frac{l/2}{a_e}\right) = 2,189996915 \cosh\left(\frac{3,646413596}{2,189996915}\right)$$

$$y_N = 5,995142684$$



Quindi il punto comune C di due catenarie uguali traslate orizzontalmente di m , è un punto che unisce altre due catenarie soggette al carico $P = 2q \cdot a_1 \cdot \sinh(\frac{m}{a_1}) = 2q \sqrt{16}$, cioè pari ai tratti delle due catenarie, che vanno dai vertici V_1 a C moltiplicati per il peso per unità di lunghezza ($q \frac{kg}{cm}$). Abbiamo già calcolato la catenaria $A\widehat{V}_0B$ di modulo a_0 ove $\overline{AB} = l_0$, vogliamo calcolare la catenaria inferiore: $M\widehat{V}_2N$ di modulo a_2 , col peso P .



La catenaria MV_2N che vogliamo calcolare è lunga $L_2 = 2(\widehat{MV}_1 + \widehat{V}_1C) = 2(V_1B + V_1C) = 2(5,580828733 + 2,755564382)$

$$L_2 = 2(8,336393115) = 16,67278623$$

$$\overline{MN} = l_2 = 11,5 = l_2 = 2(5,75)$$

$$\left(\frac{L_2}{l_2}\right) = 1,449807498$$

$$a_2 = \frac{l_2/2}{\operatorname{argcosh}(L_2/l_2)} = \frac{5,75}{\operatorname{argcosh}(1,449807498)} = \frac{5,75}{1,54761288212}$$

$$a_2 = 3,715399417$$

Con ciò la catenaria MV_2N è completamente definita:

$$y_{2N} = a_2 \cosh\left(\frac{l_2/2}{a_2}\right) = 9,126863808$$

$$f_2 = (y_{2N} - a_2) = 5,41146439$$

Interessa il procedimento inverso, cioè data una catenaria (cavo sospeso a livello orizzale) lo carichiamo nel vertice, oppure spostiamo il vertice di un tratto verticale noto, trovare l'equazione e la traslazione delle due catenarie che sovrappongono la catenaria deformata dopo l'applicazione del carico

Procediamo per gradi per arrivare al calcolo di cavi con carichi comunque diretti.

Per avere una facile verifica anche numerica, consideriamo data la catenaria: $M\widehat{V}_2N = L_2$

$$L_2 = 2(8,336393115) = 16,67278623. \quad ; \quad (\text{moto (9)})$$

$$l_2 = \overline{MN} = 2(5,75) = 11,5$$

da cui: $a_2 = 2,71539417$; $\frac{P}{l_2} = 5,41146439$; $y_{2N} = 9,126863808$

Caricata nel vertice con un carico verso l'alto

$$P = q(2\widehat{V}_2C) = 2q(2,755564382) = P = q(5,511128764),$$

obbiamo calcolare le caratteristiche delle due catenarie di modulo " a_1 " (incognita), traslate di " m " (incognita).

Osseviamo:

1) Per la simmetria del vertice V_2 giacente su y P giacerà su y ed i vertici V_1 avranno per ascissa $\overline{xV_1} = \pm m/2$

2) La componente orizzontale della tensione in un punto della catenaria è costante ed è pari ad $H =$ tensione nel vertice; perciò, la componente verticale sarà il peso del tratto cavo che va da quel punto al vertice.

Perciò: $\widehat{CV}_1 = \frac{P}{2q} = 2,755564382 = a_1 \operatorname{sech}\left(\frac{m/2}{a_1}\right)$

$$L_{1/2} = \widehat{V_1N} = L_{1/2} - \widehat{CV}_1 = 8,336393115 - 2,755564382 = 5,580828733$$

$$l_{1/2} = \frac{l_2}{2} - \frac{m}{2} = (5,75 - m/2)$$

$$y_{1c} = a_1 \operatorname{cosh}\left(\frac{m/2}{a_1}\right);$$

$$\begin{cases} a_1 \operatorname{sech}\left(\frac{m/2}{a_1}\right) = \widehat{CV}_1 = 2,755564382 \\ a_1 \operatorname{sech}\left(\frac{5,75 - m/2}{a_1}\right) = \widehat{V}_1 N = 5,580828733 \end{cases}$$

Due equazioni nelle due incognite: $m/2$; a_1 .

$$(m/2) = a_1 \operatorname{argsech}\left(\frac{\widehat{CV}_1}{a_1}\right)$$

$$\boxed{\operatorname{sech}\left(\frac{5,75}{a_1} - \operatorname{argsech}\left(\frac{\widehat{CV}_1}{a_1}\right)\right) = \left(\frac{\widehat{V}_1 N}{a_1}\right)}$$

Una equazione nell'incognita "a"

$$\operatorname{sech}\left(\frac{5,75}{a_1} \sqrt{\left(\frac{\widehat{CV}_1}{a_1}\right)^2 + 1}\right) - \left(\frac{\widehat{CV}_1}{a_1}\right) \cosh\left(\frac{5,75}{a_1}\right) = \frac{\widehat{V}_1 N}{a_1}$$

$$\left(\sqrt{\left(\widehat{CV}_1\right)^2 + a_1^2}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{5,75}{a_1}\right) = \widehat{V}_1 N + \left(\widehat{CV}_1\right) \cosh\left(\frac{5,75}{a_1}\right)$$

elevando a quadrato

$$\left[\left(\widehat{CV}_1\right)^2 + a_1^2\right] \operatorname{sech}^2\left(\frac{5,75}{a_1}\right) = \left(\widehat{V}_1 N\right)^2 + 2\left(\widehat{V}_1 N\right)\left(\widehat{CV}_1\right) \cosh\left(\frac{5,75}{a_1}\right) + \left(\widehat{CV}_1\right)^2 \cosh^2\left(\frac{5,75}{a_1}\right)$$

$$\begin{aligned} \left(\widehat{CV}_1\right)^2 \cosh^2\left(\frac{5,75}{a_1}\right) - \left(\widehat{CV}_1\right)^2 + a_1^2 \cosh^2\left(\frac{5,75}{a_1}\right) - a_1^2 &= \\ &= \widehat{CV}_1^2 \cosh^2\left(\frac{5,75}{a_1}\right) + \left(\widehat{V}_1 N\right)^2 + 2\left(\widehat{V}_1 N\right)\left(\widehat{CV}_1\right) \cosh\left(\frac{5,75}{a_1}\right) \end{aligned}$$

$$a_1^2 \cosh^2\left(\frac{5,75}{a_1}\right) - 2\left(\widehat{V}_1 N\right)\left(\widehat{CV}_1\right) \cosh\left(\frac{5,75}{a_1}\right) - \left(\widehat{CV}_1^2 + \widehat{V}_1^2 N^2 + a_1^2\right) = 0$$

$$\cosh^2\left(\frac{5,75}{a_1}\right) - 2 \frac{\left(\widehat{V}_1 N\right)\left(\widehat{CV}_1\right)}{a_1^2} \cosh\left(\frac{5,75}{a_1}\right) - \left(\frac{\left(\widehat{CV}_1\right)^2 + \left(\widehat{V}_1 N\right)^2}{a_1^2} + 1\right) = 0$$

$$\cosh^2\left(\frac{5,75}{a_1}\right) - \frac{30,75666576}{a_1^2} \cosh\left(\frac{5,75}{a_1}\right) - \frac{38,73878441}{a_1^2} - 1 = 0$$

risolta col computer (Derive): $\boxed{a_1 = 2}$ (cioè per tentativi)

$$\frac{m}{2} = 2 \operatorname{argsech}\left(\frac{2,755564382}{2}\right) = 2,25$$

$$\boxed{m = 4,5}$$

Se anziché il carico P fosse dato lo spostamento del vertice V_2 , cioè: $\overline{V_2C}$, si può ancora calcolare: a_1 , ed $m/2$ che determinano le due catenarie affiancate.

Notiamo che la linea comune delle catenarie a_0, a_1, a_2 è: \overline{MABN} alla quale è opportuno riferirsi.

$$\left(f_2 - \overline{V_2C} \right) = \left(y_{IN} - y_{1c} \right) = h = (\text{distlivello verticale})$$

$$a_2 \left(\cosh \left(\frac{l_2}{a_2} \right) - 1 \right) - \overline{V_2C} = \left(a_1 \left[\cosh \left(\frac{l_2 - m}{a_1} \right) - \cosh \left(\frac{m}{a_1} \right) \right] \right)$$

Se C raggiungesse la linea degli appoggi: \overline{MABN}

$(y_{IN} = y_{1c})$ per cui:

$$\boxed{\overline{V_2C} = f_2}$$

ed anche:

$$\cosh \left(\frac{(l_2 - m)/2}{a_1} \right) = \cosh \left(\frac{m/2}{a_1} \right)$$

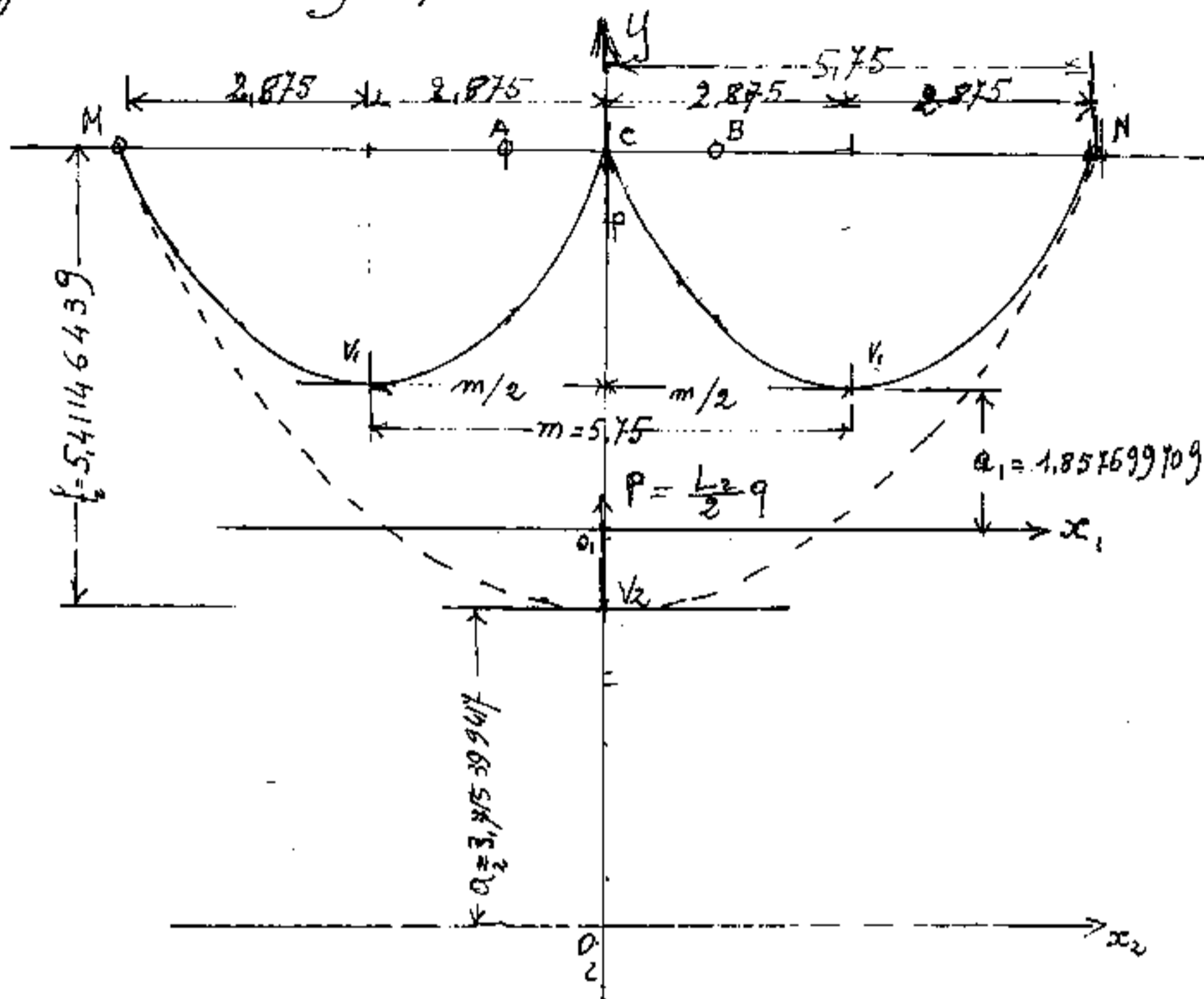
$$\boxed{\frac{l_2}{2} = m}$$

$$a_1 \operatorname{sech} \left(\frac{m/2}{a_1} \right) = \frac{l_2}{4} ; a_1 \operatorname{sech} \left(\frac{l_2/4}{a_1} \right) = \frac{l_2}{4} ; \operatorname{arcsch} \left(\frac{l_2}{4a_1} \right) = \frac{l_2}{4a_1}$$

$$\frac{l_2}{4a_1} = \operatorname{arcsch} \left(\frac{l_2}{4a_1} \right) = \frac{l_2}{2a_2} \quad \text{per cui: } \boxed{a_1 = a_2/2}$$

Cosa implica $a_1 = \frac{a_2}{2}$, che le catenarie a_1 sono in scala doppia, cioè sono metà delle catenarie a_2 .

facciamo il grafico:



Poiché: $a_2 = 3,715399417$ avremo: $a_1 = 1,857699709$

$$y_{1N} = a_1 \cosh \frac{l}{4 \cdot a_1} = 1,857699709 \cosh \left(\frac{3,5}{1,857699709} \right)$$

$$y_{1N} = 4,563431904$$

$$f_1 = (y_{1N} - a) = 2,705732195$$

$$P = 2q a_1 \operatorname{sech} \left(\frac{2,875}{a_1} \right) ; \quad \boxed{P = q(8,336393115)}$$

Se: $\sqrt{a_2} \neq f_2$ si avrà che verso il basso non potrà

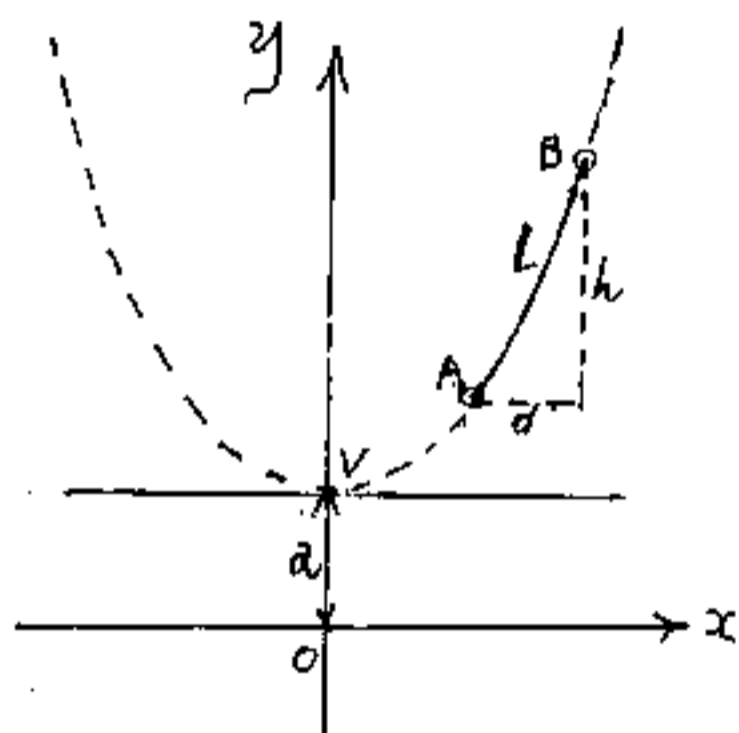
superare: $\delta = \sqrt{\left(\frac{V_2 M}{2} \right)^2 - \left(\frac{l}{2} \right)^2} - f^2 = \sqrt{8,336393115^2 - 5,75^2} - 5,41146439$

$$\delta = 6,035971352 - 5,41146439 = 0,624506962 \text{ (verso il basso)}$$

$$\delta = 6,035971352 + 5,41146439 = 11,44743574 \text{ (verso l'alto)}$$

Archi di Catenarie fra punti a diverso livello

Nota la distanza orizzontale "d", ed il dislivello "h" fra due punti A e B, e la lunghezza "L_{AB}" del tratto di fune da appendere fra A e B, trovare il modulo "a" e la posizione degli assi di riferimento della catenaria passante per A e B. Poniamo: L_{AB} = l



$$(x_B - x_A) = d$$

$$(y_B - y_A) = h$$

$$\widehat{AB} = l$$

$$\widehat{vB} - \widehat{vA} = l$$

$$y_B = a \cosh(x_B/a) ; \widehat{vB} = a \operatorname{sech}(x_B/a)$$

$$y_A = a \cosh(x_A/a) ; \widehat{vA} = a \operatorname{sech}(x_A/a)$$

sottraendo membro a membro, sostituendo e dividendo per a:

$$\left(\frac{h}{a}\right) = \cosh\left(\frac{x_A+d}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x_A}{a}\right)$$

$$\left(\frac{l}{a}\right) = \operatorname{sech}\left(\frac{x_A+d}{a}\right) - \operatorname{sech}\left(\frac{x_A}{a}\right)$$

elevando a quadrato i due membri delle due equazioni si ha:

$$\left(\frac{l}{a}\right)^2 = \cosh^2\left(\frac{x_A+d}{a}\right) + \cosh^2\left(\frac{x_A}{a}\right) - 2\cosh\left(\frac{x_A+d}{a}\right)\cosh\left(\frac{x_A}{a}\right)$$

$$\left(\frac{l}{a}\right)^2 = \operatorname{sech}^2\left(\frac{x_A+d}{a}\right) + \operatorname{sech}^2\left(\frac{x_A}{a}\right) - 2\operatorname{sech}\left(\frac{x_A+d}{a}\right)\operatorname{sech}\left(\frac{x_A}{a}\right)$$

Sottraendo membro a membro e ricordando
che: $\cosh^2(x) - \operatorname{sech}^2(x) = 1$;

$$\text{che: } (\cosh \alpha \cosh \beta - \operatorname{sech} \alpha \operatorname{sech} \beta) = \cosh(\alpha - \beta)$$

avremo:

$$\left(\frac{l}{a}\right)^2 - \left(\frac{l}{a}\right)^2 = 1 + 1 - 2 \cosh\left(\frac{x_A+d}{a} - \frac{x_A}{a}\right)$$

semplificando e dividendo per (-2) :

$$\boxed{\left(\frac{l^2 - h^2}{2a^2}\right) = \cosh\left(\frac{d}{a}\right) - 1 = \operatorname{verosh}\left(\frac{d}{a}\right)}$$

dividendo per d/a abbiamo:

$$\boxed{\left(\frac{l^2 - h^2}{2ad}\right) = \operatorname{caverosh}\left(\frac{d}{a}\right)}$$

dividendo ancora per $(\frac{d}{a})$:

$$\left(\frac{l^2 - h^2}{2d^2}\right) = \operatorname{cavcaverosh}\left(\frac{d}{a}\right)$$

ricordando che: $\operatorname{cavcaverosh}(x) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{cavsech} \frac{x}{2}\right)^2$

formula che abbiamo dimostrato al paragrafo

"altre relazioni" del capitolo: "Relazioni fra gli elementi
statici della catenaria"; abbiamo:

$$\frac{l^2 - h^2}{2d^2} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{cavsech}\left(\frac{d}{2a}\right)\right)^2$$

$$\text{cioè: } \sqrt{\frac{l^2 - h^2}{d^2}} = \operatorname{arsinh} \frac{d}{2a}$$

$$a = \frac{d}{2 \operatorname{arsinh} \left(\sqrt{\frac{l^2 - h^2}{d^2}} \right)}$$

Importantissima relazione che esplicita il modulo "a" della catenaria cercata in funzione dei tre elementi noti: l, d, h; che, con le tavole di $\operatorname{arsinh}(x)$, è di risoluzione immediata.

Se sviluppiamo il sistema delle due equazioni iniziali si ha:

$$\left(\frac{h}{a}\right) = \cosh\left(\frac{x_A}{a}\right) \cosh\left(\frac{d}{a}\right) - \operatorname{sinh}\left(\frac{x_A}{a}\right) \operatorname{sinh}\left(\frac{d}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x_A}{a}\right)$$

$$\frac{l}{a} = \operatorname{sinh}\left(\frac{x_A}{a}\right) \cosh\left(\frac{d}{a}\right) + \cosh\left(\frac{x_A}{a}\right) \operatorname{sinh}\left(\frac{d}{a}\right) - \operatorname{sinh}\left(\frac{x_A}{a}\right)$$

sottraendo membro a membro, si ha:

$$\left(\frac{l-h}{a}\right) = \left[\cosh\left(\frac{x_A}{a}\right) - \operatorname{sinh}\left(\frac{x_A}{a}\right) \right] \left[\operatorname{sinh}\left(\frac{d}{a}\right) - \cosh\left(\frac{d}{a}\right) + 1 \right]$$

ricordando che:

$$\cosh(u) - \operatorname{sinh}(u) = e^{-u}$$

$$\left(\frac{l-h}{a}\right) = \left(e^{-x_A/a} \right) \left(1 - e^{-d/a} \right)$$

da cui:

$$x_A = a \ln \left(\frac{a}{l-h} \left(1 - e^{-d/a} \right) \right)$$

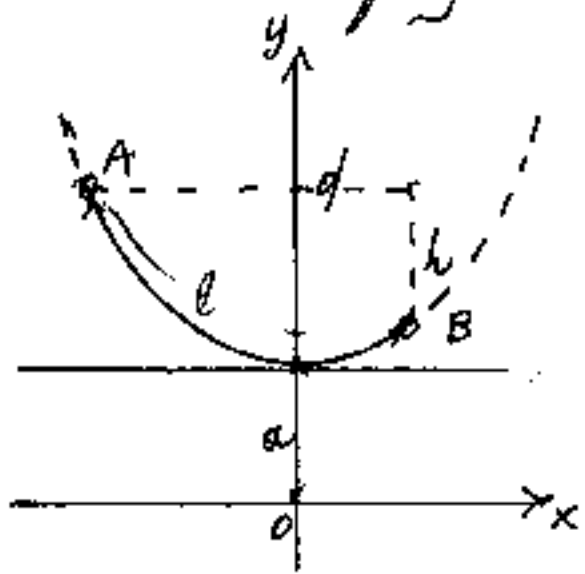
$$y_A = a \cosh\left(\frac{x_A}{a}\right)$$

$$\begin{aligned} x_B &= (x_A + d) \\ y_B &= (y_A + h) \end{aligned}$$

Attenzione!

Occorre fare molta attenzione ai segni di h . Noi consideriamo positivi i versi degli assi x e y quindi in figura abbiamo A e B nel I quadrante e quindi, essendo A più in basso, h è positiva.

Ma se la figura fosse stata come quella a



fianco h deve prendersi negativa essendo B a quota inferiore. Il tratto \widehat{AB} deve considerarsi da sinistra a destra.

Un'altra osservazione importante è sull'espressione: $\sqrt{\frac{l^2 - h^2}{d^2}}$ infatti: per la realtà delle radici: $(l > h)$ è condizione necessaria ma non sufficiente per determinare il modulo della catenaria infatti non esistono arcosenh $\sqrt{\frac{l^2 - h^2}{d^2}}$ per valori minori di uno (1) quando $l^2 - h^2 = d^2$ si ha che l è l'ipotenusa del triangolo rettangolo di cateti d ed h , che non può avere ipotenuse minori.

La condizione: $\sqrt{\frac{l^2 - h^2}{d^2}} = 1$ porta alla:

$$a = \frac{d/2}{\operatorname{arcsinh}(1)} = \frac{d/2}{0} = \infty$$

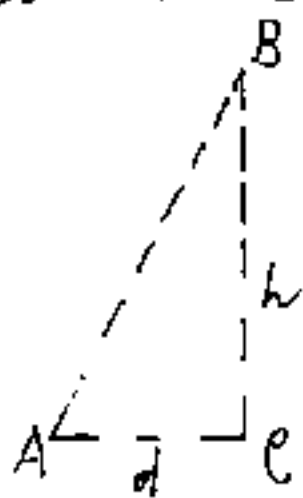
$$a = \infty$$

(Ricordando che nella catenaria la massima curvatura, cioè il raggio minimo, è nel vertice, e che il raggio nel vertice: $R_v = a$; se $R_v = \infty$ la catenaria è degenerata in una retta)

Da ciò ne consegue che affinché il tratto \widehat{AC} sia ancora il tratto di una catenaria dovrà essere:

$$(l^2 - h^2) > d^2$$

Basta pensare ad un triangolo rettangolo di cateti "d" ed "h", come ACB in



figura, \widehat{AB} per incurvarsi deve

$$\text{essere: } \widehat{AB} > \overline{AB} = \sqrt{h^2 + d^2}$$

$$\text{equivalente: } l^2 > h^2 + d^2$$

col anche:

$$(l^2 - h^2) > d^2$$

Facciamo alcuni esempi numerici, per chiarire meglio quanto esposto.

Prima di tutto risolviamo il caso lasciato in sospeso nel capitolo precedente.

Data la catenaria:

$$a_2 = 3,715399417. \quad (\text{modulo})$$

$$l_0/2 = 5,75 = (\sqrt{B_2}) = \text{distanza orizzontale}$$

$$f_2 = 5,41146439$$

Il vertice V_2 viene sollevato di $\overline{V_2C} \neq f_2$ ($\overline{V_2C} = f_2$ era un caso particolare che abbiamo risolto). Avevamo calcolato i limiti:

$$-0,624506962 \leq \overline{V_2C} \leq 11,44743574$$

e, nell'esercizio precedente, sulla intersezione di due catenarie, avevamo determinato l'equilibrio in C con un carico verticale in V_2 sulla catenaria MV_2N , e lo spostamento $\overline{V_2C}$:

$$\overline{V_2C} = (5,41146439 - 2,523507303)$$

$$\underline{\overline{V_2C} = 2,887957087}$$

Assumeremo questo spostamento generico per verificare i calcoli.

Usando la terminologia delle formule ora trattate, abbiamo: $\boxed{d = 5,75}$; $\boxed{h = 2,523507303}$

la lunghezza $\widehat{CV_1} + \widehat{V_1N} = (2,755564382 + 5,580828733) =$
ora indicata semplicemente con $\boxed{l = 8,336393115}$

$$a_1 = \frac{d/2}{\operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{l^2 - d^2}{4}}} = \frac{5,75/2}{\operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{(8,336393115)^2 - (5,75)^2}{4}}}$$

$$a_1 = \frac{5,75/2}{\operatorname{arccosech}(1,381786587)}$$

$$a_1 = \frac{2,875}{1,4375} = 2$$

Torna esattamente il modulo delle due catenarie traslate.

$$X_A = a \ln \left| \frac{a}{(l-h)} (1 - e^{-d/a}) \right| \text{ (relativo all'asse della catenaria)}$$

$$e^{-d/a} = e^{-\frac{5,75}{2}} = e^{-2,875} = \frac{1}{17,72542412} =$$

$$(1 - e^{-d/a}) = (1 - 0,056416139) = 0,94358386$$

$$\frac{2}{(l-h)} = \frac{2}{(8,336393115) - (2,523507303)} = \frac{2}{5,812885812} =$$

$$= 0,344063183$$

$$X_A = 2 \ln \left| (0,344063183) (0,94358386) \right| = 2 \ln |0,324652467|$$

$$\begin{cases} X_A = -2,25 = X_e \text{ (relativo all'asse della catenaria)} \\ Y_A = 3,404869317 = Y_e \end{cases}$$

$$X_B = -2,25 + 5,75 = X_{1,N} = +3,5$$

$$Y_B = 3,404869317 + 2,523507303 = Y_{1,N} = \underline{5,92837662}$$

Valori noti che verificano il procedimento.

Altri esempi numerici

Al fine di sperimentare i risultati prendiamo dati molto semplici:

$$(x_B - x_A) = d = \text{cm. } 30 -$$

$$(y_B - y_A) = h = \text{cm. } 40 -$$

$$\widehat{AB} = \ell = \text{cm. } 60 -$$

$$\sqrt{\frac{\ell^2 - h^2}{d^2}} = \sqrt{\frac{60^2 - 40^2}{30^2}} = \frac{2}{3}\sqrt{5} = \underline{1,490711985}$$

$$\text{argcsinh}(1,490711985) = 1,60872373657$$

$$\underline{a} = \frac{d}{2 \text{argcsinh} \sqrt{\frac{\ell^2 - h^2}{d^2}}} = \frac{30}{2(1,608723736)} = \underline{9,324161548}$$

$$x_A = a \ln \left| \left(\frac{a}{\ell - h} \right) (1 - e^{-\frac{x_A}{a}}) \right|$$

$$x_A = 9,324161548 \cdot \ln \left| \left(\frac{9,324161548}{(60 - 40)} \right) (1 - e^{-\frac{-x_A}{9,324161548}}) \right| =$$

$$x_A = 9,324161548 \cdot \ln \left| (0,466208077) (1 - e^{-3,217447474}) \right|$$

$$\underline{x_A = -7,49667046}$$

$$\underline{y_A} = a \cosh\left(\frac{x_A}{a}\right) = \underline{12,50372255}$$

$$\underline{x_B} = (x_A + 30) = \underline{22,50332954}$$

$$\underline{y_B} = (y_A + 40) = \underline{52,50372255}$$

Per verificare sperimentalmente le nostre formule, abbiamo reso verticale il piano di un tavolo da disegno, vi abbiamo applicato un foglio di carta millimetrata, orientandola col filo a piombo, per righe verticali ed orizzontali quindi abbiamo fissato con due spilli, una catenella lunga 50 cm nei punti A e B distanti orizzontalmente 30 cm. e verticalmente 40 cm. Nella riproduzione fotografica le distanze "d" ed "h" si sono evidenziate facendo delle crocette ogni 10 cm, evidenziando così il $d = 30$ cm ed $h = 40$ cm. si sono,

Nella catenaria, le formule sono riferite al modulo lineare "a", perciò indipendenti dalle misure convenzionali. Nell'esperienza precedente abbiamo utilizzato il centimetro, ma con gli stessi numeri $d=30$, $h=40$, $l=60$ possiamo prendere pollici, o metri, o Km, l'esperienza deve tornare.

Per verificare la validità delle tensioni abbiamo preso una catenella di cm. 107,3; del peso di gr. 25 ($q=0,23299162 \text{ gr/cm}$); $d=100 \text{ cm}$; $h=25 \text{ cm}$. abbiamo calcolato: $a=98,53620137$; $x_A=-26,61238513$; $x_B=73,38761487$; $y_A=102,1517985$; $y_B=127,1517985$.

e le tensioni: $H=22,9581084 \text{ (gr)}$ (nel vertice)

$T_A=23,80051223 \text{ (gr)}$; $T_B=29,62530254 \text{ (gr)}$ (agli attacchi)

abbiamo sperimentato la tensione in B cioè T_B , e per far ciò abbiamo calcolato la direzione della tangente in B: $39^\circ 11' 58,42$. Si riporta copia della foto

Per "pesare" la tensione in B occorre una leva che non influisse col proprio peso. (abbiamo scelto un disco con fulcro al centro): occorre che il braccio dal fulcro C a B fosse perpendicolare alla tensione che agisce secondo la tangente; occorre che il braccio su cui agisce il peso equilibrante fosse orizzontale, \overline{CP} orizzontale, i due bracci sono stati fatti uguali e pari a 10 cm facendo una circonferenza di centro C. Abbiamo cercato di rendere piccolo l'attrito fra il perno (spillo) in C ed il disco.

Posto in P un peso in gr pari a $T_B \approx 29,625$.

Per verificare soprattutto l'attrito si spostava la catena in alto e in basso, oppure il peso in alto o in basso, ma dopo brevi oscillazioni la catena tornava in equilibrio sovrapponendo il vincolo B mobile sul disco al B fisso del tavolo dimostrando che l'attrito era irrilevante e che i calcoli erano giusti.

Tavola delle funzioni iperboliche

$\frac{1}{2} \frac{e}{a}$	$\frac{1}{2} \frac{b}{a}$	$\frac{1}{a} + 1$	$\frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$	$2 \frac{1}{b}$	$\frac{1}{L}$	$\frac{r}{L}$	lang α
arg. X	senh X	cosh X	tanh X	raversh X = $\frac{(\cosh X - 1)}{X}$	rasenh X = $\frac{(\sinh X)}{X}$		racosh X = $\frac{(\cosh X)}{X}$
0,00	0,00000	1,00000	0,00000	0,00000	1,00000		100,00500
.01	.01000	.00005	.01000	.00500	.00002	$\frac{1}{200}$	50,01000
.02	.02000	.00020	.02000	.01000	.00007	$\frac{1}{100}$	33,34633
.03	.03000	.00045	.02999	.01501	.00016		25,02000
.04	.04001	.00080	.03996	.02000	.00027	$\frac{1}{64}$	20,02500
.05	.05002	.00125	.04996	.02500	.00042	$\frac{1}{40}$	16,69668
.06	.06004	.00180	.05993	.03001	.00060	$\frac{1}{32}$	14,32073
.07	.07006	.00245	.06989	.03501	.00082	$\frac{1}{25}$	12,54002
.08	.08009	.00320	.07983	.04002	.00107	$\frac{1}{20}$	11,15614
.09	.09012	.00405	.08976	.04503	.00135	$\frac{1}{16}$	10,05004
.10	.10017	.00500	.09967	.05004	.00167		
0,11	0,11022	1,00606	0,10956	0,05505	1,00202		9,14596
.12	.12029	.00721	.11943	.06007	.00240	$\frac{1}{22}$	6,39341
.13	.13037	.00846	.12927	.06509	.00282		7,75740
.14	.14046	.00982	.13909	.07011	.00327		7,21297
.15	.15056	.01127	.14889	.07514	.00375	$\frac{1}{23}$	6,74160
.16	.16068	.01283	.15865	.08017	.00426		6,33017
.17	.17082	.01448	.16836	.08521	.00482		5,96756
.18	.18097	.01624	.17806	.09024	.00541		5,64580
.19	.19115	.01810	.18775	.09526	.00603	$\frac{1}{20}$	5,35644
.20	.20134	.02007	.19738	.10034	.00668		5,10034
0,21	0,21155	1,02213	0,20697	0,10539	1,00737	$\frac{1}{18}$	4,86729
.22	.22178	.02430	.21652	.11045	.00809		4,65590
.23	.23203	.02657	.22603	.11551	.00884		4,46333
.24	.24231	.02894	.23550	.12058	.00963	$\frac{1}{18}$	4,28725
.25	.25261	.03141	.24492	.12565	.01045		4,12565
.26	.26294	.03399	.25430	.13073	.01130	$\frac{1}{15}$	3,97689
.27	.27329	.03667	.26362	.13582	.01219		3,83953
.28	.28367	.03946	.27291	.14092	.01312	$\frac{1}{14}$	3,71235
.29	.29408	.04235	.28213	.14602	.01408		3,59430
0,30	0,30452	1,04534	0,29131	0,15113	1,01507		3,46446
.31	.31449	.04844	.30044	.15625	.01609		.38205
.32	.32549	.05164	.30951	.16137	.01715		.28637
.33	.33602	.05495	.31852	.16650	.01825	$\frac{1}{12}$.19681
.34	.34659	.05836	.32748	.17164	.01938		.11282
.35	.35719	.06188	.33638	.17679	.02054		.03394
.36	.36783	.06550	.34521	.18195	.02174		2,55975
.37	.37850	.06923	.35399	.18712	.02297		.80982
.38	.38921	.07307	.36271	.19230	.02424		.2368
.39	.39996	.07702	.37136	.19748	.02554	$\frac{1}{10}$.76159
.40	.41075	.08107	.37995	.20268	.02688		.70268
0,41	0,42158	1,08523	0,38847	0,20769	1,02625		2,64691
.42	.43246	.08950	.39693	.21310	.02966		.59406
.43	.44337	.09366	.40532	.21833	.03110	$\frac{1}{9}$.54391
.44	.45434	.09837	.41364	.22357	.03258		.49630
.45	.46534	.10297	.42190	.22882	.03409		.45104
.46	.47640	.10768	.43008	.23408	.03564		.40800
.47	.48750	.11250	.43820	.23936	.03723		.36702
.48	.49865	.11743	.44624	.24464	.03885		.32798
.49	.50984	.12247	.45422	.24994	.04050	$\frac{1}{8}$.29076
.50	.52110	.12763	.46212	.25525	.04219		.25525
0,51	0,53240	1,13289	0,46995	0,26057	1,04392		2,22136
.52	.54375	.13827	.47770	.26591	.04566		.18899
.53	.55516	.14377	.48536	.27126	.04748		.15805
.54	.56663	.14938	.49299	.27663	.04931		.12840
.55	.57815	.15510	.50052	.28200	.05119		.10018
.56	.58973	.16094	.50798	.28739	.05309		.07311
.57	.60137	.16690	.51536	.29280	.05504	$\frac{1}{7}$.04719
.58	.61307	.17297	.52267	.29822	.05702		.02236
.59	.62483	.17916	.52990	.30366	.05904		1,99857
.60	.63665	.18547	.53705	.30911	.06109		.97578
0,61	0,64854	1,19189	0,54413	0,31458	1,06318		1,95392
.62	.66049	.19844	.55113	.32006	.06531		.93296
.63	.67251	.20510	.55805	.32556	.06747		.91286
.64	.68459	.21189	.56490	.33107	.06968	$\frac{1}{6}$.89357
.65	.69675	.21879	.57167	.33660	.07192		.87507
.66	.70897	.22582	.57836	.34215	.07420		.85730
.67	.72126	.23297	.58496	.34772	.07651		.84026
.68	.73363	.24025	.59152	.35330	.07887		.82389
.69	.74607	.24765	.59796	.35891	.08126		.80818
.70	.75858	.25517	.60437	.36453	.08369		.79310

$\frac{1}{2} \frac{L}{x}$	$\frac{1}{x} \frac{L}{2}$	$\frac{1}{x} + 1$	$\frac{1}{2} \frac{L}{\sqrt{1 + \frac{L^2}{x^2}}}$	$2 \frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	lang "
arg X	senh X	cosh X	tanh X	versinh X = $\frac{(\cosh X - 1)}{X}$	versinh X = $\frac{(\sinh X)}{X}$	$\frac{1}{L}$ cosech X = $\frac{1}{\sinh X}$
0,70	0,75858	1,25517	0,60437	0,36453	1,08369	1,79310
.71	.77117	.26282	.61066	.37017	.08616	.77662
.72	.78384	.27059	.61691	.37562	.08867	.76471
.73	.79659	.27849	.62307	.38150	.09121	.75116
.74	.80941	.28652	.62915	.38720	.09380	.73655
.75	.82232	.29468	.63515	.39291	.09642	.72624
.76	.83530	.30297	.64108	.39865	.09909	.71444
.77	.84836	.31139	.64693	.40440	.10179	.70310
.78	.86153	.31994	.65271	.41018	.10453	.69223
.79	.87478	.32862	.65841	.41598	.10731	.68180
.80	.88811	.33743	.66404	.42179	.11013	.67179
0,81	0,90152	1,34638	0,66959	0,42763	1,11299	1,66220
.82	.91503	.35547	.67507	.43350	.11590	.65301
.83	.92863	.36468	.68048	.43938	.11884	.64420
.84	.94233	.37404	.68581	.44528	.12182	.63576
.85	.95612	.38353	.69107	.45121	.12484	.62768
.86	.97000	.39316	.69626	.45716	.12790	.61995
.87	.98398	.40293	.70137	.46314	.13101	.61256
.88	.99806	.41284	.70642	.46914	.13415	.60550
.89	1,01224	.42289	.71139	.47516	.13734	.59876
.90	.02652	.43309	.71630	.48121	.14057	.59232
0,91	1,04090	1,44342	0,72113	0,48728	1,14385	1,58618
.92	.05539	.45390	.72590	.49337	.14716	.58033
.93	.06998	.46453	.73059	.49950	.15051	.57477
.94	.08468	.47530	.73522	.50564	.15391	.56947
.95	.09948	.48623	.73987	.51182	.15735	.56445
.96	.11440	.49729	.74428	.51802	.16084	.55968
.97	.12943	.50851	.74870	.52424	.16436	.55517
.98	.14457	.51988	.75307	.53049	.16793	.55090
.99	.15983	.53141	.75736	.53677	.17154	.54687
1,00	1,17520	1,54308	0,76159	0,54308	1,17520	.54308
1,01	1,19069	1,55491	0,76576	0,54942	1,17890	1,53951
.02	.20630	.56689	.76987	.55578	.18265	.53617
.03	.22203	.57904	.77391	.56217	.18644	.53304
.04	.23788	.59134	.77789	.56859	.19027	.53013
.05	.25386	.60379	.78181	.57504	.19415	.52742
.06	.26996	.61641	.78566	.58152	.19807	.52492
.07	.28619	.62919	.78946	.58803	.20204	.52261
.08	.30254	.64214	.79320	.59457	.20606	.52050
.09	.31903	.65525	.79688	.60114	.21012	.51857
1,10	1,33565	1,68852	0,80050	0,60774	1,21422	1,51683
.11	.35240	.68196	.80406	.61436	.21838	.51528
.12	.36929	.69557	.80757	.62104	.22256	.51390
.13	.38631	.70934	.81102	.62774	.22682	.51269
.14	.40347	.72329	.81441	.63446	.23112	.51166
.15	.42078	.73741	.81775	.64123	.23546	.51080
.16	.43822	.75171	.82104	.64803	.23985	.51009
.17	.45581	.76616	.82427	.65485	.24428	.50956
.18	.47355	.78083	.82745	.66172	.24877	.50917
.19	.49143	.79565	.83058	.66861	.25330	.50895
.20	.50946	.81066	.83365	.67555	.25788	.50888
1,21	1,52764	1,82584	0,83668	0,68251	1,26252	1,50896
.22	.54598	.84121	.83965	.68952	.26720	.50919
.23	.56447	.85676	.84258	.69655	.27193	.50956
.24	.58311	.87250	.84546	.70363	.27671	.51008
.25	.60192	.88842	.84828	.71074	.28154	.51074
.26	.62088	.90454	.85106	.71789	.28642	.51154
.27	.64001	.92084	.85380	.72507	.29135	.51247
.28	.65930	.93734	.85648	.73230	.29633	.51355
.29	.67876	.95403	.85913	.73956	.30136	.51475
.30	.69838	.97091	.86172	.74686	.30645	.51609
1,31	1,71818	1,98800	0,86428	0,75420	1,31159	1,51755
.32	.73614	2,00528	.86678	.76157	.31678	.51915
.33	.75428	.02276	.86925	.76899	.32202	.52087
.34	.77260	.04044	.87167	.77645	.32731	.52272
.35	.79109	.05833	.87405	.78395	.33266	.52469
.36	.80977	.07643	.87639	.79149	.33806	.52678
.37	.82862	.09473	.87869	.79907	.34352	.52900
.38	.84766	.11324	.88095	.80670	.34903	.53133
.39	.86689	.13196	.88317	.81436	.35459	.53379
.40	.90430	.15090	.88535	.82207	.36022	.53636
1,41	1,92591	2,17005	0,88749	0,82982	1,36585	1,53904
.42	.94770	.16942	.88960	.83762	.37168	.54184
.43	.96970	.20900	.89167	.84546	.37741	.54476
.44	.99188	.22881	.89370	.85335	.38325	.54779
.45	2,01427	.24884	.89569	.86127	.38915	.55093
.46	.03686	.26910	.89765	.86925	.39511	.55418
.47	.05965	.28958	.89958	.87727	.40113	.55754
.48	.08265	.31029	.90147	.88533	.40720	.56101
.49	.10586	.33123	.90332	.89345	.41333	.56459
.50	.12928	.35241	.90515	.90161	.41952	.56827

$\frac{1}{2} \frac{l}{a}$	$\frac{1}{2} \frac{L}{a}$	$\frac{l}{a} + 1$	$\frac{1}{2} \frac{L}{a}$	$2 \frac{l}{L}$	$\frac{L}{l}$		$\text{tang } \alpha$
arg X	senh X	cosh X	tanh X	versenh X = $\frac{\cosh X - 1}{X}$	versenh X = $\frac{(\sinh X)}{X}$	$\frac{l}{L}$	racosh X = $\frac{\cosh X}{X}$
1,50	2,12928	2,35241	0,90515	0,90161	1,41952		1,56027
.51	.15291	.37362	.90694	.90961	.42577		.57207
.52	.17676	.39547	.90870	.91607	.43208		.57597
.53	.20062	.41736	.91042	.92630	.43845		.57997
.54	.22510	.43949	.91212	.93473	.44487		.58408
.55	.24961	.46186	.91379	.94313	.45136		.58830
.56	.27434	.48446	.91542	.95159	.45791		.59261
.57	.29930	.50735	.91703	.96009	.46452		.59704
.58	.32449	.53047	.91860	.96865	.47120		.60156
.59	.34991	.55384	.92015	.97726	.47793		.60619
.60	.37557	.57746	.92167	.98592	.48473		.61092
1,61	2,40146	2,60135	0,92316	0,99463	1,49159	$\frac{1}{2}$	1,61574
.62	.42760	.62549	.92462	1,00339	.49652		.62068
.63	.50746	.69951	.92686	.03001	.51966		.63607
.67	.56196	.75021	.93155	.04603	.53411		.64683
1,70	.64563	.82832	.93541	.07548	.55625		1,66371
.75	.79041	.96419	.94138	.12239	.59452		.69382
1,80	.94217	3,10747	.94681	.17062	.63454		.72637
1,90	3,26816	.41773	.95624	.27249	.72009	$\frac{2}{3}$.79681
2,00	.62666	.76220	.96403	.38110	.81343		1,66110
.10	4,02166	4,14431	.97045	.49729	.91517		.97348
.20	.45711	.56791	.97574	.62178	2,02596		2,07632
.30	.93696	5,03722	.98010	.75531	.14651		.19010
.40	5,46623	.55695	.98367	.89873	.27760		.31539
.50	6,05020	6,13229	.98661	2,05292	.42006	1	.45292
3,00	10,01787	10,06766	.99505	3,02255	3,33929		3,35589
π	11,54674	11,59195	0,99627	3,37152	3,67606	2	3,68963
3,50	16,54263	16,57282	0,99818	4,44936	4,72646	3	4,73509
4,00	27,26992	27,30823	.99933	6,57706	6,82248	4	6,82706
.50	45,00301	45,01412	.99975	9,78092	10,00067	5	10,00313
5,00	74,20321	74,20595	.99991	14,64199	14,84064		14,84198

$e = 2,71828 \ 10284 \ 59045 \ 23536 \ 02874 \ 71352 \ 66249 \ 77572 \ \dots$
 $\log e = 0,43429 \ 44819 \ 03251 \ 82765 \ 11289 \ 10916 \ 60508 \ 22943 \ \dots$
 $\ln 10 = 2,30258 \ 50929 \ 94045 \ 68401 \ 79914 \ 54684 \ 36420 \ 76011 \ \dots$
 $\pi = 3,14159 \ 26535 \ 89793 \ 23846 \ 26433 \ 83279 \ 50208 \ 41871 \ \dots$

*Tavole piú estese degli operatori
sono raccolte in un volumetto
separato.*

catenarie riferite allo stesso sistema di assi

(per un punto passano due catenarie)

Dato un sistema di assi: oxy , e l'equazione delle catenarie riferite a quel sistema:

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

ove ogni catenaria è definita dal parametro "a".

Nel trattare le rette tangenti alla catenaria, abbiamo rilevato che esistono due rette limite, che, uscendo dal centro assi, delimitano lo spazio dei punti che sono comuni a catenarie, dai punti per i quali non possono passare catenarie riferite a quel sistema di assi.

Quindi i punti che, in coordinate polari, hanno l'argomento θ compreso fra:

$$56^\circ 27' 57,1'' < \theta < 123^\circ 32' 02,99''$$

appartengono a catenarie.

Le rette per l'origine $y = mx$ potranno secare catenarie solo se il loro coefficiente angolare m

$$\text{è: } m > +1,508879561 ; \quad m < -1,508879561$$

(I valori di m passano da $+\infty$ a $-\infty$ per $\theta = \frac{\pi}{2}$)

Una retta per l'origine, con m sopra definito, taglierà ogni catenaria in due punti distinti,

definiti da:

$$\begin{aligned} x_c &= a \operatorname{argracosh}(m) \\ y_c &= m x_c \end{aligned}$$

Poiché $\operatorname{racosh}(m)$ ammette un minimo per:

$$\operatorname{racosh}(1,199678640\dots) = 1,5088795615\dots$$

per ogni m , $\operatorname{argracosh}(m)$, ammette due valori uno maggiore ed uno minore di $1,199678640\dots$, non ammette valori per $m < 1,50887956\dots$

Inversamente, dato un punto $c = (x_c; y_c)$, esistono due catenarie che passano per c , riferite agli stessi assi:

$$y_c = a \cosh \frac{x_c}{a};$$

dividendo per x_c :

$$\frac{y_c}{x_c} = \frac{\cosh(x_c/a)}{(x_c/a)} = \operatorname{racosh}\left(\frac{x_c}{a}\right)$$

cioè:

$$\left(\frac{x_c}{a}\right) = \operatorname{argracosh}\left(\frac{y_c}{x_c}\right)$$

$$a = \frac{x_c}{\operatorname{argracosh}(y_c/x_c)}$$

poiché di $\operatorname{argracosh}(y_c/x_c)$ ve ne sono due, avremo anche due moduli "a" cioè due catenarie.

(C.f.r. - Bollettino Ingegneri anno 1977 n° 2/3 - c-Brogi - "Su alcuni aspetti delle curve funicolari")

Esempio numerico

Supponiamo di voler determinare le catenarie

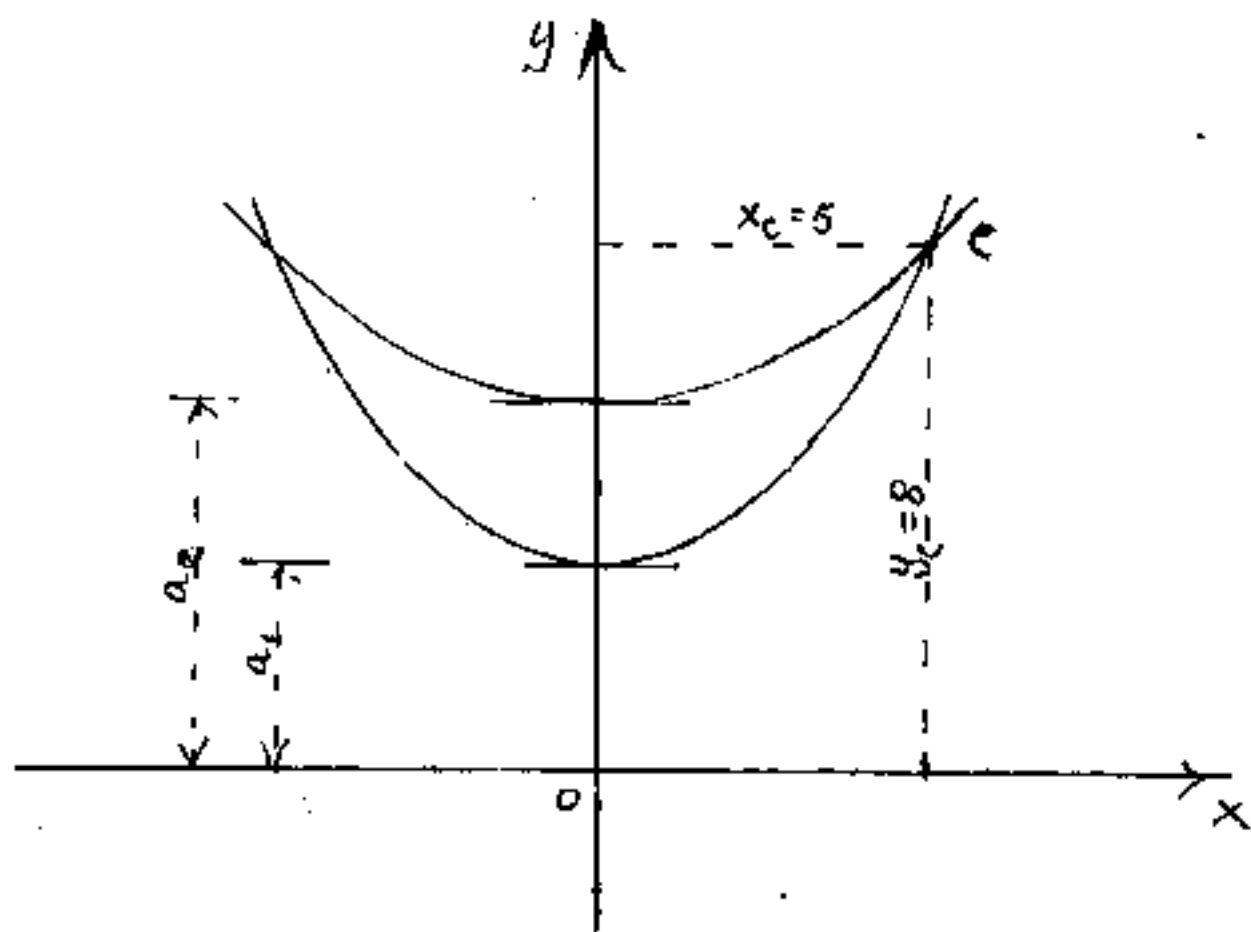
passanti per C ore: $x_c = 5$; $y_c = 8$;

$$y_c/x_c = 8/5 = 1,6$$

$$\operatorname{arccosh}(1,6) = \begin{cases} 0,888120355622 \\ 1,576576534322 \end{cases}$$

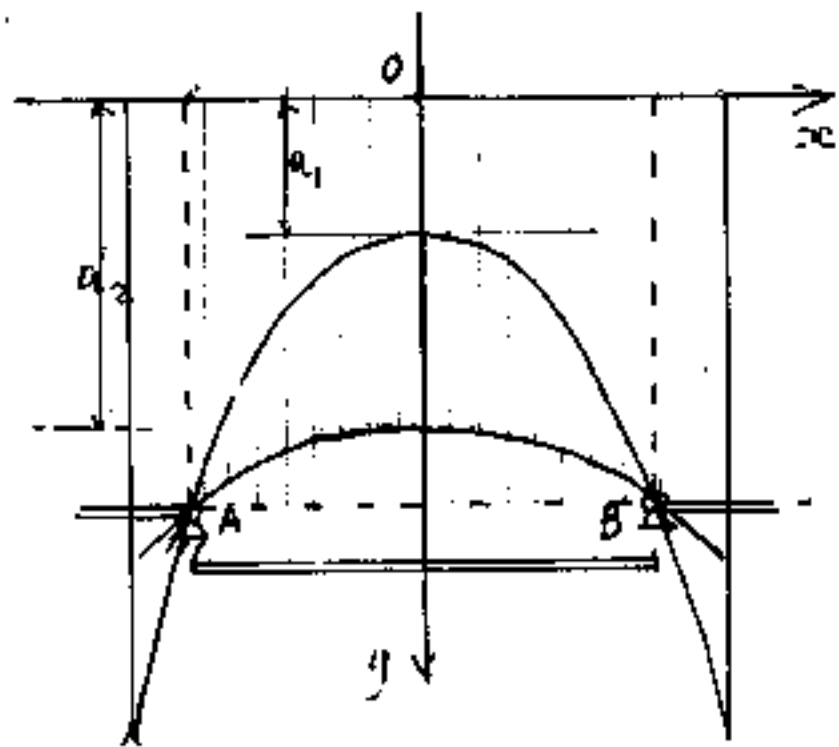
$$a_2 = \frac{5}{0,888120355622} = \boxed{5,62986758} = a_2$$

$$a_1 = \frac{5}{1,576576534322} = \boxed{3,171428657} = a_1$$



se rovesciamo il coppia di catenarie intorno all'asse x abbiamo il problema della parete, ricordando che le ordinate sono proporzionali alle tensioni, si può dimostrare che il peso di parete sovrastante le catenarie è uniformemente ripartito lungo le catenarie stesse. (c.f.r. articolo sopra citato)

Il problema della parete



Abbiamo rovesciato il
coppio delle due cate-
marie, per visualizza-
re meglio il problema
della parete. E suppo-
niamo che fra A e B , vi

sia un sostegno che possa essere rimosso;
(ciò simula un cedimento di fondazione (o di
appoggio) della parete).

Le conclusioni dell'articolo sopracitato (anno
1977) furono verificate alcuni anni dopo (1981)

(c.f. Bollettino Ingegneri N° 7-8 1981 - C. Brogi -
su alcuni aspetti delle curve funicolari -)

Fu costruito un modellino di parete dello spessore di un centimetro, delimitato da due lastre di vetro. La larghezza dell'intercapedine, delimitata da due prismetti di legno di 1 cm x 1 cm di sezione, era di cm. 19,5 \approx ($\frac{1}{3}$ di braccio toscano) il fondo della parete aveva un sostegno che in parte poteva essere rimosso, la larghezza della apertura era cm 9,7 \approx ($\frac{1}{6}$ di braccio toscano).

Nell'intercapedine fu versata della sabbia per misurare l'angolo di natural declivio; la sabbia è un materiale non resistente a trazione, può essere leggermente umidificata per avere una costipazione omogenea.

Riempita l'intercapedine per una altezza di circa 18 cm. si è rimosso il sostegno di base, la sabbia è caduta per la parte delimitata dalla catenaria inferiore, e segnalando un leggerissimo cretto per la catenaria superiore.

Con sabbia, leggermente umidificata, si è riempita l'intercapedine per una altezza di circa cm 16,7, aprendo il sostegno inferiore è caduta la sabbia.

delimitata dalla catenaria inferiore, e poggian-
do il modellino sul tavolo con leggera decisione, (co-
me se fosse lasciato cadere da uno o due millimetri di
altezza) si è staccato il coppia di catenarie, come
si vede dalla foto già riprodotta col disegno.

Riportiamo anche le foto dell'angolo di na-
tural declivio e dell'esperienza con la caduta
della sola parte di sabbia delimitata dalla
catenaria inferiore.

simmetriche rispetto allo stesso asse y , varierà l'asse x . Per ogni asse x determinato, troviamo, nei limiti sopra detti due catenarie, e tale asse x differirà della distanza "d" da un asse x_0 preso come riferimento, cioè avremo:

$$\frac{y_A \pm d}{x_A} = \frac{\cosh\left(\frac{x_A}{a}\right)}{\left(\frac{x_A}{a}\right)}$$

$$\left(\frac{x_A}{a}\right) = \operatorname{argcosh}\left(\frac{y_A \pm d}{x_A}\right)$$

aumentando o diminuendo $\frac{y_A}{x_A}$ della quantità $\pm \frac{d}{x_A}$ ci avviciniamo o ci allontaniamo dal valore limite: 1,50887956... quindi vi sarà un valore limite di "d" oltre il quale nessuna catenaria potrà passare per A (e per il suo simmetrico B).

Se assumiamo come asse x_0 , l'asse per cui si ha il limite, per $d=0$ si ha una sola catenaria, quindi a partire da x_0 gli assi sono sempre più distanti dal punto A, cioè si hanno soluzioni reali solo per $d > 0$.

Quando $x = x_0$; ($d=0$) sia "a" il parametro; per ogni x avremo:

$$\left. \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \right\} = \frac{x_{0A}}{\operatorname{argcosh}\left(\frac{y_A \pm d}{x_{0A}}\right)}$$

formula che può scriversi: (formula generale)

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{x_{0A}}{\operatorname{arccosh}\left(1.50887956 + \frac{d}{x_{0A}}\right)}$$

si noti che per $d=0$ avremo:

$$a_1 = a_2 = a_0 = \frac{x_{0A}}{(1.1996786402...)}$$

Poniamo: $x_{0A} = 5$ (come nel nostro esempio numerico)

$$a_0 = \frac{5}{(1.1996786402...)} = 4.167782799$$

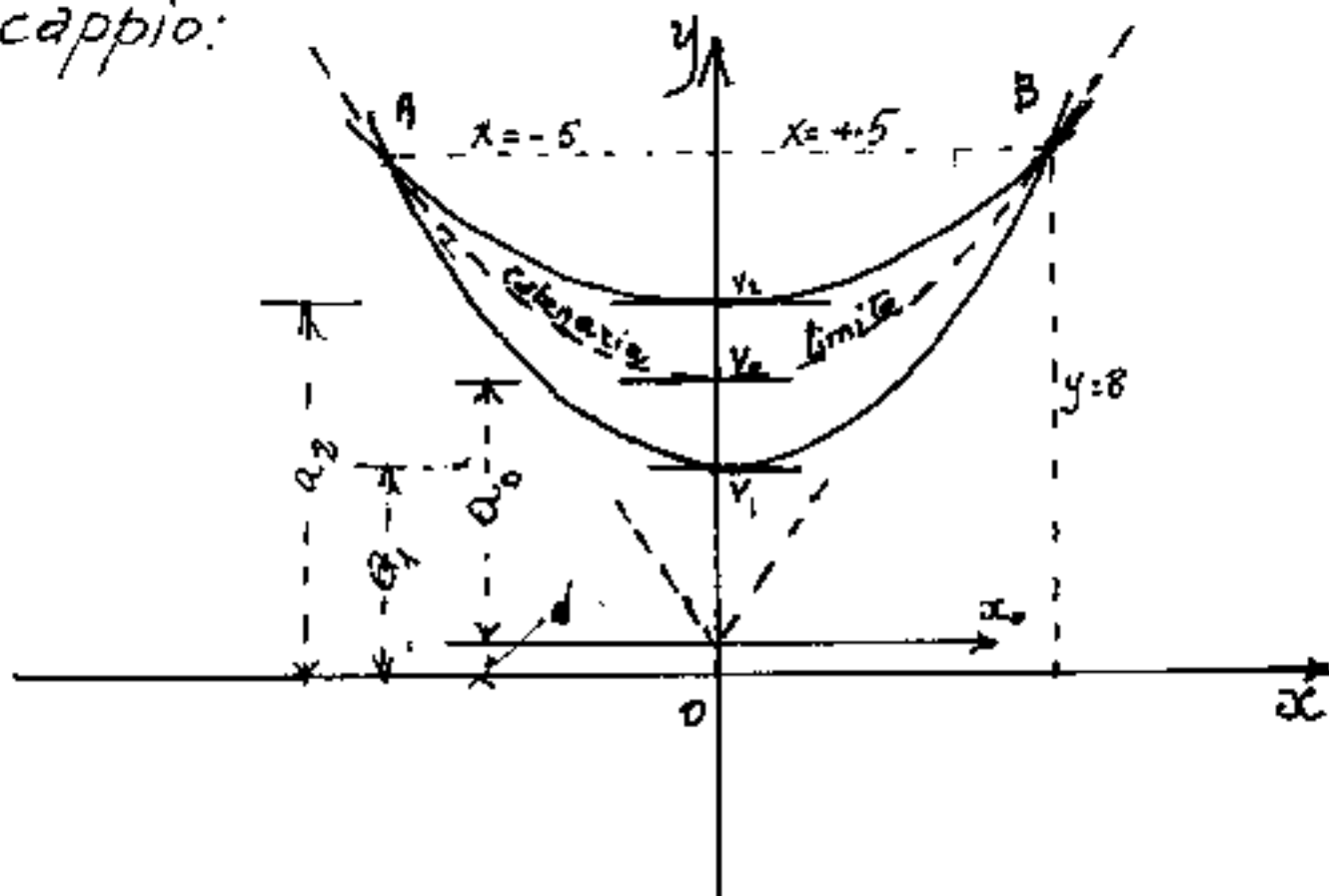
$$y_{0A} = a_0 \operatorname{cosh}\left(\frac{x_{0A}}{a_0}\right)$$

$$y_{0A} = 4.167782799 \operatorname{cosh}\left(\frac{5}{4.167782799}\right)$$

$$y_A = 4.167782799 \operatorname{cosh}(1.1996786402)$$

$$y_A = 7.544397808$$

vogliamo disegnare la catenaria limite, nel nostro coppia:



Poiché l'asse y resta invariato al mutare dell'asse per le coordinate di A possiamo lasciare invariato x_A (nel nostro coppia $x_A = 5$), mentre varia l'ordinato y_A . La catenaria limite avrà racosh (limite) cioè:

$$\text{racosh}(1,1996786042) = 1,508879562 = \frac{y_0}{x_0}$$

essendo $x = x_0 = 5$ (invariato)

$$y_{0A} = (5)(1,508879562) = 7,544397808$$

che verifica il precedente calcolo.

Quindi ricercando la coppia di catenarie per il punto: $x_A = 5$; $y_A = 7,544397808$; avremmo trovato $\text{argracosh}(1,508879562) = (\text{unico valore limite}) = 1,1996786042$ da cui la catenaria limite: $\frac{5}{1,1996786042} = 4,167782799$.

Partendo dall'asse x_0 riferito alla catenaria limite, il nostro asse x ove $y_A = 8$ dista:

$$d = y_A - y_{0A} = (8 - 7,544397808) =$$

$$d = 0,455602192$$

quindi:

per: $d = 0$ si ha la catenaria limite per "A"

per: $0 < d < 0,455602192$ catenarie interne al nostro coppia $A = (5; 8)$

per $d > 0,455602192$ la catenaria inferiore è esterna al nostro coppia; via via che "d" aumenta il vertice si allontana ed il modulo

"a" diminuisce; diminuisce il raggio di curvatura nel vertice e la tangente in A forma con le ascisse un angolo che si avvicina a 90° .

La catenaria superiore invece mantiene il vertice presso il coppia noto con $A \equiv (5; 8)$, aumenta il modulo a_2 ed aumenta così il raggio di curvatura nel vertice, la tangente in A forma con le ascisse un angolo che si avvicina a zero.

Per $d = \infty$ l'asse x è all'infinito per la catenaria inferiore il modulo $a_1 = 0$ per cui il vertice V_1 è all'infinito la catenaria inferiore si è trasformata in rette parallele all'asse y .

La catenaria superiore ha il modulo $a_2 = \infty$ e si è trasformata in rette parallele ad x .
(vertice allineato con A, B)

Esempio numerico

Prendiamo per "d" valori vicini a "d" (limite)

per $d = 0,4$ $< 0,45550219$;

$$\frac{d}{x_A} = \frac{0,4}{5} = 0,08; (1,50887956 + 0,08) = 1,58887956$$

$$\operatorname{argcosh}(1,58887956) = \begin{matrix} 1,55136506 \\ 0,905542367 \end{matrix}$$

$$a_1 = (5/1,55136506) = \boxed{a_1 = 3,222968036}$$

$$a_2 = (5/0,905542367) = \boxed{a_2 = 5,521552809}$$

$$y_A = a \cosh\left(\frac{5}{a}\right) = \begin{cases} 3,222968036 \cosh(1,55136506) \\ 5,521552809 \cosh(0,905542367) \end{cases} = 7,9443978$$

$$(y_{0A} = 7,5443978) < 7,9443978 < 8$$

(valori di a)

$$3,171428 < a_1 = 3,222968 < a_0 = 4,167782799 < a_2 = 5,5215528 < 5,629867$$

$$\frac{y}{x} = 1,6$$

$$d = 0,4$$

limite

$$d = 0,4$$

$$\frac{y}{x} = 1,6$$

(valori $\frac{y}{x}$)

$$2,7158258 < 2,822468 < v_0 = 4,167782799 < 5,1215528 < 5,17426481$$

coppio A-B

coppio A-B

(valori interni al coppia)

$$\boxed{d = 0,5} > 0,45560219$$

$$\frac{d}{x_A} = \frac{0,5}{5} = 0,1 ; (1,50887956 + 0,1) = 1,60887956$$

$$\operatorname{argcosh}(1,60887956) = \begin{cases} 1,595720892 \\ 0,875160324 \end{cases}$$

$$a_1 = 5/1,595720892 = \boxed{a_1 = 3,133380045}$$

$$a_2 = 5/0,875160324 = \boxed{a_2 = 5,713238892}$$

$$y_A = a \cosh\left(\frac{5}{a}\right) = \begin{cases} 3,133380045 \cosh(1,595720892) \\ 5,713238892 \cosh(0,875160324) \end{cases} = 8,0443979$$

$$y_{0V_1} = 2,633380045 < 2,7158258 \quad v_1 \text{ esterno al coppia}$$

$$y_{0V_2} = 5,213238892 > 5,17426481 \quad v_2 \text{ esterno al coppia.}$$

Conviene fare il calcolo per $\boxed{d = 5}$.

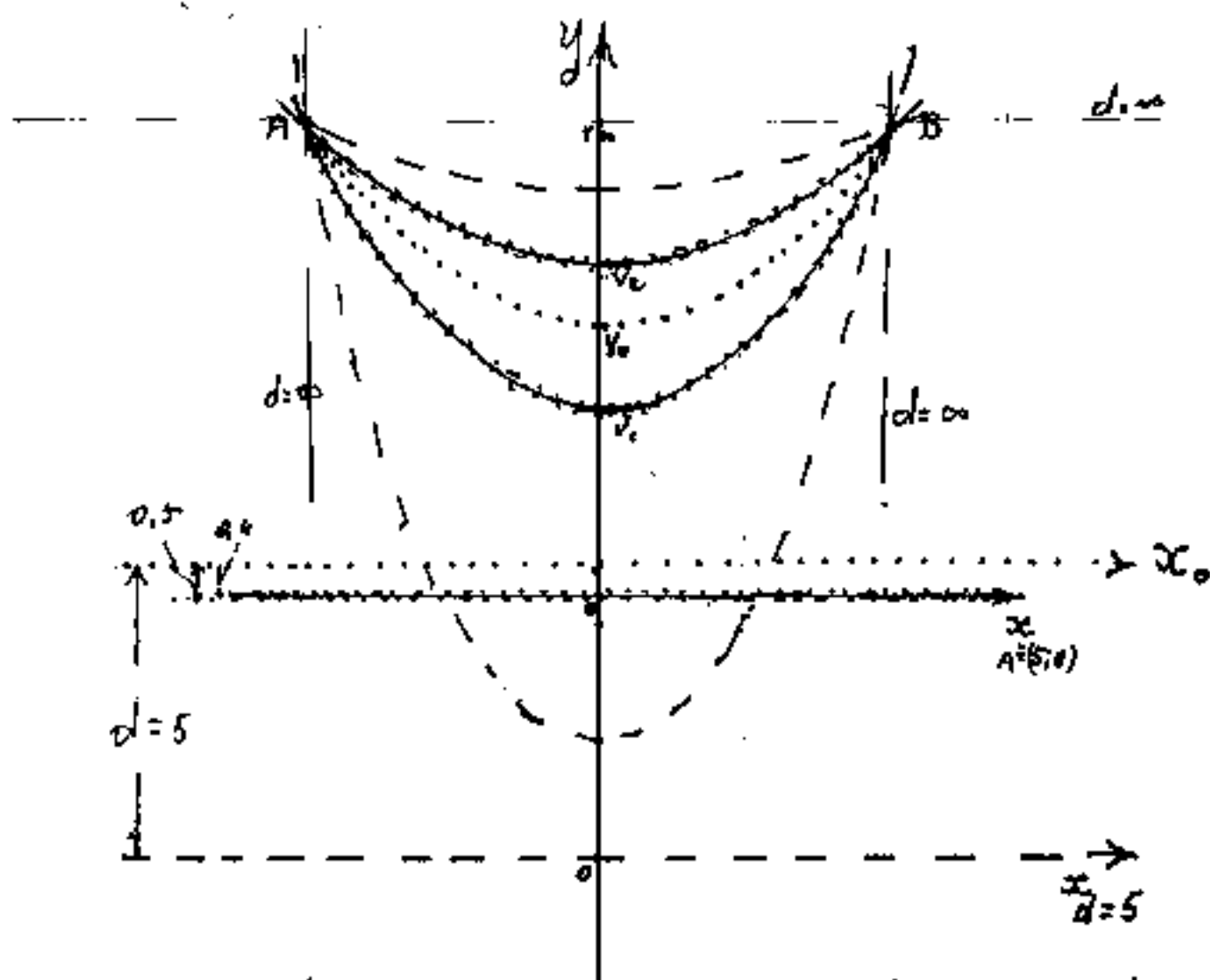
$$\boxed{d=5}; \quad \frac{d}{x_A} = \frac{5}{5} = 1 \quad (1,50887956 + 1) = 2,5088795645$$

$$\operatorname{argcosh}(2,5088795645) = \begin{cases} 0,4373078175 \\ 2,538226404 \end{cases}$$

$$a_1 = 5 / 2,538226404 = a_1 = 1,969879437$$

$$a_2 = 5 / 0,4373078175 = a_2 = 11,43359393$$

$$y_A = a \cosh\left(\frac{5}{a}\right) \begin{cases} 1,969879437 \cosh(2,538226404) = \\ 11,43359393 \cosh(0,4373078175) = \end{cases} \quad \boxed{y_A = 12,5443978}$$



Le catenarie $d=0,4$ e $d=0,5$; interne ed esterne al cappio, praticamente sovrappongono il cappio iniziale. Le catenarie $d=5$ evidenziano il modo di deformarsi aumentando d .

Catinarie e Catenoidi

Dati tre assi cartesiani ortogonali o, x, y, z , consideriamo un piano mobile x_1, y_1 , originariamente parallelo ad xy . Supponiamo di proiettare ortogonalmente su xy le figure geometriche giacenti su x_1, y_1 , nelle varie posizioni che assumerà tale piano mobile.

Abbiasi una catenaria su x_1, y_1 di equazione

$$y_1 = a \cosh\left(\frac{x_1}{a}\right)$$

quando x_1, y_1 è parallelo ad xy su xy si proietta:

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

A) Facciamo ruotare dell'angolo α il piano x_1, y_1 intorno ad y_1 , la proiezione su xy sarà:

$$x = x_1 \cos \alpha; \quad y = y_1; \quad \text{perciò la curva proiettata è:}$$

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a \cos \alpha}\right)$$

e posto:

$$a \cos \alpha = b$$

$$\boxed{y = a \cosh\left(\frac{x}{b}\right)}$$

che può scriversi:

$$\boxed{\left(\frac{y}{a}\right) = \cosh\left(\frac{x}{b}\right)}$$

Questa linea è detta impropriamente: "catenoidi", (usata talvolta nelle arcate murarie).

La "catenoide", propriamente detta, è la linea configurazione di equilibrio di un filo pesante, (a peso variabile) costruito in modo tale che in ogni sezione sia costante la tensione unitaria, l'equazione di tale linea è:

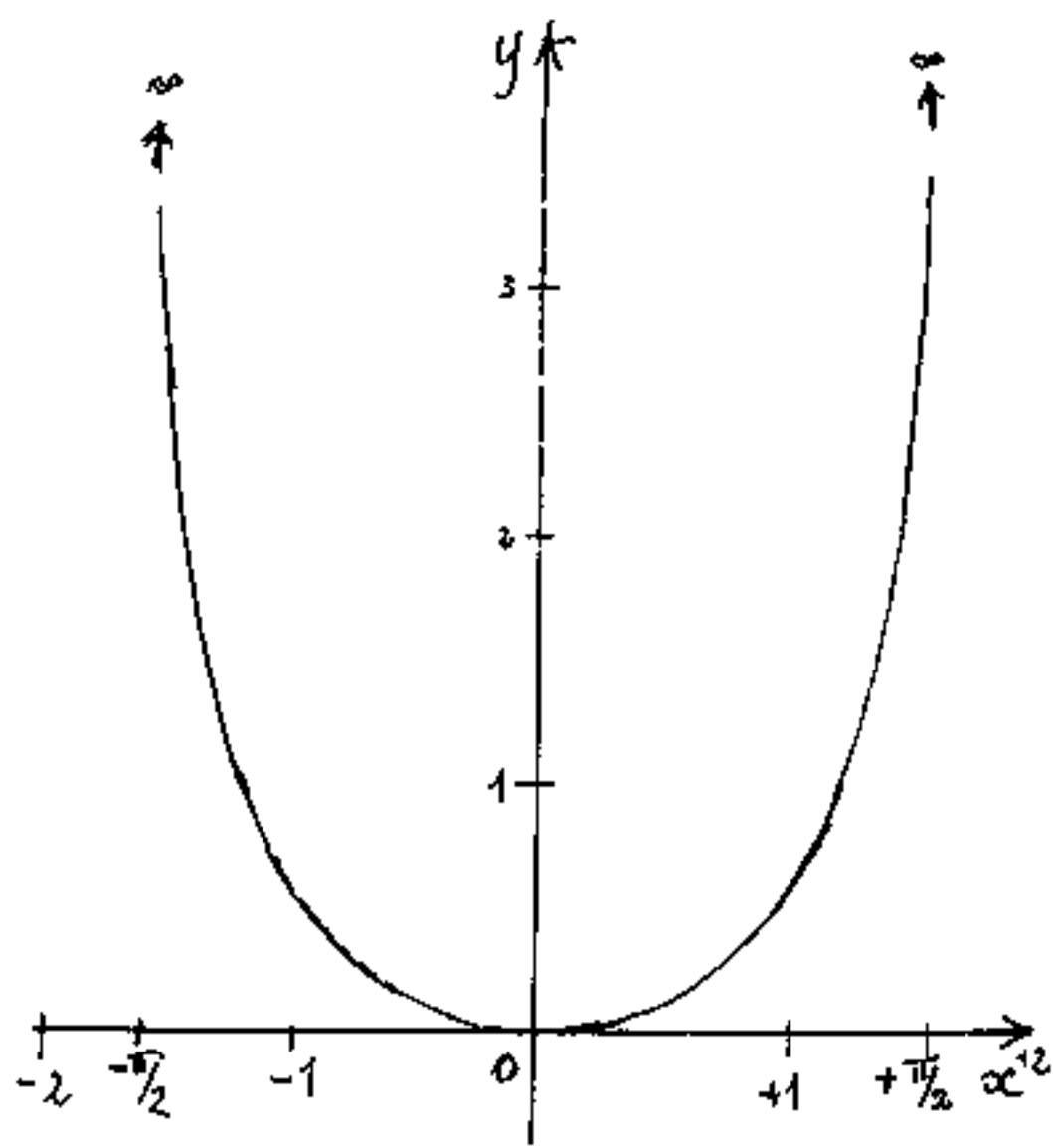
$$y = a \ln \sec\left(\frac{x}{a}\right)$$

può scriversi:

$$e^{y/a} \cdot \cos\left(\frac{x}{a}\right) = 1$$

non esiste per valori di $\cos(x/a) < 0$

Il suo grafico, per x/a variabile da $-\pi/2$ a $+\pi/2$;



con $(a=1)$ è quello a fianco e si ripete ad intervalli di 2π , da $-\infty$ a $+\infty$, con intervalli mancanti da $+\pi/2$ a $\frac{3}{2}\pi$, cioè per valori negativi del coseno.

Catenoide si chiama anche la superficie generata da una catenaria che ruota intorno al suo asse z . Nasce da un problema di minimo; (c.f.r. G. Sansone - Lezioni di Analisi Matematica - Vol II pag 514 - Ed. Cedam - Padova - 1945)

"In un piano sono dati due punti A e B da una stessa parte di una retta z ; si domanda di determinare fra tutte le curve Γ di questo piano congiungenti A con B quella che per una rotazione completa intorno ad z genera la superficie che ha la minima area"

Nel testo del Sansone si arriva alla espressione: (pag. 525) " $dy = \sqrt{\frac{y^2 - a^2}{a^2}} dx$ ed infine: $y = a \cosh \frac{x - \beta}{a}$ con a e β costanti arbitrarie"

Si può avere la equazione della superficie

$$\sqrt{x^2 + y^2} = m \cosh \frac{z}{m}$$

Torneremo sulla linea catenoide, e sulla superficie catenoide dopo aver svolto altre parti di Analisi Matematica.

Torniamo alla proiezione della catenaria e notiamo che se sul piano mobile poniamo una retta: $y_1 = m x_1$, la sua proiezione: $y = \frac{m}{\cos \alpha} x$ è ancora una retta; $y_1 = m x_1^2$ (parabola) proiettata: $y = \frac{m}{\cos^2 \alpha} x^2$ è ancora una parabola; anche l'ellisse resta ellisse

$$y_1 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{diventa: } y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2 \cos^2 \alpha}}$$

consideriamo il cerchio un caso particolare di ellisse, potremmo considerare la catenaria un caso particolare delle cosiddette catenoidi: $\frac{y}{a} = \cosh\left(\frac{x}{b}\right)$

Per superfici rigate (come le volte a padiglione, cioè superfici ad una curvatura) se le sezioni rette sono circolari ed ellittiche i costoloni (o coroloni) sono ellissi.

B) Facciamo ruotare nuovamente il piano x_1, y_1 dopo aver ruotato di α intorno ad y ed averlo riportato nella posizione iniziale con sovrapposto il catenoide ottenuto, lo facciamo ruotare di β intorno l'asse x . Nella proiezione avremo

$$y = y_1 \cos \beta ; \quad x = x_1 \cos \alpha ;$$

$$y = a \cos(\beta) \cosh\left(\frac{x}{a \cos \alpha}\right)$$

se $\alpha = \beta$ ed $a \cos \alpha = a \cos \beta$ si ha ancora una catenaria $y = m \cosh\left(\frac{x}{m}\right)$ ove: $(m = a \cos \alpha = b \cos \beta)$

Si è dovuto proiettare il catenoide perché un piano che ruoti anche con rotazioni successive è come ruotare una volta sola rispetto ad una determinata retta del piano iniziale e può pensarsi costituito di infinite parallele a tale asse; parallele che si proiettano in vera grandezza. In altre parole, un quadrato si proietta ancora in un quadrato se la seconda proiezione è del rettangolo ottenuto dalla prima proiezione.

Nella figura abbiamo riportato come tensioni (che in ogni punto sono mutue) le azioni provenienti dagli appoggi delle catenarie in campo gravitazionale. Poiché le componenti verticali rappresentano il peso del tratto di filo che va da quel punto al vertice della curva, i catenoidi non possono avere il peso uniformemente ripartito. Il campo gravitazionale, la componente orizzontale H della tensione che figura nel vertice della curva resta immutata fino agli appoggi, qualunque sia la distribuzione del peso lungo il filo.

Se la distanza degli appoggi è fissa, ed è pure fissa la lunghezza del filo, notiamo che nella proiezione variano entrambi se la rotazione non ha l'asse parallelo agli appoggi, in questo caso varia solo la lunghezza del filo. Queste condizioni rendono difficoltosa la distribuzione dei pesi in campo gravitazionale, su un filo che debba assumere la configurazione della proiezione di una catenaria.

Se pensiamo di sovrapporre le due catenarie di modulo α e di modulo m , riferendole allo stesso sistema di assi, possiamo calcolare

i punti di intersezione ed avremo:

$$a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = m \cosh\left(\frac{x}{m}\right)$$

$$x a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = x a \cosh\left(\frac{x}{m}\right)$$

$$\text{se } m = a \cos \gamma$$

$$x a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = x a \cosh\left[\left(\frac{x}{a}\right)(\frac{1}{\cos \gamma})\right]$$

Sappiamo che $x a \cosh(x)$ ammette due soluzioni
per $x > 1.50887956$,

$$\begin{array}{l} x/a_1 \setminus \\ x/a_2 / \end{array} = \operatorname{arccosh}(x/a) = \begin{array}{l} / x_1/a \\ \setminus x_2/a \end{array}$$

$$\frac{x_1/a}{x_2/a} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{m}{a} = \cos(\gamma)$$

Cioè $\cos(\gamma)$ è il rapporto degli argomenti oltre che il rapporto dei parametri. Trova qui giustificazione l'esistenza di due catenarie per un punto determinato di cui è già esposto il problema.

I valori dell'angolo γ , o meglio, del suo complementare $(90^\circ - \gamma)$ possono utilmente affiancarsi alla colonna di $x a \cosh(x)$ nella tabella delle funzioni iperboliche.

Daremo tabelle appropriate.

È interessante notare che se $x a \cosh(x)$ ammette un minimo, lo stesso minimo è in $x a \exp(x) = \frac{e^x}{x}$

per $x = 1,19967864025773383391636984864114194426145$

$$\text{caexp}(x) = e^x/x = 2,7666160177064139861694964026$$

Si noti anche che $\text{cacosh}(x)$ è la tangente trigonometrica dell'angolo che la retta uscente dall'origine degli assi forma con l'asse x , angolo che ammette il valore limite $56^\circ 27' 57'', 0065..$ la cui tangente $\text{tang}(\alpha) = 1,508879561538319928909884488..$ oltre il quale la retta taglia la catenaria in due punti che sono individuati dalla risoluzione di:

$\text{arcacosh}(x)$ che ammette due risoluzioni il cui

rapporto $\frac{x_1}{x_2} = \cos(\delta)$. Si noti la reciprocità col

fatto che conoscendo x si possono trovare due va-

lori di a il cui rapporto è ancora: $\frac{a_1}{a_2} = \cos(\delta)$

Abbiamo impiantato una tabella (vedi nel tabella)

$(\text{cacosh}(x))$ $= \text{tg}(\alpha)$	x_1	x_2	$\cos(\delta)$ (x_1/x_2)	δ	a
1,508879561538	$(x_1=x_2)=1,1996786402577$		1	0	$56^\circ 27' 57''$
1,60	0,888120356	1,576576534	0,563322069	$55^\circ 42' 50''$	$57^\circ 59' 40''$
1,70	0,772812099	1,759784682	0,439151509	$63^\circ 57' 0''$	$59^\circ 32' 4''$
1,80	0,695374014	1,901542337	0,365689473	$68^\circ 32' 59''$	$60^\circ 56' 43''$
1,90	0,636621346	2,021390085	0,314942351	$71^\circ 38' 33''$	$62^\circ 14' 29''$
2, -	0,589387763	2,126799893	0,277124224	$73^\circ 54' 40''$	$63^\circ 26' 5''$
2,5	0,439204252	2,532248225	0,173444391	$80^\circ 0' 42''$	$68^\circ 11' 54''$
3	0,354498457	2,827747955	0,125364234	$82^\circ 47' 53''$	$71^\circ 31' 54''$

La catenaria come curva di equilibrio
di pesi uniformemente distribuiti
(muri piani o problema della parete)

Consideriamo una parete in muratura di altezza: " h ", spessore: " t ", lunghezza: " l ", cernierata agli estremi inferiori: " A ", " B "; (od anche: semplicemente appoggiata agli estremi)

Sia " y " l'asse verticale diretto verso il basso, mediano nella parete (asse di simmetria della parete)

Sia " x " l'asse orizzontale, mediano del bordo superiore. (Il bordo superiore della parete deve potersi considerare orizzontale, cioè non influenti le piccole variazioni)

Abbiamo sopra dimostrato che assunti x ed y come assi di riferimento, le curve di equazione:

$$y = a \operatorname{cosh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

passanti per A (e per simmetria passanti anche per B) sono due reali, oppure una, oppure nessuna reale, definite da:

$$a = \frac{x_A}{\operatorname{arccosh}\left(\frac{x_A}{y_A}\right)}$$

nel nostro caso:

$$x_B = x_A = \pm \frac{l}{2} \quad ; \quad y_A = y_B = h \quad ;$$

Per cui l'esistenza di catenarie reali si ha
se: $\frac{y_A}{x_A} = \frac{2h}{l} \geq 1,50887956\dots$

ed è condizione di stabilità per elementi reagenti solo a compressione, se la y è diretta verso il basso, come nel caso della parete.

Sia dunque: $\frac{2h}{l} > 1,50887956\dots$ avremo due valori di "a".

(Nell'esempio abbiamo preso $x_c = 5$ cioè $l = 10$, $h = 8$;
 $\frac{2h}{l} = 1,6$; $a_1 = 5,629867575\dots$; $a_2 = 3,171428657$;
vedi cap. "Catenarie riferite allo stesso sistema di assi")

Dimostriamo ora che il peso di parete gravante su ciascuna delle due catenarie è uniformemente ripartito lungo le catenarie stesse, e cioè che tali linee sono curve di equilibrio.

Consideriamo la catenaria costituita da elementi infinitesimi di lunghezza costante ds , avremo:

$$dx = ds \cos \alpha$$

poiché:

$$y' = \tan \alpha = \operatorname{sech} \left(\frac{x}{a} \right)$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\cosh \left(\frac{x}{a} \right)}$$

$$dx = \frac{ds}{\cosh \left(\frac{x}{a} \right)}$$

Il peso di parete gravante su "ds" sarà:

$$dp = \rho_s \cdot t \cdot y \cdot dx \quad (\text{ove: } \rho_s = \text{peso specifico})$$

cioè sostituendo dx ed y :

$$dp = \rho_s \cdot t \cdot \left(a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \right) \left(\frac{ds}{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)} \right)$$

semplificando:

$$dp = \rho_s \cdot t \cdot a \cdot ds$$

essendo costanti: a, ρ_s, t , è costante in tutta la catenaria anche dp ; ne consegue che le due catenarie sono curve di equilibrio.

Poiché abbiamo posto: $\frac{dp}{ds} = q = \text{peso per unità di lunghezza della catenaria}$, avremo

$$\boxed{q = \rho_s t a}$$

rispetto alla muratura q sarebbe il peso (per unità di lunghezza di catenaria) dell'area della superficie muraria di spessore "t" alta "a".

Ricordiamo che l'ordinata di un punto di una catenaria, moltiplicata per q è la tensione in quel punto, e che catene della stessa lunghezza appese agli stessi appoggi assumono la stessa configurazione indipendente da q .

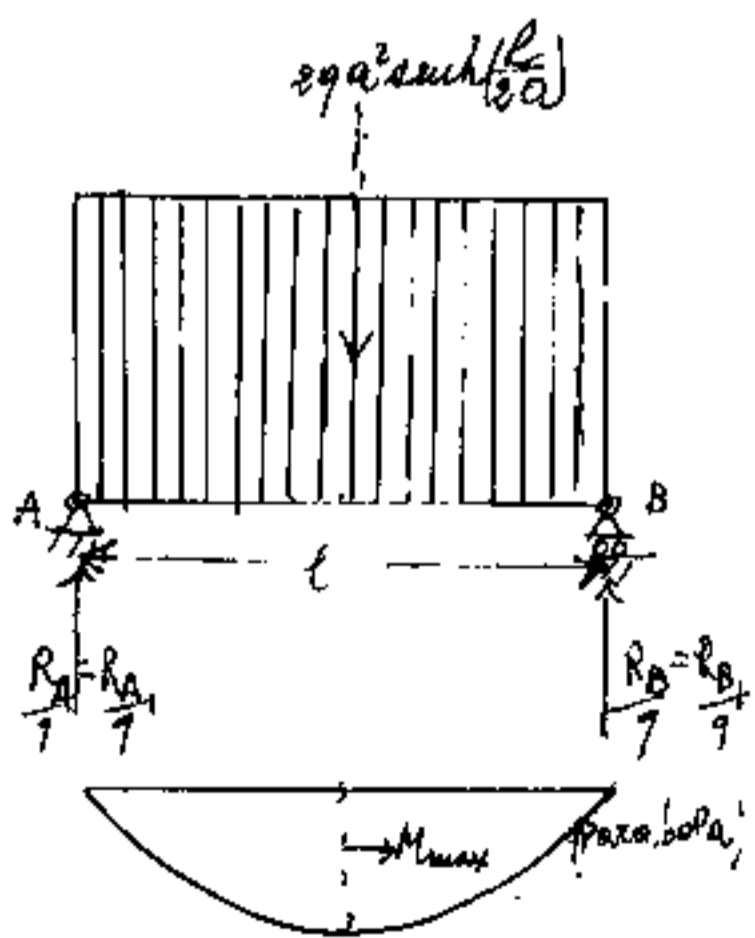
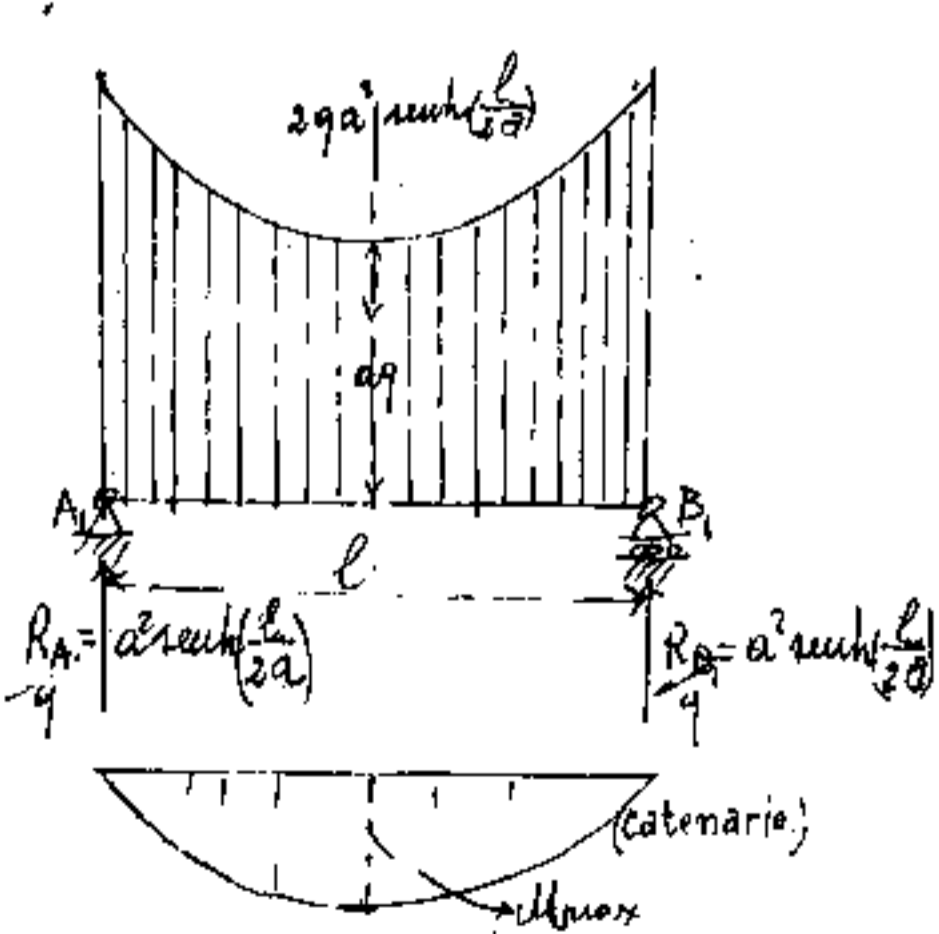
Per visualizzare meglio la questione invertiamo l'ordinata y (in modo da avere catenarie di trazione) e facciamo la seguente esperienza:

Sospendiamo a due punti fissi A e B una catenella di peso uniformemente distribuito (qualsiasi) essa assumerà la configurazione di equilibrio di una catenaria.

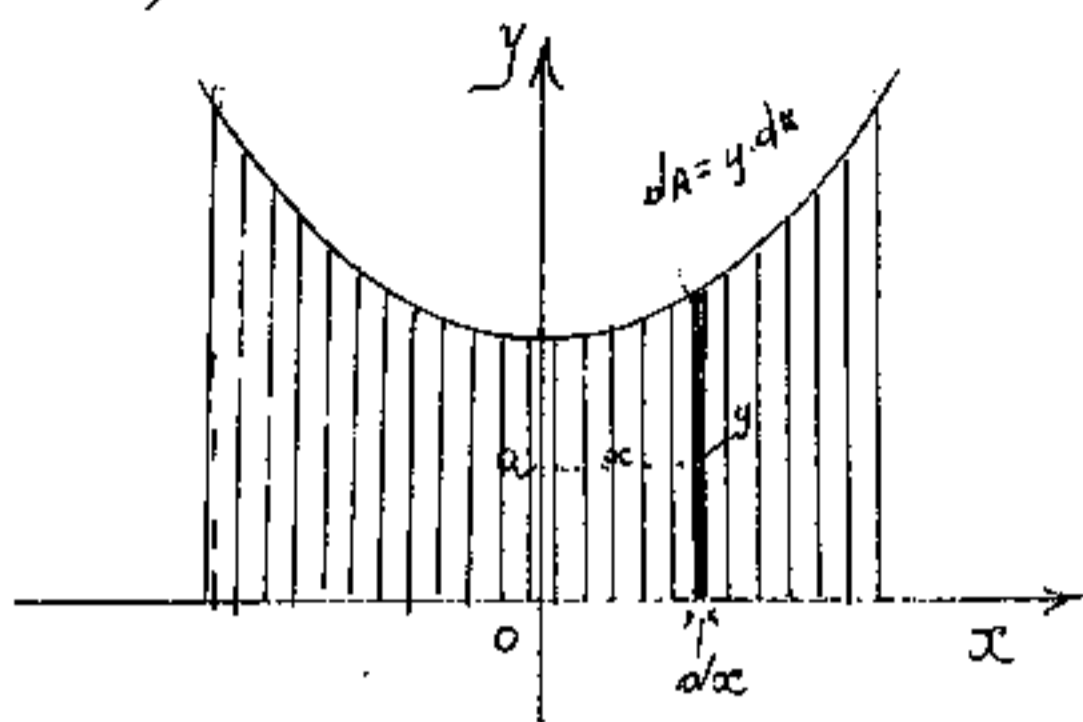
Se a ciascun elemento di tale catenella applichiamo un tratto di un'altra catena, (anche di peso unitario diverso purché uniforme) di lunghezza pari all'ordinata dell'elemento, la configurazione della catenaria non cambia. (il tratto di nuova catena deve essere apposto a tutti gli elementi della catenella).

Cioè una trave orizzontale con carico distribuito come una catenaria, ha come curva funicolare ancora una catenaria.

Una trave orizzontale con carico uniformemente distribuito, ha come curva funicolare una parabola.



Calcoliamo il baricentro dell'area sottesa fra la catenaria e l'asse delle x .



$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$dA = y \cdot dx$$

$$dA = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx$$

$$dA = a^2 \cosh\left(\frac{x}{a}\right) d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$A = a^2 \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$dS_y = x \cdot dA = x \cdot a^2 \cosh\left(\frac{x}{a}\right) d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$S_y = \int_0^x x a^2 \cosh\left(\frac{x}{a}\right) d\left(\frac{x}{a}\right) = a^3 \int_0^x \frac{x}{a} d\left(\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right) \text{ per parti:}$$

$$S_y = a^3 \left\{ \frac{x}{a} \sinh\left(\frac{x}{a}\right) - \int_0^x \sinh\left(\frac{x}{a}\right) d\left(\frac{x}{a}\right) \right\} =$$

$$S_y = a^3 \left\{ \left(\frac{x}{a}\right) \sinh\left(\frac{x}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + 1 \right\}$$

dividendo per $A = a^2 \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$:

$$x_G = \frac{S_y}{A} = a \left\{ \left(\frac{x}{a}\right) - \frac{\cosh\left(\frac{x}{a}\right) - 1}{\sinh\left(\frac{x}{a}\right)} \right\} = \left\{ x - a \frac{\operatorname{versh}\left(\frac{x}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{x}{a}\right)} \right\}$$

$$x_G = x - a \coth\left(\frac{x}{a}\right) + a \operatorname{cosech}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$x_G = x - a \frac{\operatorname{versh}\left(\frac{x}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$$S_x = \int_0^x \frac{y}{2} dA = \int_0^x \left(\frac{a}{2} \cosh\left(\frac{x}{a}\right)\right) \left(a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)\right) dx = \frac{a^3}{2} \int_0^x \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right) dx$$

$$S_x = \frac{a^3}{2} \left(\frac{\sinh\left(\frac{x}{a}\right) \cosh\left(\frac{x}{a}\right)}{2} + \left(\frac{x}{a}\right) \right)$$

$$\frac{S_x}{A} = \frac{\frac{a^3}{2} \left(\frac{\sinh\left(\frac{x}{a}\right) \cosh\left(\frac{x}{a}\right)}{2} + \left(\frac{x}{a}\right) \right)}{a^2 \sinh\left(\frac{x}{a}\right)} = y_G = \frac{a}{4} \left(\cosh\frac{x}{a} + \frac{(x/a)}{\sinh\left(\frac{x}{a}\right)} \right)$$

$$y_G = \frac{1}{4} \left(y + x \frac{1}{\sinh\left(\frac{x}{a}\right)} \right)$$

Abbiamo posto lo stesso carico complessivo sulle due travi in modo che avessero le stesse reazioni vincolari.

Il momento al centro della trave, se R è la reazione, $M_{max} = R \left(\frac{l}{2} - x_G \right)$, varia solo nei due casi il braccio di coppia che è $a \frac{\operatorname{versh} \left(\frac{l}{2a} \right)}{\operatorname{sinh} \left(\frac{l}{2a} \right)}$ per la catenaria

$\left(\frac{l}{4} \right)$ per il carico uniforme. (parabola)

Data la simmetria, è zero il taglio nella sezione $\frac{l}{2}$; conviene assumere l'asse y nella mezzeria della trave e calcolare il momento flettente variabile in x , che dovrà annullarsi per $x = \frac{l}{2}$. Per $x=0$ (mezzeria della trave) avremo:

$$M_{max} = \left(a^2 \operatorname{sinh} \left(\frac{l}{2a} \right) \right) \left(\frac{\operatorname{versh} \left(\frac{l}{2a} \right)}{\operatorname{sinh} \left(\frac{l}{2a} \right)} \right) a = \left(a^3 \operatorname{versh} \frac{l}{2a} \right)$$

$$M_{max} = a^2 \left(\cosh \frac{l}{2a} - 1 \right) = a^3 \left(\cosh \frac{l}{2a} - 1 \right) \text{ (catenaria)}$$

Per il carico uniforme

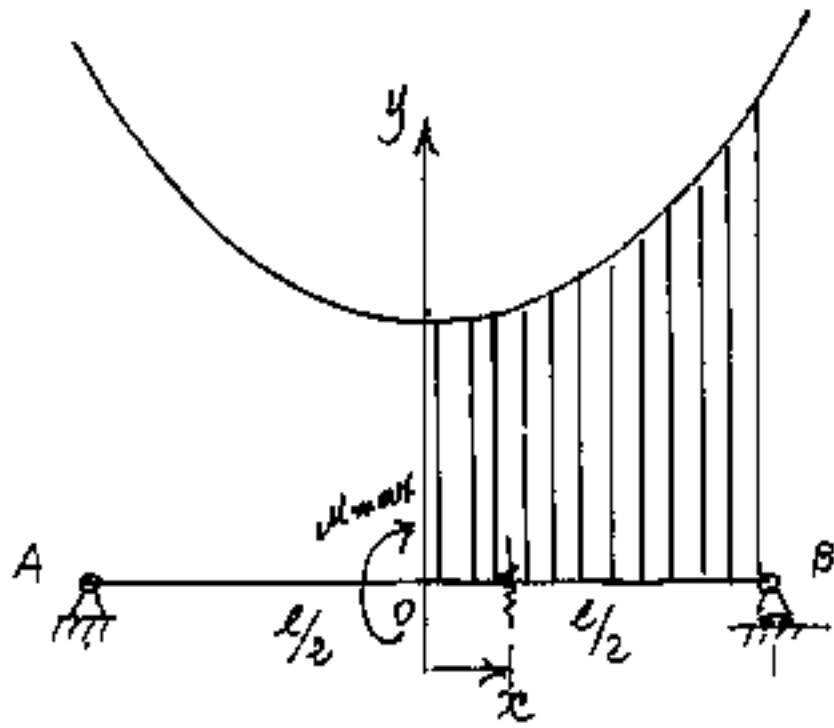
$$M_{max} = \left(a^2 \operatorname{sinh} \left(\frac{l}{2a} \right) \right) \left(\frac{l}{4} \right) = \frac{a^2 l}{4} \left(\operatorname{sinh} \frac{l}{2a} \right) \text{ (parabola)}$$

per $l = 2a$:

$$M_{max}(\text{catenaria}) = (0,543080634) a^3 = (\text{per } a=2)(g=1) = (4,344645078)g$$

$$M_{max}(\text{Parabola}) = (4,700804775)g$$

Cerchiamo ora di calcolare il momento variabile in x per un arco con distribuzione a catenaria.

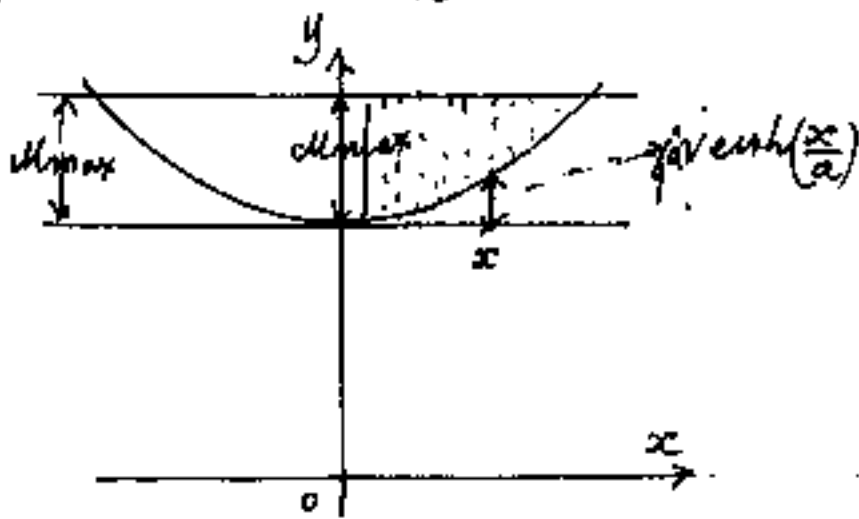


Sappiamo che il momento massimo al centro è $M_{max} = +a^3 \operatorname{versh}(\frac{l}{2a})$ l'area del arco da 0 ad x è $A_x = a^2 \operatorname{sech} \frac{x}{a}$

il baricentro di tale area dista da x : $\frac{a \operatorname{versh}(\frac{x}{a})}{\operatorname{sech}(\frac{x}{a})}$

per cui $dM_x = +a^3 \operatorname{versh}(\frac{l}{2a}) - a^3 \operatorname{versh}(\frac{x}{a})$

quando $x = \frac{l}{2}$ si ha $dM_x = 0$



$$dM_x = qa^3 \left(\operatorname{versh}(\frac{l}{2a}) - \operatorname{versh}(\frac{x}{a}) \right)$$

Resta così dimostrato che il arco a distribuzione catenaria, (come

il peso delle pareti sulle catenarie per un punto) ammette la curva funicolare catenaria.

Anzi considerando l'asse x con la sommità del muro, e l'asse y simmetrico verso il basso, per ogni punto passano due catenarie (cioè nel campo di esistenza delle catenarie riferite a quegli assi) e possiamo vedere l'insieme delle curve funicolari.

Come si rompono gli archi a tutto sesto

Riferiamoci ad un sistema di assi coordinati ortogonali con l'asse y verso il basso e proponiamoci di trovare l'arco di catenaria avente la corda il doppio della freccia.

Siano A e B gli estremi dell'arco di catenaria, V il vertice e C il punto medio di \overline{AB} , ove: $\overline{CA} = \overline{CB} = \overline{CV}$; sia " a " il modulo della catenaria ed avremo:

$$(y_A - a) = (y_B - a) = x_B = -x_A = a \cosh\left(\frac{x_B}{a}\right) - a$$

$$\cosh\left(\frac{x_B}{a}\right) - 1 = \left(\frac{x_B}{a}\right)$$

$$\operatorname{versh}\left(\frac{x_B}{a}\right) = \left(\frac{x_B}{a}\right)$$

$$\operatorname{raversh}\left(\frac{x_B}{a}\right) = 1$$

Dalle tavole che riportano: " $\operatorname{raversh}(x)$ " abbiamo:

$$\text{mo: } \left(\frac{x_B}{a}\right) = \left(\frac{CV}{a}\right) = \operatorname{argraversh}(1) = 1,616137513774313835.. \neq 1$$

$$y_B/a = 2,616137513774313835.. = (y_A/a) = (y_C/a)$$

Per AVB passerà un cerchio con centro in C che in AVB formerà un arco a tutto sesto in estradosso alla catenaria.

Con lo stesso centro C , in intradosso alla catenaria, vi sarà un cerchio tangente interno alla catenaria determinabile dalla condizione di avere per raggio la minima distanza da C

dei punti della catenaria stessa.

Detta \overline{CT} tale distanza avremo: (T = punto di tangenza)

$$\left(\frac{\overline{CT}}{a}\right)^2 = \left(\frac{y_c}{a} - \frac{y_T}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_T}{a}\right)^2$$

possiamo scrivere:

$$\left(\frac{\overline{CT}}{a}\right)^2 = \left(\frac{y_c}{a} - \frac{\cosh\left(\frac{x_T}{a}\right)}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_T}{a}\right)^2$$

derivando: ed uguagliando a zero:

$$\frac{d\left(\frac{\overline{CT}}{a}\right)^2}{d\left(\frac{x_T}{a}\right)} = 2\left(\frac{y_c}{a} - \cosh\left(\frac{x_T}{a}\right)\right)\left(-\operatorname{sech}\left(\frac{x_T}{a}\right)\right) + 2\left(\frac{x_T}{a}\right) = 0$$

$$\cosh\left(\frac{x_T}{a}\right) \cdot \operatorname{sech}\left(\frac{x_T}{a}\right) - \frac{y_c}{a} \operatorname{sech}\left(\frac{x_T}{a}\right) + \frac{x_T}{a} = 0$$

$$2 \operatorname{sech}\left(\frac{x_T}{a}\right) \left[\frac{y_c}{a} - \cosh\left(\frac{x_T}{a}\right)\right] = 1$$

$$2,6161375137743 - \cosh\left(\frac{x_T}{a}\right) = \frac{1}{2 \operatorname{sech}\left(\frac{x_T}{a}\right)}$$

$$\left(\frac{x_T}{a}\right) = 1,2085636062891645$$

$$\left(\frac{y_T}{a}\right) = 1,823648551013543$$

$$\left(\frac{y_c}{a} - \frac{y_T}{a}\right) = 0,792488962760770$$

$$\overline{CT} = 1,44522134863290 = R_e$$

$$\operatorname{sech}\left(\frac{x_T}{a}\right) = 1,5250226351152 = \operatorname{tang}(\alpha)$$

$$\alpha = 56^\circ 44' 45'', 6842112..$$

$$d_{\text{rad}} = 0,9900404945604454..$$

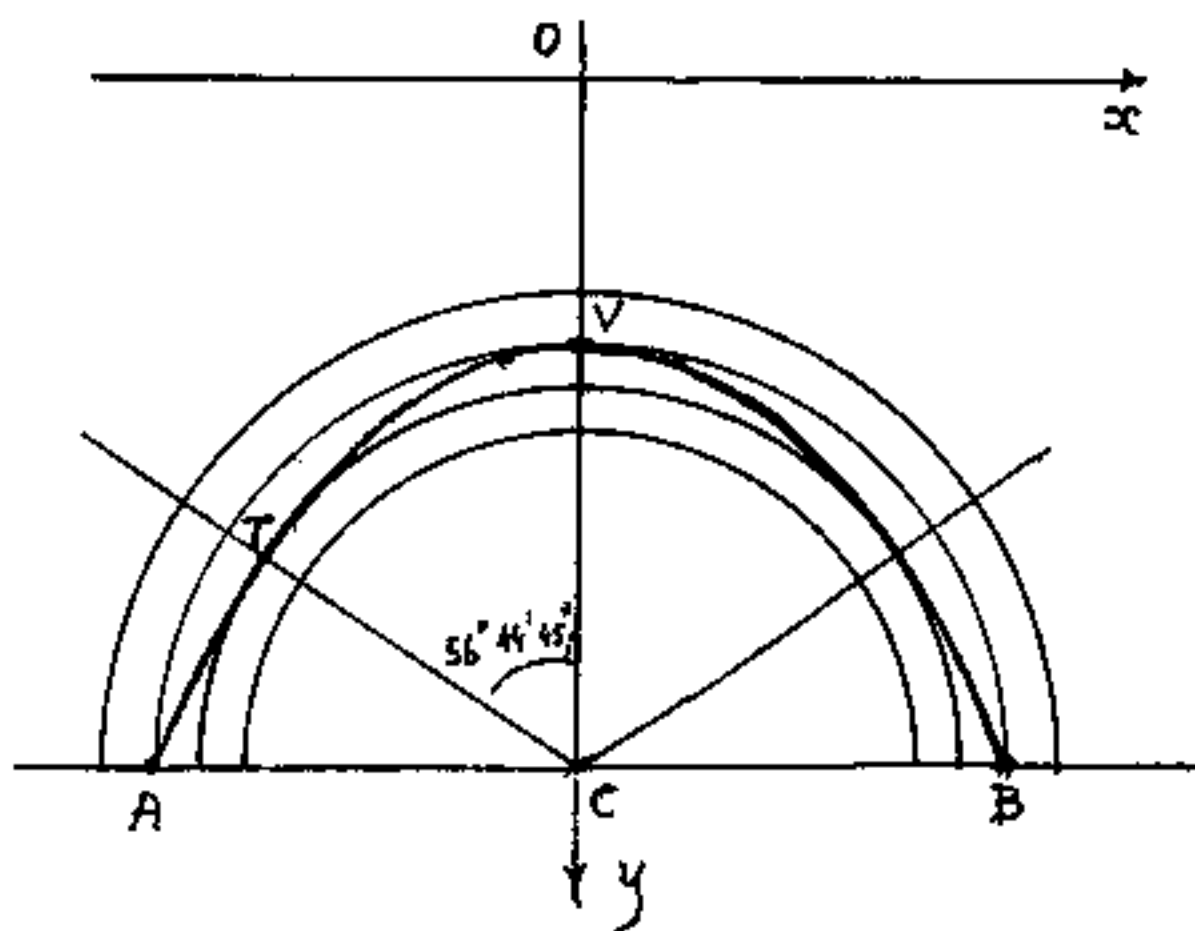
Tutte le misure lineari sono riferite al modulo "a" unitario.

Raggio di estradosso $R_1 = 1,616137513774 (a)$

" di intradosso $R_2 = 1,445221384633 (a)$

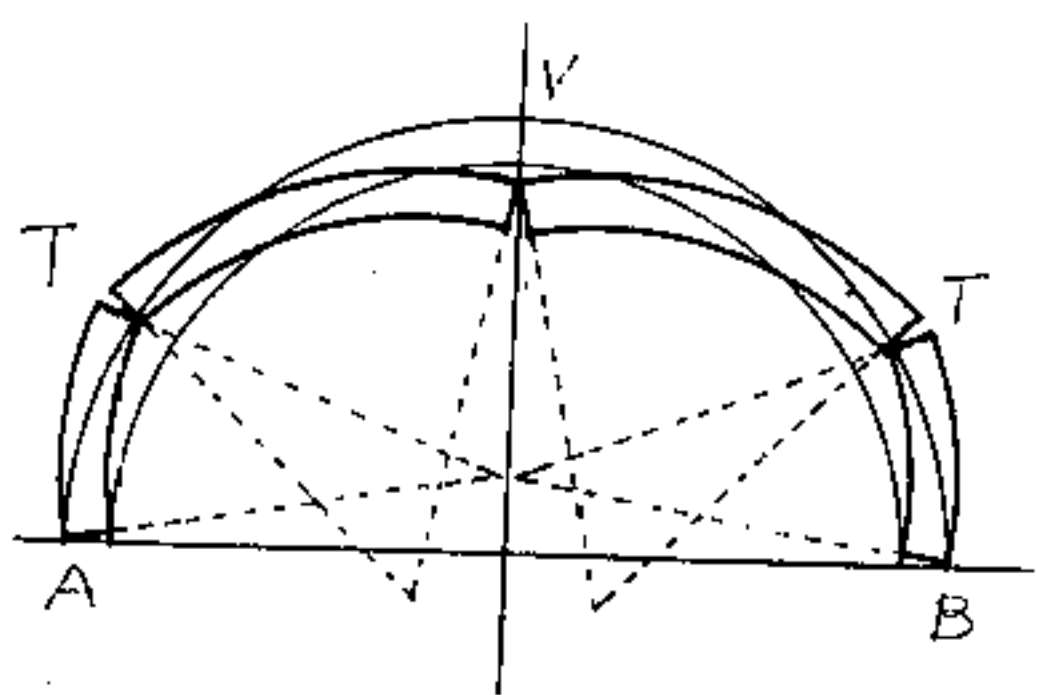
$$(R_1 - R_2) = \Delta R = \underline{\underline{0,170916129141 (a)}}$$

ΔR = spessore del terzo medio dell'arco. (ricorrendo la verifica del Mery) Essendo la catenaria la curva funicolare del carico della muratura soprastante, se la sua azione, di mutua compressione fra i conci, rimane entro il terzo medio dei conci stessi, (cioè entro il nocciolo centrale d'inerzia), non si verifica trazione fra i conci stessi.



Quindi occorre fare un arco aventi i conci di altezza non inferiore a tre volte ΔR cioè: $0,512748387 (a)$; il raggio medio: $\frac{R_1 + R_2}{2} = 1,530679449 (a)$.

I punti di tangenza della funicolare catenaria sono le sezioni ove la trazione provoca la rottura dell'arco. La modalità di rottura è rappresentata nella figura a fianco.



La trazione nell'intradosso fa calare il vertice V, i tronconi spingendo orizzontalmente provocano la rottura nelle sezioni T.

Nota che la funicolare catenaria in A e B provoca trazione in intradosso. Se l'arco è ribassato (per esempio avendo la corda a livello T, se è impedito lo slittamento dei punti T, l'arco non può cadere).

Spesso vediamo catene di ferro poste sotto la corda a livello T.

I Romani usavano "cimfiameare" i punti T, ponendo peranti macigni per impedire lo slittamento.

Si è verificato sperimentalmente con piano inclinabile la rottura di

un arco fatto di conci affiancati su una malta.

I conci sono montati in piano su un foglio di carta posto sul piano inclinabile.

Il foglio di carta è stato necessario per disegnare dal centro i raggi inclinati di 45° , di 57° , di 60° , in modo da verificare i raggi di rottura.

Montato l'arco in piano si è iniziato ad inclinare il piano di sostegno.

I singoli conci, su piano inclinato, erano sollecitati a scendere, ma l'attrito col piano di posa ne impedisce prima e ne limita poi il movimento. Quando però la componente tangenziale, uguaglia e poi supera l'attrito col piano inclinabile, l'arco si muove e la sua rottura può essere ripresa cinematograficamente, per poterne riprodurre a rallentatore le modalità, o con la moviola riprodurre le fasi salienti.

Queste ricerche interessarono particolarmente

la neofisica e gli esperimenti della fisica.

Catenarie riferite ad assi traslati

Abbiamo già accennato alla traslazione orizzontale (cioè secondo l'asse x), per dare i fondamenti per il calcolo di cavi flessibili soggetti a carichi concentrati.

La traslazione secondo l'asse y , l'abbiamo accennata per il coppia di due catenarie passanti per un punto, le catenarie esterne ed interne sono ad assi traslati in y .

Se la traslazione è pari ad " a " sappiamo:

$$(y+a) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right); \quad y = a \left(\cosh\left(\frac{x}{a}\right) - 1 \right) = a \operatorname{versh}\left(\frac{x}{a}\right).$$

La formula generale per la traslazione di assi nella catenaria è:

$$(y-m) = a \cosh\left(\frac{(x-m)}{a}\right) =$$

$$\left(\frac{y}{a} - \frac{m}{a}\right) = \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \cosh\left(\frac{m}{a}\right) - \operatorname{sech}\left(\frac{x}{a}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{m}{a}\right)$$

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \left[\cosh\left(\frac{m}{a}\right) - \operatorname{tanh}\left(\frac{x}{a}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{m}{a}\right) \right] + m$$

I punti comuni a due catenarie traslate di m_1, n_1 ; ed m_2, n_2 ; saranno date da:

$$a \cosh\left(\frac{x-m_1}{a}\right) + n_1 = a \cosh\left(\frac{x-m_2}{a}\right) + n_2$$

$$a \left[\cosh\left(\frac{x-m_1}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x-m_2}{a}\right) \right] = (n_2 - n_1)$$

ed utilizzando le formule di prostaferesi:

$$\left(\frac{m_2 - m_1}{a}\right) = 2 \operatorname{sech}\left(\frac{(x - m_1) + (x - m_2)}{2a}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{(x - m_1) - (x - m_2)}{2a}\right)$$

$$\operatorname{sech}\left(\frac{2x - (m_1 + m_2)}{2a}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{m_2 - m_1}{2a}\right) = \left(\frac{m_2 - m_1}{2a}\right)$$

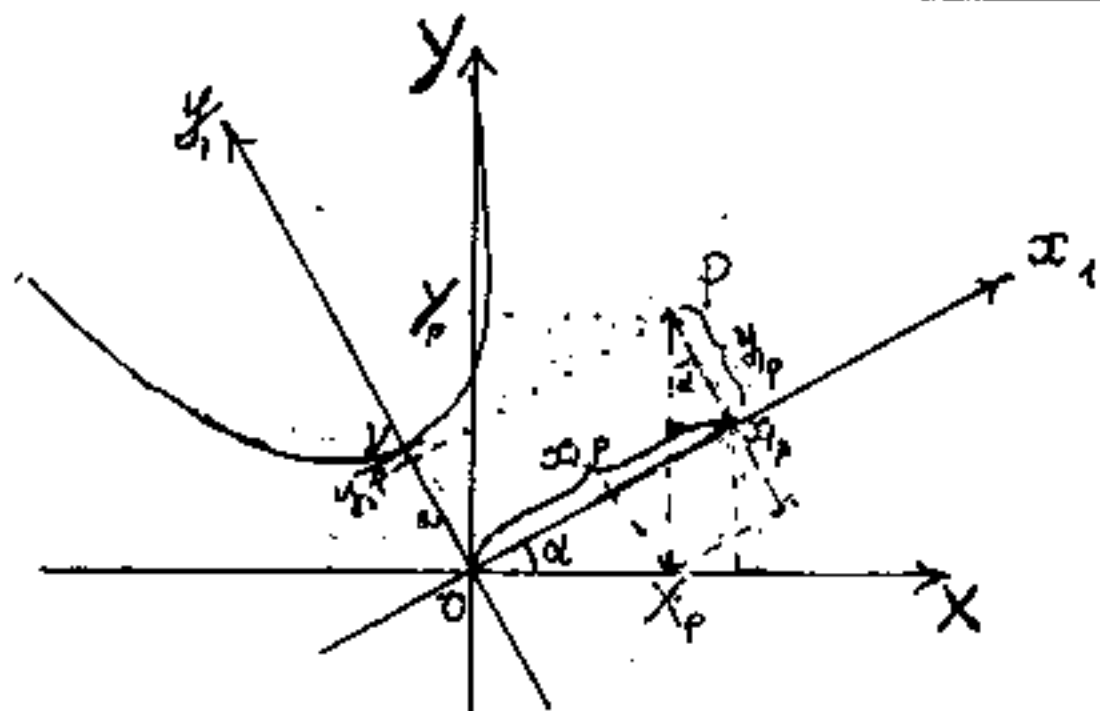
$$\operatorname{sech}\left[\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{m_1 + m_2}{2a}\right] = \left(\frac{m_2 - m_1}{2a}\right) / \operatorname{sech}\left(\frac{m_2 - m_1}{2a}\right)$$

$$\left(\frac{x}{a}\right) = \operatorname{argsech}\left[\frac{(m_2 - m_1)}{2a \operatorname{sech}\left(\frac{m_2 - m_1}{2a}\right)}\right] + \left(\frac{m_1 + m_2}{2a}\right)$$

Sostituendo $\left(\frac{x}{a}\right)$ nelle due espressioni della $\frac{y}{a}$ si verificano i calcoli.

Occorre osservare che catenarie di diverso modulo "a", hanno il vertice traslato verticalmente di $(a_1 - a_2)$ come abbiamo già visto.

Catenerie ad assi ruotati



Ricordiamo che una funzione riferita agli assi x_1 ed y_1 ruotati di α in senso po-

sitivo (antiorario) rispetto agli assi principali X, Y ; può essere riferita, (punto per punto) agli assi principali; infatti:

$$\begin{cases} X = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha \\ Y = y_1 \cos \alpha + x_1 \sin \alpha \end{cases}$$

L'equazione della nostra catenaria è

$$y_1 = a \cosh\left(\frac{x_1}{a}\right) = a + a \operatorname{verh}\left(\frac{x_1}{a}\right)$$

è quindi opportuno usare le formule inverse.

$$\begin{cases} x_1 = X \cos \alpha + Y \sin \alpha \\ y_1 = Y \cos \alpha - X \sin \alpha \end{cases}$$

avremo: (l'equazione generale)

$$(Y \cos \alpha - X \sin \alpha) = a \cosh\left(\frac{X \cos \alpha + Y \sin \alpha}{a}\right)$$

Le coordinate del vertice V sono:

$$\begin{cases} X_V = -a \tan \alpha \\ Y_V = a \cos \alpha \end{cases}$$

per $X = 0$; $\rightarrow Y \cos \alpha = a \cosh\left(\frac{Y \sin \alpha}{a}\right)$

$$\cot \alpha = \operatorname{vercosh}\left(\frac{Y \sin \alpha}{a}\right)$$

(abbiamo diviso per: $(y \operatorname{sen} \alpha)$) da cui:

$$\operatorname{argcosh}(\cotg \alpha) = \frac{y(\operatorname{sen} \alpha)}{a}$$

$$\boxed{y = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} \operatorname{argcosh}(\cotg \alpha)}$$

Le due soluzioni sono le ordinate dei punti in cui la catenaria interseca l'asse delle ascisse.

Si noti che $\operatorname{argcosh}(\cotg \alpha)$ non ammette soluzioni per $\cotg(\alpha) < 1,5088795615 \dots$ cioè per $\alpha > 33^\circ 32' 2'',99$

→ facciamo alcuni casi particolari.

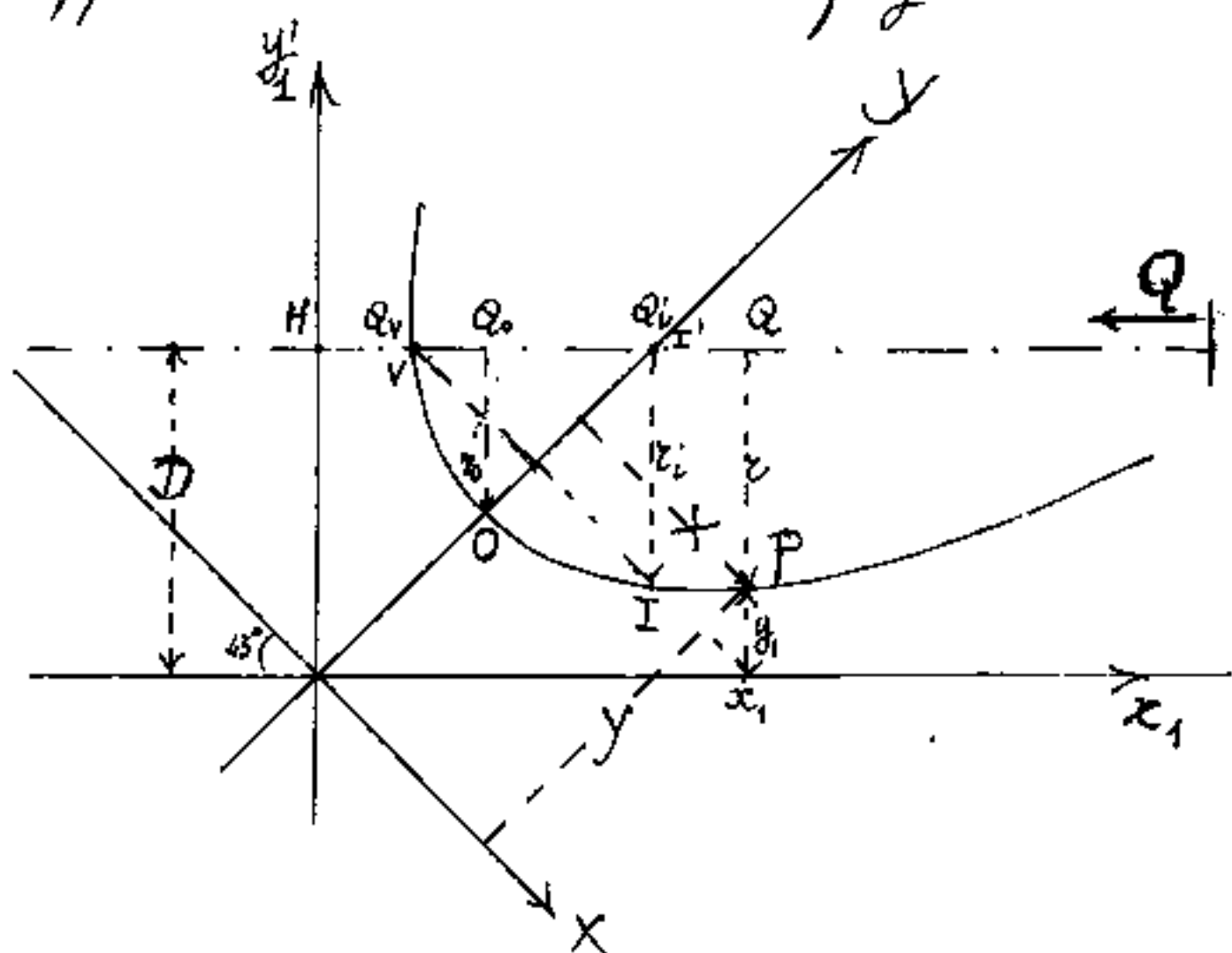
per $\alpha = 45^\circ$; $\operatorname{sen}(\alpha) = \cos \alpha = \sqrt{2}/2$

$$\left(\frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}} \right) = a \cosh \left(\frac{x+y}{a\sqrt{2}} \right)$$

$$(y-x) = (a\sqrt{2}) \left[\cosh \left(\frac{x}{a\sqrt{2}} \right) \cosh \left(\frac{y}{a\sqrt{2}} \right) + \operatorname{senh} \left(\frac{x}{a\sqrt{2}} \right) \operatorname{senh} \left(\frac{y}{a\sqrt{2}} \right) \right]$$

Poiché i costoloni e le vele della cupola di S. Maria del Fiore di Firenze sono sovrapponibili rispettivamente a catenoidi e catenarie ad assi inclinati di 45° , Sulla base di rilievi effettuati da W. Ferri, M. Fondelli, P. Frauchi, F. Greco, fotogrammetricamente (e.f.r. Bollettino Ingegneri N° 10 anno 1972 - articolo

C. Brogi - Su alcuni aspetti delle curve funicolari) e restituito, tramite computer, in coordinate cilindriche, ed in proiezioni ortogonali; si è ritenuto opportuno disporre il disegno della catenaria inclinata di 45° riferita ad x, y , in modo che l'asse Q delle coordinate cilindriche fosse orizzontale e distanziato di " D " rispetto all'asse orizzontale x_1 e sia H il punto origine delle dimensioni Q effettuate nel verso in figura.



Per un punto generico P avremo:

$$\begin{cases} x_1 = (H - Q) \\ y_1 = (-D - z) \end{cases} \quad \text{con } (Q; z) \equiv \text{coordinate cilindriche.}$$

Sommando e sottraendo si ha:

$$\begin{cases} (x_1 + y_1) = (H + D) - (Q + z) = (x + y) \cos(\alpha) - (x - y) \sin(\alpha) \\ (x_1 - y_1) = (H - D) - (Q - z) = (x - y) \cos(\alpha) + (x + y) \sin(\alpha) \end{cases}$$

Nel caso particolare di $\alpha = 45^\circ = \pi/4$ si ha:

$$\sin(\alpha) = \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ cioè:}$$

$$\begin{cases} (x_1 + y_1) = y \sqrt{2} = (H+D) - (Q+\tau) \\ (x_1 - y_1) = x \sqrt{2} = (H-D) - (Q-\tau) \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} x = \frac{(H-D)}{\sqrt{2}} - \frac{(Q-\tau)}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{(H+D)}{\sqrt{2}} - \frac{(Q+\tau)}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Essendo costanti H e D poniamo:

$$K_1 = (H+D)/\sqrt{2} \quad ; \quad K_2 = (H-D)/\sqrt{2}$$

avremo:

$$\begin{cases} x = K_2 - (Q-\tau)/\sqrt{2} \\ y = K_1 - (Q+\tau)/\sqrt{2} \end{cases}$$

La catenaria è simmetrica rispetto all'asse y (ammette un minimo per $x=0$) perciò il valore:

$$y_{\min} = (Q_0 + \tau_0)/\sqrt{2} + K_1$$

ove: Q_0 ed τ_0 sono le "misure" sul vertice.

Ma K_1 è costante, perciò anche:

$$(Q_0 + \tau_0) = (Q + \tau)_{\min}$$

Cioè sommando le coordinate $(Q + \tau)$ proye-
menti dalla misurazione, è possibile trovare
il minimo che rappresenta le coordinate
del vertice della catenaria.

In tale punto (vertice della catenaria)

$$X = 0$$

$$K_2 - (Q_0 - z_0)/\sqrt{2} = 0$$

$$K_2 = \frac{(Q_0 - z_0)}{\sqrt{2}} = \frac{(H - D)}{\sqrt{2}}$$

abbiamo:

$$(H - D) = (Q_0 - z_0)$$

Consideriamo l'asse Q : esso incontra l'asse delle Y alla quota Q_i e sia z_i il raggio a tale quota che incide la curva; Q incontra la curva in V e sia $Q_v =$ quota di V ; $z_v = 0$;

Nel caso particolare di $\alpha = 45^\circ$ avremo:

$$Q_v - Q_i = z_i$$

$$\text{cioè } Q_v = Q_i + z_i$$

cioè I e V sono simmetrici rispetto ad Y quindi hanno la stessa ordinata Y e l'ascissa X uguale ed opposta (di segno contrario).

Poiché: $K_2 = (H - D)/\sqrt{2}$ è costante $= (Q_0 - z_0)/\sqrt{2}$

$$Q_i = (H - D) - K_2 \sqrt{2} = (Q_0 - z_0)$$

$$\boxed{Q_i = Q_0 - z_0}$$

Nota Q_i e quindi z_i , si ha inoltre

$$Q_v = Q_i + z_i \quad ; \quad z_v = 0$$

Noti tre punti caratteristici come Q ; V ; I ; è possibile trovare gli elementi della curva.

Attenzione ai simboli che abbiamo conservato quelli dell'articolo citato:

Il punto O è il punto di massima curvatura, il punto V è il punto alla massima quota, il punto I è il simmetrico di V rispetto ad O .

Se consideriamo: $\overline{VI} = l =$ corda della curva, si ha:

$$l/2 = r_i/\sqrt{2}$$

la freccia:

$$f = r_0\sqrt{2} - r_i/\sqrt{2}$$

$$\boxed{\frac{f}{l/2} = \left(\frac{2r_0}{r_i} - 1 \right)}$$

Se la curva è una catenaria si ha:

$$\frac{f}{l/2} = \frac{\cosh(l/2a) - 1}{l/2a} = \operatorname{arversh}(l/2a)$$

cioè:

$$l/2a = \operatorname{argraversh}(f/l/2)$$

$$\boxed{a = \frac{l/2}{\operatorname{argraversh}(f/l/2)}}$$

noto il parametro "a" della catenaria:

$$y_v = y_i = a \cosh\left(\frac{l}{2a}\right)$$

$$K_1 = \left(y_i + \frac{Q_i + r_i}{\sqrt{2}} \right) = y_v + \frac{Q_v}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{K_1 = a \cosh\left(\frac{l}{2a}\right) + \frac{Q_v}{\sqrt{2}}}$$

sostituendo K_1 e K_2 :

$$\begin{cases} (H-D) = (Q_0 - \tau_0) & \text{(già nota)} \\ (H+D) = a\sqrt{2} \cosh\left(\frac{l}{2a}\right) + Q_v \end{cases}$$

sommando e sottraendo si ha:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left[a\sqrt{2} \cosh\left(\frac{l}{2a}\right) + Q_v + Q_0 - \tau_0 \right] \\ D &= \frac{1}{2} \left[a\sqrt{2} \cosh\left(\frac{l}{2a}\right) + Q_v - Q_0 + \tau_0 \right] \end{aligned}$$

Noti H e D è individuata la retta Q rispetto ai nostri sistemi di riferimento x, y e X, Y .

Se disponiamo di un rilievo di una linea eseguito misurando le progressive lungo un allineamento e normalmente ad esso gli scostamenti dalla curva, (è il caso delle coordinate cilindriche per linee spaziali, se tali linee giacciono in piani verticali si ha il caso in esame), e vogliamo controllare se la linea è una catenaria, si procede nei calcoli come segue:

Disponiamo della progressiva Q e degli scostamenti τ , a fianco riportiamo la colonna $(Q + \tau)$.

L'esame di questa colonna ove $(Q_v + 0) = Q_v = (Q_i + \tau_i)$ fra Q_v e Q_i deve esserci un massimo $(Q_0 + \tau_0)$ ove $(Q_i + \tau_i)$ ove nell'intervallo: $Q_v \div Q_i$ $Q_v = (Q_i + \tau_i)$ sono minimi. Si affianca anche la colonna $(Q - \tau)$.

Dalle formule esposte si calcolano $(H-D)$; $(H+D)$
è possibile ora calcolare H e D ; X ed Y (vedi formula)
con ciò abbiamo riportato i dati del rilievo
alle coordinate X ; Y ; che si affiancano in
due colonne.

Per ciascun punto X ; è possibile calcolare
la coordinata $y = a \cosh\left(\frac{X}{a}\right)$; riportiamo
questi valori nella nuova colonna Y_c , quindi
l'ultima colonna $s = (Y - Y_c)$ ci dirà quali sono
gli scostamenti dalla curva catenaria.

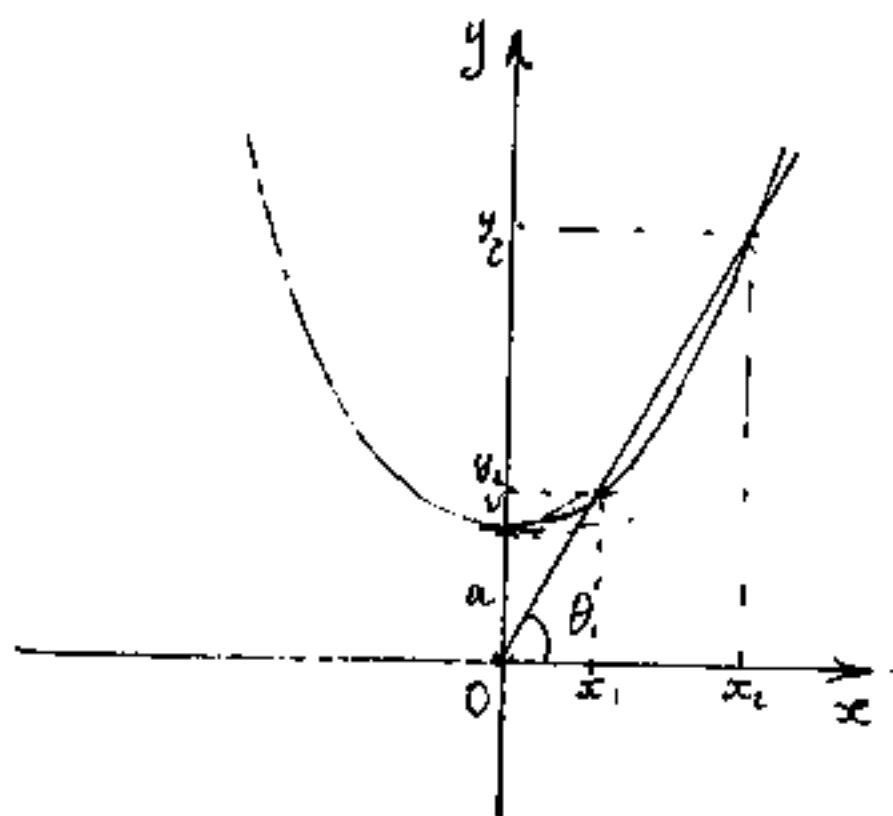
La formula generale per la ruotazione assi di
una curva catenaria:

$$(y \cos \alpha - x \sin \alpha) = a \cosh \left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{a} \right)$$

è difficilmente esplicitabile.

Supponendo noti (o assegnati) l'angolo, la x ,
ed il modulo "a" la y è calcolabile per tentativi.

La catenaria in coordinate polari



Se sostituiamo:

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

nella equazione della catenaria otteniamo:

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \rightarrow \rho \sin(\theta) = a \cosh\left(\frac{\rho \cos(\theta)}{a}\right)$$

dividendo per $\rho \cos(\theta)$

$$\tan(\theta) = a \cosh\left[\frac{\rho \cos(\theta)}{a}\right]$$

da cui:

$$\boxed{\rho = \frac{a}{\cos \theta} \operatorname{arccosh}(\tan(\theta))} < \begin{matrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{matrix}$$

per ogni θ si hanno due ρ purché θ sia maggiore del valore limite: $56^\circ 27' 57,01''$ ($\tan \theta = 1.50887956$) e minore di $123^\circ 32' 2,99''$.

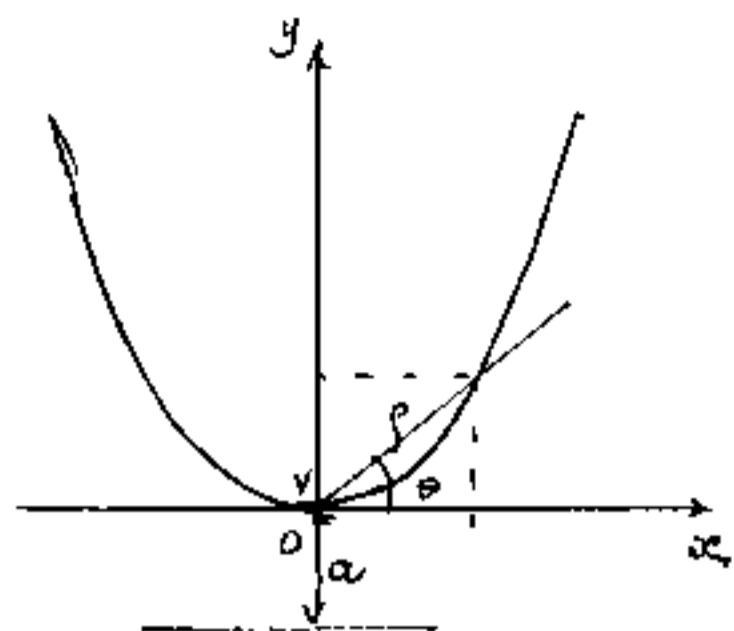
Si noti che: $(\rho_2 - \rho_1)$ è la lunghezza della corda sulla retta per il centro assi.

Noti invece ρ e θ i moduli delle due catenarie:

$$\boxed{\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} = \frac{\rho \cos(\theta)}{\operatorname{arccosh}(\tan(\theta))}}$$

Se invece vogliamo che per ogni θ vi sia un solo ρ dobbiamo traslare di "a" l'asse o_c e far coincidere l'origine degli assi col vertice

della catenaria in questo caso abbiamo:



$$y = a \operatorname{versh} \left(\frac{\rho}{a} \right)$$

$$\rho \sin \theta = a \operatorname{versh} \left(\frac{\rho \cos \theta}{a} \right)$$

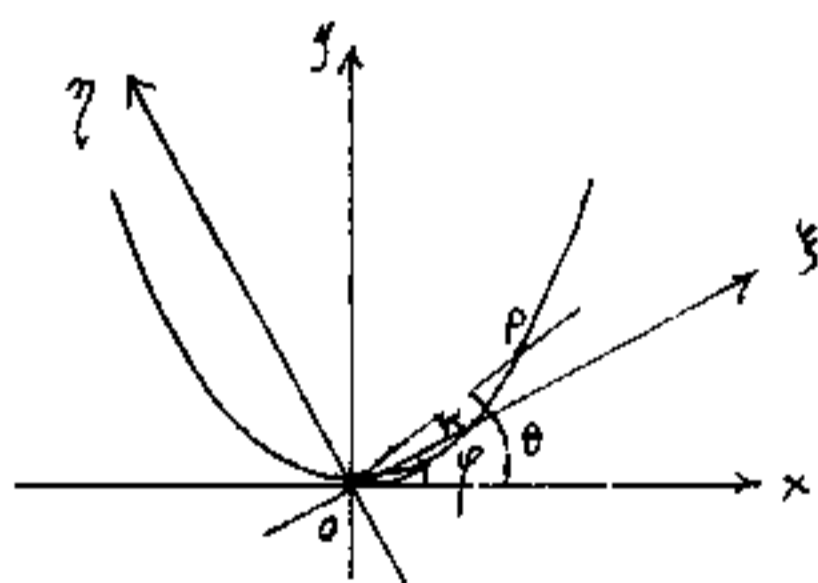
$$(\tan \theta) = \operatorname{zaversh} \left(\frac{\rho \cos \theta}{a} \right)$$

$$\boxed{\rho = \frac{a}{\cos \theta} \operatorname{argzaversh}(\tan \theta)}$$

ove θ deve essere maggiore di zero minore di 180° .

$$\boxed{a = \frac{\rho \cos \theta}{\operatorname{argzaversh}(\tan \theta)}}$$

Questa formula consente di calcolare la ca-

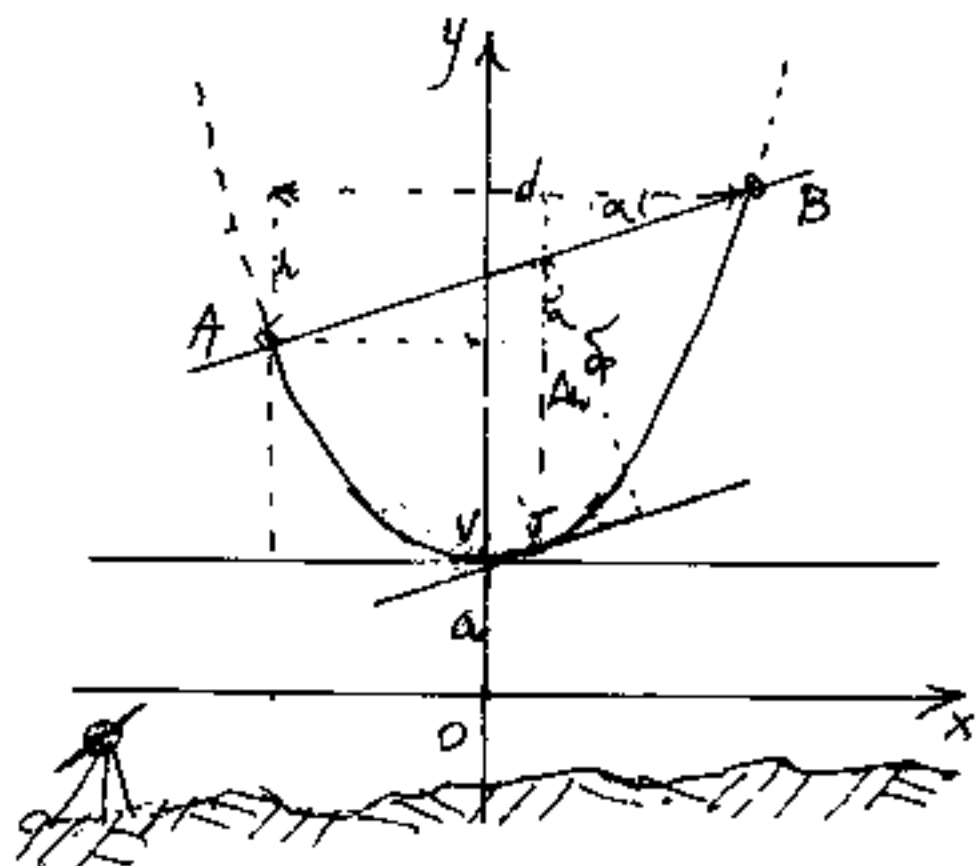


tenaria ad assi ruotati di φ intorno al vertice della catenaria; siano ξ ed η gli assi ruotati e sia α l'argomento rispetto ad essi ave

mo che ρ resta invariato ed al posto di θ viene posto $(\varphi + \alpha)$ con α che assume anche valori negativi fino a $\alpha = -\varphi$ e non supera $(180^\circ - \varphi)$.

$$\boxed{\rho = \frac{a}{\cos(\varphi + \alpha)} \left[\operatorname{argzaversh}(\tan(\varphi + \alpha)) \right]}$$

Il calcolo delle frecce nelle campate non a livello di una catenaria - (il rilievo)



Sia "d" la campata (distanza fra gli appoggi) ed "h" il dislivello fra gli appoggi; abbiamo già trattato la catenaria

fra punti a diverso livello, ove posto: $l = L_{AB}$ = lunghezza della curva (funo o cavo) ed abbiamo trovato:

(il modulo):

$$a = \frac{d}{2 \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\frac{l^2 - h^2}{d^2}} \right)}$$

(le coordinate)

$$x_A = a \ln \left| \left(\frac{a}{l-h} \right) \left(1 - e^{-d/a} \right) \right|$$

$$y_A = a \operatorname{cosh} \left(\frac{x_A}{a} \right)$$

Consideriamo di voler rilevare, con strumenti topografici la catenaria; facilmente troviamo "d", "h", la pendenza: $\operatorname{tg} \alpha = h/d$, e la posizione di "V" cioè: x_A ; x_B ; $a \operatorname{versh} \left(\frac{x_A}{a} \right)$ = dislivello fra V. ed A, e dislivello fra V e B, da cui: la freccia in V = $f_v = a \operatorname{versh} \left(\frac{x_A}{a} \right) + x_A \operatorname{tg}(\alpha)$

posto: $(a) \operatorname{versh}\left(\frac{x_A}{a}\right) = \Delta_{h(v_A)}$ ovvero:

$$a = \frac{(x_A)}{\operatorname{argversh}(\Delta_{h(v_A)})}$$

definiti "a" e "v" sono definiti gli assi della

catenaria: $\widehat{AB} = l = a \left(\operatorname{sech}\left(\frac{x_B}{a}\right) + \operatorname{sech}\left(\frac{x_A}{a}\right) \right)$

(il segno di (x_A) fa aumentare o diminuire $\operatorname{sech}\left(\frac{x_B}{a}\right)$)

Il punto T ove passa la tangente parallela ad \widehat{AB} è facilmente individuabile:

$$\operatorname{sech}\left(\frac{x_T}{a}\right) = \operatorname{tg}(\alpha)$$

$$x_T = \frac{a}{\operatorname{argsech}(\operatorname{tg}(\alpha))}$$

il dislivello fra le rette parallele:

$$\Delta_h = y_B - \frac{h}{l}(x_B - x_T) - y_T$$

La distanza fra le due rette parallele

$$\delta_p = \Delta_h \cos(\alpha)$$

Il calcolo meccanico delle linee elettriche aeree è ottimamente sviluppato in:

"Noferino Foletti" - "Trasmissione e Distribuzione dell'Energia Elettrica" - Vol I - cap IX - ediz.

Patron - Palermo - 1963 -

Tale trattazione è precedente la pubblicazione del nostro operatore "ca" e quindi non è in grado di esplicitare gli elementi per il

avremo, per definizione:

$$\overline{PF} = \overline{PD} = (y+a)$$

e dal triangolo PEF si ha:

$$(y+a)^2 = (y-a)^2 + x^2$$

da cui

$$\boxed{y = \frac{x^2}{4a}} \quad (\text{equazione della parabola al centro})$$

derivando si ha:

$$y' = \frac{x}{2a} = \frac{dy}{dx} = \tan(\alpha)$$

$$\overline{MH} = \frac{y}{\tan(\alpha)} = \frac{x^2/4a}{x/2a} = x/2$$

La retta tangente in un punto di una parabola, passa per il punto medio dell'ascissa (M); e quindi taglia l'asse delle y in un punto Q di ordinata uguale ed opposta a quella del punto di tangenza: $(y_Q = -y_P) = \overline{OQ}$; $\overline{QF} = \overline{FP}$; $\overline{QM} = \overline{MP}$.

La distanza δ dal fuoco della retta tangente, essendo isoscele il triangolo \widehat{QFP} (dimostra che $\widehat{FMP} = \widehat{FMQ}$ è retto) perciò $\delta = \overline{FM} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4a^2}$ come può dedursi dal triangolo FOM.

Per rettificare il tratto \widehat{OP} della parabola, poniamo:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad ; \quad dy = \frac{x}{2a} dx \quad ; \quad ds = dx \sqrt{1 + \frac{x^2}{4a^2}}$$

$$s = \widehat{OP} = \int_{\widehat{OP}} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2a}\right)^2} dx = 2a \int_{\widehat{OP}} \sqrt{\left(\frac{x}{2a}\right)^2 + 1} d\left(\frac{x}{2a}\right)$$

posto $\frac{x}{2a} = \operatorname{sech}(z)$

$$s = 2a \int_{\widehat{OP}} (\cosh(z)) d(\operatorname{sech}(z)) =$$

$$s = 2a \left[\frac{\operatorname{sech}(z) \cosh(z) + z}{2} \right]_{\widehat{OP}}$$

sostituendo:

$$\operatorname{sech}(z) = \frac{x}{2a} ; \quad \cosh(z) = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2a}\right)^2} = \frac{1}{2a} \sqrt{x^2 + 4a^2}$$

$$z = \operatorname{argsech}\left(\frac{x}{2a}\right) ; \quad \text{avremo:}$$

$$s = a \left\{ \frac{x}{2a} \cdot \frac{1}{2a} \sqrt{x^2 + 4a^2} + \operatorname{argsech}\left(\frac{x}{2a}\right) \right\}$$

$$s = \frac{x}{4a} \sqrt{x^2 + 4a^2} + \frac{1}{2} \left(2a \operatorname{argsech}\left(\frac{x}{2a}\right) \right)$$

Se pensiamo l'arco \widehat{OP} di parabola disteso sulla retta tangente, a partire da P , cioè con P coincidente, (la parabola rotoli sulla tangente con verso antiorario), avremo che togliendo ad "s", così rettificato, il segmento \overline{MP} , si ottiene un segmento che è pari all'ascissa del fuoco quando la parabola rotola sull'asse delle ascisse.

(Notare che $\widehat{FMP} = 90^\circ$). Le coordinate del fuoco sono

quindi:

$$\begin{cases} X_F = s - \overline{PH} \\ Y_F = s \end{cases}$$

ed essendo:

$$\overline{MP} = \frac{x}{2} \cos(\alpha) = \frac{x}{4a} \sqrt{x^2 + 4a^2}$$

sostituendo si ha:

$$\begin{cases} x_F = a \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x_p}{2a}\right) \\ y_F = \frac{1}{2} \sqrt{x_p^2 + 4a^2} = a \sqrt{\frac{x_p^2}{4a^2} + 1} \end{cases}$$

ricavando x_p dalle due equazioni:

$$\operatorname{sinh}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{x_p}{2a}$$

$$\boxed{y_F = a \cosh\left(\frac{x_F}{a}\right)}$$

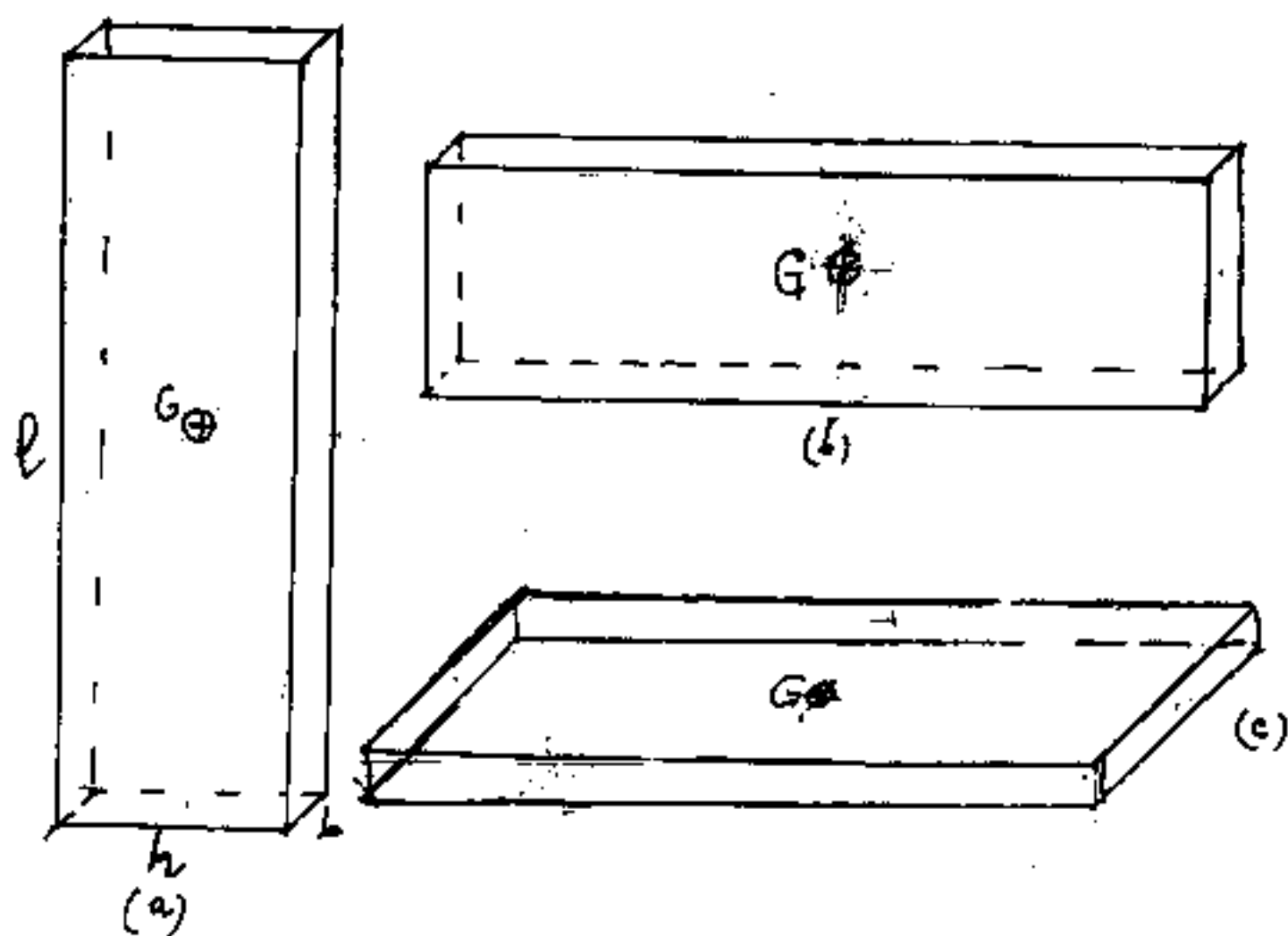
Resta così dimostrato che il luogo dei punti descritti dal fuoco di una parabola che rotola, senza strisciare, sull'asse delle ascisse è una catenaria con parametro pari all'ordinata del fuoco.

Da questa proprietà discende la possibilità di disegnare una catenaria con tratto continuo. (Basta ritagliare un profilo parabolico convesso su una lastra, porre una punta scrivente sul fuoco e far rotolare il profilo parabolico su una stecca da disegno, la punta scrivente traccia una catenaria)

stabilità e Instabilità dell' equilibrio statico

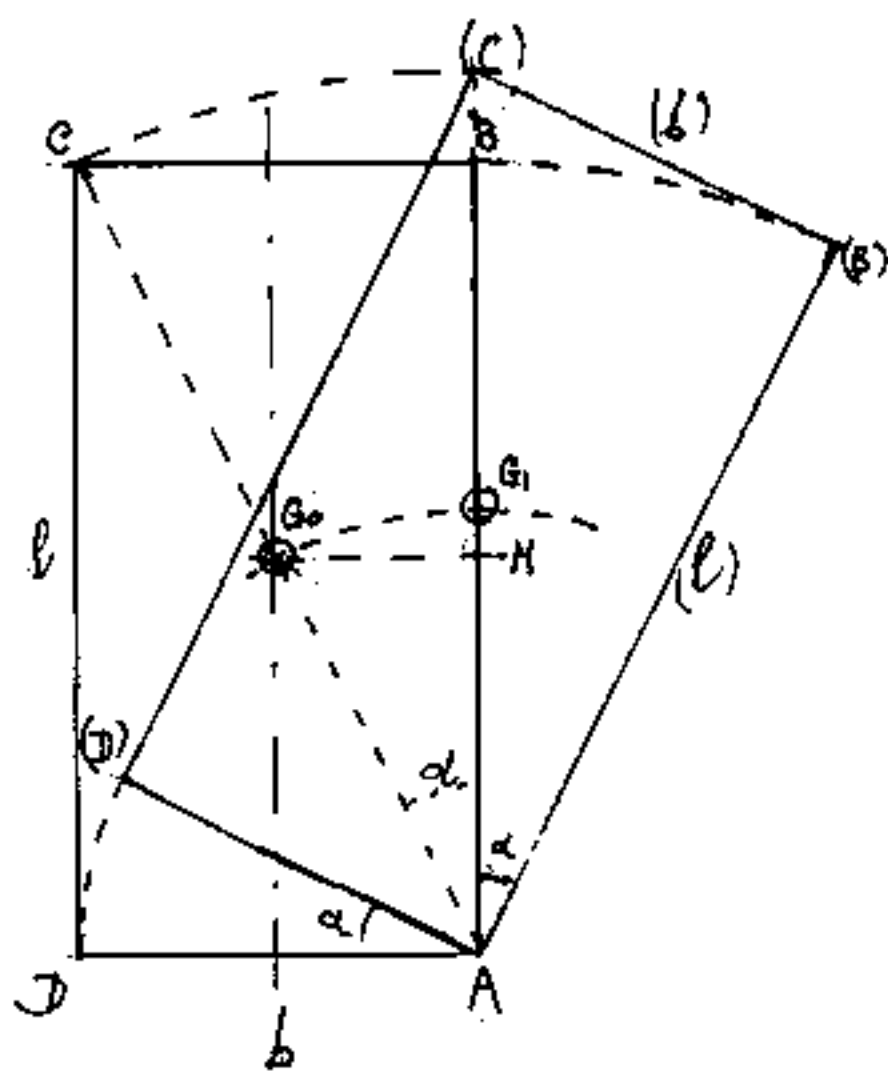
La stabilità e l'instabilità elastica è già stata trattata (carico di punto) (vedesi anche II vol della Scienza delle Costruzioni di O. Belluzzi)

Guardando il parallelepipedo di spigoli b, h, l , appoggiato su una faccia, se: $b < h < l$, visivamente apprezziamo tre diversi gradi di equilibrio.



È qui evidente lo spostamento virtuale del principio dei lavori virtuali applicati ai corpi rigidi.

Nella figura (a) basta un piccolo spostamento per cadere, in (b) ne occorre uno maggiore, in (c) tende a ritornare al suo equilibrio.



Lo spostamento avviene per rotazione intorno ad uno spigolo di base, A. Quando il baricentro, dalla posizione iniziale G_0 si trova sulla verticale (in G_1) dell'asse di rotazione

si ha la condizione di instabilità.

L'angolo $\alpha = \arctan(b/l)$

Data l'arbitrarietà delle unità di misura possiamo porre la semidiagonale $\overline{AG} = \frac{d}{2} = 1$ in tal modo: $\widehat{G_0 G_1} = \alpha_{\text{rad}}$; $\overline{MG_1}$ (sollevamento del baricentro), $= (1 - \cos \alpha)$; $\overline{G_0 M} = \frac{b}{2} = \text{sen} \alpha$.

Al crescere di l con $b = \text{cost}$ diminuisce α

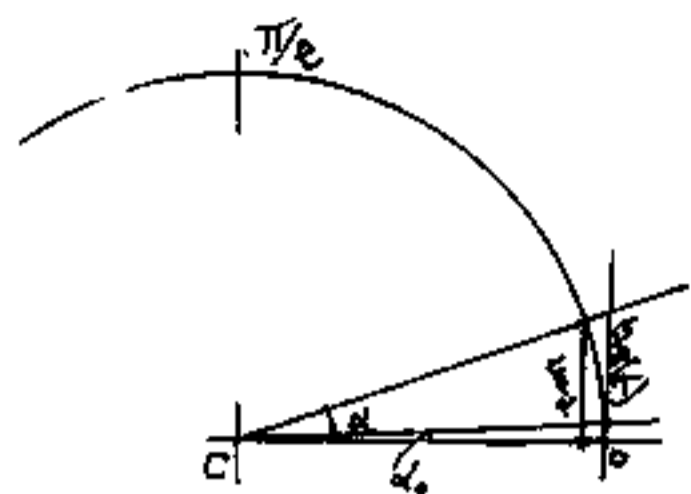
$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \alpha}{\alpha} = 1 \quad (\overline{G_0 G_1} = G_0 M)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha} = 0 \quad (\overline{MG_1} = 0) \quad \left(\begin{array}{l} \text{infinitesimo di ordine} \\ \text{superiore rispetto ad } \alpha \end{array} \right)$$

Cioè $\overline{MG_1}$ è praticamente nullo quando $\text{sen} \alpha \approx \alpha \approx \text{tg} \alpha$.

Tutta la teoria della scienza delle costruzioni è valida per spostamenti piccolissimi,

ove $\text{sen} \alpha$, α , e $\text{tang} \alpha$, possono confondersi.



si noti che per $\alpha = \alpha_0$, $\text{sen} \alpha$, α , e $\text{tang}(\alpha)$ possono confondersi mentre hanno ancora un valore apprezzabile. Invece $(1 - \cos \alpha) = \text{vers}(\alpha)$ è pratically zero.

te zero.

Poiché, in campo gravitazionale, ed in assenza di attriti, si considera nullo il lavoro per lo spostamento orizzontale del baricentro: $\widehat{G_0 G} = \widehat{G_0 N}$, mentre tale spostamento è ancora apprezzabile vi è un angolo α_0 , ove: $(1 - \cos \alpha_0)$ è pratically nullo.

I vecchi regoli calcolatori logaritmici confondevano sulla stessa scala graduata, il seno e la tangente per angoli inferiori ad $\alpha_0 = 5^\circ 44' 0'',20 = 5,733412064 = \arcsin(0,0999) = \arctg(0,100402)$.

La quarta cifra decimale (ordine dei decimillesimi di unità), per esempio: su 10 metri, 1 millimetro; (molti decimetri in commercio hanno errori superiori)

Ma noi vogliamo fare una tabella, ove il rapporto b/l sia variabile, cioè il rapporto fra lo spigolo minore e lo spigolo maggiore,

parsi a $\tan(\alpha)$, ci dia valori per apprezzare α .

h/l	$\tan(\alpha)$	Lead	$\sec(\alpha)$	$(1 - \cos \alpha)$	α°	Note
1/10	0,10000	0,09968	0,09950	0,004962	5° 42' 38",19	
1/50	0,02000	0,019997	0,0199960	0,00019994	1° 8' 44",75	
1/100	0,01000	0,0099996	0,0099995	0,000049996	0° 34' 22",58	
1/250	0,00400	0,00399998	0,00399997	$\approx 8/10^6$	0° 13' 45",05	} ($1 - \cos \alpha$) supera le precisioni di lavorazione dei materiali
1/500	0,00200	0,001999997	0,001999996	$\approx 2/10^6$	0° 6' 52",53	
1/1000	0,00100	0,9999996/10 ³	0,9999995/10 ³	$\approx 0,5/10^6$	0° 3' 26",26	

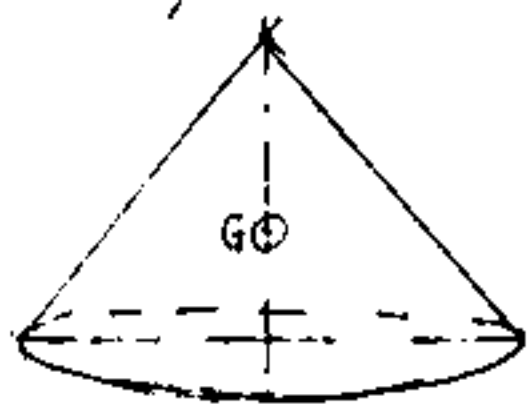
Quindi una stecca lunga un metro e di spessore 4 millimetri (rapporto 1/250) sarà difficile farla stare in equilibrio tutta sulla faccia minore.

Consideriamo il rapporto: $1/100$, (una stecca lunga un metro e spessa 1 centimetro, se 4 cm è la sua larghezza, 400 cm³ il suo volume sia Kg 3,12 il suo peso, 1,56 Kg cm. il momento resistente sull'asse (spigolo) di rotazione la spinta normale alla diagonale: $\sqrt{100^2 + 10^2} = 100,0049999$ sarà: Kg 0,01559922 \approx 15,6 grammi !!
e se la stecca fosse di legno arricchiti di ferro basta meno di gr. 1,5. (un po' di vento). Se consideriamo la precisione delle lavorazioni dei materiali

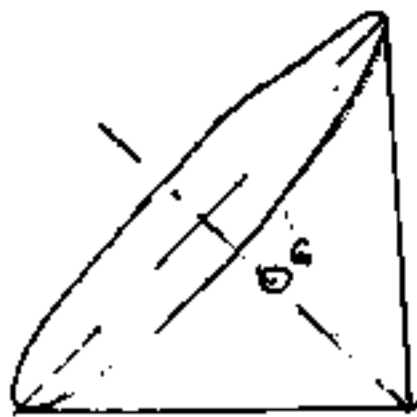
Il rapporto critico si abbassa.

Per quanto esposto, data un'asta lunga l con un certo grado di finitura, (vedi disegno e progetti di macchine) portata per cello su un piano (in assenza di correnti d'aria) esiste un limite del rapporto: $\frac{b}{p} = \tan \alpha$, oltre il quale è impossibile una stabilità, anche precaria dell'asta. Gli elementi della tabella che abbiamo esposto ci danno un'idea orientativa su α .

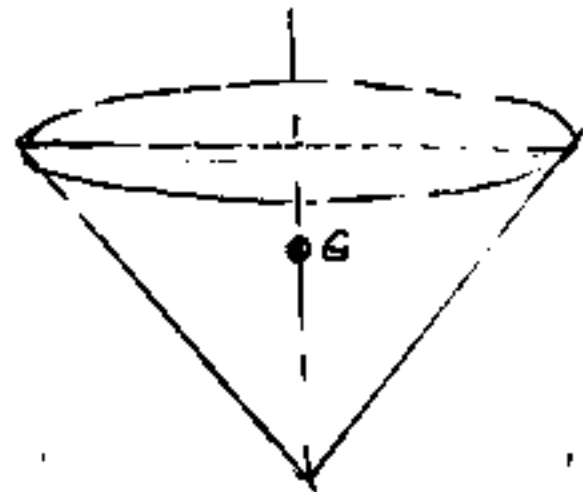
Ma il problema ammette altri ampliamenti. I testi considerano tre tipi di equilibrio:



stabile



indifferente



instabile

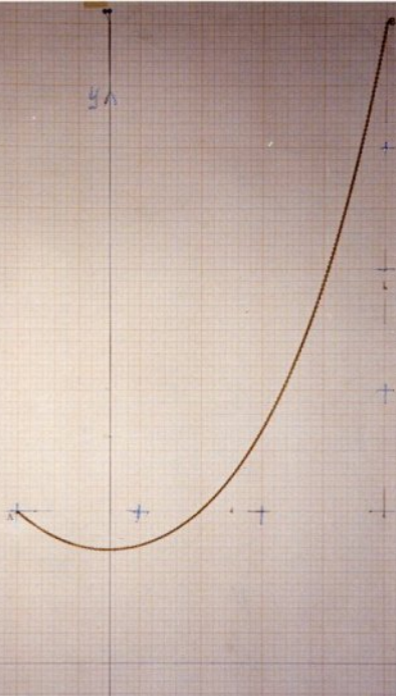
Ma i quali si vede come: una spinterella al cono poggiato sulla base il cono torna al suo posto, mentre se poggiato su una generatrice, si appoggerà su un'altra generatrice; nel terzo caso il cono non ristabilisce la sua posizione se poggiato sul vertice.

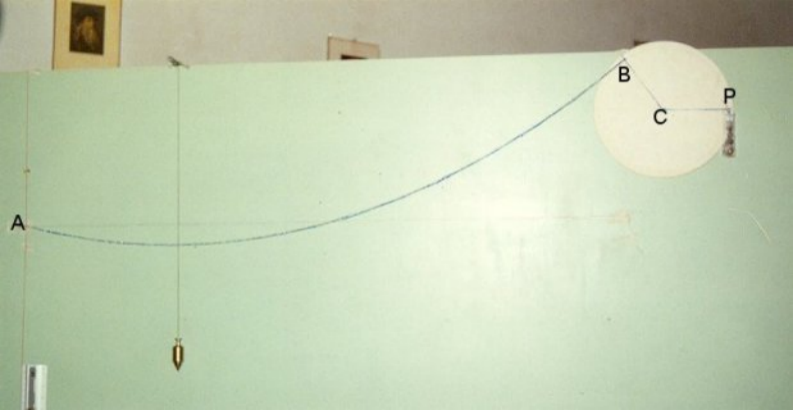
Nel caso di equilibrio stabile, lo spostamento innalza il baricentro che, tende (per piccoli spostamenti) a tornare al suo posto.

Nel caso di equilibrio indifferente, il baricentro rimane alla stessa altezza qualunque sia lo spostamento.

Nel caso di equilibrio instabile uno spostamento provoca l'abbassamento del baricentro che tenderebbe ulteriormente a scendere e non può tornare al suo posto senza spesa di lavoro esterno.

Se consideriamo una pila di prismetti, per esempio mattoni, notiamo che oltre una certa altezza non possiamo aggiungere mattoni senza che frani la nostra pila. L'esperienza può essere fatta con cubetti di legno, con zollette di zucchero, con gomme, con quaderni dello stesso formato, ecc. In questo caso l'altezza della pila è fortemente condizionata dalla precisione delle superfici di contatto. Torneremo sull'argomento per evidenziare come un lamina elastica innalzandosi da un incastro scorrevole dopo una certa altezza comincia a flettersi.



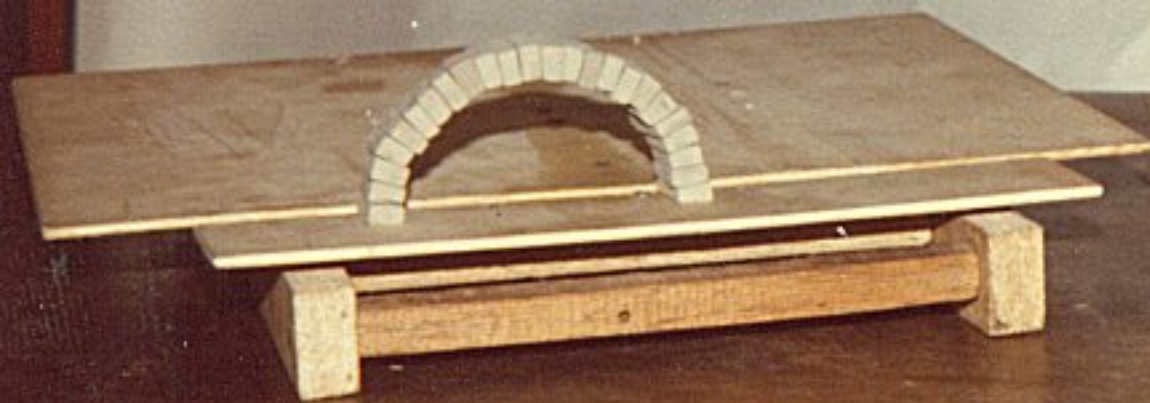


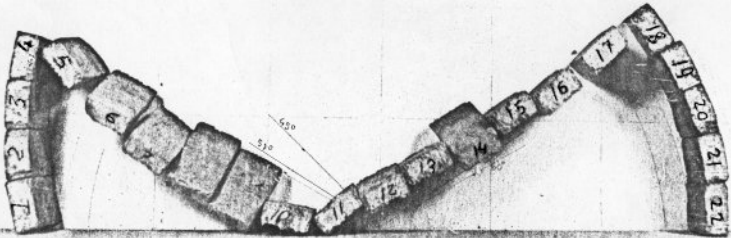












sulla base dei calcoli, tracciati gli assi, ponendo su y un filo a piombo.

Il reticolato della carta millimetrata (10 cm è la distanza fra le crocette) verifica con buona precisione il modulo "a" e le coordinate x_A, y_A ; x_B, y_B . —————

Semplicemente guardando l'angolo di natural declivio e la pendenza delle catenarie agli appoggi, si nota che le pendenze sono molto simili per la catenaria inferiore.

Si vuole ora trovare l'equazione di tutte le catenarie passanti per A e B , (vedi disegno)

Riproduciamo la foto di esteriura di
un'arzo e la foto di archi in piedi, senza
malta, ottenuti col piano incombibile.