Le Medie

1) Media aritmetica semplice. (m)

Dicesi media aritmetico semplice di "n" quan= tità: a_1, a_2, a_3 ..... a_n; il rapporto:

$$m = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$$

che può esprimersi più sinteticamente:

$$\boxed{m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} a_i}$$

Si usa spesso simboleggiare il termine medio con: "$\bar{a}$" $= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} a_i$; $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i$.

---

2) Media aritmetica ponderata. (m_p)

Dicesi media aritmetica ponderata delle quantità: a_1, a_2, a_3, .. a_n; ponderalmente va= lutate dai "pesi": α_1, α_2, α_3, ... α_n; il rapporto:

$$mp = \frac{(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \dots + a_n\alpha_n)}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots \alpha_n)}$$

più sinteticamente:

$$\boxed{m_p = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} a_i \alpha_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i}}$$

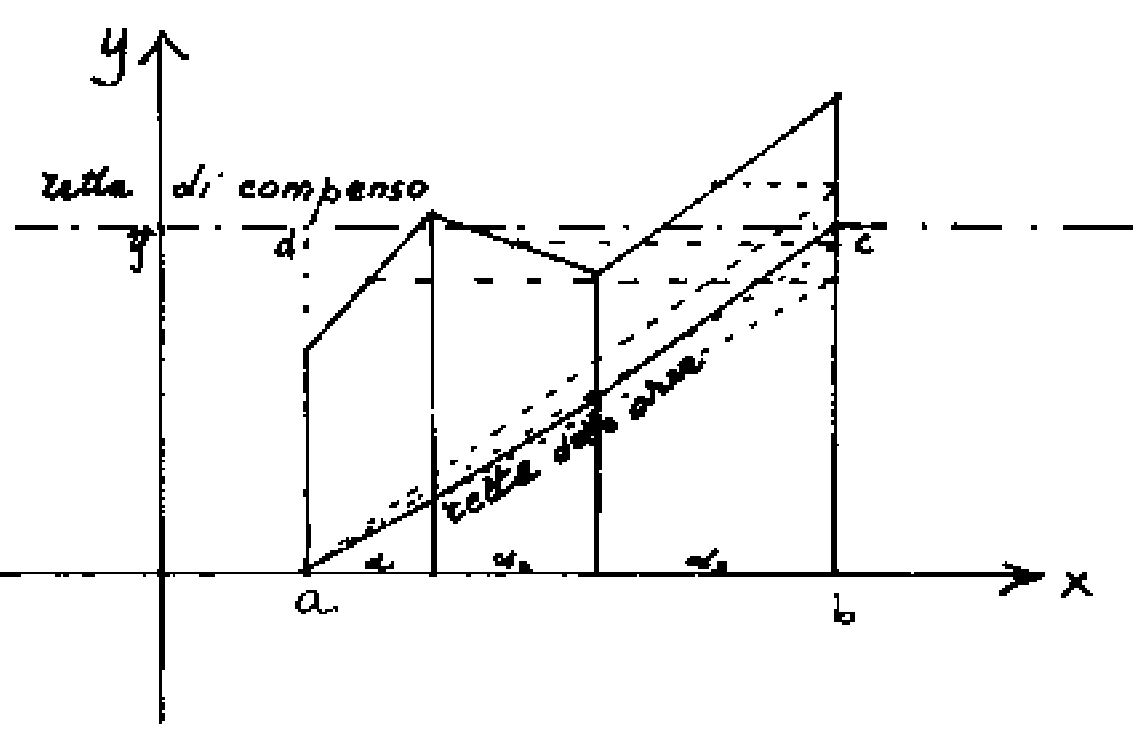
Se a_1, a_2, a_3, ... a_n sono le portate di un torrente nei periodi: α_1, α_2, α_3 ... α_n; mp = è la portata media nel periodo: $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i$

Qualora i pesi α siano uguali fra loro: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_n$ si ricade nella media aritmetica semplice, infatti:

$$m = \frac{\alpha \sum^{n} a_i}{\alpha (n)}$$

Se $y = f(x)$; nel tratto a, b l'ordinata media sarà: $\overline{y} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,dx$ e la retta $y = \overline{y}$ è detta <u>retta di compenso</u>.

Nel caso della integrazione grafica, la retta di compenso si ottiene prendendo come base un segmento uguale ad $(b-a)$:



l'area del rettangolo abcd equivale all'area della somma dei trapezi.

Si noti che chiamando: α_1, α_2, α_3, le altezze dei trapezi e con y_1, y_2, y_3 le medie delle basi si ha: $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = (b-a)$; $\overline{y} = \frac{y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$

Si noti anche che, nel calcolo dei baricentri si fanno medie ponderali.

3) Media geometrica (mg)

Dicesi media geometrica di n valori, la radice ennesima del loro prodotto:

$$\boxed{mg = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}}$$

Qualora i valori siano solo due a, b ; avremo:

$$\boxed{mg = \sqrt{a\,b}}$$

vale la proporzione:

$$a : mg = mg : b$$

cioè il medio geometrico è anche medio proporzionale. Quando $mg = (b-a)$ si ha la sezione aurea.

Se prendiamo i logaritmi si ha:

$$\boxed{\log(mg) = \frac{1}{n}\left(\log(a_1) + \log(a_2) + \cdots + \log(a_n)\right)}$$

Cioè il logaritmo del medio geometrico è la media aritmetica dei logaritmi dei singoli valori.

4) Media geometrica ponderata (mgp)

Se le quantità: $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ sono ponderalmente valutate in base ai "pesi": $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ avremo:

$$\boxed{\bar{a}_g = mgp = \sqrt[\sum_1^n f_i]{a_1^{f_1} \cdot a_2^{f_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{f_n}}}$$

$$\boxed{\bar{a}_g^f = mgp = \sqrt[n]{a_1^{f_1} \cdot a_2^{f_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{f_n}}}$$

Notiamo che i pesi: $f_1, f_2, f_3, \dots f_n$ i possono considerarsi "frequenze".

Se prendiamo i logaritmi delle due espressioni abbiamo:

$$\boxed{\log(\bar{a}_g) = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} f_i \log(a_i)}{\sum_{i=1}^{i=n} f_i}}$$

<u>cioè il logaritmo del medio geometrico ponderale è la media aritmetica ponderata dei logaritmi delle singole quantità</u>

Per l'altra espressione si ha:

$$\boxed{\log(\bar{a}_g^{\bar{f}}) = \bar{f}\log(\bar{a}_g) = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} f_i \log(a_i)}{n}}$$

<u>cioè il logaritmo del valore già pesato del medio geometrico ponderale è la media aritmetica semplice dei logaritmi delle singole quantità.</u>

Dividendo membro a membro queste due espressioni si ha: (la seconda divisa dalla prima)

$$\boxed{\bar{f} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} f_i}{n}}$$

Cioè il peso medio (o frequenza media) è dato dalla media aritmetica semplice dei singoli pesi (o singole frequenze).

4) Media Armonica ; (ma)

Dicesi, in generale, medio armonico di "n" quantitá: a_1, a_2, ... a_n; il reciproco della media aritmetica dei reciproci:

$$\boxed{ma = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}}$$

$$\boxed{\frac{1}{ma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{a_i}\right)}$$

Quando le quantitá sono solo due: "a" e "c" abbiamo giá introdotto il medio armonico "b", nel trattare la proporzione armonica: "Dicesi medio armonico un valore "b" rispetto ad altri due "a" e "c", quando gli scostamenti fra il medio armonico "b" e gli altri due valori "a" e "c" sono proporzionali a questi ultimi:

$$\boxed{(a-b):(b-c) = a : c}$$

da cui svolgendo:

$$ab - ac = ac - bc$$

$$\boxed{b = \frac{2ac}{a+c} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}}$$

ed anche: $\boxed{\frac{1}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)}$

Media armonica associata a frequenze. (maa)

Abbiamo visto medie ponderali aritmetiche e geometriche. Nelle aritmetiche le quantità "a_i", con $i = 1 \dots n$, agivano come addendi per cui se il peso era α_i, il valore del termine era: $\alpha_i \cdot a_i$, essendo: $\alpha_i a_i = \underset{1}{a_i} + \underset{2}{a_i} + \dots \underset{\alpha_i}{a_i}$.

Nella media geometrica le quantità a_i agiscono come fattori per cui se il peso era f_i il valore del termine è: $a_i^{f_i} = \underset{1}{a_i} \cdot \underset{2}{a_i} \cdots \underset{f_i}{a_i}$.

Nella media armonica ponderale, occorre sia chiarito se i valori dei termini sono da considerarsi come prodotto con i rispettivi pesi, oppure se il loro valore è dato dalla potenza che ha per esponente i pesi. Poichè i singoli termini figurano nella media come "reciproci", anche per i pesi (meglio chiamarli frequenze) si prendono i reciproci e se ne fa il prodotto.

$$\boxed{(maa) = \frac{n}{\frac{f_1}{a_1} + \frac{f_2}{a_2} + \dots \frac{f_n}{a_n}}}$$

$$\boxed{\frac{1}{(maa)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f_i}{a_i}}$$

Moda e Mediana

Cerchiamo di capire e quindi distinguere i vari aspetti del concetto: "frequenza".
Abbiamo già introdotto la frequenza come cicli al secondo, (si usa anche per le onde elettromagnetiche) e poiché in fisica hanno convenuto che la misura angolare non ha dimensioni (ciò dovrà essere rivisto), si usa dire che la frequenza è l'inverso del periodo ($f = \frac{1}{T}$) ove per periodo si intende il tempo per compiere un ciclo. Però come "frequenza" "nel tempo" si può pensare al numero di persone che attraversano un ponte in un anno, o in un giorno, o in una ora, e la frequenza nell'unità di tempo sarà tanto maggiore quanto più è fitta la folla e quanto più è veloce il loro spostarsi.
Ma esiste anche un'altro concetto di frequenza, indipendente dal tempo. Per esempio in una serie di 100 esperimenti si sono avuti: α volte "a" ; β volte "b"; γ volte "c" .... ecc ove: ($\alpha + \beta + \gamma + \cdots = 100$) possiamo esprimere la frequenza in percentuale; cioè: la frequenza di "a" in quella serie di esperienze è stata di $\alpha\%$ quella di "b" del $\beta\%$, di "c" del $\gamma\%$ ....esprimibili con numeri: $0 \div 1$.

Ciò premesso chiameremo: "Moda" in una distribuzione di frequenza, il valore che corrisponde alla frequenza massima. Un esempio banale: se su 100 donne che si incontrano si nota che 80 sono vestite di rosso, si dice la moda è il rosso.

Se disponiamo una sequenza ordinata di valori chiameremo Mediana il valore intermedio fra i due estremi. Siano a_1, a_2, a_i, a_n i valori, si hanno due casi; se n è dispari, mediana è il termine a_i ove $i = \frac{n+1}{2}$. Se invece "n" è pari, mediana è un valore intermedio fra $i = \frac{n}{2}$ ed $i = \frac{n}{2}+1$.

Per i sistemi continui la mediana è quel valore che la somma delle frequenze minori o maggiori a quella della mediana sia: $50\% = \frac{1}{2}$.

La moda può non esistere, e se esiste può non essere unica.

Supponiamo di avere i seguenti dati: 4, 4.10, 4.2, 4.3, 4.5;

$m = 4{,}22$; $mg = 4{,}21653$; $ma = 4{,}21309$; Mediana $M_d = 4.2$;

$f_i = \frac{a_i}{\Sigma a_i}$ = frequenze del gruppo: $f_1 = 0{,}18957$; $f_2 = 0{,}19431$; $f_3 = 0{,}19905$;

$f_4 = 0{,}20379$; $f_5 = 0{,}21327$; Moda $= M_o = 0{,}21327$.

Scostamenti dalla media: $s_1 = -0{,}22$; $s_2 = -0{,}12$; $s_3 = -0{,}02$

$s_4 = +0{,}08$; $s_5 = +0{,}28$.

Scarto medio quadratico

Consideriamo "n" valori: $a_1, a_2, \dots a_n$ di cui si è fatta la media aritmetica $m = \bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$, I valori possono essere i risultati delle misure di una stessa grandezza con strumenti dello stesso grado di precisione, oppure con lo stesso strumento in tempi diversi. Il valore medio $m = \bar{a}$, sarà il più probabile valore della misura della grandezza. Gli scarti dalla media: $s_i = (a_i - \bar{a})$ ci forniscono già una visione della precisione delle misure; anzi, se l'insieme degli scarti si aggira intorno a certi ordini di grandezza, mentre uno di essi è notevolmente maggiore, si presume che la misura che ha portato questo scarto eccezionale sia affetta da un errore grossolano accidentale e pertanto non si debba tener conto di tale misura. Per es. le misure siano: 10,20, 10,22, 10,18, 10,19, 10,20, 8,80. avremo: $\bar{a} = 9,965$

$s_1 = +0,235$, $s_2 = +0,255$, $s_3 = +0,215$, $s_4 = +0,225$, $s_5 = +0,235$, $s_6 = -1,165$.

Lo scarto s_6 ci avverte di scartare la misura $a_6 = 8,80$

avremo: $\bar{a} = 10,198$ ed i nuovi scarti saranno: $s_1 = +0,002$, $s_2 = +0,022$, $s_3 = -0,018$, $s_4 = -0,008$, $s_5 = +0,002$.

Si noti come sono molto più piccoli dei precedenti.

strumenti più precisi, od operatori più capaci, avranno scarti minori.

Lo stesso dicansi di "u" tiratori, ciascuno dei quali tira "n" colpi ad un bersaglio. Le distanze dei colpi dal centro del bersaglio possiamo considerarli "scarti". La visione dei bersagli perforati dai colpi può fornire una serie di informazioni. Se lo scostamento è casuale, gli scarti devono essere simmetrici o quasi rispetto al centro. Se sono tutti pressoché addensati in una zona, l'errore non sarebbe più casuale, ma sistematico. Un errore sistematico può dipendere da un difetto dello strumento, oppure da un difetto del tiratore, ma, una volta individuata la causa, l'errore sistematico può essere eliminato.

Lo "scarto" può riguardarsi anche sotto altri aspetti; per esempio se in un certo periodo in una certa zona, consideriamo l'altezza degli uomini alla visita di leva e ne facciamo la media. gli scarti dalla media, non possono essere considerati come "errori". Ma anche qui possiamo trovare scarti eccezionali in più o in meno rispetto alla media, ed il loro studio è proprio della Statistica.

Però non possiamo fare la media aritmetica degli scarti ottenuti da una media aritmetica perché risulta zero. Infatti; siano a_1, a_2, ...a_n i dati

$$s_1 + s_2 + \cdots s_n = \sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a}) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) - (n\bar{a}) = n\bar{a} - n\bar{a} = 0$$

Vi sono vari modi di calcolare uno scarto medio:

1) Se prendiamo il valore assoluto degli scarti;

l'espressione: $$\boxed{|\bar{s}| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |a_i - \bar{a}|}$$

è detta: "<u>deviazione media</u>"

La deviazione media può essere calcolata con la stessa formula ove al posto di $\bar{a} = m$, poniamo: $\bar{a} = m_g$ oppure: $\bar{a} = m_a$, ecc.)

---

2) Se facciamo i quadrati degli scarti e li sommiamo: $$\sum_{i=1}^{i=n} (a_i - \bar{a})^2 = \sum_{i=1}^{n} s_i^2$$

L'espressione: $$\boxed{(\bar{s})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (a_i - \bar{a})^2}$$

è detta in alcuni testi italiani:

"<u>Dispersione</u>" o "<u>Varianza</u>

mentre l'espressione:

$$\boxed{\overline{(s)}^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})^2}$$

è detta "<u>Varianza</u>" nei testi di lingua inglese

La loro radice quadrata è detta:

$$\boxed{\varepsilon_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i-\bar{a})^2}{(n)}}}$$

"scarto medio quadratico" od "Errore medio"

$$\boxed{s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i-\bar{a})^2}{(n-1)}}}$$

"deviazione standard" od "Errore medio a posteriori"

$$\boxed{\varepsilon_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i-\bar{a})^2}{(n-1)(n)}}}$$

"Errore probabile"

Su queste "dizioni" torneremo precisandole nel trattare la statistica.

La "deviazione standard" è importantissima e si trova spesso preprogrammata nelle calcolatrici elettroniche portatili.

Facciamo un esempio:

Dalle misure: 10,20 ; 10,22 ; 10,18 ; 10,19 ; 10,20

media $\bar{a} = 10,198$ abbiamo gli scarti $s_1 = +0,002$

$s_2 = +0,022$; $s_3 = -0,018$; $s_4 = -0,008$; $s_5 = +0,002$.

$\sum_{i=1}^{5} s_i^2 = 0,00088$; $\frac{1}{5}\sum_{1}^{5} s_i^2 = \underline{0,000176}$ = dispersione

$\frac{1}{4}\sum_{1}^{5} s_i^2 = \underline{0,00022}$ = variaura

$\varepsilon_m = \sqrt{0,000176} = \underline{0,0132665}$ = Errore medio.

$s = \sqrt{0,00022} = \underline{0,0148324}$ = Errore medio a posteriori

$\varepsilon_p = \sqrt{\frac{0,00088}{(4)(5)}} = \underline{0,006633}$ = Errore probabile.

Cenni sui minimi quadrati

Il metodo dei minimi quadrati (che è fondamentale principio della teoria degli errori) Consiste in un procedimento matematico di successive approssimazioni che, partendo dalla media delle misure effettuate, o dei valori osservati, (casualmente diversi), rende minima la somma dei quadrati degli scarti.

Le successive approssimazioni consistono nella correzione della media, eliminando quei valori, che, attraverso gli scarti, si discostano troppo dalla media e sono da considerarsi anomali. (come noi abbiamo scartato 8,8 dalla media nell'esempio fatto).

Si può dimostrare che il procedimento tende ad individuare il più probabile valore della grandezza misurata, (utilissimo in topografia e nelle esperienze della fisica e della chimica)

Il metodo si utilizza anche per trovare fra le funzioni di un certo tipo quella che più si approssima alla funzione incognita di cui conosciamo solo alcuni valori.

Calcolo combinatorio

Consideriamo "n" oggetti (per ora tutti diversi fra loro), per esempio le lettere dell'alfabeto, e consideriamo un contenitore, (per ora lineare) che possa contenere solo "K" degli "n" oggetti. (Essendo il contenitore lineare, gli oggetti saranno affiancati l'uno all'altro). Per esempio, se gli oggetti sono le lettere dell'alfabeto, il contenitore permette di scrivere parole di K lettere. La capacità del contenitore si chiama: "Classe".

Permutazioni

Supponiamo di aver disposto nel nostro contenitore di classe 4, le lettere che formano la parola: | R | O | M | A |, abbiamo: $K=4$.

Permutare le lettere, (gli elementi od oggetti) significa scambiarle di posto. Vale la seguente regola: "Presa come fondamentale una qualsiasi configurazione (Permutazione) degli oggetti (lettere) che riterremo positiva, scambiare due oggetti significa fare una permutazione; ad ogni permutazione si cambia segno, da positiva a negativa e viceversa." Abbiamo così una classificazione delle permutazioni. Diremo permutazione "Pari" quella permutazione (configurazione) che abbiamo ottenuto da un numero di scambi pari, (e sarà positiva). Diremo permutazione di classe dispari quella ottenuta con un numero dispari di scambi, (e sarà negativa). Ordinariamente si prende come fondamentale quella permutazione (configurazione) ove gli indici si susseguono nell'ordine naturale dei numeri: $a_1, a_2, a_3 \dots a_m$.

Si noti l'ambiguità del linguaggio; si usa la parola: "permutazione" in due diversi significati:

1) Come l'atto di scambiare la posizione di due elementi

2) Come la configurazione di una determinata sequenza degli oggetti.

A noi interessa calcolare il numero delle permutazioni tutte diverse fra loro che si possono ottenere con "n" oggetti (nel contenitore di classe n). Tale insieme di permutazioni si indica con P_n.

un solo oggetto: P_1;

A

una sola permutazione

due oggetti: P_2:

M	A
A	M

due permutazioni

tre oggetti: P_3;

O	M	A	+
O	A	M	−
A	O	M	+
A	M	O	−
M	A	O	+
M	O	A	−

sei permutazioni

Si noti che, se gli oggetti sono "n", gli spazi che delimitano gli oggetti fra loro sono: $(n-1)$ e gli spazi iniziale e finale sono due che delimitano la permutazione, perciò: $(n-1)+2=(n+1)$. Quindi se conosciamo il numero di permutazioni diverse di "n" oggetti, un nuovo oggetto può essere posto in ciascuna permutazione in $(n+1)$ posizioni diverse; perciò:

$$\boxed{P_{n+1} = (n+1)P_n}$$

$$P_1 = 1 \quad ; \quad P_2 = 2P_1 = 2 \quad ; \quad P_3 = 3P_2 = 6 \quad \ldots\ldots$$

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots\ldots n = n! \quad \text{(enne fattoriale)}$$

$$\boxed{P_n = n!}$$ (vedasi parte I)

La formula vale solo se gli oggetti non si ripetono. Per gli oggetti che si ripetono, per esempio le lettere della parola: MAMMA sono 5 perciò (se diverse) sarebbero: $5! = 120$ ma, "M", si ripete 3 volte ed occorre dividere per $3! = 6$; "A", si ripete due volte ed occorre dividere per $2! = 2$; perciò le permutazioni <u>diverse</u> saranno: $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$.

Attenzione, <u>viene convenuto</u> che: $0! = 1$ (che poi sarebbe un contenitore vuoto, ma nel caso delle permutazioni sarebbe di classe zero).

Nel caso della parola: <u>ROMA</u> $n = 4$; $4! = 24$ si hanno 24 permutazioni (anagrammi) diverse, si noti che la sequenza delle permutazioni può essere diversa a seconda dei criteri con i quali si effettuano le permutazioni, ma non variano le permutazioni di classe pari e quelle di classe dispari. Facciamo le 24 permutazioni della parola ROMA affiancando quelle di 1, 2, 3, 4; e tenendo separate quelle di classe pari da quelle di classe dispari.

	classe pari (+)	classe dispari (–)	
1234	ROMA	ROAM	1243
1342	RMAO	RMOA	1324
1423	RAOM	RAMO	1432
2143	ORAM	ORMA	2134
2314	OMRA	OMAR	2341
2431	OAMR	OARM	2413
3124	MROA	MRAO	3142
3241	MOAR	MORA	3214
3412	MARO	MAOR	3421
4132	ARMO	AROM	4123
4213	AORM	AOMR	4231
4321	AMOR	AMRO	4312

I prodotti degli elementi per risolvere un determinante sono tali che se i primi indici dei fattori formano la permutazione fondamentale: 1, 2, 3 ... m; i secondi indici formano tutte le permutazioni possibili e sono da prendersi come positivi quelli che formano permutazioni di classe pari, e negativi quelli che formano disposizioni di classe dispari. Per esempio in un determinante di ordine 3 avremo: fondamentale 1, 2, 3.

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}.$$

$$+ (1\ 2\ 3) - (1\ 3\ 2) + (2\ 3\ 1) - (2\ 1\ 3) + (3\ 1\ 2) - (3\ 2\ 1)$$

<u>Permutazioni con elementi ripetuti</u> servono per fare gli <u>Anagrammi</u>. Se fra gli "n" elementi ve ne sono "i" uguali fra loro; "j" uguali fra loro; "K" uguali fra loro abbiamo:

$$\boxed{{}_{i,j,K}P_n = \frac{n!}{i! \cdot j! \cdot K!}}$$

DISPOSIZIONI

Consideriamo le disposizioni semplici di "n" elementi di <u>classe K</u>, cioè presi K a K ogni volta diversi. Si indica con "$\underline{D_{n,K}}$".
Se, $K = n$ abbiamo già visto che: $\underline{D_{n,n} = P_n}$ si hanno le permutazioni.

Supponiamo di aver preso i primi "K" degli "n" elementi ed avremo ottenuto: $K!$ disposizioni, ora però occorrerà cambiare almeno un elemento per ottenere altre $K!$ disposizioni; gli scambi possibili fra i "K" elementi della classe e gli $(n-K)$ elementi residui equivalgono alle permutazioni degli "n" elementi ove ve ne siano "K" uguali fra loro ed "(n-K)" uguali fra loro, cioè saranno: $\frac{n!}{K!(n-K)!}$, ma ad ogni scambio corrisponde $K!$ disposizioni, perciò: $\cancel{K!}\frac{n!}{\cancel{K!}(n-K)!}$

$$\mathcal{D}_{n,K} = \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-K)}(n-K+1)\cdots(n-2)(n-1)n}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-K)}}$$

$$\boxed{\mathcal{D}_{n,K} = \underset{\hat{1}}{n}\,\underset{\hat{2}}{(n-1)}\,\underset{\hat{3}}{(n-2)}\ \underset{\dots}{\dots}\ \underset{\hat{K}}{(n-K+1)}}$$

"Le disposizioni semplici di "n" elementi di classe "K" è il prodotto di tanti fattori decrescenti, a partire da "n", quanto indica la classe K" $(K \leq n)$.

Per esempio le disposizioni di 10 elementi di classe 3, saranno tre fattori decrescenti a partire da 10.

$$\underline{\mathcal{D}_{10,3} = 10\cdot 9\cdot 8 = 720}$$

Ogni "disposizione" differisce dall'altra o <u>per posizione</u> degli elementi, <u>o per qualità</u> degli elementi; mentre le "permutazioni" erano sempre gli stessi elementi che differivano <u>per posizione</u>.

<u>Le disposizioni con ripetizione</u> ove: $K \gtreqless n$ si indicano: $\boxed{\mathcal{D}'_{n,K} = n^K}$ per esempio $\mathcal{D}'_{3,2} = 3^2 = 9$ (aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc) ove a, b, c = elementi.

Combinazioni

Degli "n" elementi presi K a K, vogliamo ora considerare le "classi" (i gruppi di K elementi) che differiscono solo per qualità degli elementi indipendentemente dalla posizione che occupano. Diremo quindi: "Combinazione di "n" elementi di classe "K"" (che indicheremo con: $\binom{n}{K}$) ogni gruppo di K elementi che abbia almeno un elemento diverso.

Per ottenere il numero delle combinazioni di "n" elementi di classe "K" basterà dividere il numero delle disposizioni $D_{n,K}$ per le permutazioni della classe: P_K. cioè:

$$\binom{n}{K} = \frac{D_{n,K}}{P_K}$$

$$\boxed{\binom{n}{K} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-K+1)}{K!}}$$

ed anche:

$$\boxed{\binom{n}{K} = \frac{n!}{K!(n-K)!}}$$

(espressione già trovata).

da questa possiamo dedurre che:

$$\boxed{\binom{n}{K} = \binom{n}{n-K}}$$

Questa uguaglianza è utilizzabile per snellire i calcoli. Per esempio: $\binom{80}{78} = \binom{80}{2} = \frac{80 \cdot 79}{2} = 3160$ anziché 78 fattori al numeratore divisi per 78! — Sarà utile scegliere il minore fra K ed $(n-K)$ per il calcolo. Se a, b, c, d sono i 4 elementi e noi vogliamo le combinazioni di classe 3, cioè $\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4$ avremo: abc, abd, acd, bcd.

Supponiamo ora di togliere un elemento degli "n" elementi, per esempio: "a", notiamo che se cancelliamo tale elemento dalle combinazioni scritte si rileva che:

$$\boxed{\binom{n}{K} = \binom{n-1}{K} + \binom{n-1}{K-1}}$$

Ma lo stesso discorso può essere fatto su $\binom{n-1}{K-1}$ e così via otteniamo:

$$\boxed{\binom{n}{K} = \binom{n-1}{K} + \binom{n-2}{K-1} + \binom{n-3}{K-2} + \dots \binom{n-K}{1} + 1}$$

Consideriamo ora una importante applicazione del calcolo combinatorio alla espressione delle potenze dei binomi, per determinarne i coefficienti.

Coefficienti binomiali

Consideriamo: $(a+b)^n = \underset{1}{(a+b)}\underset{2}{(a+b)}\underset{3}{(a+b)} \dots \underset{n}{(a+b)}$

sviluppando si ha:

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$

$(a+b)^2 = 1\,a^2 + 2ab + 1\,b^2$

$(a+b)^3 = 1\,a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1\,b^3$

$(a+b)^4 = 1\,a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1\,b^4$

$(a+b)^5 = 1\,a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1 \cdot b^5$

La tabella dei coefficienti binomiali, che in Italia è generalmente chiamata: "Triangolo di Tartaglia" (n.a Brescia nel 1506, m.a Venezia 1557), in Francia e in qualche testo americano è detta: "triangolo di Pascal" (1623-1662). I tedeschi l'attribuiscono a Stifel (1487-1559). Questo quadro si ritrova in testi molto più antichi e qualcuno lo fa risalire ad Euclide.

Riportiamo la tabella

$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Si costruisce facilmente addizionando due valori affiancati del rigo precedente e riportando l'importo sotto il secondo addendo

Binomio di Newton

La tabella triangolare dei coefficienti binomiali, presenta, se riguardata per colonne, le combinazioni semplici di "n" elementi di classe K ove $n = \binom{n}{1}$ è la seconda colona. La prima colonna di sole unità è da riguardare come $\binom{n}{0}$, quindi la colonna (K+1) rappresenta $\binom{n}{K}$. Per esempio: $\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$ è anche il coefficiente di $a^4 b^4$ nello sviluppo di $(a+b)^8$.

L'importanza della tabella è evidente. Essa confrontata con lo sviluppo delle potenze di binomi consente di sintetizzare il risultato in una formula detta <u>binomio di Newton</u>:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{K=0}^{K=n} \binom{n}{K} a^{n-K} b^K}$$

Ricordiamo la convenzione: $\binom{n}{0} = 1$; $0! = 1$;

Si noti come la simmetria della tabella evidenzi che $\binom{n}{K} = \binom{n}{n-K}$.

La formula del binomio di Newton che abbiamo scritto sopra è un caso particolare di una formula più generale detta <u>Polinomio di Leibniz</u>

Polinomio di Leibniz

Sia $(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots a_m)^n$ la potenza di un polinomio.

Poniamo, nella formula detta binomio di Newton:

$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $a = a_1$; $b = a_2$; ed

avremo:

$$\boxed{(a_1+a_2)^n = \sum_{i_1+i_2=n} \left(\frac{n!}{i_1!\cdot i_2!}\right) a_1^{i_1}\cdot a_2^{i_2}}$$

ove il simbolo: $\sum\limits_{i_1+i_2=n}$ significa che la somma è estesa a tutti i valori non negativi, interi, degli indici i_1 ed i_2 (zero compreso) che verifichino: $i_1+i_2=n$.

Per esempio per $n = 5$ tali valori sono:

$i_1 =$	0	1	2	3	4	5
$i_2 =$	5	4	3	2	1	0
$(i_1+i_2) =$	5	5	5	5	5	5

La formula generalizzata detta <u>Polinomio di Leibniz</u> risulta:

$$\boxed{(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_m)^n = \sum_{(i_1+i_2+\cdots+i_m)=n} \frac{n!}{(i_1!)(i_2!)(i_3!)\cdots(i_m!)}\, a_1^{i_1}\cdot a_2^{i_2}\cdots a_m^{i_m}}$$

Per esempio: $(i_1+i_2+i_3)=3$ è risolta da: $(3,0,0)(0,3,0)(0,0,3)(2,1,0)(2,0,1)(1,2,0)(0,2,1)(1,0,2)(0,1,2)(1,1,1)$

sostituendo:

$$(a_1+a_2+a_3)^3 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + 3a_1^2a_2 + 3a_1^2a_3 + 3a_1a_2^2 + 3a_2^2a_3 + 3a_1a_3^2 + 3a_2a_3^2 + 6a_1a_2a_3.$$

I Coefficienti delle equazioni di grado "n"

Siano: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$; le radici reali o comples= se di una equazione di grado "n"; cioé $(x_1 = \alpha_1)$; $(x_2 = \alpha_2)$; $(x_3 = \alpha_3)$; . . . ; $(x_n = \alpha_n)$. Se queste uguaglianze sono va liole, resta valida l'espressione:

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_n) = 0$$

in quanto basta sostituirvi una radice per soddisfa= re l'uguaglianza.

Eseguiamo i prodotti; per: $n=2$, $n=3$, $n=4$, . .

equazioni di 2° grado: $\boxed{x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)\,x + (\alpha_1 \alpha_2) = 0}$

equaz. di 3° grado: $\boxed{x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\,x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3)\,x - (\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 0}$

equaz. di 4° grado: $\boxed{x^4 - \left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i\right) x^3 + \left(\sum_{\binom{4}{2}} \prod \alpha_{\binom{4}{2}}\right) x^2 - \left(\sum_{\binom{4}{3}} \prod \alpha_{\binom{4}{3}}\right) x + \left(\sum_{\binom{4}{4}} \prod \alpha\right) = 0}$

ove: $$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = \sum_{\binom{4}{1}} \prod \alpha_{\binom{4}{1}} \qquad (\prod = \text{prodotti})$$

$$\sum_{\binom{4}{2}} \prod \alpha_{\binom{4}{2}} = (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4)$$

(Che é la somma dei prodotti che ha per fattori le combinazioni di 4 elementi di classe 2)

$$\sum_{\binom{4}{3}} \prod \alpha_{\binom{4}{3}} = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4)$$

(Che la somma dei prodotti espressi dalle combi nazioni di 4 elementi di classe 3)

$$\sum_{\binom{4}{4}} \prod \alpha_{\binom{4}{4}} = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$$

(In questo caso si ha un solo prodotto delle radici.)

Tenuto conto che i segni sono alterni e che il primo coefficiente (cioè quello di x^n) è sempre +1 (o può essere ridotto a +1 dividendo l'uguaglianza) Una equazione di grado "n" espressa in funzione delle sue radici può sintetizzarsi

$$\boxed{\sum_{i=0}^{i=n} \left(\sum_{\binom{n}{i}} \prod \alpha_{\binom{n}{i}} \right) X^{n-1} (-1)^{2n-i}}$$

Intendendo per: $\left(\sum_{\binom{n}{i}} \prod \alpha_{\binom{n}{i}} \right)$ la somma di tutte le combinazioni di prodotti di n radici di classe i.

per $\underline{n=2}$; $i=0$; $\binom{n}{0}=1$; $(1)X^{2-0}(-1)^{4-0} = +X^2$

$i=1$; $\binom{n}{1}=1$; α_1; α_2; $(\alpha_1+\alpha_2)X^{2-1}(-1)^{4-1} = -(\alpha_1+\alpha_2)X$

$i=2$; $\binom{n}{2}=1$; $\alpha_1\alpha_2$; $(\alpha_1\alpha_2)X^{2-2}$; $(-1)^{4-2} = +(\alpha_1\alpha_2)$

per $\underline{n=3}$ $i=0 \rightarrow X^3$

$i=1 \rightarrow -(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)X^2$

$i=2 \rightarrow +(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)X$

$i=3 \rightarrow -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$

etc.

Combinazioni con ripetizione

Si abbiano "n" elementi <u>tutti diversi</u> fra loro che peró, all'atto della combinazione di classe K, uno stesso elemento puó essere ripetuto fino a K volte. Cioé una combinazione puó essere costituita da uno stesso elemento ripetuto K volte.
É evidente che per fare quella combinazione è come se disponessimo di un numero di elementi aumentato di $(K-1)$ di quell'elemento (una volta è già negli n elementi); cioé occorre disporre di $(n+K-1)$ elementi considerati diversi.

Se indichiamo con $C'_{n,K}$ il numero di combinazioni con ripetizione di n elementi di classe K avremo che:

$$\boxed{C'_{n,K} = \binom{n+K-1}{K}}$$

Facciamo un esempio: $C'_{3,2} = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$

aa bb cc
ab bc
ac

Attenzione, nelle combinazioni con ripetizione la classe puó essere maggiore del numero degli elementi; cioé $K \gtreqless n$.

per esempio: $C'_{3,4} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$

$$C'_{3,4} = \left\{ \begin{matrix} aaaa, & aaab, & aaac, & aabb, & aabc \\ bbbb, & bbba, & bbbc, & bbcc, & bbac \\ cccc, & cccb, & ccca, & ccaa, & ccab \end{matrix} \right\}$$

Data la correlazione fra le combinazioni con ripetizione e le combinazioni semplici: $\left[C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}\right]$, la tabella dei coefficienti binomiali (Triangolo di Tartaglia) che per colonne fornisce $\binom{n}{k}$, può utilizzarsi per costruire una tabella delle combinazioni con ripetizione; ma questa tabella può essere più facilmente costruita se si osserva che <u>ogni valore è la somma del precedente di riga e di colonna</u>.

<u>$C'_{n,k}$ = Combinazioni con ripetizione</u>

n \ k	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	10	15	21	28	36	45	55
4	10	20	35	56	84	120	165	220
5	15	35	70	126	210	330	495	715
6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11.440
9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24.310

Il calcolo delle probabilitá

Vi sono due aspetti sul calcolo delle probabilitá; una probabilitá "a posteriori" determinabile statisticamente in base al rapporto del numero dei casi in cui si é verificato un certo evento ed il numero delle osservazioni effettuate.

Una probabilitá: "a priori" determinabile in base al rapporto fra il numero dei casi favorevoli ad un certo evento, ed il numero dei casi possibili per quello stesso evento.

La probabilitá quindi essendo, in ogni caso, espressa da un rapporto in cui il numeratore non puó superare il denominatore, é un numero compreso fra zero ed uno; e puó essere espresso in percentuale.

La certezza (favorevole) (abbastanza difficile a raggiungere) é $= 1 = 100\%$

L'incertezza $= \frac{1}{2} = 50\%$

La certezza (sfavorevole) $= 0 = 0\%$

Al concetto di "probabilitá", si abbina il concetto di "frequenza"; a posteriori, possiamo dire che: "tanto piú un evento é frequente, tanto piú é probabile".

A priori, possiamo dire che: "_tanto più è probabile un evento, tanto più dovrà essere frequente_"

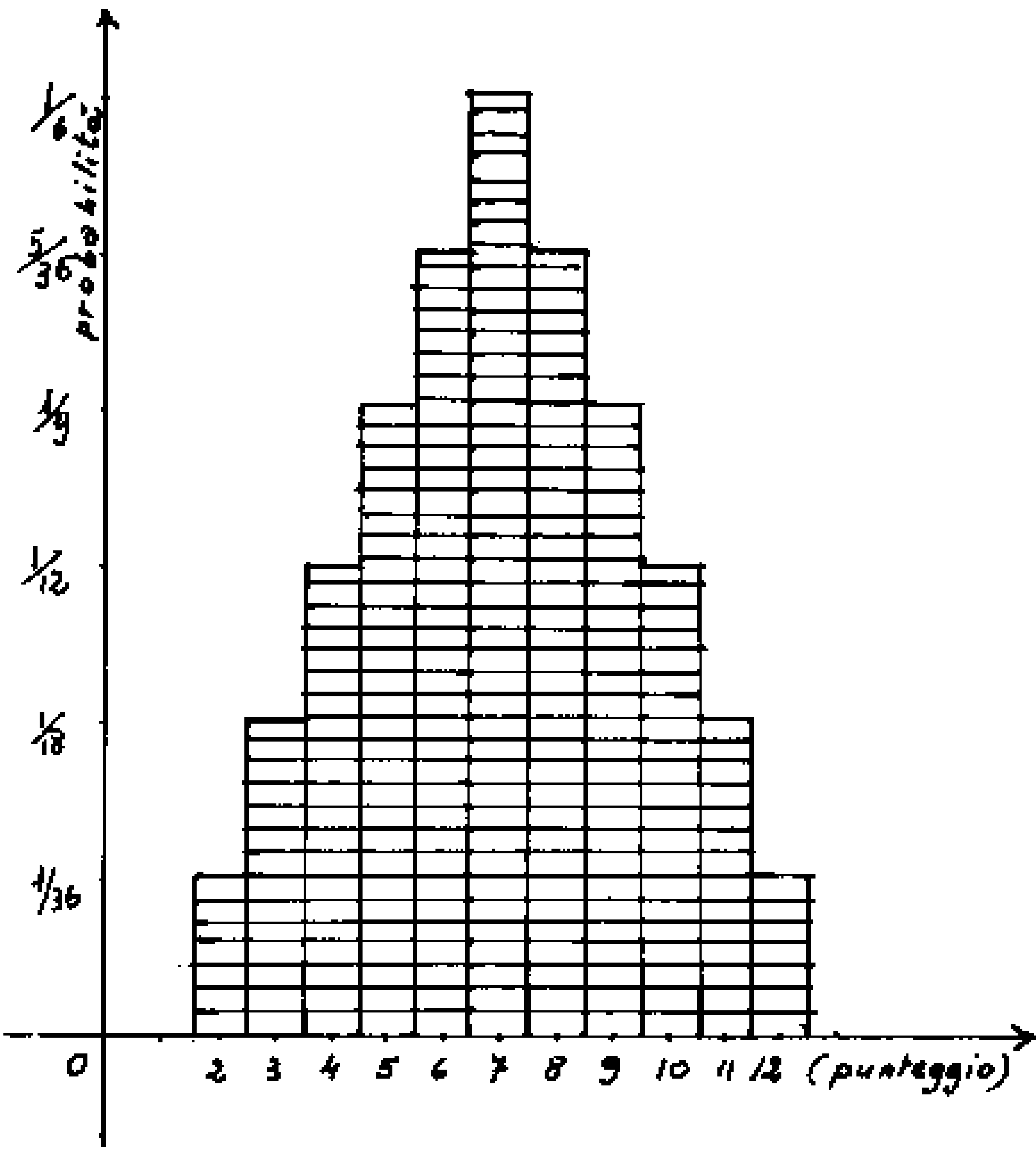
È appena il caso di accennare che la parola "_frequente_" non deve intendersi che l'evento si verificherà ad intervalli regolari, anzi, è estremamente improbabile che ciò si verifichi. Si può dire che la frequenza si avvicina alla probabilità quanto più numerose sono le prove effettuate. (Legge dei grandi numeri). _Facciamo un esperimento:_

Si abbiano due dadi da gioco, non truccati, e con le facce segnate da 1 a 6, le combinazioni possibili sono che a ciascuna faccia di un dado si abbini tutte quelle dell'altro, cioè abbiamo $6 \times 6 = 36$, casi possibili ad ogni lancio di dadi. ($D'_{6,2} = 6^2 = 36$).

Vediamo ora i casi favorevoli a ciascun punteggio:

		casi favorevoli:	
2	= (1+1)	1	probab. $1/36$
3	= (1+2); (2+1)	2	" $2/36 = 1/18$
4	= (1+3); (2+2); (3+1)	3	" $3/36 = 1/12$
5	= (1+4); (2+3); (3+2); (4+1)	4	$4/36 = 1/9$
6	= (1+5); (2+4); (3+3); (2+4); (1+5)	5	$5/36$
7	= (1+6); (2+5); (3+4); (4+3); (5+2); (6+1)	6	$6/36 = 1/6$
8	= (2+6); (3+5); (4+4); (5+3); (6+2)	5	$5/36$
9	= (3+6); (4+5); (5+4); (6+3)	4	$4/36 = 1/9$
10	= (4+6); (5+5); (6+4)	3	$3/36 = 1/12$
11	= (5+6); (6+5)	2	$2/36 = 1/18$
12	= (6+6)	1	$1/36 = 1/36$

Se facciamo un grafico, riportando in ascisse i punteggi, ed in ordinate le probabilità della loro uscita; (ampliata nel grafico) avremo un diagramma a colonne del tipo di quello appresso riportato



Se disegnato il grafico, prendiamo due dadi e per ogni lancio coloriamo, (a partire dal basso) una casellina del punteggio effettuato, vedremo che, col crescere delle prove, ci avviciniamo, sempre di più alla configurazione del grafico.

In proporzione, perchè le caselle possono essere molto più fitte e perchè il grafico, in ordinate, può essere disegnato in scala doppia o multipla. (Conviene provare).

<u>Legge del caso</u>: "<u>In una serie di prove ripetute un numero di volte molto grande, ogniuno degli eventi che all'atto di ciascuna prova possono presentarsi, si produce con una frequenza relativa, che è pressappoco uguale alla probabilità che l'evento ha all'atto di ogni prova, l'approssimazione cresce col numero delle prove</u>".

Il giuoco del lotto

Ci domandiamo: "giocando su una sola ruota, qual'è la probabilità di un primo estratto, di un estratto, di un ambo, di un terno, di una quaderna, di una quintina?"

I numeri sono 90, quelli estratti 5 quindi le cinquine possibili sono: $\binom{90}{5} = 43.949.268$

quindi la probabilità di fare cinquina è $\frac{1}{43,949268}$

cioè: 2,275.. su 100 milioni. (piuttosto scarsa).

I casi favorevoli sono quelli che (estratti i numeri) rimangono di combinazioni possibili.

<u>per la quaderna</u>: $\binom{90-4}{5-4} = \binom{86}{1} = 86$ casi favorevoli

probabilità: $\frac{86}{43.949268} = \frac{1}{511038}$

<u>terno</u> $\binom{90-3}{5-3} = \binom{87}{2} = 3741$ casi favorevoli

probabilità: $\frac{3741}{43.949.268} = \frac{1}{11748}$

<u>ambo</u> $\binom{90-2}{5-2} = \binom{88}{3} = 109736$ casi favorevoli

probabilità: $\frac{109736}{43.949.268} = \frac{2}{801}$

<u>estratto</u> $\binom{90-1}{5-1} = \binom{89}{4} = 2441626$ casi favorevoli

probabilità: $\frac{2441626}{43.949.268} = \frac{1}{18} = \frac{5}{90}$

<u>primo estratto</u> probabilità: $\frac{1}{90}$

Legando la probabilità alla frequenza, registrando cioè i numeri usciti ed i "ritardatari" la probabilità varia.

Infatti esaminiamo il caso dell'estratto semplice:
Se sappiamo che alla prima estrazione il nostro numero (con probabilità 1/90) non è uscito, per la seconda estrazione abbiamo la probabilità di 1/89; e così se sappiamo che alla seconda estrazione non è uscito, per la terza estrazione abbiamo la probabilità di $\frac{1}{88}$ e così via cioè la probabilità complessiva per 5 estrazioni diventa: $\frac{1}{90}+\frac{1}{89}+\frac{1}{88}+\frac{1}{87}+\frac{1}{86}$ cioè: $=\frac{1}{17,59545}$, che è una probabilità maggiore rispetto ad $\frac{1}{18}$ calcolato col precedente metodo
Esistono statistiche che esprimono la frequenza media di un numero. Se passato quel certo numero di settimane, non è stato estratto, quel numero viene definito "ritardatario". Ordinariamente i "ritardatari" escono entro un numero limitato di settimane, perciò vi sono persone che li giocano puntando poste sempre più alte, (anche al raddoppio). Però se il numero è "anomalo", continua a non uscire e molta gente è arrivata a non poter continuare a puntare e quindi perdere somme anche notevoli, (oltre gli interessi sul capitale anticipato).
Per esempio chi, giocando al raddoppio inizia con £ 1000, poi 2000, poi 4000... alla decima settimana la posta è £ 1.024.000,= e la

somma versata diventa £ 2.047.000,=. L'undicesima settimana dovrà versare £ 2.048.000,= e la somma totale versata diventa 4.095.000,= ....

Vi sono anche serie geometriche con ragione minore di 2; per esempio, per l'estratto semplice giocato in ambata, se le poste sono i $\frac{10}{9}$ della precedente si ha la vincita di 10 volte la prima puntata, in qualunque settimana avvenga l'estrazione. (e si perdono gli interessi sul capitale anticipato). Se invece le poste sono i $\frac{18}{17}$ della precedente, dopo 17,1 settimane la vincita è nulla, cioè si riprende la somma spesa (al solito perdendo gli interessi), continuando con questa serie la vincita non compensa la somma spesa, è una perdita sempre più grave.

Analogo discorso per terni, quaderne, ecc. ove la probabilità di vincere un terno al lotto è divenuta proverbiale.

Eppure vi sono persone che giocano, ed anche qualcuna che vince; però per la legge dei grandi numeri, la frequenza e la probabilità tendono a coincidere e quindi non vi sarebbero né perdite, né vincite, complessivamente. Ma il gioco del lotto non è equo, quindi complessivamente è una tassa, volontariamente pagata dai giocatori.

Il totocalcio

Nella schedina di 13 caselle per colonna si dispongono tre simboli: 1, x, 2 cioè i casi possibili sono le disposizioni con ripetizione di tre elementi di classe 13.

$$D'_{3,13} = 3^{13} = 1.594.323$$

cioè si avrebbe la probabilità di fare 13 6,27 su 10 milioni. $= \frac{1}{1.594.323}$

Però subentrano altri fattori che possono influenzare la probabilità. Per esempio è statisticamente provato essere improbabile che la schedina presenti solo x, o solo 1, o solo 2; non solo, è anche provato che i 2 sono meno numerosi degli altri due segni, infine la conoscenza delle squadre può determinare partita per partita il grado di probabilità che si verifichi 1, x, 2.

Come si vede il calcolo delle probabilità necessita di essere ampliato, ma prima di fare ciò, cerchiamo di definire quando un giuoco è equo, cioè quando puntando una certa somma, la probabilità della vincita è legata al coefficiente moltiplicatore della puntata in modo equo.

La speranza matematica

Dicesi speranza matematica il prodotto di una eventuale somma per la probabilità di ottenerla.
Dicesi "equo" un giuoco quando la "posta" equivale alla speranza matematica.

Se consideriamo le scommesse, le lotterie, il totocalcio, il giuoco del lotto, ecc. noteremo che in genere non sono "equi". Per esempio "Sperando di vincere £ 1.000.000= (un milione) al giuoco del lotto, con un terno secco, su una ruota la posta "equa" sarebbe: $£\ \frac{1.000.000}{11748} = £\ 85,12$." Come si vede il giuoco del lotto non è equo, ma a tutto favore del gestore, anche tenendo conto delle spese di gestione.

Ma è anche da considerare "una speranza individuale" che spesso non coincide con la "speranza matematica". Per esempio l'individuo è portato a credere ad una probabilità di vincita superiore a quella reale per la squadra o per il campione di cui è tifoso, e pertanto é disposto a spendere una "posta" superiore a quella equa, perché la sua speranza di vincita è superiore alla speranza matematica. Ciò vale, non solo nei giuochi, ma soprattutto in economia, ove investimenti oculati tendono ad abbassare il rischio (saggio interesse)

Probabilitá totali

Un evento puó presentarsi in due o piú mo= dalitā diverse ed escludentesi.

La probabilitā totale ē la somma delle pro= babilitā. Se l'evento ē certo la somma delle pro= babilitā ē uno. Facciamo un esempio:

In una urna vi sono "n" palle di cui: "b"= bianche; "r" = rosse; "m" = marroni e sia: $b + r + m = n$.

Estraendo una palla, la somma delle singole pro= babilitá ē uno. $\frac{b}{n} + \frac{r}{n} + \frac{m}{n} = 1$

Ma noi vogliamo sapere qual'é la probabilitā di estrarre una palla non bianca.

L'evento puó presentarsi in due modalitá es= cludentesi: o palla rossa, o palla marrone, perció vale la somma delle probabilitá.

$$p = \left(\frac{r}{n} + \frac{m}{n}\right)$$

Numericamente se: $b = 10$; $r = 3$; $m = 7$; $n = 20$

la probabilitā di una palla non bianca ē: $\frac{3}{20} + \frac{7}{20} = \frac{1}{2} = 50\%$.

Probabilità Composte

Il verificarsi di un evento è condizionato dal verificarsi di altri eventi. Tale evento è detto: "composto". Per esempio abbiasi quattro urne contenenti ciascuna l'alfabeto di 26 lettere, qual'è la probabilità di estrarre la stessa lettera da ciascuna urna? Oppure di estrarre lettere determinate per formare una parola e i suoi anagrammi (formati per esempio di quattro lettere)?

La probabilità di un evento composto è il prodotto delle probabilità

Nel nostro caso avremo:

$$\left(\frac{1}{26}\right)\cdot\left(\frac{1}{26}\right)\cdot\left(\frac{1}{26}\right)\left(\frac{1}{26}\right)=\frac{1}{456976}.$$

Ma noi vogliamo imporre una ulteriore condizione, e cioè che l'estrazione delle lettere avvenga nell'ordine: R · O · M · A.

Poichè gli anagrammi della parola "ROMA" sono 24, se è verificata l'uscita delle 4 lettere, la probabilità è: $\left(\frac{1}{24}\right)\left(\frac{1}{456976}\right)=\frac{1}{10967424}=$ un caso su quasi 11 milioni.

Probabilità delle cause

La probabilità di un evento "C" è condizionata dalla probabilità che si sia verificato uno degli eventi B_1, B_2, B_i, B_r, fra loro escludentesi. Cioè il verificarsi dell'evento "C" implica che si sia verificato "precedentemente" uno degli eventi B_i.
Se consideriamo i "B_i" come "cause" del verificarsi di "C"; essendosi verificato C ci domandiamo: "quale B_j dei B_i ne è la causa?"
Ciascuno dei B_i avrà una sua propria probabilità di verificarsi e la indicheremo con $p(B_i)$, perciò il verificarsi di uno qualsiasi degli avvenimenti $B(i)$ (fra loro escludentesi) avrà la probabilità totale: $p(B) = \sum_{i=1}^{r} P(B_i)$.
Essendosi verificato "C", certamente si è verificato uno degli eventi B_i perciò, (a posteriori) diremmo:

$$\boxed{p(B) = \sum_{i=1}^{r} p(B_i) = 1}$$

Ma per ogni B_i esiste una probabilità che si verifichi C indicheremo con $p(B_i C)$ tale probabilità. In particolare se B_j "è la causa di C" La probabilità che essendosi verificato B_j si verifichi anche C la indicheremo con.

$\underline{p(B_j C)}$; d'altra parte la probabilità che si verifichi B_j è $P(B_j)$, per cui la "<u>probabilità composta</u>" che C si verifichi per effetto di B_j sarà

$$\boxed{\underset{(B_j)}{P}(C) = P(B_j) \cdot p(B_j C)}$$

Se consideriamo che B_j è uno dei B_i

avremo che la probabilità che si verifichi "C" sarà

$$\boxed{p(C) = \sum_{i=1}^{r} p(B_i) \cdot p(B_i C)}$$

Ma indichiamo ora la probabilità che essendosi verificato C ne sia la causa B_j con $p(C B_j)$

mentre $p(B_j C)$ è la probabilità che essendo si verificato B_j si verifichi "C"

avremo quindi che la probabilità che si verifichi C dipendente da B_j sarà

$$\underset{B_j}{P}(C) = P(C) \cdot P(C B_j) = P(B_j) \cdot p(B_j C)$$

da cui:

$$P(C B_j) = \frac{P(B_j) \cdot p(B_j C)}{P(C)}$$

cioè:

$$\boxed{P(C B_j) = \frac{P(B_j) \cdot P(B_j C)}{\sum_{i=1}^{r} p(B_i) \cdot p(B_i C)}}$$

<u>formula di Bayes</u>

Formula di Bayes

La formula di Bayes:

$$\boxed{p(CB_j) = \frac{P(B_j)\cdot P(B_jC)}{\sum_{i=1}^{n} p(B_i)\cdot p(B_iC)}}$$

appare promettere assai più di quanto, in effetti, posso mantenere. Infatti, a priori, la probabilità $p(B_j)$, si conoscerebbe se sapessimo "quale dei B_i è B_j.

Facciamo degli esempi:

Tre ditte diverse producono lo stesso articolo per lo stesso acquirente.

La prima ditta B_1 produce 100 articoli al gior= no di cui 97 buoni e 3 difettosi (rilevato statisticamente)

La seconda ditta B_2 produce 350 articoli al giorno di cui 4% difettosi, cioè 14 difettosi e 336 buoni.

La terza ditta B_3 produce solo 50 articoli di cui nessuno è risultato difettoso.

I pezzi totali prodotti sono: $100 + 350 + 50 = 500$

$p(B_1) = \frac{100}{500} = 0{,}2$

$p(B_2) = \frac{350}{500} = 0{,}7$

$p B_3 = \frac{50}{500} = 0{,}1$

L'evento C_1 = prodotto difettoso, presenta la pro= babilità: $p(c) = \frac{3 + 14 + 0}{500} = 0{,}034$

mentre le probabilità condizionate sono:

$p(B_1 C) = \frac{3}{100} = 0{,}03$

$p(B_2 C) = \frac{14}{350} = 0{,}04$

$p(B_3 C) = \frac{0}{50} = 0$

Non conoscendo a priori "B_j" si calcola la formula di Bayes per ciascun B_i

per: $j = 1 \rightarrow p(C B_1) = \frac{(0{,}2)(0{,}03)}{0{,}034} = 0{,}18$

per $j = 2 \rightarrow p(C B_2) = \frac{(0{,}7)(0{,}04)}{0{,}034} = 0{,}82$

per $j = 3 \rightarrow p(C B_3) = \frac{(0{,}1)(0)}{0{,}034} = 0$

$1{,}00$

Abbiasi 4 Urne B_i ciascuna delle quali contiene rispettivamente:

B_1 =	12 palle rosse	8 palle bianche	20
B_2 =	27 palle rosse	9 palle bianche	36
B_3 =	3 palle rosse	17 palle bianche	20
B_4 =	0	24 palle bianche	24
	42	58	100

Viene estratta una palla rossa (evento C) che probabilità abbiamo che sia stata estratta dall'urna B_j?

Supponiamo che statisticamente sia stata rilevata la frequenza con cui vengono fatte le estrazioni dalle singole urne, e sia 50% per B_1, 20% per B_2, 5% per B_3, 25% per B_4. Cioè si conosca: $p(B_1) = 0,5$

$$p(B_2) = 0,2$$

$$p(B_3) = 0,05$$

$$p(B_4) = 0,25$$

<u>Le probabilità condizionate</u> cioè la probabilità che l'estrazione da una determinata urna porti una palla rossa cioè:

$$p(B_1 C) = 12/20 = 0,6$$

$$p(B_2 C) = 27/36 = 0,75$$

$$p(B_3 C) = 3/20 = 0,15$$

$$p(B_4 C) = 0/24 = 0$$

ma abbiamo: per le probabilità composte:

$$p(C B_1) \cdot p(C) = p(B_1) \cdot p(B_1 C) = 0,5 \times 0,6 = 0,3$$

$$p(C B_2) \cdot p(C) = p(B_2) \cdot p(B_2 C) = 0,2 \times 0,75 = 0,15$$

$$p(C B_3) \cdot p(C) = p(B_3)\, p(B_3 C) = 0,05 \times 0.15 = 0,0075$$

$$p(C B_4) \cdot p(C) = p(B_4)\, p(B_4 C) = 0,25 \times 0 = 0$$

e per le probabilità totali: $P(C) = \underline{0,4575}$

Si noti che si hanno 42 palle rosse su 100 palle cioè se fossero tutte in una urna avremmo $p(C) = 0.42$.

mentre per la formula di Bayes abbiamo:

$$p(CB_i) = \frac{p(B_i)\,p(B_iC)}{p(C)} = \frac{p(B_i)\,p(B_iC)}{\sum_{1}^{4} p(B_i)\,p(B_iC)}$$

cioè

$$p(CB_1) = \frac{0{,}3}{0{,}4575} = 0{,}655737705$$

$$p(CB_2) = \frac{0{,}15}{0{,}4575} = 0{,}327868853$$

$$p(CB_3) = \frac{0{,}0075}{0{,}4575} = 0{,}0163934426$$

$$p(CB_4) = \frac{0}{0{,}4575} = 0$$

per le probabilità totali $= 1$ infatti è data per certa l'estrazione di una palla rossa.

La formula di Bayes sarebbe interessante in medicina, ove, diagnosticato una certa malattia, se ne potesse individuare la causa. Quale probabilità ha un certo soggetto di prendere una certa malattia? La risposta è difficilissima e spesso impossibile.

Le variabili casuali o stocastiche

La parola "stocastico" deriva dal greco: "στοχάζομαι" = prendo di mira, cerco, congetturo, cerco di indovinare. In italiano la parola "stocastico/a" ha assunto il significato di "congetturale, probabilistico/a".

Sono variabili solo dipendenti dal caso.

Per quanta cura si ponga a prendere una misura, o per quanta cura si ponga a colpire un bersaglio lontano, ripetendo più volte la prova, si ottengono risultati che differiscono fra loro. Un buon operatore, con un buon strumento avrà scarti piccoli.

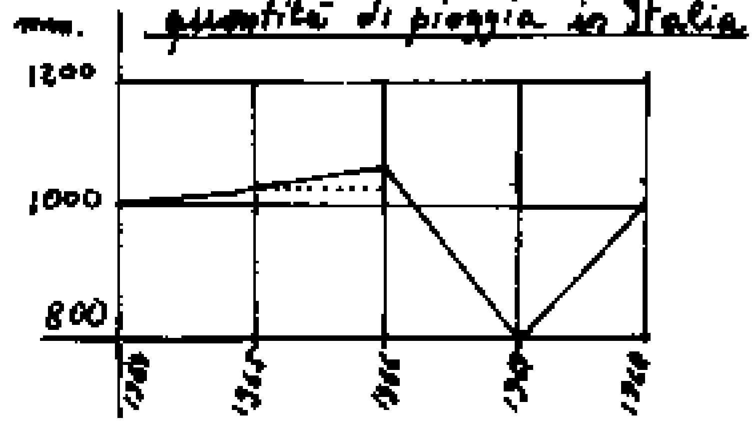
Sul modo di trattare le variabili casuali abbiamo già accennato al capitolo: "Scarto medio quadratico" ed al capitolo "Cenni sui minimi quadrati". Si hanno vari tipi di variabili casuali, per esempio le estrazioni al lotto su una determinata ruota; Probabilisticamente possiamo dire la ipotesi di uscita di un certo gruppo di numeri, ma non possiamo dire quando.

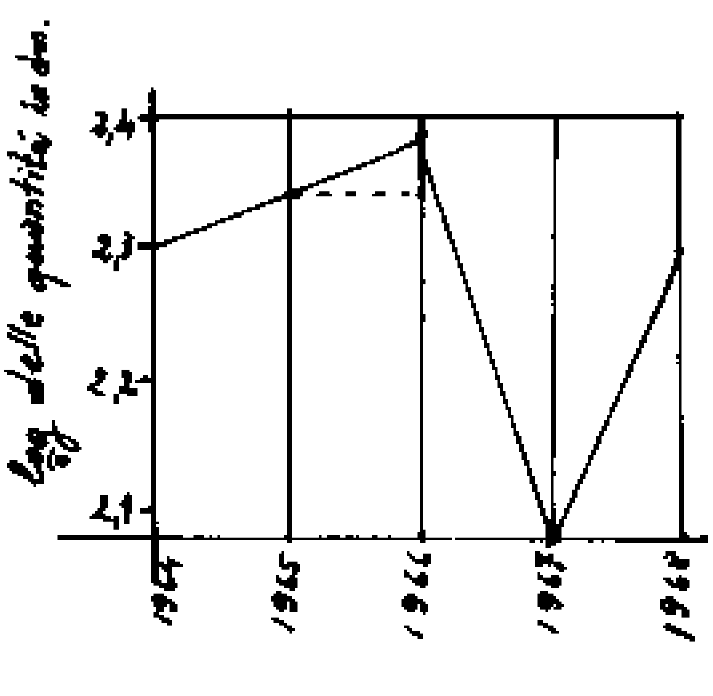
Anche i numeri casuali generati da un computer, "Random", sono variabili casuali, da cui le musiche dette stocastiche.

La statistica studia in particolare le variabili casuali, ed usa la parola "stocastica" come aggettivo qualificativo della "indipendenza" stocastica" fra variabili casuali. Si ha indipendenza stocastica quando due eventi casuali non si influenzano. Per esempio in una urna vi sono tre palle rosse e quattro bianche, l'evento: palla rossa, o palla bianca, in una prima estrazione, può "probabilisticamente" calcolarsi in 3/7 o in 4/7. Se non rimettiamo la palla estratta nell'urna, e supponiamo di aver estratto una palla rossa, le probabilitá diventano: 2/6 e 4/6 cioè le due estrazioni consecutive non sono "stocasticamente indipendenti, mentre lo sono se rimettiamo la palla nell'urna e mescoliamo bene. Se si lancia due volte una moneta, nel gioco a testa o croce, i due lanci sono <u>stocasticamente indipendenti</u>.

Si noti che i fenomeni osservati statisticamente possono riguardare "<u>entitá misurabili</u>" come l'altezza di un certo numero di persone, ma possono riguardare anche "<u>entitá qualitativamente diverse</u>" come il colore degli occhi o dei capelli. Tuttociò porta a considerare "<u>la frequenza</u>" con la quale il fenomeno si presenta.

Avremo: "frequenze relative", avremo: "distribuzioni di frequenza". Le distribuzioni di frequenza si prestano ad essere rappresentate graficamente. I diagrammi ad assi cartesiani variamente graduati per evidenziare (o contenere) variazioni o valori che graficamente potrebbero sfuggire. Facciamo alcuni esempi di rappresentazioni grafiche.



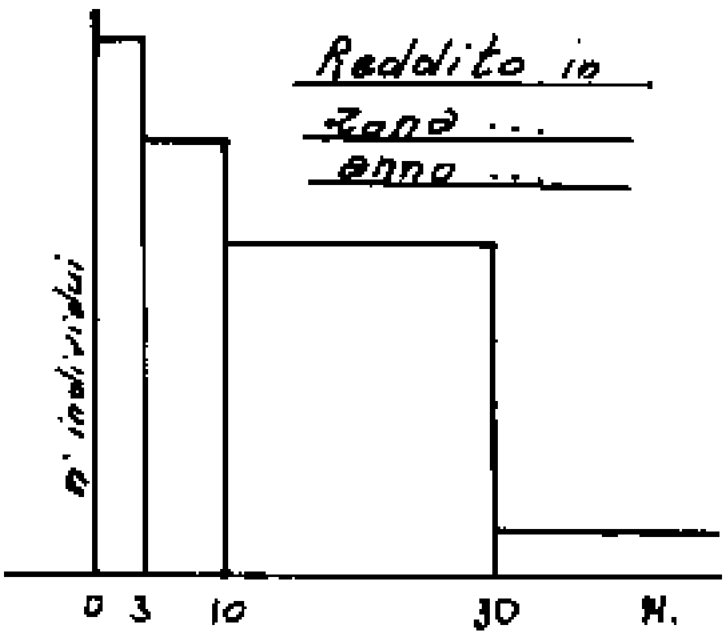


Il diagramma delle quantità annuali di pioggia caduta in Italia, riporta i valori annuali alla fine di ciascun anno e raccorda linearmente i valori. Se in ordinate poniamo i logaritmi delle quantità di pioggia, poiché: $\log(q_{1966}) - \log(q_{1965}) = \log\left(\frac{q_{1966}}{q_{1965}}\right) = \log\left(1 + \frac{q_{1966} - q_{1965}}{q_{1965}}\right)$

Le variazioni di ordinata nel secondo diagramma indicano il logaritmo del rapporto, cioè la variazione relativa.

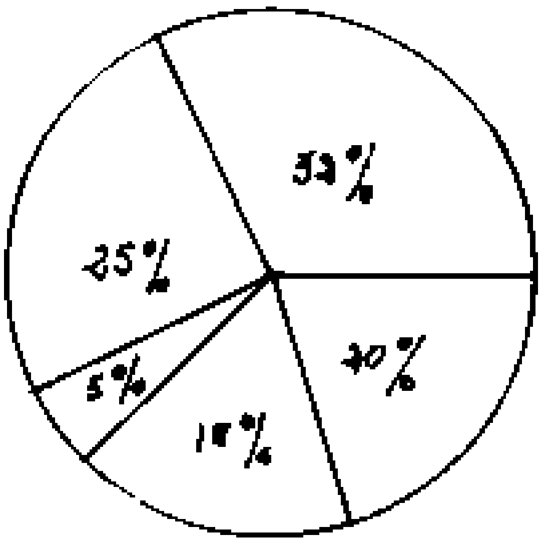
Altro tipo di rappresentazione sono gli "istogrammi" costituiti da rettangoli affiancati ove in ascisse si separano le classi di appartenenza ed in ordinate il numero di individui che rientra in tale classe.

Per esempio suddividiamo gli individui in classi di reddito. Cioè da 0 a 3000.000,= la I classe; da 3000.000.– ad 10.000.000.– la II classe; da 10.000000 a 30.000 000 la III classe oltre 30 000 000 la IV classe.
È evidente che nel grafico deve essere indicato l'anno di riferimento e la zona, (regione, nazione ecc);



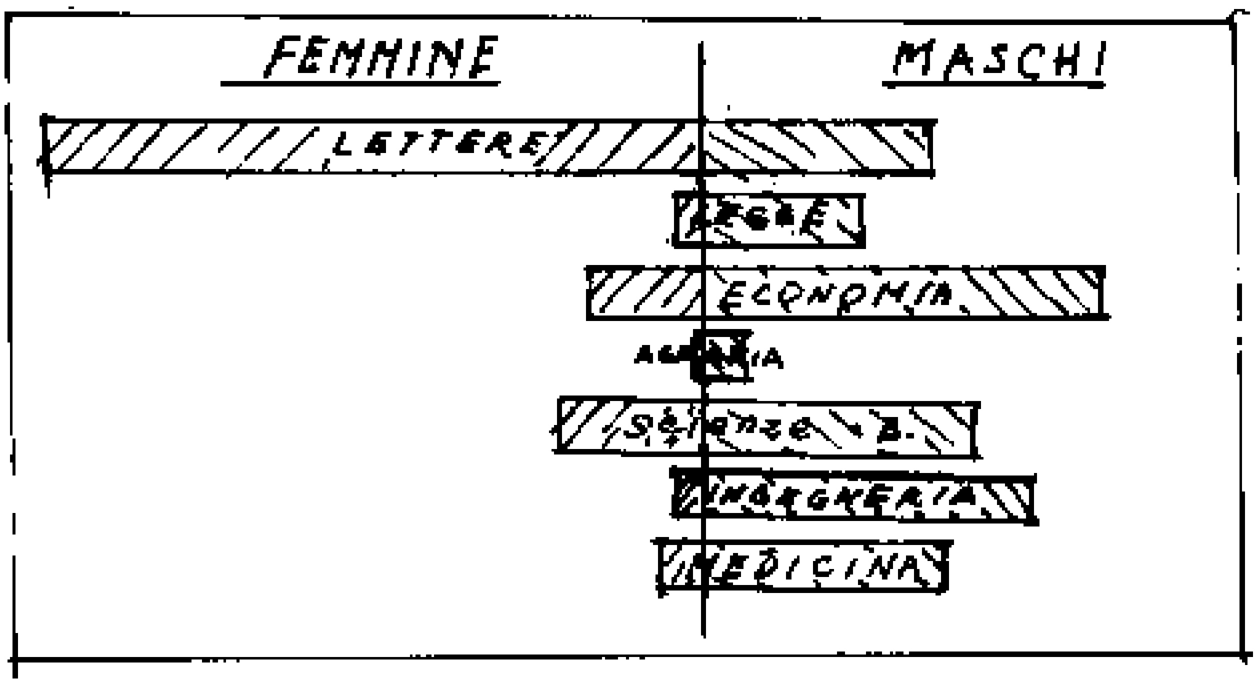
occorre anche precisare se reddito prodotto pro capite, o reddito disponibile pro capite. Per tener conto del diverso modo di interpretare il reddito di un capo famiglia con moglie e figli a carico.

Qualora invece si vogliano evidenziare le percentuali rispetto ad un totale noto, si usano grafici circolari detti anche "a torta" o grafici di composizione e comparazione. I settori circolari si possono colorare per evidenziare differenze qualitative.

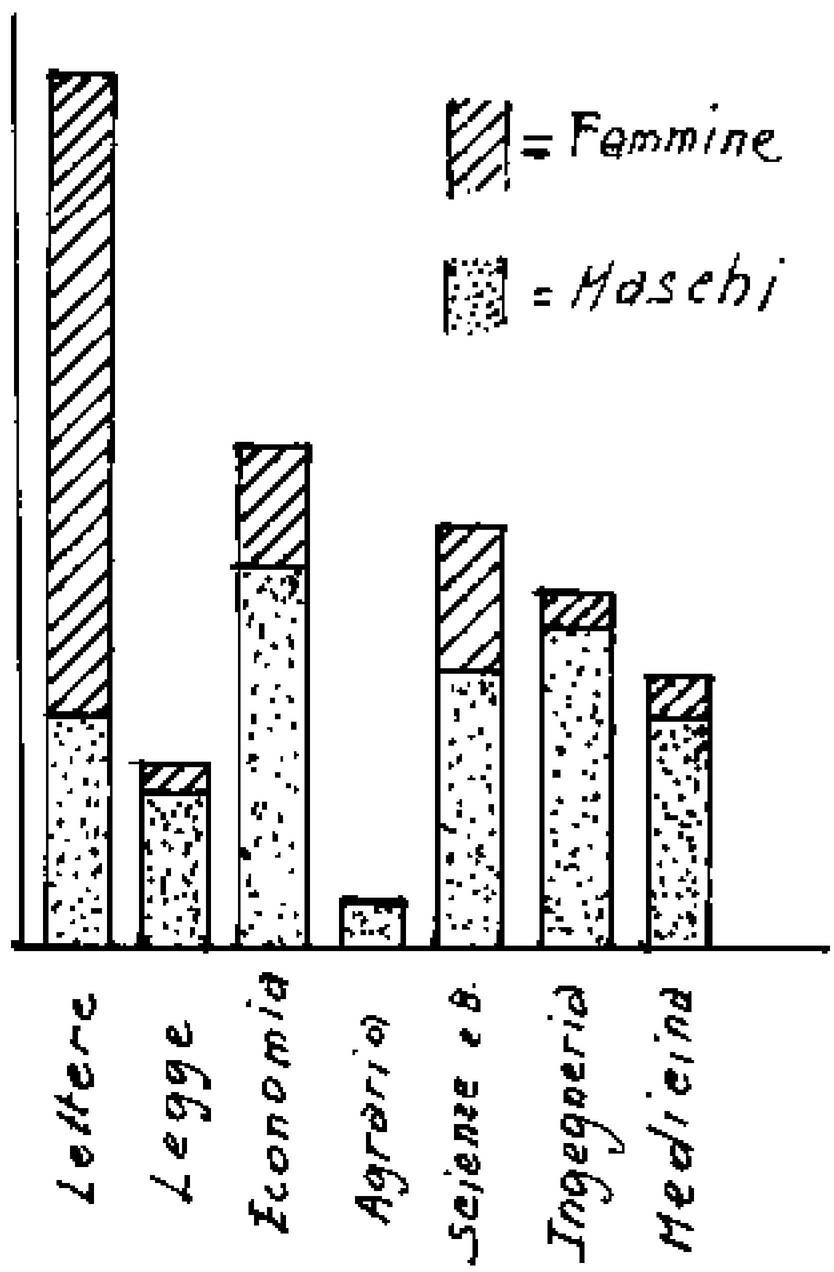


per esempio il "colore politico".
Consideriamo infine le rappresentazioni grafiche costituite da rettangoli separati. Si ricorre a questa rappresentazione quando si vogliano comparare

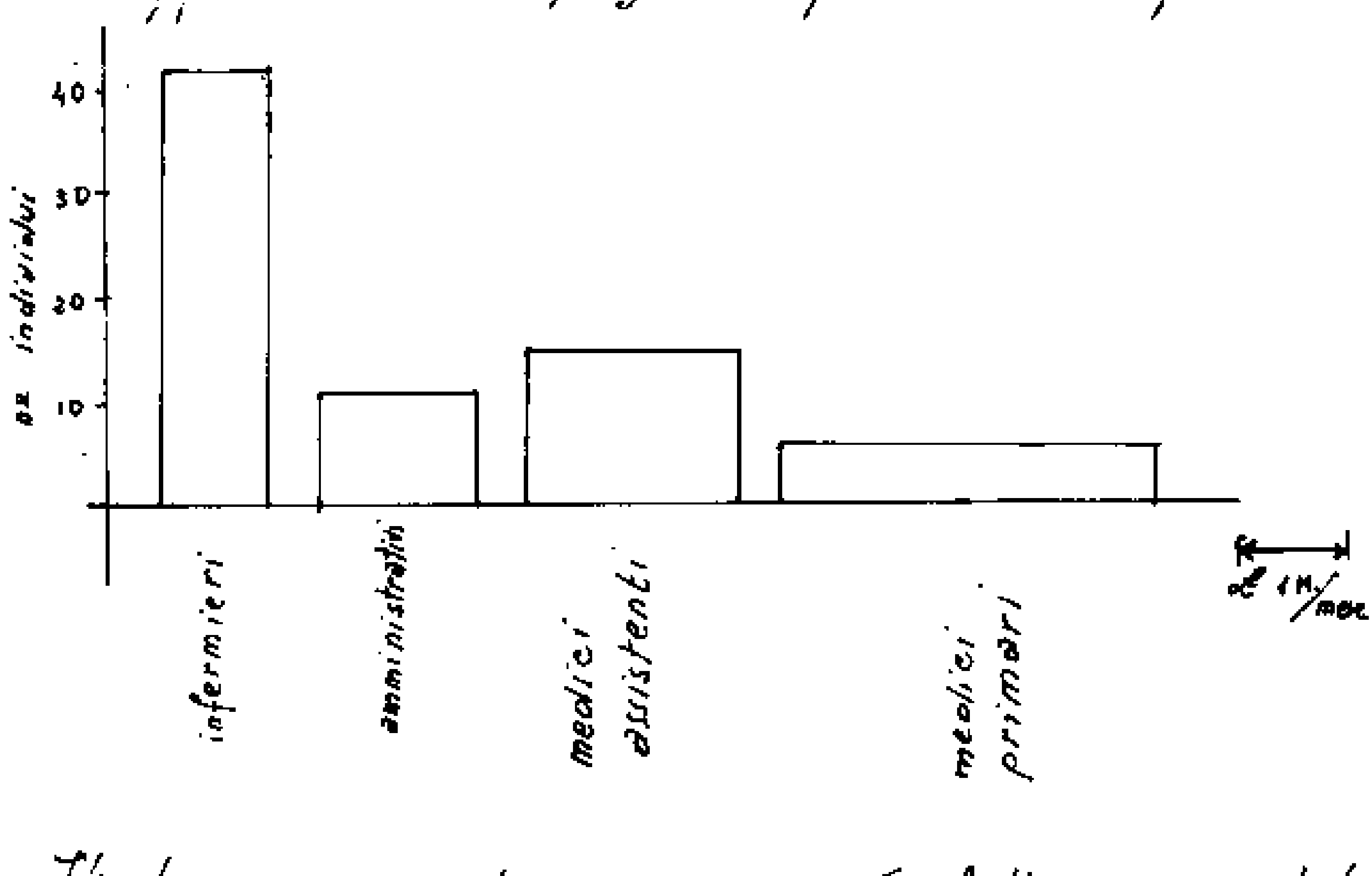
gruppi discreti non aventi una continuità spaziale o temporale; per esempio il numero degli studenti inscritti in un certo anno a varie facoltà universitarie, e possono distinguersi in maschi e femmine.



I rettangoli possono essere disposti in verticale, e per confrontare l'altezza complessiva, disporli a partire dalle ascisse, in tal caso il nostro diagramma diverrebbe come quello a fianco.



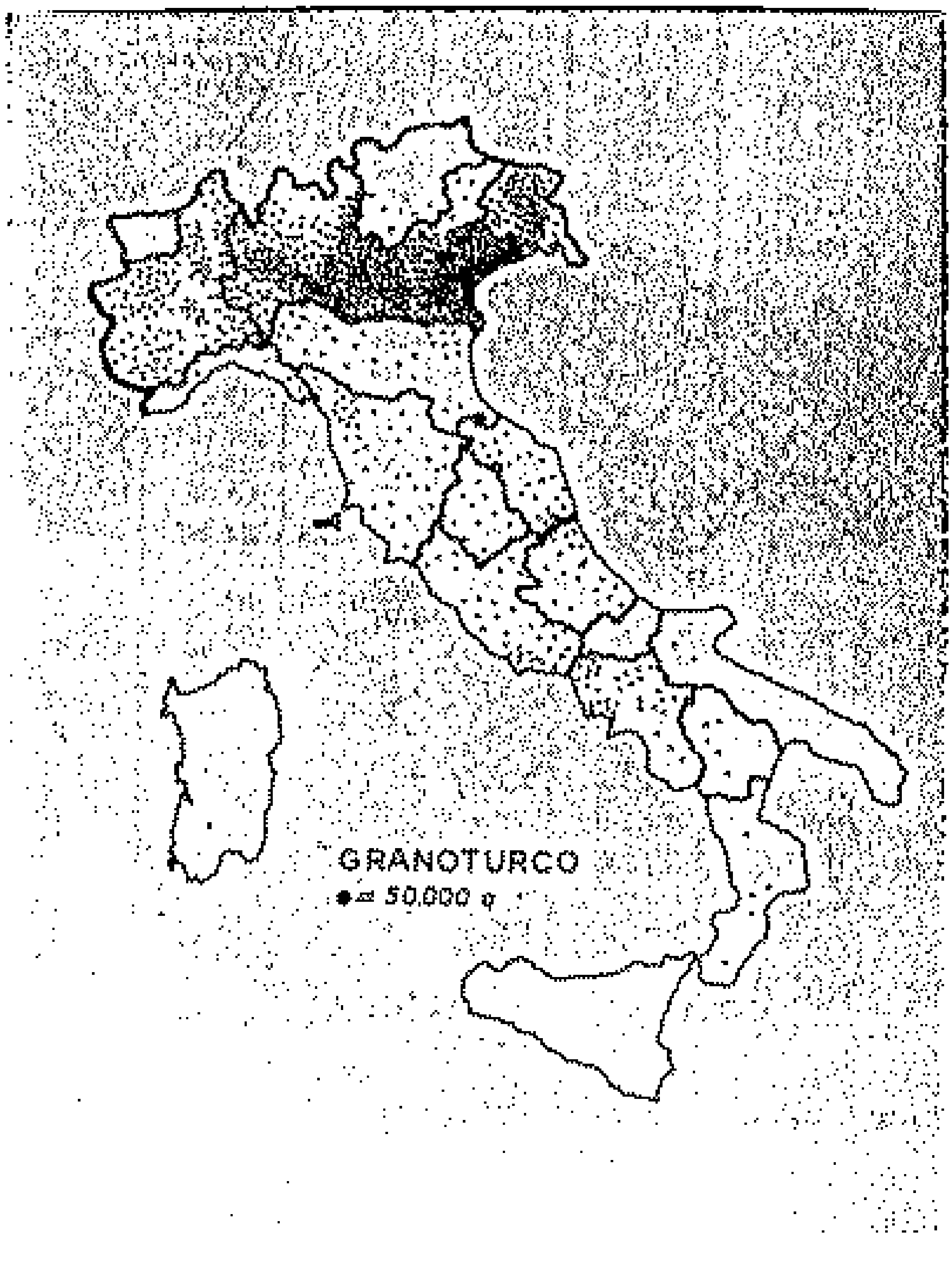
La rappresentazione a rettangoli separati, si presta anche a rappresentare fenomeni per i quali sia necessario utilizzare la diversa larghezza dei rettangoli come abbiamo fatto con gli istogrammi, ove però la larghezza dei rettangoli affiancati rappresenta l'ampiezza di un campo nel continuo : (da ... a...). Nei rettangoli separati la larghezza può essere un elemento, non consecutivo, ma indipendente. Per esempio in un ospedale si vuole evidenziare il costo del personale distinto per categoria. Porremo un rettangolo per ogni categoria, la larghezza del rettangolo rappresenta la paga mensile, l'altezza del rettangolo rappresenta il numero di individui di quella categoria; ovviamente l'area del rettangolo rappresenta la paga complessiva di quella categoria.



Il diagramma di cui sopra è fatto a puro titolo dimostrativo ed ovviamente non riflette nemmeno si approssima a situazioni di ospedali reali.

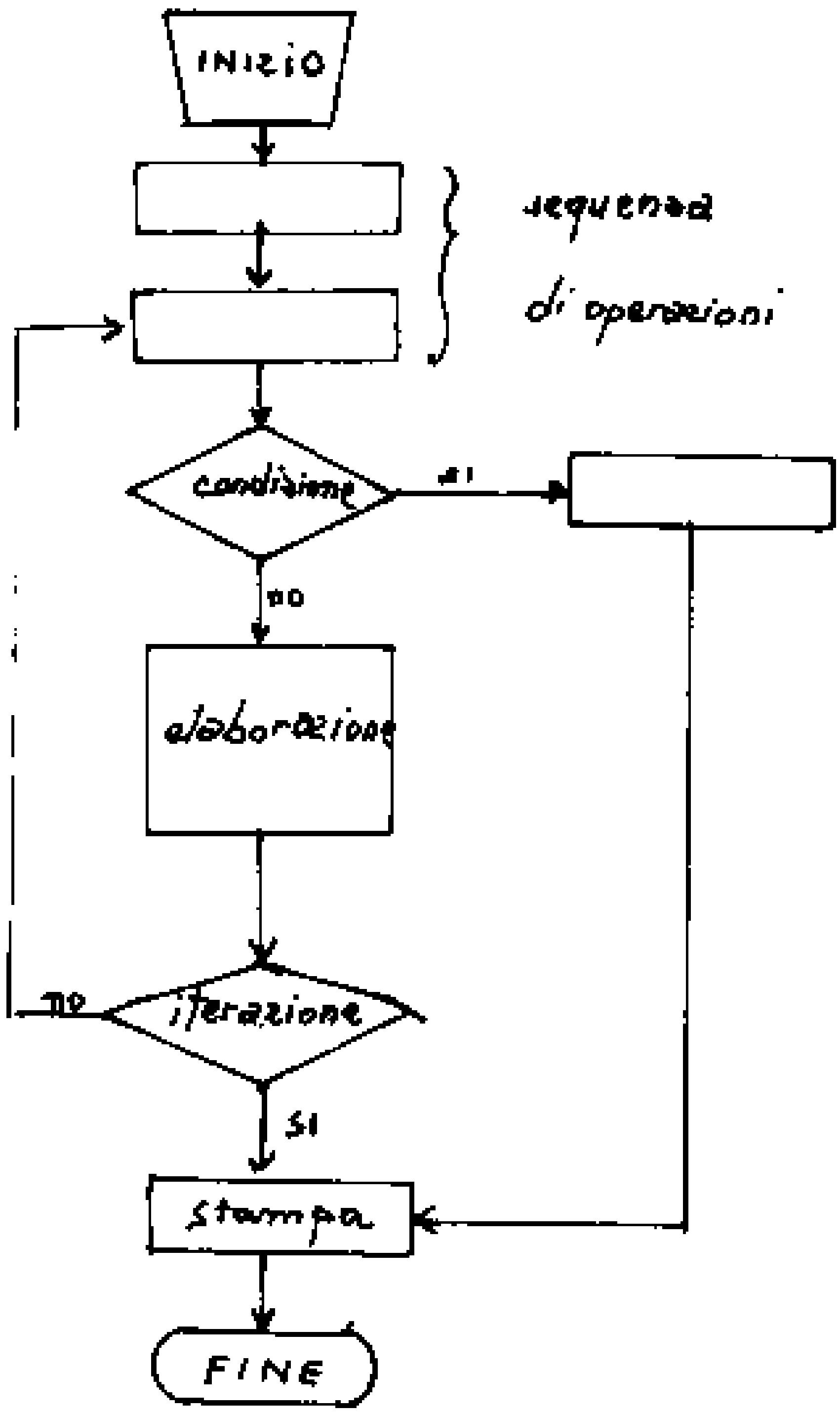
Quando un fenomeno in esame si voglia confrontare fra varie zone di un territorio, per la "distribuzione di frequenze si usano i "Cartogrammi". Cioè :

assunta come base la carta topografica o geografica del territorio in esame; si delimitano le zone che interessa evidenziare, quindi se la distinzione è puramente qualitativa si possono colorare le varie zone con colori diversi. Se la distinzione è quantitativa si possono punteggiare o tratteggiare le varie zone con densità diversa, ove il numero di punti o di tratteggi per centimetro quadro rappresenta la quantità di riferimento, oppure: ogni punto rappresenta il numero di tonnellate di un certo prodotto. Per esempio, il grafico a fianco (ripreso dall'Annuario Statistico Italiano per l'anno 1970) rappresenta il "Cartogramma" delle produzioni di granturco in Italia.



Si noti come la densità dei punti evidenzia il fenomeno.
Per completare si citano anche gli "Organogrammi" ove schematicamente sono rappresentate le varie fasi di una lavorazione o di un algoritmo.

Il piú comune é forse il cosiddetto "diagramma a blocchi" (é un organigramma) che si usa per la programmazione di computer. Si riporta un esempio generico di un organigramma, che riflette in genere le presposizioni logiche. Lo schema é connesso al linguaggio utilizzato e sopratutto al problema da risolvere.



L'organigramma di un programma strutturato sará la connessione di tanti sottoprogrammi, ciascuno dei quali avrá, a sua volta, il proprio organigramma per le operazioni da svolgere.

Un'altro tipo di organigramma puó essere lo schema di un circuito elettrico o elettronico, per esempio lo schema di un televisore. Si noti l'importanza della: "sequenza" della "intensitá" e "frequenza" delle "grandezze" in gioco nel fenomeno.

Successioni numeriche

"Dicesi successione un insieme ordinato di infiniti elementi la cui sequenza è coordinata dall'insieme crescente di tutti i numeri naturali".

I singoli elementi si indicano con la lettera "a" alla quale è apposto un indice "n" costituito da un numero naturale che indica la posizione dell'elemento. Una successione sarà quindi:

$$\boxed{a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \dots\ a_K\ ,\ \dots\ a_n}$$

ove l'indice "K" od "h", vuol significare un generico elemento intermedio, mentre l'indice "n" indica l'ennesimo (o ultimo) elemento considerato.

Una successione si indica brevemente con l'elemento ennesimo in parentesi graffa: $\{a_n\}$.

La successione è determinata se è possibile esprimere il valore dell'elemento ennesimo (a_n) in funzione dell'indice "n". In questo caso è possibile scrivere tutti gli elementi della successione attribuendo ad "n", ordinatamente, i valori 1, 2, 3 .... dell'insieme dei numeri naturali. Ed è possibile scrivere il valore di un generico elemento "a_K" se conosciamo a quale numero intero corrisponde K.

Avvertiamo che un limitato numero di elementi noti di una successione, non è sufficiente per fornire la legge degli infiniti elementi della successione.

È possibile invece trovare <u>una</u> delle leggi di successione che verifichi gli elementi noti.

alcuni esempi

$1, 2, 3, 4 \ldots\ldots \{n\}$ successione dei numeri naturali

$2, 4, 6, 8 \ldots\ldots \{2n\}$ " " " pari

$1, 3, 5, 7 \ldots\ldots \{2n-1\}$ " " " dispari

Supponiamo, nelle successioni sopra scritte di voler escludere i primi K elementi; per K=3 avremo:

$$\{n+K\} = 4, 5, 6, 7, \ldots\ldots \{n+3\}$$

$$\{2n+2K\} = 8, 10, 12, 14, \ldots\ldots \{2n+6\}$$

$$\{2(n+K)-1\} = 7, 9, 11, 13, \ldots \{2n+5\}$$

Consideriamo una successione che abbia costante la differenza di due termini consecutivi (vedi I Vol Progressione aritmetica), cioè: $(a_{K+1} - a_K = r)$, ove "r" è detta ragione della progressione aritmetica.

Affinchè questa successione sia definita occorre un altro elemento oltre "r", per esempio il valore del primo elemento, o il valore di un generico elemento a_K, (con K noto) permetterà di risalire al valore del primo elemento: $\boxed{a_1 = a_K - (K-1)r}$ quindi,

possiamo scrivere il termine: $a_n = \{a_1 + (n-1)r\}$;
per esempio una successione che abbia per terzo elemento 14 e per ragione 4 avrà per primo elemento 6 e la successione sarà:

$$6,\ 10,\ 14,\ \ldots\ldots,\{2+4n\}$$

Consideriamo ora una successione che abbia costante il rapporto di due termini consecutivi (progressione geometrica v. vol I); essendo: $a_n = a_1 q^{n-1}$ ove: $q = a_{k+1}/a_k$ = ragione della progressione geometrica. Per es. per $a_1 = 1$ e $q = 2$ si ha:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \ldots\ldots \{2^{n-1}\}.$$

Se di una successione conosciamo il valore e la posizione di due termini: a_h ed a_k possiamo trovare infinite successioni diverse che coincidono in a_h ed a_k. Infatti: $r = \frac{a_k - a_h}{k-h}$; oppure: $q = (a_k/a_h)^{1/(k-h)}$ a seconda che si scelga essere una progressione aritmetica o geometrica. Ma possiamo definire infinite leggi che legano gli elementi di una successione. (Per esempio che ogni termine sia la radice quadrata del precedente; ove dato a_1 è definito: $a_m = \{a_1^{\left(\frac{1}{2^{(n-1)}}\right)}\} = \{\sqrt[2^{(n-1)}]{a_1}\}$; oppure che: $a_k = (a_{k+1})^i$; ed occorrerà conoscere "i", ovvero: $(a_h)^{(i)^{(k-h)}} = a_k$; $i^{(k-h)} = \log|a_k| / \log|a_h|$; $i = (\log|a_k|/\log|a_h|)^{\frac{1}{(k-h)}}$)

Dati tre elementi di una successione a_h, a_i, a_K; se: $\frac{a_k - a_i}{k - i} = \frac{a_i - a_h}{i - h} = r$ possiamo dire che a_h, a_i, a_K sono tre termini di una progressione aritmetica. Se: $(a_K/a_i)^{\frac{1}{K-i}} = (a_K/a_h)^{1/K-h} = q$; la successione è una progressione geometrica. Naturalmente ciò vale, ed a maggior ragione, se le relazioni verificano più termini noti.

Supponiamo di conoscere il quinto, il sesto, il settimo e l'ottavo elemento di una successione, per esempio: $a_5 = 13$, $a_6 = 16$, $a_7 = 19$, $a_8 = 22$ è facile riconoscere che è una progressione aritmetica con $r = 3$
$a_1 = (a_h - (h-1)r) = (a_5 - (4)3) = 13 - 12 = 1$ e la successione sarà:

sarà:	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,	25, ... $\{3n-2\}$
corrisponde	a_1,	a_2,	a_3,	a_4,	a_5,	a_6,	a_7,	a_8,	a_9, ... $\{a_1 + r(n-1)\}$

Consideriamo ora una successione a segni alterni

Si hanno due casi: $a_1 > 0$; $a_1 < 0$

Per ottenere segni alterni basta moltiplicare per: $(-1)^{n-1}$ se $a_1 > 0$; oppure per: $(-1)^n$ se $a_1 < 0$.

Per esempio le tre successioni dei numeri naturali, numeri pari, e numeri dispari, a segni alterni e col primo elemento **positivo**, si esprimono:

$$+1,\ -2,\ +3,\ -4,\ +5,\ \ldots\ \{n(-1)^{n-1}\}$$

$$+2,\ -4,\ +6,\ -8,\ +10,\ \ldots\ \{2n(-1)^{n-1}\}$$

$$+1,\ -3,\ +5,\ -7,\ +9,\ \ldots\ \{(2n-1)(-1)^{n-1}\} =$$

Si noti che la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente, ed ogni altra operazione diadica fra gli elementi omonimi di due successioni, produce una nuova successione espressa dalla stessa operazione sui due termini funzione di n.

Per esempio, se volessimo intervallare con zeri i numeri dispari, cioè se vogliamo il termine a_n di una successione del tipo: $1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0 \ldots$

Si nota che questa successione corrisponde alla successione naturale a cui sono tolti i numeri pari sostituendoli con elementi nulli. Notare anche che n rispetto ai numeri dispari vale metá.

Consideriamo le due successioni:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{6}{2},\ \frac{7}{2},\ \ldots\ \left\{\frac{n}{2}\right\}$$

$$+\frac{1}{2},\ -\frac{2}{2},\ +\frac{3}{2},\ -\frac{4}{2},\ +\frac{5}{2},\ -\frac{6}{2},\ +\frac{7}{2},\ \ldots\ \left\{\frac{n}{2}(-1)^{n-1}\right\}$$

Sommando gli elementi omonimi abbiamo:

$$\boxed{1,\ 0,\ 3,\ 0,\ 5,\ 0,\ 7,\ \ldots\ \left\{\frac{n}{2}\left(1+(-1)^{n-1}\right)\right\}}$$

che è la successione richiesta. $= \left\{\frac{n}{2}\left(1-(-1)^{n}\right)\right\}$

Se togliamo dalla successione dei numeri interi i numeri dispari nella loro posizione, cioè

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots \{n\}$$

$$\underline{1,\ 0,\ 3,\ 0,\ 5,\ 0,\ \ldots \left\{\tfrac{n}{2}\left(1-(-1)^n\right)\right\}}$$

sottraendo: $0,\ 2,\ 0,\ 4,\ 0,\ 6,\ \ldots \{n\}\left\{\tfrac{n}{2}(1-(-1))\right\} =$

$$\boxed{0,2,0,4,0,6,\ \ldots \left\{\tfrac{n}{2}\left(1+(-1)^n\right)\right\}}$$

volendo iniziare con "2" si sostituisce ad n il valore $(n+1)$ e ricordando che $\left(+(-1)^{n\pm1}\right) = \left(-(-1)^n\right)$

$$\boxed{2,0,4,0,6,0,8\ \ldots \left\{\tfrac{n+1}{2}\left(1-(-1)^n\right)\right\}}$$

se dividiamo per 2 queste successioni otteniamo:

$$\boxed{0,1,0,2,0,3,0,4\ \ldots \left\{\tfrac{n}{4}\left(1+(-1)^n\right)\right\}}$$

$$\boxed{1,0,2,0,3,0,4\ \ldots \left\{\tfrac{n+1}{4}\left(1-(-1)^n\right)\right\}}$$

sommando queste due successioni abbiamo:

$$\boxed{1,1,2,2,3,3,4,4\ \ldots \left\{\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{4}\left(1-(-1)^n\right)\right\}}$$

sottraendo dalla seconda la prima successione:

$$\boxed{1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,\ \ldots \left\{\tfrac{1}{4}-\left(\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{4}\right)(-1)^n\right\}}$$

Quest'ultima successione, alcuni testi di analisi usano scriverla: $(1,-1,2,-2,3,-3,\ \ldots\ n,-n)$ ove "n" non ha più il significato di indice dell'elemento ennesimo, mediante il quale è possibile la determinazione algebrica $a_n = f(n)$.

Gli esempi fatti ci pongono la generalizzazione di vari problemi. Iniziamo sul come <u>intervallare con zeri una successione</u>:

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots\ \{f(n)\}$$

sia la successione data. Moltiplicando per $(1/2)n = (0,5)n$ cioè sostituendo ad "n" il valore $(n/2)$ e dividendo per due gli elementi della successione si ha:

$$\frac{f(\frac{1}{2})}{2},\ \frac{f(1)}{2},\ \frac{f(1,5)}{2},\ \frac{f(2)}{2}\ \ldots\ \left\{\frac{1}{2} f\left(\frac{n}{2}\right)\right\}$$

alternando i segni:

$$\frac{-f(\frac{1}{2})}{2},\ \frac{+f(1)}{2},\ \frac{-f(1,5)}{2},\ \frac{+f(2)}{2}\ \ldots\ \left\{\left(\frac{1}{2} f\left(\frac{n}{2}\right)\right)(-1)^n\right\}$$

Sommando: $\boxed{0,\ f(1),\ 0,\ f(2),\ 0\ \ldots\ \left\{\frac{f(\frac{n}{2})}{2}\left(1+(-1)^n\right)\right\}}$

posto $fn = \frac{(n+1)}{2}$ e $(-1)^n = -(-1)^{n+1}$

$$\boxed{f(1), 0, f(2), 0, f(3), 0\ \ldots\ \left\{\frac{f(\frac{n+1}{2})}{2}\left(1-(-1)^n\right)\right\}}$$

per esempio: un progressione geometrica che abbia per primo termine 2 e ragione 2 cioè:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots\ \{2^n\}$$

intervallata con zeri diventa:

$$\boxed{2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0\ \ldots\ \left\{2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1-(-1)^n\right)\right\}}$$

oppure: $\boxed{0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16\ \ldots\ \left\{2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}\left(1+(-1)^n\right)\right\}}$

se vi sommiamo: $\boxed{2, 0, 4, 0, 6, 0, 8, 0, 10,\ \ldots\ \left\{\frac{n+1}{2}\left(1-(-1)^n\right)\right\}}$

otteniamo: $\boxed{2, 2, 4, 4, 6, 8, 8, 16, 10, 32,\ \left\{\frac{n+1}{2}\left(1-(-1)^n\right)+\frac{2^{n/2}}{2}\left(1+(-1)^n\right)\right\}}$

Con ciò abbiamo intervallato ad una progressione aritmetica una progressione geometrica. (cioè il primo elemento è dell'aritmetica). Se invece intervallassimo la stessa progressione geometrica con la stessa progressione aritmetica. (cioè il primo elemento è della geometrica avremo):

$$\boxed{2, 2, 4, 4, 8, 6, 16, 8, 32, 10, \ldots \left\{2^{\frac{n-1}{2}}\left(1-(-1)^n\right)+\frac{n}{2}\left(1+(-1)^n\right)\right\}}$$

Si noti che contando alternativamente gli elementi sono evidenti le due progressioni.

Con ciò abbiamo visto <u>che per intervallare due successioni occorre prima intervallarle con zeri.</u>

Un semplicissimo programma in Basic per stampare i primi K termini di una successione ove $\{a_n\} = \{f_{(n)}\}$

```
10 For n = 1  to K
20 Print n, f(n)
30 Next
40 End
```

permette di verificare la correttezza della formula $f_{(n)} = \{a_n\}$.

<u>Per fare la successione dei reciproci o inversi di un'altra successione</u>, basta ricordare che:

$$\left(a_k\right)^{-1} = \frac{1}{a_k}$$

Per esempio ricordando come si è formata la successione: $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots\ldots \left\{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}(1-(-1)^n)\right\}$

$$\boxed{1, \frac{1}{1}, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \cdots \left\{\frac{1}{n}(1+(-1)^n)+\frac{(n+1)}{4}(1-(-1)^n)\right\}}$$

Notare che per fare gli inversi o reciproci degli elementi si inverte solo il fattore rappresentativo della $f_{(n)}$ non il fattore: $(1+(-1)^n)$ che è fattore di posizione e fabbrica gli zeri. Questo fattore assume alternativamente il valore $0, 2, 0, 2$, mentre

$$\boxed{0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots\ldots \left\{\frac{1}{2}(1+(-1)^n)\right\}}$$

$$\boxed{1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots\ldots \left\{\frac{1}{2}(1-(-1)^n\right\}}$$

queste successioni possono essere moltiplicate per $U_{(\frac{n}{2})}$ e per $V_{(\frac{n}{2})}$ ed avremo, sommando, l'intervallamento di $U_{(n)}$ in $V_{(n)}$. Se invece moltiplichiamo per $U_{(\frac{n}{2})}$ e per $1/U_{(\frac{n}{2})} = (U_{(\frac{n}{2})})^{-1}$ otteniamo la $U_{(n)}$ che intervalla gli elementi reciproci.

<u>Altre successioni possono ottenersi elevando $f_{(n)}$ con esponenti in n per esempio $(f_{(n)})^{\varphi(n)}$</u>

Consideriamo le successioni:

$2, 0, 2, 0, 2, 0, \ldots \{1-(-1)^n\}$

$1, 3, 1, 3, 1, 3, \ldots \{2+(-1)^n\}$

$2, 5, 8, 11, 14, \ldots \{3n-1\}$

$0, 0, 2, 0, 4, 0, 6, \ldots \left\{\frac{n-1}{2}(1-(-1)^n)\right\}$

$2, 0, 4, 0, 6, 0, 8, \ldots \left\{\frac{n+1}{2}\left(1-(-1)^n\right)\right\}$

$1, 0, 5, 0, 9, 0, 13, \ldots \left\{\frac{2n-1}{2}\left(1-(-1)^n\right)\right\}$

e pensiamo di porre l'espressione dell'elemento ennesimo "a_n" come esponente ad una espressione in "n". Per esempio prendiamo la prima successione ora scritta e poniamola in esponente ad n avremo: $1, 1, 9, 1, 25, 1, 49, 1, \ldots \left\{(n)^{(1-(-1)^n)}\right\}$ se vi poniamo come esponente la seconda otteniamo: $1, 8, 3, 64, 5, 216, 7, \ldots \left\{(n)^{(2+(-1)^n)}\right\}$

Se fosse data la sequenza di numeri:

$$1, 8, 3, 64, 5, 216, 7, \ldots$$

volendo trovare <u>la legge</u> che determina tale successione, la prima osservazione da fare è che i numeri dispari mantengono il loro posto perciò $1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, \ldots \left\{\frac{n}{2}\left(1-(-1)^n\right)\right\}$

la restante successione è composta dei numeri pari, sempre al loro posto, ma gli elementi sono elevati al cubo: $0, 8, 0, 64, 0, 216, 0, \ldots \left\{\left(\left(\frac{n}{2}\right)\left(1+(-1)^n\right)\right)^3\right\}$

Sommando le due successioni:

$$1, 8, 3, 64, 5, 216, 7, \ldots \left\{\left(\frac{n}{2}\left(1+(-1)^n\right)\right)^3 + \frac{n}{2}\left(1-(-1)^n\right)\right\}$$

che equivale all'espressione: $\left\{n^{(2+(-1)^n)}\right\}$, molto più semplice. (Basterebbe pensare che la successione $1, 3, 1, 3, 1, 3 \ldots \{2+(-1)^n\}$ ordinatamente posta in esponente...)

ma, l'uguaglianza:

$$n^{(2+(-1)^n)} = (n^2)(n^{(-1)^n}) = \left\{ \frac{n}{2}(1-(-1)^n) + \left(\frac{n}{2}(1+(-1)^n)\right)^3 \right\}$$

Ci fa riflettere come esistano espressioni algebriche equivalenti (una molto più semplice dell'altra) e non trasmutabili l'una nell'altra coi comuni passaggi algebrici. Esiste cioè una superalgebra che permette di trasformare una espressione nell'altra, ove il simbolismo può esprimere due aspetti diversi della stessa cosa.

Cerchiamo inizialmente di capire l'espressione: $\{(a \pm b(-1)^n\}$ si hanno due casi:

$$(a-b),\ (a+b),\ (a-b),\ \dots \{a+b(-1)^n\}$$

$$(a+b),\ (a-b),\ (a+b)\ \dots \{a-b(-1)^n\}$$

ove sommando otteniamo:

$$2a,\ 2a,\ 2a\ \dots \{2a\}$$

Le due espressioni possono moltiplicare espressioni in n genericamente espresse da: $f(n)$; avremo relazioni che sommate darebbero: $(2a)f(n)$.

Molto importante invece il rapporto fra a e b.

per $(b=a)$ si ha: $0, 2a, 0, 2a, \dots a\{1+(-1)^n\}$

oppure: $2a, 0, 2a, 0, \dots a\{1-(-1)^n\}$

per $(a=2b)$ $\quad b, 3b, b, 3b \dots b\{2+(-1)^n\}$

$3b, b, b, 3b \dots b\{2-(-1)^n\}$.

Per $a = Kb$: $\{Kb \pm b(-1)^n\} = b\{K \pm (-1)^n\}$

$$b(K-1)\ ,\ b(K+1)\ ,\ b(K-1)\ ,\ \ldots \{bK + b(-1)^n\}$$

Se poniamo $a = 5$, $b = 4$ abbiamo

$$1\ ,\ 9\ ,\ 1\ ,\ 9\ ,\ \ldots\ldots \{5 + 4(-1)^n\}$$

$$9\ ,\ -1\ ,\ 9\ ,\ -1\ ,\ \ldots\ldots \{4 - 5(-1)^n\}$$

$$-1\ ,\ 9\ ,\ -1\ ,\ 9\ ,\ \ldots\ldots \{4 + 5(-1)^n\}$$

Abbiamo insistito in successioni <u>ove la variabile intera "n"</u> figura solo come esponente di (-1) cioè $(-1)^n$ perché, (vedi vol I); $(-1)^{\frac{n}{2}}$ che fornisce le potenze del coefficiente immaginario "i", e da esso, i numeri complessi ed i vettori ci consente di gettare le basi della nostra "superalgebra".

Il nostro $(-1)^n$ alterna semplicemente il segno; $(-1)^{\frac{n}{2}}$ da la successione ricorrente ogni 4 elementi

$$i, -1, -i, +1,\ i, -1, -i, +1, \ldots \{(-1)^{\frac{n}{2}}\} = (i)^n$$

$$-i, +1, +i, -1, -i, +1, +i, -1, \ldots \{-(-1)^{\frac{n}{2}}\} = -(i)^n$$

$$-1, -i, +1, +i, -1, -i, +1, +i, \ldots \{(-1)^{\frac{n+1}{2}}\} = \{i(-1)^{\frac{n}{2}}\}$$

$$1, i, -1, -i, +1, +i, -1, -i, \ldots \{-(-1)^{\frac{n+1}{2}}\}$$

Per far girare in senso opposto all'ultima successione: $-i, -1, +i, +1, -i, -1, +i, +1, \ldots \{(-i)^n\}$

$$1, -i, -1, i, 1, -i, -1, i \ldots \{(-i)^{(n+3)}\}$$

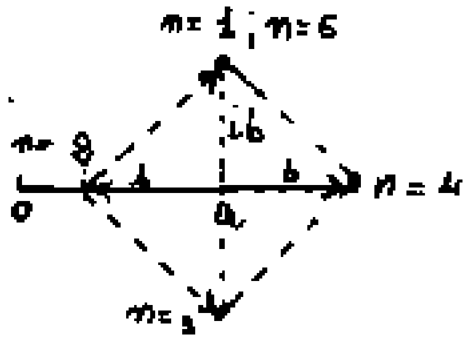
$$(-i)^{n+3} = (-1)^{(n+3)} \cdot (i)^{n+3} = +(-1)^n \cdot (-1)\ (i)^n \cdot (i)^3 = i(i)^n(-1)^n$$

quindi: $\{(-i)^{n+3}\} = \{i(-i)^n\}$

Abbiamo così la possibilità di successioni di numeri complessi alternati a reali. Per esempio: $\{a + b(-1)^{\frac{n}{2}}\} = \{a + b(i)^n\}$ rappresenta una successione ricorrente ogni quattro termini:

$$(a+ib),\ (a-b),\ (a-ib),\ (a+b) \ldots\ldots \{a + b(-1)^{\frac{n}{2}}\}$$

che batte i vertici di un rombo. Infatti ricordando la rappresentazione dei numeri complessi (v. I Vol) si ha la figura a fianco.



Cerchiamo ora di vedere cosa succede se poniamo come esponente le successioni trovate.

$$1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, \ldots \{\tfrac{n}{2}(1-(1)^n)\}$$
$$\underline{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots \{\tfrac{1}{2}(1+(-1)^n)\}}$$
$$1, 1, 3, 1, 5, 1, 7, \ldots \{\tfrac{n}{2}(1-(-1)^n) + \tfrac{1}{2}(1+(-1)^n)\} = \{n^{[\frac{1}{2}(1-(-1)^n)]}\}$$

Infatti considerando in esponente ad n la successione: $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots \{\frac{1}{2}(1-(-1)^n)\}$, essendo $n^0 = 1$, ed $n^1 = n$, resta verificata l'uguaglianza:

$$\{\tfrac{1}{2}[(n+1) - (n-1)(-1)^n]\} = \{n^{[\frac{1}{2}(1-(-1)^n)]}\}$$

I legami algebrici dell'eguaglianza sono che entrambe le espressioni sono l'elemento ennesimo della stessa successione; il primo termine dell'uguaglianza è una trasformazione algebrica della formula di cui sopra;

ma con gli ordinari passaggi algebrici non è possibile trasformare l'espressione al primo membro in quella al secondo membro o viceversa. La possibilità di considerare una espressione algebrica come una "successione" che può riguardarsi come formata in due diversi modi di cui uno con carattere esponenziale.

Abbiamo visto come $(-1)^{\frac{n}{2}}$, con "n" intero, produca la sequenza delle unità reali e immaginarie, positive e negative, e come: $(-1)^{\frac{n}{2}} = \left((-1)^{\frac{1}{2}}\right)^{n} = i^{n}$.
Estendendo il concetto: $(-1)^{\frac{m}{n}}$, avremo tante radici quant'è "n" (reali o complesse) e ciascuna di esse darà luogo ad una successione in m.

Ma, noi abbiamo imparato a calcolare le radici dell'unità o di un numero complesso (v. I Volume, formula di Moivre). Per fare un caso semplice: $\{a(1)^{\frac{n}{2}}\}$ equivale a due successioni distinte:

$$a\ ,\ a\ ,\ a\ ,\quad \ldots\ \{a(1)^{n}\}$$

$$-a\ ,\ a\ ,\ -a\ ,\quad \ldots\ \{a(-1)^{n}\}$$

Siamo così entrati in esponenti razionali, vediamo com'è possibile esaminare valori nel continuo.

Funzioni e Successioni

Se nell'espressione di una successione $\{a_n\}$, poniamo $n=x$ ed attribuiamo ad x il succedersi di tutti i valori dei numeri da $-\infty$ a $+\infty$; abbiamo che la nostra successione, espressa da valori discontinui che si succedono in sequenza, ("n" è intero) e che possono riportarsi con punti nel piano (x,y), diventa una funzione; cioè la x anziché assumere i valori della serie naturale dei numeri, assumerà tutti i valori dei numeri reali. I punti discontinui del nostro grafico saranno raccordati dalla linea rappresentativa della funzione.

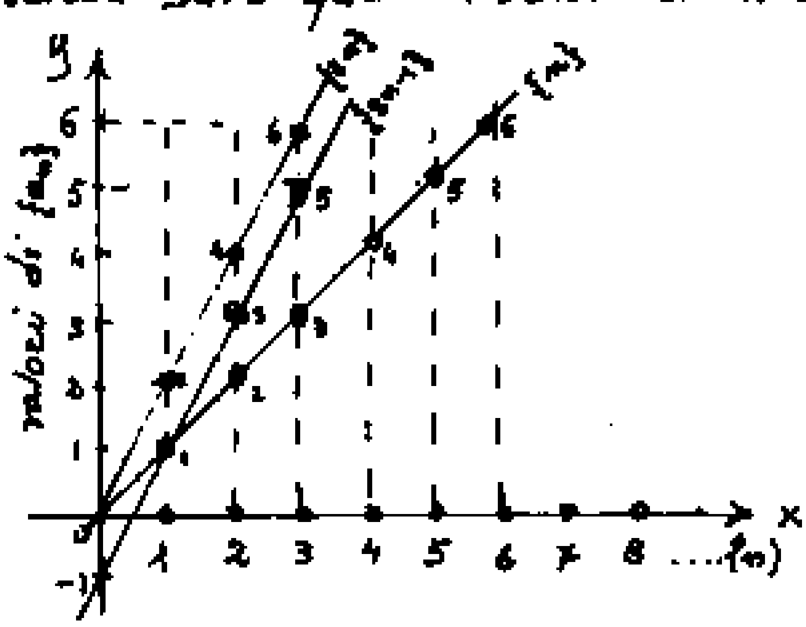
In altre parole, se in una funzione: $y = f(x)$ attribuiamo ad x, <u>ordinatamente i soli</u> valori dei numeri naturali (interi positivi), i valori della $y = f(x)$ sono i valori degli elementi della successione che ha per legge la $f(x)$, e la x diventa "indice" dell'elemento. Esempi:

$y = 0$ = retta delle ascisse sulla quale i valori di $n = int(x) > 0$.

$y = x \rightarrow \{n\}$

$y = 2x \rightarrow \{2n\}$

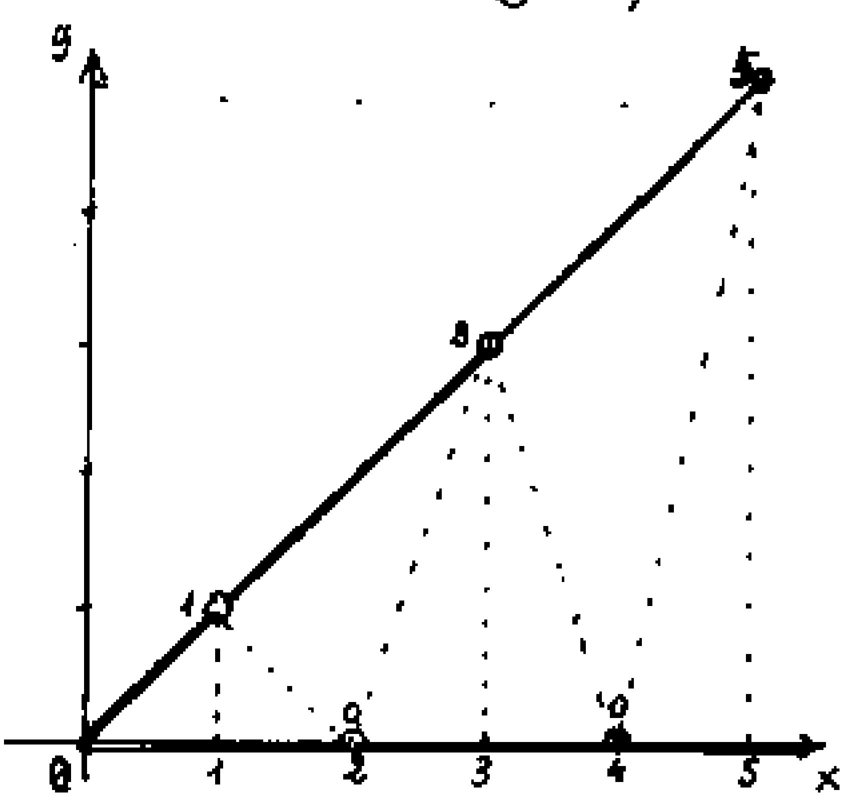
$y = (2x-1) \rightarrow \{2n-1\}$



Questa corrispondenza fra funzioni e successioni, ci fa riguardare una successione come i valori delle ordinate per le $x = \mathrm{int}(x)$, nella sequenza dei numeri naturali e ci porta a confronti che possono permettere, in genere, di trovare "una legge" che verifichi gli elementi dati della successione.

Sappiamo, per esempio, che, dati 5 punti per essi passa una conica, ma la conica potrebbe essere un ellisse ed in tal caso la corrispondente successione risulterebbe limitata, come valori reali degli elementi.

Inversamente se dovessimo studiare la funzione: $y = \frac{x}{2}\left(1-(-1)^x\right)$ corrispondente alla successione $\left\{\frac{n}{2}\left(1-(-1)^n\right)\right\} = 1, 0, 3, 0, 5, 0 \ldots$ Facilmente disegnamo i punti della successione, ma la funzione che grafico ha? Cominciamo a considerare la x nel campo dei numeri razionali, cioè poniamo: $x = \frac{m}{n}$. Se n è pari nulla ci vieta di moltiplicare per 2 ambo i termini della frazione in tal modo anche il numeratore m diventa pari, (il valore della frazione non cambia), ed introduciamo radici reali.

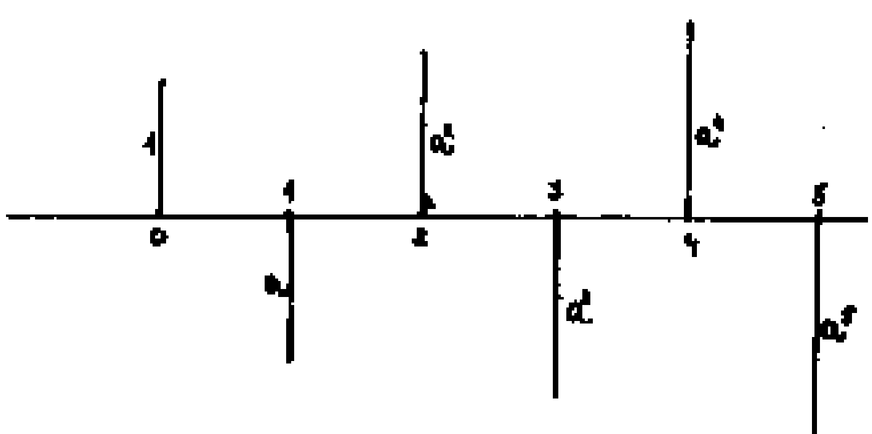


Cioè: $(-1)^{\frac{1}{2}} = \pm i = (-1)^{\frac{2}{4}} = (1)^{\frac{1}{4}} = \begin{cases} (1)^{\frac{1}{4}} = \pm 1 \\ (-1)^{\frac{1}{2}} = \pm i \end{cases}$

Perciò la y si scinde in due linee: $y = x$ ed $y = 0$.

Le potenze con base negativa ed esponente continuo. possono riportarsi a $K(-1)^x$ con $-\infty \leq x \leq +\infty$. Noi limiteremo il nostro studio nel continuo con esponenti frazionari, avendo presente che anche i numeri irrazionali possono essere delimitati da frazioni il cui valore differisce dal valore del numero irrazionale meno di un ε piccolo a piacere

Gli attuali calcolatori segnalano errore se chiediamo potenze con base negativa, (non esistono i logaritmi di numeri negativi, poiché le basi dei logaritmi sono positive)



Il problema non è facile. Se riportiamo in ascisse gli esponenti ed in ordinate le potenze di una base negativa, possiamo tracciare subito le ordinate per esponenti interi, o per indici di radice dispari.

Consideriamo: $(-a)^{\frac{m}{n}}$. L'espressione è ambigua perché può scriversi in due diversi modi: $\sqrt[n]{(-a)^m}$ oppure $\left(\sqrt[n]{(-a)}\right)^m$ abbiamo le seguenti possibilità:

		I caso	II caso	
m = pari	n pari	due valori $\pm$	immaginario con $n \geq m$	(riducibile)
	n dispari	un valore >0	un valore >0	
m = dispari	n pari	immaginario	immaginario	
	n dispari	un valore <0	un valore <0	

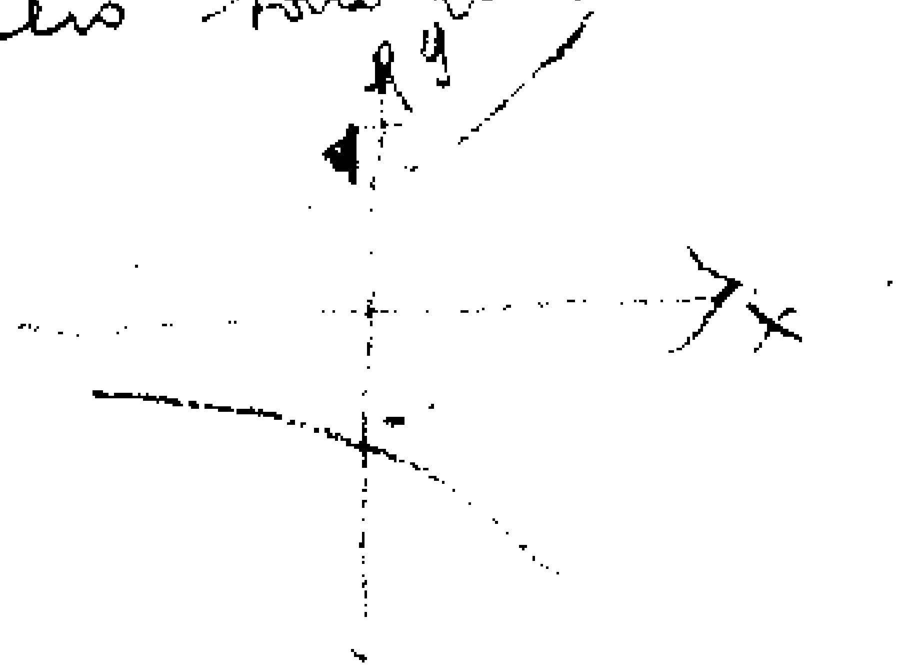
Sono molteplici le incongruenze che sorgono da questo problema. Il primo è la convenzione dei numeri negativi, di cui si è già esposto il principio critico ... (se da un vaso che contiene 5 ... caramelle ne tolgo 7, .. ne rimangono −2)

Un'altra incongruenza è <u>l'approssimazione</u> nel calcolo delle potenze. Un numero razionale deve potersi esprimere come somma di un intero e di un numero frazionario. Ma la frazione data non è lecito ridurla ai minimi termini perché cambiano i valori. $a^{2.2} = a^{2+\frac{1}{5}} = (a^2)\cdot(a^{\frac{1}{5}})$

se scriviamo $(a^2)(a^{\frac{2}{10}})$, si ha l'ambiguità se fare prima la radice decima e poi il quadrato o viceversa.

Questo porta a considerare i numeri espressi con numeratore 1 cioè le frazioni continue.

Considerando $y = (-a)^x$ si ha l'apparenza di due curve esponenziali simmetriche, che però sono discontinue



Le Frazioni Continue

Ogni numero reale non intero, sarà intermedio a due numeri interi. Se α è tale numero, avremo: $(a_0) < \alpha < (a_0+1)$; ove "a_0" è il massimo intero contenuto in α.

Possiamo esprimere: $\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$

ove: $\alpha_1 > 1$, cioè: $\frac{1}{\alpha_1}$ rapresenta la parte decimale di α.

Ma anche α_1 avrà un massimo intero a_1, ed una parte decimale $\frac{1}{\alpha_2}$ cioè:

$$\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2}$$

sostituendo:

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}}$$

ripetendo il discorso per $\alpha_2 = a_2 + \frac{1}{\alpha_3}$ ... ecc.

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\dots}}}}$$

si verificano due casi:

1) Se <u>α è razionale</u> la <u>frazione continua è limitata</u>

2) Se <u>α è irrazionale o trascendente</u> <u>la frazione continua è illimitata</u>

Facciamo alcuni esempi:

Si vuol sviluppare in frazione continua la frazione: $\frac{172}{97}$ (numero razionale). Utilizzando i successi resti della divisione si ha:

$$\frac{172}{97} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{97}{172-97}} = 1 + \cfrac{1}{97/75} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{75/22}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{22/9}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{9/4}}}} =$$

$$\boxed{\frac{172}{97} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}}}}$$

numero espresso in frazione continua.

Se esprimiamo $\frac{172}{97}$ in numero decimale, troveremo:

$$\frac{172}{97} = 1,\overline{7731958762886597938144329896907216494845360824742}$$
$$\overline{2680412371134020618556701030927835051546391752}5\ldots$$

numero periodico, ove le cifre sopralineate indicano il periodo composto di 97 cifre.

Se trasformiamo in decimale il primo passaggio dello sviluppo in frazione continua si ha: $\frac{172}{97} = 1 + \frac{1}{1,29333\overline{3}}$ ove è periodica solo la cifra 3.

Data una frazione continua limitata è facile risalire alla frazione del numero razionale, basta iniziare dal basso: $\frac{1}{2+\frac{1}{4}} = \frac{4}{9}$

$\frac{1}{2+\frac{4}{9}} = \frac{9}{22}$; $\frac{1}{3 + 9/22} = \frac{22}{75}$; $\frac{1}{1 + 22/75} = \frac{75}{97}$; $1 + \frac{75}{97} = \frac{172}{97}$.

Quindi un numero razionale darà luogo ad una frazione continua limitata.

$$\frac{m}{n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots a_K}}}$$

ove: $a_0, a_1, a_2 \dots a_K$ sono una successione limitata di numeri interi.

Se α è un numero irrazionale lo sviluppo in frazione continua è illimitato

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \alpha_K}}}$$

ove α_K non è intero anche al limite $K \to \infty$.

cioè: $\alpha_K = a_K + \frac{1}{\alpha_{K+1}}$ ... e così via.

Sviluppiamo in frazione continua $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ è un numero irrazionale compreso fra 1 e 2

cioè: $1 < \sqrt{2} < 2$ ed anche: $a_0 = 1$, $a_1 = 2$

Se la parte intera di $\sqrt{2} = 1$, la parte decimale di $\sqrt{2}$ sarà: $(\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$; perciò il primo passaggio sarà:

$$\boxed{\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}}$$

ma sostituendo questa espressione al denominatore:

ottenimo:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+1} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}$$

si nota che la $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_K = (\sqrt{2}+1)$ e che $a_0 = 1$, mentre: $a_1 = a_2 = \dots a_K = 2$.

Infatti basta ripetere la sostituzione: $\sqrt{2} = \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)$.

Perciò:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{(\sqrt{2}+1)}}}}$$

Evidente che <u>la frazione continua di $\sqrt{2}$ è illimitata</u> e che il valore sarà tanto più approssimato quanti più termini di sviluppo si considera.

Supponiamo di considerare così tanti termini di sviluppo che sia irrilevante per l'approssimazione considerare l'ultimo $\frac{1}{\sqrt{2}+1} \sim \frac{1}{2}$, avremo per i decimali di $\sqrt{2}$ cioè $(\sqrt{2}-1) < \frac{1}{2}$ $(0,5)$ (eccesso)

$\frac{1}{2+\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} = 0,4$ (difetto) ; $\frac{1}{2+\frac{2}{5}} = \frac{5}{12} = 0,416\bar{6}$ (eccesso)

$\frac{1}{2+\frac{5}{12}} = \frac{12}{29} = 0,413793103..$ (difetto) $\frac{1}{2+\frac{12}{29}} = \frac{29}{70} = 0,4142857..$ (eccesso)

$\frac{1}{2+\frac{29}{70}} = \frac{70}{169} = 0,4142012$ a questo punto possiamo approssimare: $\sqrt{2} = 1,4142\dots$ ma potremmo continuare per dare un numero maggiore di cifre decimali.

Nell'esempio di $\sqrt{2}$ si nota che approssimando per eccesso, (o per difetto) il termine: α_K (Kappesimo) nel risalire dallo sviluppo i termini successivi sono via, via sempre più precisi ed alternano l'approssimazione per difetto all'approssimazione per eccesso, cioè costituiscono una successione convergente composta da due classi contigue i cui termini sono rispettivamente i termini di indice pari ed i termini di indice dispari della successione stessa; ove l'elemento separatore è $(\sqrt{2}-1)$.

$a_1 = 0,5$ $\quad a_2 = 0,4$

$a_3 = 0,41\overline{6}$ $\quad a_4 = 0,41379..$

$a_5 = 0,4142857$ $\quad a_6 = 0,4142012$

(Le due classi contigue che costituiscono la successione $\{a_i\}$)

$..(\sqrt{2}-1)..$

$0,4142135623 73 ....$

Questo procedimento è estendibile ad altre radici (numeri irrazionali), per esempio: $\sqrt{5}$.
Sappiamo che $2^2 = 4$ e che $3^2 = 9$ perciò

$2 < \sqrt{5} < 3$; la parte decimale di $\sqrt{5}$ cioè: $(\sqrt{5}-2) = \frac{1}{(\sqrt{5}+2)}$ perciò:

$$\boxed{\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{\sqrt{5}+2}}$$

relazione fondamentale per l'iterazione delle sostituzioni.

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{\left(2 + \cfrac{1}{\sqrt{5}+2}\right) + 2}$$

$$\boxed{\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots(\sqrt{5}+2)}}}}}$$

Se arrotondiamo a 4 l'ultimo $(\sqrt{5}+2)$ si ha che la parte decimale di $\sqrt{5}$ $(\sqrt{5}-2)$ è data da:

$a_1 = \frac{1}{4} = 0,25$ $\qquad$ $a_2 = \frac{4}{17} = 0,23529$

$a_3 = \frac{17}{72} = 0,236111$ $\qquad$ $a_4 = \frac{72}{305} = 0,23606574$

$a_5 = \frac{305}{1292} = 0,236068112$ $\qquad$ $a_6 = \frac{1292}{5473} = 0,2360679970$

$$(\sqrt{5}-2) = 0,236067977\ldots$$

Si noti che l'espressione:

$$\text{numero} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots a_m}}}}$$

Permette la determinazione del numero quando si conosca la legge della sequenza $a_0, a_1 \ldots a_m \ldots$ Se la sequenza (che è una successione) è limitata si ha un numero razionale, se illimitata si ha un numero irrazionale o trascendente.

Indichiamo alcune sequenze.

$\sqrt{2} = [1; 2, 2, \bar{2}, \ldots]$ ripete $\bar{2}$

$\sqrt{3} = [1; 1, 2, \overline{1, 2}, \ldots]$ ripete $\overline{1, 2}$,

$\sqrt{5} = [2; 4, 4, \bar{4} \ldots]$ ripete $\bar{4}$

$e = [2; 1, \underline{2}, 1, 1, \underline{4}, 1, 1, \underline{6}, 1, \ldots] = [2; 1, 2\lambda, 1]$ (con $\lambda = 1, 2, 3 \ldots$)

Per esempio volendo risalire ad un valore approssimato di e conoscendo lo sviluppo in frazione continua:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \ldots}}}}}}}}$$

Ponendo $= 1$ l'ultimo di considerato si ha (limitiamoci ai valori sopra indicati): $6 + 1 = 7$; $1 + \frac{1}{7} = \frac{8}{7}$; $1 + \frac{7}{8} = \frac{15}{8}$

$4 + \frac{8}{15} = \frac{68}{15}$; $1 + \frac{15}{68} = \frac{83}{68}$; $1 + \frac{68}{83} = \frac{151}{83}$; $2 + \frac{83}{151} = \frac{385}{151}$

$1 + \frac{151}{385} = \frac{536}{385}$; $e \cong 2 + \frac{385}{536} \cong 2,71828\underline{3582}$

(approssimato in eccesso) $e = 2,718281828459045 \ldots$

Per il calcolo delle radici quadrate suggeriamo un altro procedimento che chiameremo: <u>"Regola delle frazioni successive"</u>. Esso da luogo <u>a successioni convergenti</u> i cui termini sono delle frazioni.

Regola delle frazioni successive

Sappiamo che una radice quadrata di un numero che non sia quadrato perfetto da luogo ad un <u>numero irrazionale</u> cioè ad un numero non esprimibile mediante una frazione. Ma è evidente che un numero limitato di cifre decimali può essere espresso da una frazione.

Consideriamo la successione: $\left\{\frac{N_i}{D_i}\right\}$

N = numeratore ; D = denominatore.

La legge che lega due termini consecutivi della successione sia:

$$\frac{N_{(n+1)}}{D_{(n+1)}} = \frac{\lambda \cdot D_n + N_n}{D_n + N_n}$$

Una tale <u>successione è convergente</u> e <u>converge a $\sqrt{\lambda}$</u> ove i singoli termini si alternano con approssimazione per difetto e per eccesso via via sempre più precisa al crescere dell' indice "i".

Diamo qualche esempio:

$$\sqrt{2} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{N_n}{D_n} = \frac{2D_{n-1} + N_{n-1}}{D_{n-1} + N_{n-1}} \right) = 1,4142\,13562373095048\,8016887 \ldots$$

$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \frac{239}{169},\ \frac{577}{408},\ \frac{1393}{985}, \ldots$$

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ a_i$$

$$1,\ 1,5,\ 1,4,\ 1,41\underline{66},\ 1,41\underline{379}..,\ 1,414\underline{285}..,\ 1,4142\underline{0}..,\ 1,41421\underline{5}..,\ 1,414213\underline{1979}..$$

Per $i = 30$ si hanno esatte 24 cifre. $a_{30} = \frac{367296043199}{259717522849}$

Data la natura della successione, al crescere di λ ben presto N_i e D_i divengono numeri molto grandi e la precisione è minore a parità di indice i per $\lambda = 7$ ove $\sqrt{7} = 2,645751311$

a_1, a_2, a_3, ... a_{19} . . . . a_i

$\frac{1}{1}$, $\frac{8}{2}$, $\frac{22}{10}$, $\frac{92}{32}$, ... $\frac{86042074112}{32520839168}$ . . .

1, 4, 2,2, 2,875, ... 2,645751 964379322

ove per avere 6 cifre decimali occorre arrivare ad a_{19}.

e solo ad a_{23} sarà esatta anche la 7ª cifra decimale che si stabilizza solo ad a_{25} ad a_{30} si hanno 10 cifre significative esatte (per $\lambda = 2$ erano 24 cifre esatte ad a_{30})

Quindi questa regola vale per numeri qualsiasi, ma è utile solo per numeri piccoli.

Se i numeri N_i e D_i non sono interi perché λ non è intero, si hanno vari casi. Consideriamo λ razionale, cioè: $\lambda = \frac{m}{n}$ > $\sqrt{\lambda} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$

$$\frac{N_{n+1}}{D_{n+1}} = \frac{(m/n)D + N_n}{D_n + N_n}$$

sia: $\lambda = \frac{1}{2}$ avremo: $\frac{1}{1}$, $\frac{1,5}{2}$, $\frac{2,5}{3,5}$, $\frac{4,25}{6}$, $\frac{7,25}{10,25}$, $\frac{12,375}{17,50}$, . . . = 1, 0,75, 0,7142857 1, 0,708$\overline{3}$, 0,70731707, 0,70714286, . . . $\frac{21,125}{29,875}$ = 0,70711297 ; $\frac{36,0625}{51}$ = 0,70710784

($\sqrt{\frac{1}{2}}$ = 0,70710678) ; $\frac{61,5625}{87,0625}$ = 0,70710696 ;

Si noti l'oscillazione dei valori della successione intorno a $\frac{1}{\sqrt{2}}$

La convergenza delle successioni

Dicesi convergente una successione quando il termine $\{a_n\}$ con $n \to \infty$, il valore di $a_n = a_\infty = L$ tende ad un valore finito L.

Definiamo la successione: $a_0 = 0$; $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$.
(Ordinariamente il I° termine di una successione si indica con a_1 ma essendo nullo possiamo dire $a_0 = 0$)
Scrivendo i primi termini della successione si ha: 0, $\sqrt{6}$, $\sqrt{8,44949}$, $\sqrt{8,90680}$, ... $a_\infty = \sqrt{9}$

0, $2,44949$, $2,90680$, $2,98443$, ... $a_\infty = 3$

Si nota che la successione è crescente, ma si aggiunge a 6 un valore sempre < 3 per cui solo al limite $n \to \infty$ si ha $a_\infty = 3$. I pochi elementi calcolati evidenziano che la successione converge assai rapidamente ed è facile trovare un indice i tale che a_i differisca dal limite di un σ minore di un ε arbitrariamente piccolo.

La successione $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}$ converge a zero anche la $1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \cdots \frac{1}{n!}$ converge a zero ed a maggior ragione.

La successione: $a_n = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ converge ad "e".

Abbiamo visto la convergenza delle successioni per il calcolo delle radici quadrate, e delle ridotte dello sviluppo in frazione continua di numeri irrazionali. Possiamo trovare molte successioni convergenti; si pensi ai limiti, per esempio:

$$\lim_{n \to \infty} \left(a_n = \left\{ \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n} \right\} \right) = 1$$

diventa:

$a_1 = 0,84147..;\ a_2 = 0,95885..\ ;\ a_3 = 0,98158...;\ .....\ \left\{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{1/n}\right\}$

E' importante la convergenza delle successioni, perché, detta: "<u>serie</u>" la somma dei termini di una successione; e detta: "<u>ridotta K</u>" di una serie la somma dei primi K termini; avremo che, <u>tutte le ridotte di un serie, con K variabile ordinatamente da 1 ad n, formano una successione</u>, per cui la serie sarà convergente se, e solo se, lo sarà la successione delle sue ridotte.

Il criterio generale di convergenza di una successione può esprimersi:

<u>Condizione necessaria e sufficiente perché una successione $\{a_n\}$ converga ad A è che scelto un numero positivo σ arbitrario, si possa determinare un corrispondente indice n_0 tale, che per tutti i valori di $n > n_0$ si abbia:</u>

$$\boxed{|A - a_n| < \sigma}$$

Questa condizione esprime che da un certo in=dice n_0 in poi, i valori degli elementi della suc=cessioni sono interni all'intervallo: $(A-\sigma) < a_n < (A+\sigma)$
Ciò si riferisce a successioni di classi contigue, ma, esisto=no anche successioni monotone per le quali i valori di a_n cadono nell'intervallo $(A-\sigma) < a_n < A$ se la successione è crescente; oppure $A < a_n < A+\sigma$ se la successione è decrescente. La successione $\{A-a_n\}$ è convergente a zero. Una successione si dice <u>oscillante</u> quando i termini si alterna=no (per segno o per valore diverso e <u>rimane diverso al limite</u>). Mentre una successione costituita dagli elementi alter=nati di classi contigue, per cui la successione è convergente all'elemento separatore delle classi e alternativamente si avvicina al limite una vol=ta con valori per difetto, una volta con valori per ecces=so. Una successione si dice <u>regolare</u> se con=verge, oppure diverge a $+\infty$ oppure a $-\infty$.
Una successione non regolare si dice <u>oscillante</u>
Le successioni oscillanti non divergenti si dicono <u>indeterminate</u>. Le successioni <u>monotone</u>, sono <u>regolari</u>. La successione $a, \frac{1}{a}, a^2, \frac{1}{a^2} \dots a^n, \frac{1}{a^n}$ è oscillante e indeterminata

La convergenza delle successioni è connessa al concetto di limite. La successione:

$$1^{\mu},\ 2^{\mu},\ \dots\dots \{n^{\mu}\}$$

per $\mu > 0$ $\quad \lim_{n \to \infty} (n^{\mu}) = +\infty$ (divergente)

" $\mu = 0$ $\quad \lim_{n \to \infty} (n^{\mu}) = 1$ (costante)

" $\mu < 0$ $\quad \lim_{n \to \infty} (n^{\mu}) = 0$ (convergente)

I termini di una progressione geometrica cioè la successione:

$$q^1,\ q^2,\ \dots \{q^n\}$$

(per seguire la regola che n indica il termine ennesimo, abbiamo omesso: $q^0 = 1$)

$$\lim_{n \to \infty} \{q^n\} \begin{cases} (q>1) = +\infty & \text{(divergente)} \\ (q=1) = +1 & \text{(costante)} \\ (q<1) = 0 & \text{(convergente)} \\ (q=-1) = \langle \pm 1 & \text{(oscillante indeterminata)} \\ (q<(-1)) = \pm\infty & \text{(oscillante divergente)} \end{cases}$$

la successione: $a,\ \frac{1}{a},\ a^2,\ \frac{1}{a^2}\ \dots\ a^n,\ \frac{1}{a^n}$ avrebbe come termine generico:

$$\left\{ \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\left(1-(-1)^n\right) \right)^{\left(\frac{1}{4} - \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right)(-1)^n \right)} \right\}$$

per $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ si ha: $1,\ 1,\ 4,\ \frac{1}{4},\ 27,\ \frac{1}{27}$.

Consideriamo le "ridotte" della serie:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}$$

(detta serie armonica) ed indichiamo con H i termini della successione costituita da tali ridotte:

avremo: $H_1, H_2, H_3, \ldots\ldots H_K, \ldots\ldots H_n$. ove:

$$H_K = \sum_{i=1}^{i=K} \left(\frac{1}{i}\right)$$

e sia: $(m>1)$

$$\underbrace{\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{m}\right)}_{H_m} + \left(+\underbrace{\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \cdots\cdots + \frac{1}{2m}}_{H_{2m} - H_m}\right)}_{H_{2m}}$$

Il termine: $\frac{1}{2m}$ è minore dei termini precedenti, quindi la somma di m volte $\frac{1}{2m}$, cioè: $\left(\overset{1}{\frac{1}{2m}} + \overset{2}{\frac{1}{2m}} + \overset{3}{\frac{1}{2m}} + \cdots\cdots \overset{m}{\frac{1}{2m}}\right) =$

$= \cancel{m} \cdot \frac{1}{2\cancel{m}} = \frac{1}{2}$ confrontata con $(H_{2m} - H_m)$ porta

$$(H_{2m} - H_m) > \frac{1}{2}$$

ed anche: $\boxed{H_{2m} > \left(H_m + \frac{1}{2}\right)}$

Ciò vale indipendente da m, e via via raddoppiando i gruppi successivi avremo:

$$H_{2^2m} > \left(H_{2m} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$H_{2^Km} > \left(H_{2^{K-1}m} + \frac{1}{2}\right)$$

Se via via, sostituiamo sommando gli $\left(\frac{1}{2}\right)$, (ne abbiamo 2K)

$\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)(\cancel{2}K)$, perciò: $\boxed{H_{2^Km} > (H_m + K)}$

ove l'indice "n" è posto in funzione di K ma anche :

$$H_{2^{m}}^{*} > K$$

quindi:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} H_n = +\infty}$$

Questa importante dimostrazione della divergenza della successione delle ridotte della serie armonica, dimostra la divergenza della serie stessa. $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$.
(vedere in seguito serie armonica).

Ricordiamo che: la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente dei limiti (allo stesso limite) equivale alla somma, la differenza, il prodotto, il quoziente delle espressioni che hanno generato i singoli limiti.
Perciò se le due successioni convergenti $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ convergono rispettivamente ad A e B avremo:

$$\lim_{n \to \infty} \{a_n \pm b_n\} = A \pm B \qquad \text{(convergente)}$$

$$\lim_{n \to \infty} \{(a_n) \cdot (b_n)\} = (A) \cdot (B) \qquad \text{(convergente)}$$

$$\lim_{n \to \infty} \{(a_n) / (b_n)\} = (A) / (B) \qquad \begin{cases} \text{(convergente per } B \neq 0) \\ \text{(divergente per } B = 0) \end{cases}$$

$$\lim_{n \to \infty} \{a_n^K\} = A^K \qquad \text{(convergente per } K \text{ finito)}$$
$(\text{per } K < 0, A \neq 0)$

Il numero e

La successione $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ di cui abbiamo già calcolato i primi termini, (vol I capitolo Logaritmi). e_1, e_2, e_3 ...... $e_n = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$
Se applicassimo direttamente il passaggio al limite avremmo: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\infty}\right)^\infty = (1+0)^\infty$ ... forma indeterminata.

Considerando invece la successione:

$$f_1,\ f_2,\ f_3,\ \ldots f_n,\ \ldots \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$$

abbiamo che: $\dfrac{f_n}{f_{n-1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \Big/ \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n =$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \Big/ \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right) \Big/ \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n$$

$$\boxed{=\left(1+\frac{1}{n}\right) \Big/ \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n}$$

essendo n intero in genere $n>1$; $0<\frac{1}{n^2-1}<1$

quindi: $\boxed{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+n\left(\frac{1}{n^2-1}\right)}$ (disuguaglianza già dimostrata)

ma: $\dfrac{n}{n^2-1} > \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$ per cui

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$\left(1+\frac{1}{n}\right) \Big/ \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n < 1$ cioè: $f_n / f_{n-1} < 1$ $\boxed{f_n < f_{n-1}}$

Cioè la successione $\{f_n\}$ è decrescente

Poiché:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

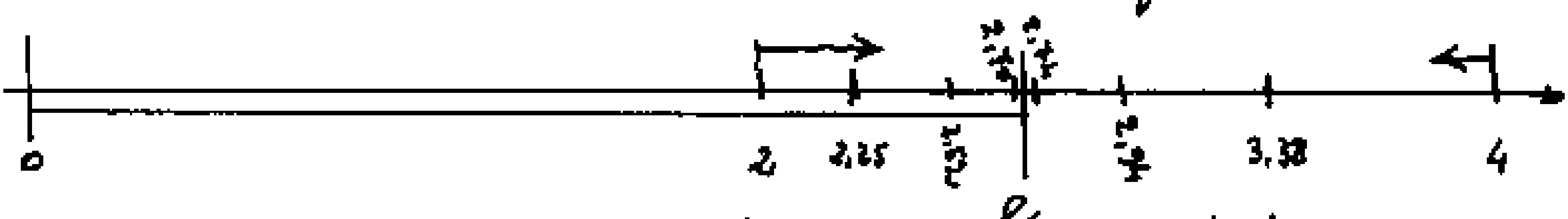
e poiché la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ è crescente e, come dimostrato, la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è decrescente, le due successioni $\{f_n\}$ ed $\{e_n\}$ costituiscono due classi contigue aventi "e" come elemento separatore. $\{e_n\}$ si approssima per difetto, $\{f_n\}$ si approssima per eccesso:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$
1	$2 < e < 4$
2	$2{,}25 < e < 3{,}38$
3	$2{,}37 < e < 3{,}16$
4	$2{,}44 < e < 3{,}05$
5	$2{,}49 < e < 2{,}99$
6	$2{,}52 < e < 2{,}94$
8	$2{,}57 < e < 2{,}89$
16	$2{,}64 < e < 2{,}80$
64	$2{,}70 < e < 2{,}74$
128	$2{,}7077 < e < 2{,}7289$
1000	$2{,}7169 < e < 2{,}7196$

Con ciò resta dimostrata l'esistenza di "e" come elemento separatore di classi contigue.

Data l'importanza di "e", (che gli ordinari metodi di passaggio al limite lasciavano indeterminato) si evidenzia l'importanza delle successioni e della loro convergenza.

Che la grandezza "e" possa essere rappresentata con un <u>segmento finito</u>, avendo arbitrariamente fissato un segmento unitario, si rende evidente se pensiamo di riportare "e" su un'asse reale utilizzando le due classi contigue che lo definiscono:



Mentre "<u>numericamente</u>" è impossibile scrivere il valore <u>esatto di "e"</u>, in quanto numero <u>trascendente</u> non è esprimibile né con una frazione avente numeratore e denominatore finiti; né con radici o esponenti frazionari di radicali o base finite. <u>Esiste un segmento che dà il valore esatto di "e".</u> (La trascendenza di e fu dimostrata da Hermite)

Le Serie

Abbiamo già accennato alle serie, ed alla convergenza delle serie (V. anche Vol. I). Vogliamo ora dare dei criteri per decidere se una serie è convergente, divergente, oscillante, indeterminata.

Dicesi: "Serie" la somma dei termini di una successione.

Se la successione $\{a_n\}$ con n tendente all'infinito è crescente, la corrispondente serie è divergente; quindi affinché la serie sia convergente i termini debbono decrescere. Questa condizione è necessaria, ma non è sufficiente.

Un criterio per decidere se una serie converge, o diverge è il confronto con una serie di cui è nota la convergenza o meno. Quindi:

– Se la serie in esame è maggiorante di una serie divergente, (cioè se ordinatamente i termini della serie sono maggiori di quelli della serie di confronto) la serie è divergente.

– Se la serie in esame è minorante di una serie convergente, (cioè se ordinatamente i termini della serie sono minori di quelli della serie di confronto) la serie è convergente

La serie della progressione geometrica

Abbiamo già trattato la progressione geometrica (cfr. Vol I) definita dal rapporto costante di due termini consecutivi, detto ragione "q".

$$\boxed{q = a_{k+1}/a_k}$$

Se il primo termine è unitario ($a_1 = 1$), la serie della progressione geometrica può scriversi:

$$\boxed{1 + q + q^2 + q^3 + \cdots\cdots + q^{n-1}}$$

ove "n" è l'indice dei termini della successione.

Abbiamo già visto (Vol I), che la somma dei primi "n" termini di una progressione geometrica è espressa da:

$$\boxed{S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}}$$

(che rappresenta le ridotte della serie)

Qualora il primo termine sia diverso da uno $a_1 \neq 1$ vale per le ridotte la formula più generale:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_n \cdot q - a_1)}{(q - 1)}}$$

che può ridursi:

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Se facciamo tendere "n" all'infinito, si hanno i seguenti casi:

$\boxed{+\infty > q > 1}$ (Successione crescente) La serie è <u>divergente</u> ($q^{n} = \infty$) (ed ha per somma $S_\infty = \infty$)

$\boxed{q = +1}$ (Successione costante) La serie è <u>divergente</u> ($S_\infty = \infty$) (tutti i termini $= a_1$; ($S_n = n\,a_1$))

$\boxed{1 > q > 0}$ (Successione decrescente) La serie è <u>convergente</u> ed ha per somma $\boxed{S_\infty = \dfrac{a_1}{(1-q)}}$

$\boxed{q = 0}$ (Successione nulla dopo a_1) La serie è <u>inesistente</u>, si riduce al primo termine $a_1 = S_n = S_\infty$.

$\boxed{0 > q > -1}$ Questa serie può dividersi in due serie di ragione (q^2); ($1 > q^2 > 0$); quella a termini positivi con primo termine "a_1"; quella a termini negativi con primo termine: $a_1 \cdot q$. Per cui

$$S_\infty = a_1 \left[\left(\frac{1}{1-q^2}\right) - \left(\frac{|q|}{1-q^2}\right)\right] = a_1 \frac{1-|q|}{1-q^2} = a_1 \frac{1}{1+|q|}$$

. Abbiamo posto il valore assoluto a q perché abbiamo evidenziato il segno ($-$). Col suo segno: $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-q}$

cioè possiamo dire (in generale)

$\boxed{-1 < q < 1}$ La serie è convergente ed ha per somma $\boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1-q}}$

facciamo degli esempi:

$\left(q = +\frac{1}{2}\right)$: $a_1\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \frac{1}{2^{n-1}}\right\}$; $\boxed{S_\infty = 2a_1}$

$\left(q = -\frac{1}{2}\right)$: $a_1\left\{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right\}$; $\boxed{S_\infty = \frac{2a_1}{3}}$

Si noti che le successioni dei termini delle ridotte, nei due casi sono: per $\left(q = +\frac{1}{2}\right)$ la successione è convergente ed è crescente monotona. Mentre per $\left(q = -\frac{1}{2}\right)$ la successione è convergente, oscillante per difetto e per eccesso al valore limite.

$\boxed{q = -1}$ (Successione a segni alternati ove $|a_n| = a_1 = \text{cost.}$) La serie è oscillante e indeterminata fra i due valori di $S_n = \left\langle \begin{matrix} 0 \\ a_1 \end{matrix} \right.$; S_n
La successione delle ridotte è: $a_1, 0, a_1, 0, \dots$

$\boxed{-1 > q > -\infty}$ La serie è indeterminata. Dividendola nelle due serie di ragione q^2 si ha che la prima diverge a $+\infty$, la seconda diverge a $-\infty$. La successione delle ridotte è oscillante indeterminata fra $+\infty$ e $-\infty$.

Questa serie è importante perché ha un preciso campo di convergenza in funzione di "q", che possiamo far variare per valori, prossimi quanto vogliamo, all'unità. Per esempio per $a_1 = 1$ e la ragione $q = \frac{9999}{10000}$ si ha: $S_\infty = \frac{1}{1 - \frac{9999}{10000}} = 10.000$.
mentre per $q = 1$ questa serie è già divergente.
Si noti che:

$$S_\infty - q S_\infty = 1 \quad ; \quad q = \frac{S_\infty - 1}{S_\infty} = 1 - \frac{1}{S_\infty}$$

$$\boxed{q = 1 - \frac{1}{S_\infty}}$$

questa formula consente di determinare q per ottenere che la somma degli infiniti termini della progressione geometrica avente $a_1 = 1$ sia S_∞. cioè il valore della serie geometrica.

Tal volta è opportuno considerare "q" nella forma: $q = \frac{1}{(1+\varepsilon)}$, con $\varepsilon > 0$ e piccolo a piacere.

In questo caso $S_\infty = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)} =$

$$\boxed{S_\infty = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \quad ; \quad \boxed{S_\infty = 1 + \frac{1}{\varepsilon}}$$

mentre: $S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{(1+\varepsilon)^n - 1}{(\varepsilon)} \frac{(1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^n} =$

$$\boxed{S_n = \left(1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}\right)\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

La serie armonica

$$\boxed{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} +}$$

è divergente ed ha quindi: $S_\infty = \infty$

È una serie che diverge assai lentamente, incrementa di circa 2,3 ogni $10 \cdot n$ termini, cioè: posto $n = 10^k$ dimostreremo che: $\lim_{n\to\infty} \left(S_{10^{k+1}} - S_{10^k} \right) = \ln|10|$ e $\ln|10| = 2{,}302585093\ldots$

Riportiamo alcune ridotte:

$S_{10} = 2{,}928968$

$S_{100} = 5{,}187377$

$S_{1000} = 7{,}48547$

$S_{10.000} = 9{,}78760$

$S_{100.000} = 12{,}09015$

$S_{1000.000} = 14{,}39272$

(Per il calcolo delle ridotte e successive dimostrazioni vedi: Serie della costante di Eulero-Mascheroni)

È molto importante trovare una serie che diverga il più lentamente possibile, perché, può fare da paragone per definire divergenti le serie maggioranti ad essa.

Perciò la serie armonica è un'ottima serie di confronto: Serie maggioranti ad essa sono divergenti

Confrontiamo la serie armonica con la serie geo=metrica. Quest'ultima per $q=1$ è divergente, ed è maggiorante la serie armonica. Poiché per $|q|<1$ la serie geometrica è convergente $\left(S_\infty = \frac{1}{1-q}\right)$, essa necessariamente deve essere minorante la serie armonica. Poiché possiamo far variare q con continui=tà, cerchiamo un $q=(1-\varepsilon)$, vicinissimo ad 1, (con ε piccolo a piacere), anzi per agevolare il confronto poniamo: $\boxed{q=\frac{1}{(1+\varepsilon)}}$ avremo: $S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{(1+\varepsilon)}} =$

$$S_\infty = \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-1} = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} = \boxed{S_\infty = 1+\frac{1}{\varepsilon}}$$

Questa espressione del valore della serie geometrica ci dice che l'inverso di ε è il valore della somma degli infiniti termini oltre il primo unitario.

Confrontiamo le due serie:

$$\boxed{\frac{1}{(1+\varepsilon)^{n-1}} = \frac{1}{n}}$$

$(1+\varepsilon)^{n-1} = n$; ed anche: $\boxed{(1+\varepsilon) = \sqrt[n-1]{n}}$ per esempio:

per $n = 10$ si ha: $\sqrt[9]{10} = (1+\varepsilon) = 1,29155...$

" $n = 1000$ " $\sqrt[999]{1000} = (1+\varepsilon) = 1,006939...$

" $n = 10000$ " $\sqrt[9999]{10.000} = (1+\varepsilon) = 1,000922...$

" $n = 100.000$ " $\sqrt[99999]{100.000} = (1+\varepsilon) = 1,000115...$

Quando q si avvicina ad 1 (ε piccolo), l'uguaglianza dei due termini delle due serie avviene per n sempre più grande. Cioè la serie geometrica, <u>inizialmente maggiorante</u> la serie armonica, finisce per uguagliare i termini e poi <u>diventa minorante</u>.

Per esempio per: $q = \frac{1}{1{,}001}$

Serie geometrica $1 + \frac{1}{1{,}001} + \frac{1}{1{,}002} + \cdots\cdots + \frac{1}{9916{,}\ldots}$

Serie armonica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{10.000}$

$$\begin{cases} n & = & 9124 & 9125 \\ \text{serie geometrica:} & & + \frac{1}{9121{,}97} & + \frac{1}{9131{,}09} + \cdots \\ \text{serie armonica:} & & + \frac{1}{9124} & + \frac{1}{9125} + \cdots \end{cases}$$

Il sorpasso avviene fra $n = 9124$ ed $n = 9125$ per il valore dei termini. Vediamo ora di confrontare l'accrescimento delle ridotte: Per la serie geometrica

$$S_n = \frac{1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}}{1 - \frac{1}{1+\varepsilon}} = \frac{(1+\varepsilon)^n - 1}{\varepsilon\,(1+\varepsilon)^{n-1}} = \frac{(1+\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon)^{n-1}}$$

$$S_n = \frac{1}{\varepsilon} + 1 - \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon)^{n-1}}$$

	Serie armonica	Serie geometrica
S_{10}	2,928968	9,955164
S_{100}	5,187377	95,212483
S_{1000}	7,48547	632,568620
S_{10000}	9,78760	1000,954327
$S_{100\,000}$	12,09015	1000,999999...
S_{∞}	∞	1001,=

Si nota come la serie armonica diverga lentissimamente, mentre la serie geometrica converge rapidamente, per S_{100000} differisce da S_∞ di $3,9146 \cdot (10)^{-44}$ cioè vi sono 43 cifre decimali di tutti 9. Il sorpasso per le ridotte dovrebbe avvenire per $n = (10^{4.34} \div 10^{4.35})$ e cresce al diminuire di ε. Entrambe le serie sono <u>decrescenti</u> (condizione necessaria, non sufficiente affinché le serie siano convergenti), ma <u>la serie armonica è divergente</u>, mentre <u>la serie geometrica è convergente</u>, in quanto ha <u>una velocità di decrescimento</u> maggiore di quella della serie armonica. Tale velocità è funzione di ε, (e non solo di ε, ma delle correlazioni che determinano la serie). La velocità di decrescimento <u>diventa zero</u> per $\varepsilon = 0$, e quindi, per $\varepsilon = 0$ <u>la serie geometrica è tutta maggiorante la serie armonica</u> <u>ed è divergente</u>, mentre per <u>ε comunque piccolo è convergente ed</u> $S_\infty = 1 + \frac{1}{\varepsilon}$ (valida anche per $\varepsilon = 0$). Solo quando $\varepsilon = 0$, $S_\infty = 1 + \frac{1}{0} = \infty$. Per ε piccolissimo $\simeq 0$ S_∞ = grandissimo, ma finito. Il sorpasso avviene per n enormemente grande, ma avviene. (abbiamo visto n dell'ordine di $10^{4.34} \div 10^{4.35}$ per $\varepsilon = 1/1000$). Inseguendo col pensiero il termine di sorpasso all'impiccolire di ε si ha la sensazione dell'immensità del campo numerico.

Se prendiamo i logaritmi naturali dell'uguaglianza: $(1+\varepsilon) = (n)^{\frac{1}{n-1}}$ si ha: $\ln(1+\varepsilon) = \frac{\ln|n|}{n-1} \to \varepsilon$

Al crescere di n, $\frac{\ln|n|}{n-1}$ si avvicina sempre più a quell'ε che verifica l'uguaglianza. $e^{\varepsilon} = (1+\varepsilon)$

$\varepsilon \ln|e| = \ln(1+\varepsilon) = \varepsilon$; $e = (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ posto: $\varepsilon = \frac{1}{n}$ l'uguaglianza è vera al $\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \lim_{\varepsilon \to 0}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$; per $n = 100.000$

$\varepsilon = 0,000115137$ $\frac{\ln 100000}{99999} = 0,000115130$ differenza: $0,000000007$

per $\underline{\varepsilon = 0}$ serie geom. $= 1 + 1 + \dots\dots + 1 + \dots = \infty$

serie arm. $= 1 + \frac{1}{2} + \dots\dots + \frac{1}{n} \dots + 0 = \infty$

per $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$ serie geom. $= 1 + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)} + \dots + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty-1}} + \frac{1}{e} = \left(1+\frac{1}{1/\infty}\right)$

quindi la serie geometrica sarebbe <u>maggiorante</u> la serie armonica. Mentre per $\varepsilon = 0$ la serie geometrica è costante, <u>per ε differenziale, limite tendente a zero</u> la serie geometrica è <u>decrescente</u>, ha per ultimo termine $\frac{1}{e}$ ed <u>è divergente</u>.

Se prendiamo un ε maggiore (K volte tanto) $\varepsilon = \frac{K}{\infty}$ l'ultimo termine della serie impiccolirebbe a $\frac{1}{e^K}$

Solo per $K \to \infty$ si avrebbe nullo l'ultimo termine (cioè uguale a quello della serie armonica), ma anche in questo caso la serie geometrica è maggiorante la serie armonica e perciò divergente.

Esiste un ε tale che dia il più grande dei numeri finiti che, essendo infinito, dà il termine di passaggio fra la convergenza e la divergenza della serie, ed è una grandezza differenziale.

Le ridotte ed il resto delle serie

Prima di procedere diamo alcune definizioni; Abbiamo definito: "ridotta di ordine n" la somma parziale dei primi n termini della serie e l'abbiamo indicata con S_n.

Definiamo "Resto di una serie" la somma parziale dei restanti termini da $(n+1)$ ad ∞. Indichiamo con R_n il resto della serie. $S_\infty = S_n + R_n$

$$\boxed{R_n = S_\infty - S_n}$$

ed anche: $$\boxed{S_n = S_\infty - R_n}$$

Se la serie è divergente: $R_n = \infty$.

Il resto della serie è molto importante perché se un numero trascendente è definito da una serie, limitandoci a considerare i primi n termini cioè la ridotta S_n, il valore del Resto R_n ci dà l'errore che si commette.

Per la serie geometrica: $S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$

possiamo scrivere:

$$S_n = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}$$

cioè: $$S_n = S_\infty - \frac{q^n}{1-q}$$

$$\boxed{R_n = \frac{q^n}{1-q}}$$

Criterio Generale di Convergenza delle serie

Consideriamo la somma parziale di p termini dopo la ridotta S_n, cioè: $\boxed{S_{n+p} - S_n < \sigma}$

L'espressione è la sintesi del teorema di Cauchy sulla convergenza delle serie.

D'altra parte:

$$S_\infty - S_n = R_n$$

$$\underline{S_\infty - S_{n+p} = R_{n+p}}$$

sottraendo: $(S_{n+p} - S_n) = (R_n - R_{n+p})$

e posto: $(R_n - R_{n+p}) = R_{n,p}$

cioè: $\boxed{R_{n,p} = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots\dots + a_{n+p}}$

rappresenta la somma di p termini dopo l'ennesimo.

Possiamo ora enunciare il teorema: (Cauchy)

"Condizione necessaria e sufficiente affinché una serie: $a_1 + a_2 + \dots + a_n +$, sia convergente è che, scelto un numero σ positivo arbitrario, si possa determinare un n_0 tale che per ogni $n > n_0$, la somma di un numero qualunque di p termini consecutivi dopo l'ennesimo, (cioè $R_{n,p}$), sia in valore assoluto minore di σ"

$$\boxed{|R_{n,p}| < \sigma}$$

Per qualsiasi $n > n_0$ e per qualsiasi intero $p > 0$.

Serie assolutamente convergenti

Dicesi assolutamente convergente una serie che converge per i valori assoluti dei suoi termini.

Una serie assolutamente convergente è anche convergente. Non è detto però che una serie convergente lo sia anche assolutamente.

Una serie convergente a termini tutti positivi è assolutamente convergente $\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \right)$

Identità di Brunacci-Abel

Considerіamo: una serie convergente:

$$\boxed{a_1 + a_2 + a_3 + \quad \dots + a_n + \dots}$$

ed una successione monotona e limitata, cioè convergente al limite L.

$$\boxed{\alpha_1 , \ \alpha_2 , \ \alpha_3 , \ \dots , \alpha_n ,}$$

ove: $(\alpha_\infty = L)$

Eseguendo i prodotti termine a termine fra termini con lo stesso indice, si ottiene la serie:

$$\boxed{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \dots + \alpha_n a_n + \dots}$$

anch'essa convergente.

Infatti:

Per la serie : $a_1 + a_2 + \dots + a_{K-1} + a_K + \dots + a_n + \cdots$

si ha : $\boxed{R_{K-1} - R_K = a_K}$

Per la serie:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n + \dots + \alpha_{n+p} a_{n+p} + \cdots$$

detto: $R'_{n,p} = \alpha_{n+1} a_{n+1} + \alpha_{n+2} a_{n+2} + \cdots \alpha_{n+p} a_{n+p}$

cioè: $$R'_{n,p} = \sum_{K=n+1}^{K=n+p} \alpha_K a_K =$$

sostituendo a_K:

$$= R'_{n,p} = \sum_{K=n+1}^{K=n+p} \alpha_K (R_{K-1} - R_K) =$$

$$R'_{n,p} = \alpha_{n+1}\overbrace{(R_n - R_{n+1})}^{a_{n+1}} + \alpha_{n+2}\overbrace{(R_{n+1} - R_{n+2})}^{a_{n+2}} + \dots + \alpha_{n+p}\overbrace{(R_{n+p-1} - R_{n+p})}^{a_{n+p}} =$$

$$= \underline{\alpha_{n+1} R_n} + R_{n+1}(\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1}) + R_{n+2}(\alpha_{n+3} - \alpha_{n+2}) + \dots + R_{n+p}(\alpha_{n+p+1} - \alpha_{n+p}) - \underline{\alpha_{n+p+1} R_{n+p}} =$$

cioè:

$$\boxed{R'_{n,p} = \sum_{K=n+1}^{K=n+p} R_K (\alpha_{K+1} - \alpha_K) + \alpha_{n+1} R_n - \alpha_{n+p+1} R_{n+p}}$$

È questa <u>l'identità di Brunacci-Abel</u>

Ricordiamo che ogni: $\boxed{|\alpha_n| < L}$, vogliamo applicare il teorema di Cauchy. $\boxed{|R'_{n,p}| < \sigma}$

A tal fine consideriamo <u>non decrescente</u> la successione α_n, cioè: $\boxed{\alpha_{K+1} - \alpha_K \geq 0}$ e ricerchiamo un indice n_0 tale che per ogni $n > n_0$ si abbia:

$$\boxed{|R_n| < \frac{\sigma}{4L}}$$

(Vedremo nella dimostrazione perché abbiamo diviso σ per $4L$.)

$$|R'_{n,p}| \leq \sum_{K=n+1}^{K=n+p} |R_K| \cdot |\alpha_{K+1} - \alpha_K| + |\alpha_{n+1}| \cdot |R_n| + |\alpha_{n+p+1}| \cdot |R_{n+p}|$$

Nell'identità di Brunacci-Abel abbiamo aggiunto anziché tolto l'ultimo termine ciò giustifica la disuguaglianza.

Tenendo presente che $|R_n|$ diminuisce al crescere di n e che $\frac{\sigma}{4L} > |R_n|$, a maggior ragione:

$$|R'_{n,p}| \leq \frac{\sigma}{4L} \sum_{K=n+1}^{K=n+p} (\alpha_{K+1} - \alpha_K) + |\alpha_{n+1}| \frac{\sigma}{4L} + |\alpha_{n+p+1}| \frac{\sigma}{4L}$$

Poiché la somma delle differenze equivale alla differenza complessiva cioè:

$$\sum_{K=n+1}^{K=n+p} (\alpha_{K+1} - \alpha_K) = \left(\alpha_{n+p+1} - \alpha_{n+1}\right) \leq |\alpha_{n+p+1}| + |\alpha_{n+1}| < 2L$$

Poiché, al solito, abbiamo aggiunto anziché togliere uno e poiché $\alpha_\infty = L$ è evidente che la somma di due α minori di α_∞, sarà minore di due L. Sostituendo, a maggior ragione avremo:

$$|R'_{n,p}| \leq \frac{\sigma}{4L} 2L + L\frac{\sigma}{4L} + L\frac{\sigma}{4L}$$

$$|R'_{n,p}| \leq \cancel{4L}\left(\frac{\sigma}{\cancel{4L}}\right)$$

$$\boxed{|R'_{n,p}| \leq \sigma}$$

Che conferma essere convergente la serie:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots \alpha_n a_n$$

ed essendo: $(\alpha_{n+1} - \alpha_{n+p+1}) < 2L$ per $n > n_0$ avremo:

$$\boxed{|R'_{n,p}| < \sigma}$$

Le serie a segni alternati

Una serie a segni alternativamente positivi e negativi, cioè del tipo

$$\boxed{a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots\cdots + (-1)^{n-1} a_n \ \ldots}$$

Se decrescente, ed $a_n \to 0$ per $n \to \infty$, è convergente, la somma S_n, cioè le ridotte differiscono da S_∞ meno del valore assoluto $|a_{n+1}|$

Cerchiamo di dimostrarlo.

Consideriamo le somme di $2h$ termini e di $2h+1$ termini oltre il termine ennesimo:

$$\begin{cases} R_{n,2h} = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \cdots\cdots + (-1)^{n+2h-1} a_{n+2h} \\ R_{n,2h+1} = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \cdots\cdots + (-1)^{n+2h-1} a_{n+2h} + (-1)^{n+2h} a_{n+2h+1} \end{cases}$$

moltiplicando le due espressioni per $(-1)^n$ si ha:

$$\begin{cases} (R_{n,2h})(-1)^n = a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots\cdots\cdots - a_{n+2h} \\ (R_{n,2h+1})(-1)^n = a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots\cdots - a_{n+2h} + a_{n+2h+1}. \end{cases}$$

Se raggruppiamo le differenze di due termini consecutivi (positive, essendo decrescenti i termini) ed essendo positivo il termine a_{n+2h+1} in più nella seconda espressione, si può dire: $\boxed{(-1)^n (R_{n,p}) > 0}$ qualunque sia l'intero p.

Ma le differenze possono essere scritte:

$$\begin{cases} (-1)^n (R_{n,2h}) = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots\cdots - (a_{n+2h-2} - a_{n+2h-1}) - a_{n+2h} \\ (-1)^n (R_{n,2h+1}) = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots\cdots - (a_{n+2h-2} - a_{n+2h-1}) - (a_{n+2h} - a_{n+2h+1}) \end{cases}$$

Si noti che i termini a detrarre sono tutti positivi in entrambe le espressioni, perciò qualunque sia p (cioè per un numero pari o per un numero dispari di termini) avremo:

$$\boxed{(-1)^n R_{n,p} < a_{n+1}}$$

e per quanto sopra detto:

$$\boxed{0 < (-1)(R_{n,p}) < a_{n+1}}$$

ma: $\lim_{n \to \infty}(a_{n+1}) = 0$, per cui $|R_{n,p}| < \sigma$ tende a zero.

<u>cioè la serie è convergente</u>

ma: $\boxed{R_{n,p} = S_{n+p} - S_n}$

Se facciamo tendere p all'infinito:

$$\boxed{0 < (-1)^n (S_\infty - S_n) < a_{n+1}}$$

<u>resta dimostrata la seconda parte</u>

Quindi assumere la ridotta S_n al posto di S_∞ significa commettere un errore per difetto minore di a_{n+1}.

Diamo alcune applicazioni

La serie di Mengoli

$$\boxed{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}}$$

È una serie convergente ed $S_\infty = 1$

Infatti:

$$\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Perciò la serie può essere scritta:

$$\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cancel{\dots}\dots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$

ove si elidono tutti i termini salvo (1) e $\left(-\frac{1}{n+1}\right)$

ma: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{n+1}\right)=0$ perciò la somma è 1

Si noti che la serie di Mengoli è la serie armonica moltiplicata per $\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Per la serie:

$$\boxed{\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}}$$

operando come per la serie di Mengoli si ha:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

perciò può essere scritta:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\cancel{\dots}\dots+\left(\cancel{\frac{1}{2n-1}}-\frac{1}{2n+1}\right)\right.$$

e la serie converge $S_\infty = \frac{1}{2}$

Anche la serie:

$$\boxed{\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n\,(n+2)}}$$

può scomporsi:

$$\frac{1}{n\cdot(n+2)} = \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\frac{1}{2}$$

se poniamo: $n=(m-1)$

$$\frac{1}{n\,(n+2)}=\frac{1}{(m-1)(m+1)}=\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m+1}\right)\frac{1}{2}$$

possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\cdots\cdots\right.$$

ove non si annullano i valori $\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{2}\right\}$ perciò

$$\boxed{S_\infty=\frac{3}{4}}$$

Questa serie può essere considerata la semidifferenza fra una serie armonica completa a termini positivi ed una serie armonica a termini negativi mancante dei due primi termini:

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}1+\frac{1}{2}+\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{4}}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\\ -\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}-\cdots\cdots-\frac{1}{n+2}\end{matrix}\right\}=\frac{3}{4}$$

Consideriamo la serie:

$$\boxed{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{x^{n-1}}}$$

E' una serie geometrica di ragione $\frac{1}{x}$, convergente ad $S_\infty=\frac{x}{x-1}$.

esempi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{2}{2-1}=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\frac{1}{3^{n-1}}\right)=\frac{3}{3-2}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

Il valore della serie diminuisce al crescere della x e per $x\to\infty$, tutti i termini della serie diventano nulli, salvo il primo $=1$. perciò per $x\to\infty$, la serie è convergente $S_\infty=1$, ma anche $S_n=1$ ed $R_n=0$.

Questa stessa serie può essere a segni alternati:

$$\boxed{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\cdots\cdots+\left(\frac{-1}{x}\right)^{n-1}\cdots}$$

abbiamo visto che anche con ragione negativa $\left(\frac{-1}{x}\right)$ la serie geometrica a segni alterni è convergente (Il segno $(-)$ della ragione porta il segno $(+)$ al denominatore di S_∞)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right)=\frac{1}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)}=\frac{2}{1+2}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\cdots+\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\right)=\frac{3}{1+3}=\frac{3}{4}.$$

Consideriamo la serie armonica a segni alternati:

$$\boxed{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}}$$

Sono soddisfatte le condizioni espresse al paragrafo: "serie a segni alternati", perciò questa serie è convergente e le sue ridotte differiscono da S_∞ meno di $|a_{n+1}|$. $\boxed{S_\infty = \ln|2|}$

$$S_{2n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\ldots$$

notare che per denominatori dispari si ha $(+)$ e per denominatori pari si ha $(-)$. perciò:

$$S_{2n}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

e moltiplicando il 2 in evidenza:

$$S_{2n}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}\right)$$

Se con H_n indichiamo le ridotte della serie armonica si ha: $\boxed{S_{2n} = H_{2n}-H_n}$

Ma noi non sappiamo ancora calcolare le ridotte della serie armonica, perciò dobbiamo prima trattare la serie della costante di Eulero-Mascheroni, ciò ne evidenzierà l'importanza.

La serie della costante di Eulero-Mascheroni

$$\boxed{1 - \ln\frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \ln\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \ln\frac{4}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}}$$

Serie convergente che ha per somma la costante di Eulero-Mascheroni $= \gamma = S_\infty = \underline{0,57721566490153}$.

Anche questa serie è la differenza fra la serie armonica (divergente) e la serie $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ pure divergente.

Vediamo prima di tutto se rientra nelle condizioni poste per la convergenza <u>delle serie a segni alternati</u>

1) <u>I termini debbono decrescere in valore assoluto</u>:

I termini della serie armonica sono decrescenti e poiché: $\frac{1}{n} > \ln\frac{n+1}{n}$, la successione dei termini in valore assoluto è decrescente. Infatti sappiamo:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

prendendo i logaritmi:

$$(n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

considerando separatamente le due disuguaglianze

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad ; \quad \frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Resta dimostrato la prima condizione e possiamo scrivere:

$$\boxed{\left(\frac{1}{n}\right) > \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > \left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

<u>Sequenza decrescente di tre termini generici consecutivi</u>

2) Il termine generale della serie si annulli per $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0 \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\ln\left|\frac{n+1}{n}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\ln(1)=0$$

perciò la serie è convergente.

Indichiamo con γ la costante di Eulero-Mascheroni a cui converge la serie:

$$\boxed{S_\infty=\gamma=1-\ln\frac{2}{1}+\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}+\dots\dots+\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}+R_n}$$

Ma per il teorema sulle serie a segni alternati deve essere: $\boxed{R_n<\frac{1}{n+1}}$, cioè, detto θ un numero minore di uno possiamo dire: $\boxed{R_n=\theta_{2n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)}$

(l'indice $(2n+1)$ di θ è perché $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ è il $(2n+1)$esimo termine)

Raggruppiamo al solito i valori positivi e quelli negativi ed avremo:

$$\gamma=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\frac{1}{n}\right)-\ln\left(\frac{\cancel{2}}{1}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdots\frac{n+1}{\cancel{n}}\right)+\frac{\theta_{2n+1}}{n+1}$$

detta: $H_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\frac{1}{n}\right)$

$$\boxed{\gamma=H_n-\ln(n+1)+\frac{\theta_{2n+1}}{n+1}}$$

aggiungendo e togliendo $\ln(n)$ e risolvendo rispetto ad H_n si ha: $H_n=\ln(n)+\ln(n+1)-\ln(n)+\gamma-\frac{\theta_{2n+1}}{n+1}$

poniamo: $\boxed{\rho_n=\ln\left(\frac{(n+1)}{(n)}\right)-\frac{\theta_{2n+1}}{n+1}}$

avremo: $\boxed{H_n=\ln(n)+\gamma+\rho_n}$

ove: $\boxed{0<\rho_n<\frac{1}{n}}$

Mediante il teorema sulle serie a segni alternati è stato possibile stabilire che esiste un valore finito γ (costante) a cui converge la serie: ($S_\infty = \gamma$); ed è stato possibile affermare che $(S_\infty - S_n) = R_n < \frac{1}{n+1}$, quindi al posto degli infiniti termini: $\frac{1}{n+1} - \ln\left|\frac{n+2}{n+1}\right| + \frac{1}{n+2} - \ln\left|\frac{n+3}{n+2}\right| + \cdots$ abbiamo posto $R_n = \frac{\theta_{2n+1}}{n+1}$; per $n \to \infty$ si ha:
per $n \to \infty$; $\frac{\theta_{2n+1}}{n+1} \to 0$; ed anche $\ln\left|1+\frac{1}{n}\right| \to 0$;
per cui:

$$\boxed{\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(H_n - \ln|n|\right)}$$

Questa costante fu scoperta da Eulero (nel 1769); fu calcolata da Mascheroni (nel 1790) con 32 cifre decimali, però giuste solo le prime 19; Successivamente Gauss pubblicò il valore con 25 cifre esatte.
Il valore con 15 cifre decimali è $\gamma = 0.577\,215\,664\,901\,532$.
(alcuni testi arrotondano a 3 l'ultima cifra)
Questa costante è anche il valore di alcuni integrali definiti $-\int_0^\infty e^{-x}\ln|x|\,dx = \gamma$; $\int_0^\infty\left(\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right)-\left(\frac{1}{x}\right)\right)e^{-x}dx = \gamma$;

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right)dx = \gamma \, ; \quad \text{ecc}$$

Tenuto conto che ρ_n diminuisce al crescere di n, la formula:

$$\boxed{H_n = \ln|n| + \gamma + \rho_n}$$

si presta bene al <u>calcolo delle ridotte della serie armonica</u>.

Torniamo alla serie:

$$\boxed{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}}$$

eravamo rimasti a:

$$\boxed{S_{2n}=H_{2n}-H_n}$$

Sostituendo le formule ora trovate:

$$S_{2n}=\left[\left(\ln|2n|+\gamma+\rho_{2n}\right)-\left(\ln|n|+\gamma+\rho_n\right)\right]$$

$$S_{2n}=\left[\ln|2n|-\ln|n|+\left(\rho_{2n}-\rho_n\right)\right]$$

ma: $\lim_{n\to\infty}\left(\rho_{2n}-\rho_n\right)=0$ e: $\left(\ln|2n|-\ln|n|\right)=\left(\ln 2+\cancel{\ln|n|}-\cancel{\ln|n|}\right)$

per cui:

$$\boxed{S_\infty=\ln|2|}=0,69314718 1.$$

Dimostriamo ora, per la serie armonica:

$\boxed{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots}$; $\boxed{\lim_{k\to\infty}\left(H_{10^{k+1}}-H_{10^k}\right)=L=\ln 10}$

sostituendo le formule ora trovate:

$$L=\left[\ln|10^{k+1}|+\gamma+\rho_{10^{k+1}}\right]-\left[\ln|10^k|+\gamma+\rho_{10^k}\right]$$

poiché: $\lim_{k\to\infty}\left(\rho_{10^{k+1}}-\rho_{10^k}\right)=0$ e: $\ln|10^{k+1}|-\ln|10|=$

$$=\left(\ln|10|+\cancel{\ln|10^k|}-\cancel{\ln|10^k|}\right)=\ln|10|$$

$$\lim_{k\to\infty}\boxed{H_{10^{k+1}}-H_{10^k}=\ln|10|}=2,302585093$$

Si può generalizzare:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(H_{kn}-H_n\right)=\ln|k|}$$

La generalizzazione è abbastanza importante perché, la forma indeterminata $\infty - \infty$, qualora le espressioni che al limite la determinano, possano esprimersi come: $(H_{Kn} - H_n)$, (ove H, al solito, indica la ridotta della serie armonica), l'indeterminazione è immediatamene risolta: $(\ln(K))$.

<u>La serie a termini positivi:</u>

$$\boxed{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{n^2}}$$

formata dai quadrati dei termini della serie armonica, confrontata con la serie di Mengoli: $1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots\cdots + \frac{1}{(n-1)n}$ <u>risulta minorante</u> in tutti i termini salvo il primo, <u>per cui è convergente</u>.

È possibile dimostrare che la somma:

$$\boxed{S_\infty = \frac{\pi^2}{6}}$$

mentre:

$$\boxed{\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{12}}$$

Serie di potenze dei numeri naturali

A termini positivi queste serie sono divergenti, è però possibile calcolare le ridotte con una formula. Le serie sono del tipo:

$$\boxed{1^\mu + 2^\mu + 3^\mu + \cdots n^\mu}$$

Per trovare le formule delle ridotte ci si avvale dello sviluppo: $(n+1)^{\mu+1} = n^{\mu+1} + \binom{\mu+1}{1} n^\mu + \binom{\mu+1}{2} n^{\mu-1} + \cdots\cdots$ e delle formule precedenti: sostituendo $(n-1), (n-2) \ldots\ldots$

Esponente $\mu = 1$

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + n}$$

$$(n+1)^2 = \cancel{n^2} + 2n + 1$$

$$((n-1)+1)^2 = \cancel{n^2} = \cancel{(n-1)^2} + 2(n-1) + 1$$

$$((n-2)+1)^2 = \cancel{(n-1)^2} = \cancel{(n-2)^2} + 2(n-2) + 1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n-(n-1)+1)^2 = \cancel{2^2} = 1^2 + 2\cdot 1 + 1$$

sommando si elidono i termini del I e II membro

$$(n+1)^2 = 1 + 2S_{n'} + n$$

$$2S_{n'} = (n+1)^2 - 1 - n$$

$$S_{n'} = \frac{n^2 + \cancel{2}n + \cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{n}}{2}$$

$$\boxed{S_{1'} = n\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

Risultato che, per altra via, avevamo trovato per le progressioni aritmetiche (cfr I vol)

Esponente $\mu = 2$

$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2}$$

$$(n+1)^3 = \cancel{n^3} + 3n^2 + 3n + 1$$

$$\big((n-1)+1\big)^3 = \cancel{n^3} = \cancel{(n-1)^3} + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$$

$$\big((n-2)+1\big)^3 = \cancel{(n-1)^3} = \cancel{(n-2)^3} + 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$\big(n-(n-1)+1\big)^3 = \cancel{2^3} = 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1$$

Sommando ed elidendo : $\quad (n+1)^3 = 1^3 + 3\,S_{n^2} + 3\,S_n + n$

$$S_{n^2} = \frac{(n+1)^3 - 1 - 3\,S_n - n}{3}$$

$$S_{n^2} = \frac{(n+1)(n+1)^2 - 3\,\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)}{3}$$

$$S_{n^2} = \frac{(n+1)(n^2 + 2n + \cancel{1} - \tfrac{3}{2}n - \cancel{1})}{3}$$

$$S_{n^2} = \frac{1}{3}(n+1)(n)\left(\frac{2n+1}{2}\right)$$

$$\boxed{S_{n^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = \boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots\cdots + n^2}$$

per esempio per $n = 10$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2 = \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} = \frac{5\cdot 11\cdot 7}{1} = \underline{\underline{385}}$$

1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385 = somma progressiva.

Esponente $\mu = 3$

$$\boxed{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots\cdots + n^3}$$

$$(n+1)^4 = \cancel{n^4} + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

$$((n-1)+1)^4 = \cancel{(n^4)} = \cancel{(n-1)^4} + 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1$$

$$((n-2)+1)^4 = \cancel{(n-1)^4} = \cancel{(n-2)^4} + 4(n-2)^3 + 6(n-2)^2 + 4(n-2) + 1$$

- -

$$((n-(n-1))+1)^4 = \cancel{2^4} = 1^4 + 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1$$

Sommando ed elidendo $\quad (n+1)^4 = 1^4 + 4S_{n^3} + 6S_{n^2} + 4S_{n^1} + n$

$$4S_{n^3} = (n+1)^4 - 6S_{n^2} - 4S_{n^1} - (n+1)$$

$$4S_{n^3} = (n+1)^4 - \cancel{6}\,n(n+1)(2n+1)/\cancel{6} - \cancel{4}^{2}\,n(n+1)/\cancel{2} - (n+1)$$

$$4S_{n^3} = (n+1)^2(n^2+2n+1) - (n)(n+1)(2n+1) - (2n+1)(n+1)$$

$$4S_{n^3} = (n+1)^2 n^2 \cancel{+(n+1)(n+1)}[\cancel{2n+1}] - \cancel{(n(n+1)+(n+1))}(2n+1)$$

$$\boxed{S_{n^3} = \frac{(n+1)^2\cdot n^2}{4}} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

Si noti che: $S_{n^3} = (S_{n^1})^2$.

Notiamo anche la somma dello sviluppo, in essa abbiamo i coefficienti delle S_{n^i} (con i crescente da 0 a μ) identici a quelli di $(n+1)^{\mu+1}$ ciò consente di generalizzare la formula usando per i coefficienti il triangolo algebrico (detto di Tartaglia).

ed avremo:

$$
\begin{array}{lllllllllll}
1 & & & & & & & & & \text{———} & (n+1)^0 = 1 \\
1 & 1 & & & & & & & & \text{———} & (n+1)^1 = \underline{S_{n^0} = n} \\
1 & 2 & 1 & & & & & & & \text{———} & (n+1)^2 = 1 + 2S_{n^1} + S_{n^0} = \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & & & & \text{———} & (n+1)^3 = 1 + 3S_{n^2} + 3S_{n^1} + S_{n^0} \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & & & \text{———} & (n+1)^4 = 1 + 4S_{n^3} + 6S_{n^2} + 4S_{n^1} + S_{n^0} \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & & & \text{———} & (n+1)^5 = \ldots \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & & & \text{———} & (n+1)^6 = \ldots \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & & \text{———} & (n+1)^7 = \ldots \\
1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 & \text{—} & (n+1)^8 = \ldots \\
1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 84 & 36 & 9 & 1 & & (n+1)^9 = \ldots
\end{array}
$$

Quindi: $S_{n^0} = n$.

$$S_{n^1} = \frac{(n+1)^2 - n - 1}{2} = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}} = 1+2+3+\cdots n$$

$$S_{n^2} = \frac{(n+1)^3 - 3S_{n^1} - S_{n^0} - 1}{3} = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = 1^2+2^2+3^2+\cdots n^2$$

$$S_{n^3} = \frac{(n+1)^4 - 6S_{n^2} - 4S_{n^1} - S_{n^0} - 1}{4} = \boxed{\frac{n^2(n+1)^2}{4}} = 1^3+2^3+3^3+\cdots n^3$$

$$S_{n^4} = \frac{(n+1)^5 - 10S_{n^3} - 10S_{n^2} - 5S_{n^1} - 1}{5} = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{5}} = 1^4+2^4+ n^4$$

- la formula generalizzata:

$$\boxed{S_{n^\mu} = \frac{(n+1)^{\mu+1} - \binom{\mu+1}{2} S_{n^{\mu-1}} - \binom{\mu+1}{3} S_{n^{\mu-2}} - \cdots - n - 1}{(\mu+1)}} = \sum_{K=1}^{K=n} K^\mu = 1^\mu + 2^\mu + \cdots n^\mu$$

Criteri di convergenza

Questi criteri si applicano a serie a termini positivi.
Abbiamo già visto il criterio del confronto
(Serie maggiorante una serie divergente è divergente
Serie minorante una serie convergente è convergente)
Abbiamo visto il criterio generale di convergenza
(teorema di Cauchy) vediamo altri criteri:

Criterio del rapporto:

se: $\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) < 1}$ $\rightarrow$ la serie è convergente
(criterio di D'Alembert)

$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) > 1}$ $\rightarrow$ " " è divergente

$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = 1}$ $\rightarrow$ non possiamo dire niente

---

Criterio della radice

se: $\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt[n]{a_n} \right) < 1}$ $\rightarrow$ la serie è convergente

$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt[n]{a_n} \right) > 1}$ $\rightarrow$ " " è divergente

$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt[n]{a_n} \right) = 1}$ $\rightarrow$ non possiamo dire niente

---

Criterio di Kummer

Sia: $\boxed{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}$ una serie a termini > 0 cioè positivi e sia: $\boxed{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n}$ una successione pure a termini positivi

Se da un certo indice in poi si ha:

$$\boxed{\alpha_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha_{n+1} > K}$$

(ove K è una costante positiva)

La serie è convergente

Se invece da un certo indice in poi si ha:

$$\boxed{\alpha_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha_{n+1} \leqq 0}$$

e la serie:

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \cdots \frac{1}{\alpha_n}$$ è divergente,

allora la serie in esame è divergente

criterio di Raabe

(è un caso particolare del criterio di Kummer)

se $\alpha_n = n$; $\alpha_{n+1} = (n+1)$ si ha:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) - (n+1) > K$$ che può scriversi

$$\boxed{n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > (K+1)}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)\right] > K_2}$$ se il limite esiste

ove K_2 è una costante maggiore di 1, allora

La serie è convergente

La $\zeta_{(s)}$ di Riemann

Consideriamo la serie:

$$\boxed{\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^s}}$$

costituita dalla serie armonica, i cui termini sono stati elevati alla essesima potenza.

Per $s=1$ si ha la serie armonica (divergente)

" $s<1$ maggiorante la serie armonica (divergente)

" $s>1$ la serie è convergente

Per dimostrarlo usiamo il criterio di Raabe

cioè: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right]>1$ sostituendo: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{(n+1)^s}{n^s}-1\right)\right]=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^s-1\right]\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(1+1/n)^s-1}{1/n}\right]$. Nel I Volume abbiamo dimostrato (formula n°10) che $\lim\limits_{a\to 0}\left(\frac{(1+a)^\mu-1}{a}\right)=\mu$, perciò: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(1+1/n)^s-1}{1/n}\right]=s$ è per $s>1$ la serie è quindi convergente.

Abbiamo già indicato il caso particolare di $s=2$ ove la somma è $\pi^2/6$, in generale per $s>1$ (qualsiasi) la somma è detta la $\zeta_{(s)}$ di Riemann.

Per $s=(1+\varepsilon)$ con $\varepsilon\to 0$ possiamo fare una discussione analoga a quella che abbiamo fatto nel confronto fra la serie geometrica e la serie armonica.

Prodotti infiniti

Consideriamo la serie: $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, e poniamo: $b_1 = e^{a_1}$; $b_2 = e^{a_2}$; .... $b_n = e^{a_n}$; se facciamo i prodotti: $(b_1)(b_2)(b_3)\cdots(b_n) = e^{a_1+a_2+\dots a_n}$ ed indichiamo con $\overline{\Pi}$ il simbolo del prodotto, Noi abbiamo sopralineato Π per distinguerlo da $\pi = 3,14159\dots$ Altri diversificano facendo le gambe più lunghe Π; noi riteniamo che sia meno equivocabile la sopralineatura. $\overline{\prod_{n=1}^{n=\infty}}(b_n)$, è quindi il prodotto di infiniti termini che sarà convergente o divergente se $\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n$, è convergente o divergente. Se: $\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n = L$, allora $\overline{\prod_{n=1}^{n=\infty}}(b_n) = B$ ove <u>"L" è il logaritmo di B</u> ed è detto: <u>Logaritmo di un prodotto infinito</u>.

Ordinariamente è definito: <u>prodotto infinito</u> la sequenza dei prodotti ($P_1 = (1+u_1)$; $P_2 = (1+u_1)(1+u_2)$; .... $P_n = (1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)$; (che sono l'analogo delle ridotte delle serie) con $n \to \infty$.

$$\boxed{P_\infty = \overline{\prod_{n=1}^{n=\infty}}(1+u_n) = (1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\cdots\cdots(1+u_n)}$$

ove: $(1+u_1)$; $(1+u_2)$; ...$(1+u_n)$ sono i fattori del prodotto infinito.

È bene precisare che il prodotto infinito è convergente quando è convergente in senso stretto. ed è divergente sia che $P_\infty = \pm\infty$, sia che $P_\infty = 0$. Il prodotto infinito può essere zero sia che lo sia uno qualsiasi dei suoi termini, sia che lo diventi al limite infinito.

Criterio generale di convergenza

Condizione necessaria e sufficiente perché il prodotto infinito: $P_\infty = \prod_{n=1}^{n=\infty}(1+u_n) = (1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n)\dots$, nel quale nessun fattore sia nullo, sia convergente è che scelto un numero σ positivo arbitrario, si possa determinare un indice n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$ e qualunque sia p, si abbia:

$$\boxed{|P_{n,p} - 1| < \sigma}$$

ove:

$$P_{n,p} = (1+u_n)(1+u_{n+1})\cdots(1+u_{n+p})$$

Si noti che ciò si verifica quando la $\{u_n\}$ è convergente, ove $\lim_{n\to\infty}\{u_n\} = 0$ per cui $(1+u_n) \Rightarrow 1$ e da un certo indice in poi i fattori sono pressoché unitari e quindi il prodotto di "p" termini è minore di un σ arbitrariamente piccolo.

Le serie doppie

Una serie si dice doppia quando i suoi termini sono ordinati secondo due successioni, e quindi sono affetti da due indici: $\{a_{r,s}\}$.

Evidente che le serie doppie richiamano un campo bidimensionale, analogo a quello delle matrici piane. (abbiamo aggiunto la parola "piane" alle matrici, per evidenziare che sia le matrici, sia le serie possono indicizzarsi in campi tridimensionali ... ennedimensionali)

Le serie doppie si presentano quindi nella forma:

$$\begin{array}{l} a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots\cdots a_{1n} + \cdots \\ + \; a_{21} + a_{22} + a_{23} + \cdots\cdots a_{2n} + \cdots \\ + \; \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{rs} + \cdots + \cdots \\ + \; a_{m1} + a_{m2} + a_{m3} + \cdots\cdots a_{mn} + \cdots \\ + \; \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Sinteticamente una serie doppia si simboleggia:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \sum_{s=1}^{s=\infty} a_{r,s} = \boxed{\sum_{r,s}^{1\ldots\infty} a_{r,s}} = S_\infty$$

Le ridotte, o somme parziali si indicano:

$$\boxed{S_{m,n} = \sum_{r}^{1\ldots m} \sum_{s}^{1\ldots n} a_{r,s}}$$

per la convergenza: $\boxed{|S - S_{m,n}| < \sigma}$

Proprietà delle serie

Premesso che dicesi <u>proprietà associativa</u>, in una sequenza di operazioni aritmetiche della stessa specie, il fatto di poter "associare" gruppi di operazioni senza che cambi il risultato. (Godono di questa proprietà <u>la somma e la moltiplicazione</u>) per es.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_r + a_{r+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots + (a_{n-1} + a_n)$$

$$(b_1)(b_2)(b_3) \cdots (b_n) = [(b_1)(b_2)] \cdot [(b_3)(b_4)(b_5)] \cdots [(b_{n-1})(b_n)]$$

I gruppi di associati sono del tutto arbitrari, i

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_5) + \cdots + (a_3 + a_{n-1})$$

basta che i termini (addendi o fattori) siano tutti e solo quelli di partenza non ripetuti.

Dicesi <u>proprietà distributiva</u> della moltiplicazione e divisione, rispetto alla somma e sottrazione; o della potenza e radice, rispetto alla moltiplicazione e divisione; il fatto che il fattore moltiplicativo, o il divisore di una somma o sottrazione o mista, possa moltiplicare la somma (o sottrazione) nel suo insieme o distribuisca il prodotto sui singoli addendi

$$a(b + c - d) = ab + ac - ad$$

$$(b + c - d) : a = b/a + c/a - d/a$$

$$(a \cdot b)^{m/n} = (a^{m/n})(b)^{m/n}$$

$$(a : b)^{m/n} = (a^{m/n}) / (b)^{m/n}$$

Dicesi proprietà commutativa della somma e della moltiplicazione, il fatto di poter scambiare gli addendi, o i fattori senza che cambi il risultato. (Il cambio di posto è arbitrario)

$$a+b+c+d = b+d+a+c$$

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = b \cdot d \cdot a \cdot c$$

Se ad una serie aggiungiamo o togliamo un numero finito di termini il carattere della serie non cambia; se convergente cambia il risultato di S_∞.

Le serie regolari (cioè non oscillanti) godono della proprietà associativa.

Le serie regolari non godono della proprietà dissociativa

infatti la serie: $(1-1)+(1-1)+ \dots +(1-1)$ converge a zero

la $1-1+1-1+ \dots +(-1)^{n-1}$ è oscillante indeterminata

Se una serie convergente gode della proprietà commutativa, cioè non muti valore qualunque sia la legge che regola la sequenza dei suoi termini, allora è detta incondizionatamente convergente

---

Una serie a termini positivi, (o negativi) converge o diverge sempre incondizionatamente. (godono della proprietà commutativa)

Se una serie contiene infiniti termini positivi ed infiniti termini negativi, può scindersi in due serie: una a termini tutti positivi, l'altra a termini tutti negativi (siano $\{p\}>0$; $\{q\}<0$;)

Se queste due serie sono convergenti (si è visto che lo sono anche incondizionatamente) anche la serie data (somma di queste due) è convergente ed incondizionatamente, (gode cioè la proprietà commutativa e associativa)

Se una di queste due serie è divergente lo è anche la serie data ed è incondizionatamente divergente (gode cioè delle proprietà commutativa e associativa)

Se entrambe le serie sono divergenti (una a $+\infty$, l'altra a $-\infty$; si può cambiare l'ordine dei termini in modo che la serie data diverga a $+\infty$ oppure a $-\infty$, e se: $\lim_{n\to\infty}(P_n)=0$; $\lim_{n\to\infty}(q_n=0)$

Nella serie data si può cambiare l'ordine dei termini in modo che converga ad un valore prefissato.

$(\infty-\infty)=K$ (Teorema di Riemann-Dini)

Condizione necessaria e sufficiente affinché una serie sia incondizionatamente convergente è che sia assolutamente convergente

(Teorema di Dirichlet)

Facciamo un esempio:

la serie: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

abbiamo già visto che converge a $\ln(2)$; mentre la serie composta dai valori assoluti dei suoi termini è la serie armonica notoriamente divergente cioè la serie proposta non è assolutamente convergente e quindi è:

condizionatamente convergente

Notiamo che le due serie:

$$\begin{cases} 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+ \\ (-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}+\right) \end{cases}$$

sono minoranti la serie armonica;, per il criterio del rapporto si ha:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)=1$$

non possiamo dire nulla, eppure le due serie sono entrambe divergenti, essendo divergente la somma dei loro valori assoluti. se una sola fosse divergente non sarebbe convergente la serie a segni alternati. — (Vale il teorema di Riemann-Dini)

Operazioni aritmetiche fra serie

Somma e differenza.

Date due serie: $A = \sum_1^{\infty} (a_n)$ e $B = \sum_1^{\infty} (b_n)$; se sono entrambi convergenti, la serie somma $\sum_1^{\infty} (a_n + b_n)$ è pure convergente ad $(A+B)$, analogamente è convergente la serie differenza $\sum_1^{n} (a_n - b_n) = A - B$.
Ciò vale anche per le ridotte $S_n = (A_n + B_n)$; $S_n = (A_n - B_n)$.

Se una sola delle due serie è divergente anche la serie somma (o differenza) è divergente.

Se sono entrambi divergenti (stesso segno), la serie somma è divergente. La serie differenza, è convergente se ricorrono le condizioni esposte per serie a segni alterni applicate alla serie costituita dagli elementi delle due serie alternati con segno opposto.
La serie differenza è composta dalla differenza di due elementi aventi lo stesso indice, quindi non è pensabile un diverso ordine degli elementi, per applicare i teoremi sulla convergenza condizionata.

Prodotto di due serie (secondo Cauchy)

Cauchy definì prodotto di due serie la serie:

$$(a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots + (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} \dots a_n b_1)$$

Come si vede ogni termine è la somma di tanti prodotti quant'è l'indice del termine, e i prodotti sono formati da due fattori, uno per ciascuna delle due serie, ed aventi indici tali che la somma degli indici dei due fattori superi di uno l'indice della serie prodotto. Per esempio il quarto termine della serie prodotto, avrà quattro addendi prodotto di due termini ove la somma degli indici deve fare $(4+1=5)$; il termine è: $(a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1)$.

Si può dimostrare il teorema.

Se le due serie $\sum_1^\infty a_n$ e $\sum_1^\infty b_n$ sono convergenti ad A e B e convergono assolutamente, anche la serie prodotto converge assolutamente ed ha per somma il prodotto $A \cdot B$ delle serie date.

Ciò giustifica l'artificiosa determinazione dei termini affinché la serie converga al prodotto dei valori cui convergono le serie date.

Costruendo il prodotto con le serie esponenziali $\sum_1^\infty \frac{x_1^n}{n!} = e^{x_1} = S_{x_1}$ e $\sum_1^\infty \frac{x_2^n}{n!} = e^{x_2} = S_{x_2}$ avremmo: $S_{(x_1+x_2)} = S_{(x_1)} \cdot S_{(x_2)}$.

Serie a termini complessi

Abbiamo già accennato alle successioni a termini complessi, per le serie a termini complessi valgono le stesse definizioni date per le serie a termini reali. Poiché la somma di due o più numeri complessi è un numero complesso che ha per parte reale la somma delle parti reali, e per parte immaginaria la somma delle parti immaginarie, si ha:

La serie:

$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)+\dots\dots+(a_n+ib_n)+\dots$ è convergente

se lo sono le serie:

$(a_1+a_2+\dots+a_n+\dots)$ e: $(b_1+b_2+\dots\dots+b_n+\dots)$

Condizione necessaria e sufficiente perché una serie a termini complessi sia convergente, è che siano convergenti le due serie formate una dalle parti reali, e l'altra dai coefficienti delle parti immaginarie.

Se la serie dei moduli di una serie a termini complessi è convergente, lo è anche la serie data. (ma in generale non inversamente)

$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\sqrt{a_3^2+b_3^2}+\dots\dots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}+\dots$ se converge

convergono anche le due serie minoranti: $(|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|)$; $(|b_1|+|b_2|+\dots+|b_n|)$

e quindi converge la serie data: $(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)+\dots+(a_n+ib_n)+\dots$

Se diciamo assolutamente convergente, una serie a termini complessi, quando converge la serie dei suoi moduli, resta valido anche per le serie a termini complessi, il teorema già visto per le serie a termini reali:

<u>Se una serie è assolutamente convergente, essa è anche convergente</u>. (In generale non inversamente)

Una serie a termini complessi si dice: <u>incondizionatamente convergente</u>, quando alterando, con legge qualsiasi, l'ordine dei suoi termini, essa resta convergente allo stesso valore. (Vale il teorema di Dirichlet).

<u>Condizione necessaria e sufficiente affinché una serie sia incondizionatamente convergente, è che essa sia assolutamente convergente</u>.

Ad esempio: indicando genericamente con Z un numero reale o complesso $Z = (a + ib)$ ove b può essere nullo, <u>la serie esponenziale</u> $\sum_{1}^{\infty} \frac{Z^n}{n!}$ è <u>incondizionatamente convergente</u> essendolo <u>la serie dei suoi moduli</u>; per la serie esponenziale a termini reali abbiamo già visto che $\sum \frac{x^n}{n!}$ è assolutamente e incondizionatamente convergente.

Continuitá e discontinuitá di funzioni

Abbiamo giá accennato al capitolo: funzioni e successioni al concetto di continuitá; vogliamo ora precisare meglio. Nel I vol. al capitolo: "limiti a destra, limiti a sinistra" abbiamo evidenziato la discontinuitá di $e^{\frac{1}{x}}$ nel punto $x=0$.

Ancora nel primo volume abbiamo considerato punti di discontinuitá nell'intervallo a, b per calcolare integrali impropri.

Cerchiamo prima di tutto di definire una funzione continua nell'insieme I di punti P.

La funzione sia: $u = f(P)$; sia P_0 un punto limite (o di accumulazione) dell'insieme I. «Dicesi punto limite o di accumulazione, ogni punto, contenuto o no nell'insieme, quando é centro di ogni dominio circolare che contiene una infinitá di punti distinti dell'insieme» (Il raggio r del dominio é piccolo a piacere)

Diciamo che la $u = f(P)$ é continua nel punto P_0 di I, se per ogni σ positivo arbitrario é possibile determinare un corrispondente numero positivo δ tale che per tutti i punti P dell'insieme I appartenenti al dominio circolare di centro P_0 e raggio δ, si abbia:

$$\boxed{|f(P) - f(P_0)| < \sigma}$$

Queste definizioni riportate da testi di analisi matematica, esprimono che la $f(P_0)$ e la f dei punti adiacenti P_0, differisce, in valore assoluto, di entità indefinitamente piccole e che i punti P sono indefinitamente vicini (accosti) a P_0. Altri testi parlano di uguaglianza del limite destro e limite sinistro di una $f(x)$.

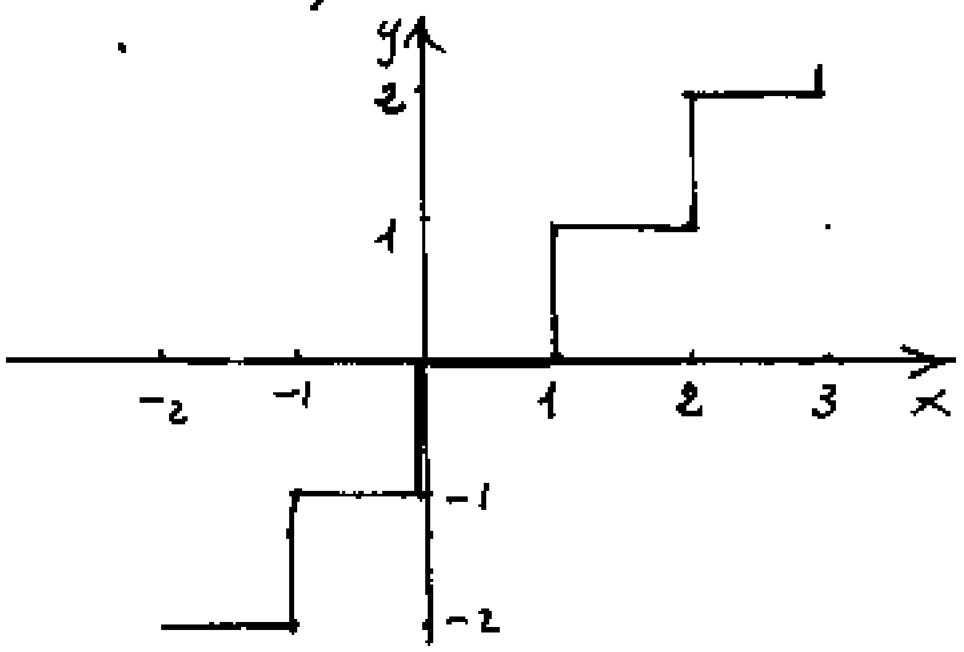
Noi proponiamo il dubbio: "Che differenza passa fra una $f(P)$ che in P_0 presenta un taglio privo di spessore ed una $f(P)$ che in P_0 è veramente continua senza tagli?" Se in P_0 v'è un taglio la $f(P_0)$ non esiste pur esistendo i suoi limiti destro e sinistro. Quindi la dizione di continuità (che noi abbiamo ripreso dal testo del Sansone) è più corretta di quella del limite destro e sinistro. Tal volta nel definire una funzione oltre a dare una espressione algebrica $f(x)$, si precisa che nel punto: $x=0$ oppure nel punto $x=m$, la $f(x)$ vale K. Il limite destro e sinistro della $f(x)$ (nel punto prefissato) può essere uguale a K possono essere diversi entrambi da K o uno solo di essi e la funzione sarà continua o discontinua, o continua da una sola parte destra o sinistra del punto.

Il punto che separa due insiemi si dice <u>di frontiera</u>

Discontinuità

Diremo che una funzione $f(x)$ ha <u>una discontinuità di prima specie nel punto</u>: $x=a$, quando il limite sinistro $\left(\lim_{x\to a-0}(f(x))\right)$ ed il limite destro $\left(\lim_{x\to a+0}(f(x))\right)$, esistono e sono diversi. Si dice: <u>salto della funzione</u> la differenza: $\lim_{x\to a+0}(f(x)) - \lim_{x\to a-0}(f(x))$.

Per esempio: $f(x) = \text{int}(x)$ (cioè massimo intero contenuto in x)



Come si vede dalla figura, si ha una discontinuità per ogni intero x

$0 < x < 1 \quad f(x) = 0$

$1 < x < 2 \quad f(x) = 1$

$2 < x < 3 \quad f(x) = 2$

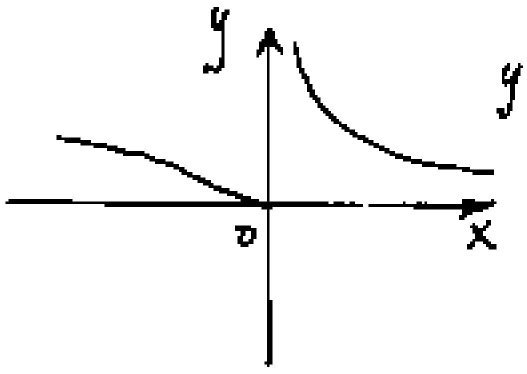
In questo caso il <u>salto della funzione</u> <u>è = uno</u>.

Diremo che una funzione $f(x)$ ha <u>una discontinuità di seconda specie</u> nel punto $x = a$, quando <u>non esiste</u> almeno uno dei due limiti: $\lim_{x\to a-0}(f(x))$; $\lim_{x\to a+0}(f(x))$

Per esempio consideriamo la funzione: $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-a}\right)$

Per $x=a$ abbiamo $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{0}\right) = \operatorname{sen}(\infty)$, che sappiamo non esiste perchè assume infinite volte tutti i valori fra +1 e -1. Quindi questa funzione ha in a una <u>discontinuità di seconda specie</u>.

Il limite non esiste anche se la $f(x) \to \infty$. Cioè per esempio: $\tan(x)$ presenta discontinuità di seconda specie nei punti: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.



la $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ha una discontinuità di seconda specie nel punto $x = 0$.

Dicesi discontinuità <u>di terza specie</u> o <u>discontinuità che può togliersi</u> in un punto $x = a$ di una funzione $f(x)$, quando sono uguali i limiti destro e sinistro in a: $\lim_{x \to a+0}(f(x)) = \lim_{x \to a-0}(f(x))$, ma: $f(a)$ è diversa da tali limiti o addirittura non esiste.

Si toglie la discontinuità cambiando o fissando a priori il valore della funzione nel punto $x = a$.

Per esempio: $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ presenta un punto di discontinuità apparente per $x = 2$. avremo infatti: $\lim_{x \to 2^+}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = \lim_{x \to 2^-}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = 4$, mentre $f(2) = \frac{0}{0}$ forma indeterminata, se applichiamo l'Hospital $f(2) = 4$. (avremmo potuto dividere: $\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} = (x+2)$)

definiamo: $\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) & \text{per } x \neq 2 \\ f(x) = 4 & \text{per } x = 2 \end{cases}$ (ci è una continua)

Postulato della continuità di R. DedeKind

I postulati della geometria furono divisi in cinque gruppi da D. Hilbert individuati da una lettera e precisamente:

A - postulati di appartenenza

B - postulati di ordinamento

C - postulati di congruenza

D - postulati di parallelismo

E - postulati di continuità

Il postulato di DedeKind esprime:

E. "<u>Due gruppi separati (qualunque) di punti di una retta ammettono un elemento di separazione</u>"

K. Weistrass esprime:

E. "<u>Ogni successione ordinata di punti di un segmento, $A_1, A_2, \ldots A_n$, possiede un punto limite</u>

questa proposizione è una conseguenza del postulato di DedeKind.

Se si hanno due classi contigue i cui valori sono riportati con segmenti su una retta orientata;

"<u>Esiste uno ed uno solo segmento l, maggiore di tutti i segmenti h' e minore di tutti i segmenti h''</u>"

È questo un corollario del postulato di DedeKind.

Ad ogni grandezza numerica può essere associato un segmento; l'insieme dei numeri razionali contiene gli elementi delle classi contigue, ma non contiene l'elemento separatore che è un numero irrazionale o trascendente; quindi l'insieme dei numeri razionali è discontinuo. Se riportiamo sull'asse dei numeri reali (continuo), i soli numeri razionali, si verificherebbero quegli elementi di separazione in generale previsti dal postulato di DedeKind.

Si noti che in eccesso o in difetto all'elemento separatore di classi contigue, possiamo avvicinarci con numeri razionali a meno di un ε piccolo a piacere. Cioè il limite a destra ed il limite a sinistra del segmento che determina l'elemento separatore. E nel passaggio al limite i due valori saranno uguali, ed uguali all'elemento separatore, che però, può non esserci. È il caso del nostro "taglio" privo di spessore è il caso di una retta che contenga solo numeri razionali.

Il campo dei numeri reali è continuo, il campo dei numeri razionali è discontinuo.

Si possono avere serie convergenti a qualsiasi numero reale.

Serie a termini variabili

I termini di una serie siano costituiti da funzioni diverse di una stessa variabile (x).

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

Per ogni (x) definita (reale o complessa) si ha una serie che può essere convergente o divergente o oscillante.

Supponiamo che esista un insieme di valori di x, cioè: $x_1, x_2, \dots x_m$, per i quali la serie è convergente. Se l'insieme è continuo avremo un grafico continuo di $S_\infty(x)$.

Diremo che la serie è uniformemente convergente nell'insieme I, se per ogni σ positivo arbitrario è possibile determinare un corrispondente indice n_0 tale che per $n > n_0$, il resto della serie $R_n(x)$ sia in valore assoluto minore di σ, per tutti i valori x dell'insieme I.

Sia:

$$\boxed{u_1(x) + u_2(x) + \dots\dots + u_n(x) + \dots}$$

una serie uniformemente convergente in I.

e sia:

$$\boxed{\lambda_1(x_1),\ \lambda_2(x),\ \dots\dots\ \lambda_n(x), \dots}$$

Una successione di funzioni complessivamente limitata in I, cioè qualunque sia l'indice n e qualunque sia il punto x (valore x) dell'insieme I si abbia:

$$\boxed{|\lambda_n(x)| < L}$$

(ove L è un numero positivo).

Allora anche la serie:

$$\boxed{u_1(x)\cdot\lambda_1(x) + u_2(x)\cdot\lambda_2(x) + \cdots\cdots + u_n(x)\lambda_n(x) + \cdots}$$

è uniformemente convergente nell'insieme I

(Cfr identità di Brunacci - Abel)

Ad esempio:

La serie: $\boxed{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} +}$

converge uniformemente in ogni insieme limitato

Sia C un insieme di valori o punti di un campo complesso, e sia ρ il modulo tale che:

$$\boxed{|x| \leq \rho \leq \left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{\rho^n}{n!}}$$

la serie a termini positivi:

$$\boxed{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \cdots}$$

è convergente qualunque sia ρ

(Cfr Serie a termini complessi)

Serie di potenze

$$\boxed{a_0 + a_1 \cdot Z + a_2 Z^2 + \dots\dots + a_n Z^n + \dots}$$

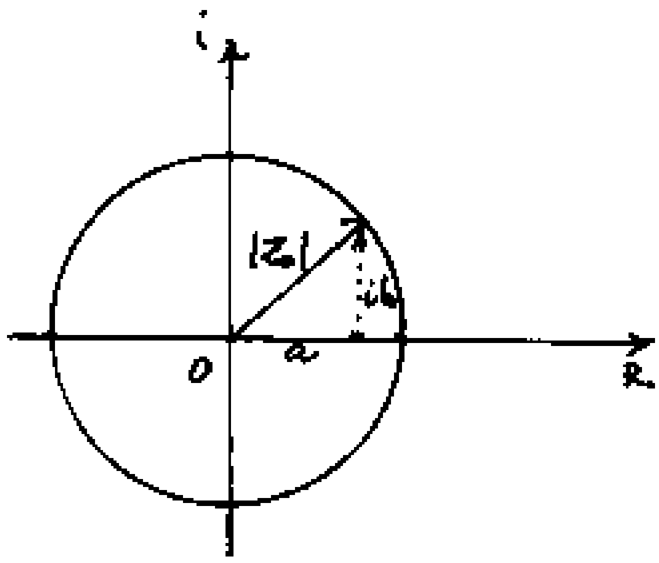
ove: $a_0, a_1, a_2 \dots a_n$ sono costanti reali o complesse assegnate è pure assegnata la legge del loro succedersi. La Z è una variabile reale o complessa.

- Si noti che l'indice dei termini inizia con zero, cioè: $a_n Z^n$ è il termine $(n+1)^{esimo}$.

- Si noti che le ridotte della serie di potenze rappresentano polinomi reali o complessi del grado della ridotta.

- Se la serie converge per il valore $Z_0 \neq 0$, essa converge anche per qualsiasi $Z < |Z_0|$.

- Se consideriamo il piano complesso avente in ascisse l'asse reale, ed in ordinate l'asse immaginario



Se la serie converge per $Z_0 \neq 0$ converge anche in tutti i punti interni al cerchio con centro nell'origine e raggio uguale a $|Z_0|$.

Inversamente: Se la serie non converge per $z_0 \neq 0$, esso non converge per tutti i punti esterni al cerchio nell'origine e raggio $= |z_0|$.

– Per $z_0 = 0$ la serie è certamente convergente al valore a_0, (tutti gli altri termini sono nulli).

– Qualora i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ siano i reciproci dei fattoriali dei numeri naturali, la serie:

$$1 + \frac{z^1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \qquad = (e^z)$$

converge per ogni valore z comunque grande purché finito

Infine vi sono delle serie di potenze che convergono solo per alcuni valori di z e non convergono per altri. (Ad esempio la serie geometrica, che abbiamo già trattato, ove: $(a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n)$ che converge per $z < 1$.)

Se $z = (a + ib)$, $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| =$ modulo di z si abbia una serie che converge fino ad un modulo massimo che indichiamo R. Abbiamo già visto che la serie è convergente per ogni z di modulo inferiore ad R, e non è convergente per z di modulo superiore ad R. Da ciò nasce il concetto del cerchio di convergenza.

Il cerchio di convergenza.

Se una serie di potenze converge per qualche valore di $z \neq 0$, e non converge per qualsiasi valore di z, esiste un numero positivo $R \neq 0$, (massimo modulo di convergenza), tale la serie data è convergente ed assolutamente convergente, entro qualsiasi cerchio con centro nell'origine e raggio minore di R; non è convergente per valori di z di modulo maggiore di R (cioè esterni al cerchio di raggio R).

Il cerchio di raggio R è detto Cerchio di convergenza della serie data ed R è il raggio di convergenza

- Nulla si può dire per i punti sulla circonferenza di raggio R.

- Se la serie converge solo per $z=0$; R è nullo.

- Se la serie converge per ogni valore di z; R è infinito.

- Se la serie: $\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n z^n$ ha raggio $R=\infty$, la funzione $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ si chiama: trascendente intera.

Sappiamo infatti che i numeri trascendenti possono essere dati con le serie, ad ogni valore di z corrisponde un valore della serie.

Criteri per determinare il raggio di convergenza.

Il criterio più generale è dato dal teorema di Cauchy-Hadamard.

"Data la serie di potenze:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

ove i coefficienti a_n sono reali o complessi:

Se: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ la serie converge solo per $z = 0$

Se $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ la serie converge (e assolutamente) in ogni punto z del piano complesso

Se $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/R$ la serie ha "R" per raggio di convergenza.

Un altro criterio sufficiente per la determinazione del raggio di convergenza (Cfr. S. Sansone) può esprimersi: Se nella serie $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$ il modulo $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ per $n \to \infty$, ha un limite determinato e finito, diverso da zero, questo limite è il raggio di convergenza. cioè: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \neq 0$.

Come si vede entrambi i criteri si basano sul criterio della radice e sul criterio del rapporto per la convergenza delle serie ove però i termini sono costituiti dai coefficienti.

Derivazione della serie di potenze

Abbiamo visto che la serie di potenze può riguardarsi come una funzione, in campo reale o complesso, se convergente, rappresenta numeri anche trascendenti; se per ogni valore di z, $f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n z^n$, è convergente in tutto il campo, $f(z)$ è detta trascendente intera. Per es. $\left(f(z) = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots \frac{1}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!}z^n\right)$

Noi cerchiamo ora la derivata:

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{d\left(\sum_0^{\infty} a_n z_n\right)}{dz}$$

che può essere effettuata termine a termine:

$$\frac{d}{dz}\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n\right) = \left(a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots + n a_n z^{n-1}\right) =$$

$$\boxed{\frac{d(f(z))}{d(z)} = \frac{d\left(\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n z^n\right)}{d(z)} = \sum_{n=1}^{n=\infty} n a_n z^{n-1}}$$

(è ancora una serie di potenze)

(Si noti che, nella derivata, l'indice "n" è del termine ennesimo, cioè n comincia con 1 non con zero).

Particolare importante è che la derivata di una serie di potenze, è una serie di potenze che ha lo stesso cerchio di convergenza.

Sia infatti: $|z_0| < |z_1| <$ R = raggio di convergenza, posto $\frac{|z_0|}{|z_1|} = q < 1$

avremo: $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n||z_0|^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n||z_1|^{n-1}\left(\frac{|z_0|}{|z_1|}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n||z_1|^{n-1} q^{n-1}$, ma

$\sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1}$ è una serie geometrica convergente per $q < 1$, e questi termini moltiplicati per la serie convergente $|a_n||z_1|^{n-1}$, danno una serie convergente. (Se $z_1 > R$ la serie diverge).

Sviluppo accorciato di Taylor

Abbiamo riguardato la serie di potenze come una funzione; ora facciamo il passaggio inverso, cioè, data una funzione, come sia possibile trovare la corrispondente serie di potenze.

Nota una funzione $f(x)$ finita e continua in un intervallo A,B di ampiezza $h = \Delta x$, (ed in esso derivabile fino alle derivate di ordine n), fissato un punto $x_0 = x_A$ la formula del valor medio (v. Vol I) o degli accrescimenti finiti esprime il valore della funzione per l'ascissa variata da (x) a (x_0+h)

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + h\, f'(x_0+\theta h)}$$

L'incremento subito dalla funzione è espresso dal prodotto dell'incremento finito $h = \Delta x$ della variabile per la derivata della funzione in un punto intermedio fra x_0 ed (x_0+h) dato da: $x_c = (x_0+\theta h)$ con: $0 \leq \theta \leq 1$. Sappiamo che esiste almeno un punto x_e, cioè almeno un θ che lo definisce. Sarebbe comodo sapere il valore (o i valori) di θ, purtroppo θ non è definito, sappiamo solo che il suo valore (o i suoi valori) sono compresi fra zero ed uno.

Ma se consideriamo che anche <u>l'incremento finito della funzione</u>: $\left[\Delta f(x) = h f'(x_0+\theta h)\right]$ é una funzione, e come tale derivabile e quindi anche su di essa si puó applicare la formula <u>del valor medio</u> (o degli accrescimenti finiti), ove ponendo $\theta = \theta_1$ (come fosse noto) e "$\theta_1 h$" il nuovo incremento di variabile, si ha:

$$h\left[f'(x_0+\theta_1 h)\right] = h\left[f'(x_0) + (\theta_1 h) f''(x_0+\theta(\theta_1 h))\right]$$

Ma il secondo membro è ancora una funzione, ove ponendo: $\theta\theta_1 = \theta_2$, applicando di nuovo la formula avremo una $f'''(\dots)$ e ripetendo iterativamente abbiamo:

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \theta_1 h^2 f''(x_0) + \theta_2 h^3 f'''(x_0) + \dots + \theta_{n-1} h^n f^n(x_0+\theta_{n-1} h)}$$

Ricordiamo la formula di Cauchy generalizzata (V. Vol. I) ove abbiamo posto θ in relazione al grado della derivata; e ricordando che ci siamo proposti di <u>sviluppare in serie di potenze</u>, una generica $f(x_0+h)$, poniamo: (V. Vol. I) la $f(x_0+h) = \varphi(x_0+h) \dfrac{f^n(x_0+\theta_n h)}{\varphi^n(x_0+\theta_n h)}$, con: $\varphi(x) = (x-x_0)^n$, $\varphi'(x) = n(x-x_0)^{n-1}$; $\varphi''(x) = n(n-1)(x-x_0)^{n-2}$ ... $\boxed{\varphi^n(x) = n!}$ (ove φ^n è derivata ennesima), sostituendo abbiamo la formula generalizzata di Lagrange (V. Vol I) $\boxed{f(x_0+h) = \dfrac{h^n}{n!} f^n(x_0+\theta_n h)}$ nell'ipotesi che la $f(x)$ sia nulla insieme a ~~tutte~~ le sue derivate per $x = x_0$

Ripetendo il discorso delle reiterate sostituzioni notiamo che: $\theta_{n-1} = \frac{1}{n!}$, tenendo conto della formula di Lagrange, perciò abbiamo:

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \cdots\cdots + \frac{h^n}{n!}f^n(x_0) + R_c}$$

Formula che è detta: <u>Sviluppo accorciato di Taylor.</u>

(È appena il caso di accennare che: h^n è una potenza, mentre $f^n_{(x_0)}$ è una derivata ennesima). Il termine "R_c" è il <u>resto della serie</u> detto anche <u>termine complementare</u>:

nella forma di Lagrange: $R_c = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0+\theta h)$

nella forma di Cauchy: $R_c = \frac{h^{n+1}}{n!} f^{n+1}(x_0+\theta h)$

in generale nella forma di Schlömilch e Roche: $R_c = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-s+1}}{n!\,s} f^{n+1}(x_0+\theta h)$.

I "θ" che compaiono nelle tre formule sono diversi fra loro, e quindi rifletterebbero punti diversi dell'intervallo h, però essendo uguali gli R_c, si trova il compenso nei coefficienti.

Se poniamo: $(x_0 = 0)$; $(h = x)$ si ha <u>la formula di Mac-Laurin</u>:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^n(0) + R_n}$$

Il termine complementare P_n per un teorema di Peano può assumere la forma: $\boxed{P_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}_{(x_0+\varepsilon)}}$ detta termine complementare di Peano, ove ε è una funzione di h tale che: $\left(\lim_{h \to 0} (\varepsilon) = 0 \right)$.

La formula di MacLaurin è importantissima per lo sviluppo in serie delle funzioni; Se essa è valida, una qualsiasi $f(x)$ che, per ogni x determinato, assuma un valore reale (finito), il suo sviluppo sarà una serie necessariamente convergente a quel valore finito, quindi $\lim_{n \to \infty} (P_n) = 0$.

Alcune applicazioni

1) Serie esponenziale:

$$f(x) = e^x \; ; \; f^{(n+1)}(x) = e^x \; ; \; f(0) = 1 \; ; \; f^n(0) = 1$$

sostituendo:

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + }$$

con: $(n = 0, 1, 2, \ldots \infty)$

per $x = 1$: $\boxed{e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots}$

le ridotte sono:

1, 2, 2,5, $2,66\overline{6}$, $2,7083\overline{3}$, $2,7166\overline{6}$, $2,71805\overline{5}$, 2,71825397, ...

come si vede, già alla ridotta di ordine 8, il cui ultimo addendo è: $\frac{1}{7!}$, sono già valide le prime quattro cifre decimali.

2) Serie del seno circolare

$f(x) = \sin(x)$; $f'(x) = \cos(x)$; $f''(x) = -\sin(x)$; $f'''(x) = -\cos(x)$

$f^{IV}(x) = \sin(x)$; le derivate si ripetono ciclicamente, con ordine 4. $f(0) = 0$; $f'(0) = 1$; $f''(0) = 0$; $f'''(0) = -1$; ...

$f^{2n-1}(0) = (-1)^{n-1}$; $f^{2n}(0) = 0$; quindi: (con $n = 1, 2, \dots \infty$)

$$\boxed{\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}}$$

Questa serie converge assai rapidamente: per $x = \pi/6$

$$\begin{aligned} \pi/6 &= 0{,}523598776 \\ -(\pi/6)^3/3! &= -0{,}023924596 \\ &= 0{,}499674180 \quad \text{(appross. per difetto)} \\ +(\pi/6)^5/5! &= +0{,}000327953 \\ & \ 0{,}500002133 \quad \text{(appross. per eccesso 5 cifre esatte)} \end{aligned}$$

I primi tre termini della serie danno già 5 cifre esatte.

---

3) Serie del coseno circolare

$f(x) = \cos(x)$; $f'(x) = -\sin(x)$; $f''(x) = -\cos(x)$; $f'''(x) = \sin(x)$

$f(0) = 1$; $f'(0) = 0$; $f''(0) = -1$; $f'''(0) = 0$

anche in questa serie si ha una variazione ciclica: ($n = 1 \div \infty$)

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{(2n-2)}}{(2n-2)!}}$$

Come regola mnemonica si suol dire che la serie $\sin(x)$ è dispari, mentre la serie $\cos(x)$ è pari (a segni alterni).

---

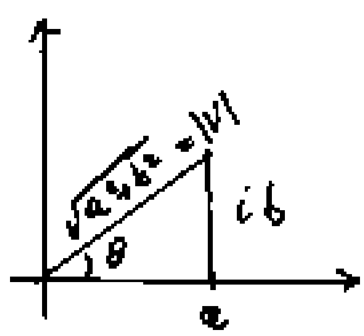
4) Serie esponenziale ad esponente immaginario

$$\boxed{e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \dots}$$

Si noti che questa serie rappresenta la somma delle due precedenti serie di cui $sen(x)$ è molti= plicata per i cioè:

$$\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i\, sen(x)}$$

Questa relazione è importantissima per i numeri immaginari complessi di cui conosciamo la



$\vec{V} = (a + ib)$ forma binomia

essendo: $|V| = \sqrt{a^2+b^2}$; $a = |V| \cos\theta$

$b = |V| sen(\theta)$; sostituendo:

$\vec{V} = |V| (\cos\theta + i\, sen\,\theta)$ forma trigonometrica

$\vec{V} = |V| e^{i\theta}$ forma esponenziale (sopra dimostrata)

5) Serie esponenziale ad esponente immaginario negativo

avremo che cambiano solo i segni:

$$\boxed{e^{-ix} = 1 - \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{ix^5}{5!} - \dots}$$

sommando e sottraendo le due espressioni si ha:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos(x)} \\ \boxed{\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = sin(x)} \end{array}\right\}$$

formule fondamentali della trigonometria com= plessa di Eulero.

6) Serie esponenziale ad esponente negativo

$$\boxed{e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots (-1)^n \frac{x^n}{n!}}$$

confrontando questa serie con la serie esponenziale.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \frac{x^n}{n!}$$

si hanno le serie iperboliche, infatti:

7) Serie del coseno iperbolico (catenaria)

per semisomma delle serie di cui sopra:

$$\boxed{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \left(\frac{x^{2n}}{n!}\right)}$$

8) Serie del seno iperbolico

per semidifferenza:

$$\boxed{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \operatorname{senh}(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \left(\frac{x^{(2n-1)}}{(2n-1)!}\right)}$$

si notino le analogie col seno e coseno circolare.

$$\boxed{\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{i} \operatorname{senh}(ix)} \; ; \quad \boxed{\cos(x) = \cosh(ix)}$$

sommando:

$$\operatorname{senh}(x) + \cosh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

cioè:

$$\boxed{\operatorname{senh}(x) + \cosh(x) = e^x}$$

espressione fondamentale in trigonometria iperbolica

$$\boxed{\cosh(x) - \operatorname{senh}(x) = e^{-x}}$$

moltiplicando termine a termine: $(e^x)(e^{-x}) = 1$

$$\boxed{\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1}$$ fondamentale.

Serie esponenziale: a^x

$f(x) = a^x$; $f'(x) = \ln|a| \cdot a^x$; $f''(x) = (\ln|a|)^2 a^x$; ....

$f(0) = 1$; $f'(0) = (\ln|a|)$; $f''(0) = (\ln|a|)^2$; ....

$$\boxed{a^x = 1 + \frac{(x\ln|a|)}{1!} + \frac{(x\ln|a|)^2}{2!} + \frac{(x\ln|a|)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x\ln|a|)^n}{n!}}$$

si noti che è la generalizzazione di e^x, infatti: $(\ln|e| = 1)$

Serie logaritmica

La serie logaritmica porta qualche complicazione ad applicare direttamente la formula di Mac Laurin, infatti se: $f(x) = \ln|x|$; $f(0) = -\infty$. Occorre quindi non far passare per zero la x. Considereremo quindi la funzione: $\boxed{f(x) = \ln(x+1)}$; $f'(x) = (x+1)^{-1}$; $f''(x) = (-1)(x+1)^{-2}$; $f'''(x) = 2!(x+1)^{-3}$; .... ; $f^{n}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(x+1)^{-n}$; ...

per lo sviluppo di MacLaurin: si nota: $\frac{x^n f^n(0)}{n!} = \frac{x^n(-1)^{n-1}\cancel{(n-1)!}(1)}{n\,\cancel{(n-1)!}}$

① $$\boxed{\ln|1+x| = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}}$$

Il raggio di convergenza di questa serie è dato da: $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n} : \frac{1}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{1}{n}\right| = 1$

Ciò vuol dire che questa serie può essere utilizzata solo per: $\boxed{-1 < x < +1}$, cioè si possono calcolare solo i logaritmi fra $(1-1)=0$ ed $(1+1)=2$ cioè fra zero e due (per valori superiori diverge)

---

ponendo ora: $\boxed{f(x) = \ln|(1-x)|}$ e confrontando:

$$\ln|(1+x)| = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$\ln|(1-x)| = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n}$$

sottraendo membro a membro:

$$② \quad \boxed{\ln\left|\frac{(1+x)}{(1-x)}\right| = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \right)}$$

vale per $\boxed{-1 < x < 1}$ cioè permette di calcolare i logaritmi dei numeri da zero ad ∞ $\left(x = \frac{N+1}{N-1}\right)$.

Poniamo ora:

$$\boxed{\frac{(1+x)}{(1-x)} = \frac{(a+h)}{a}}$$

ricaviamo x:

$$\cancel{a} + ax = \cancel{a} + h - ax - xh \,; \quad \boxed{x = \frac{h}{(2a+h)}}$$

quindi: $\ln\left|\frac{(1+x)}{(1-x)}\right| = \ln\left|\frac{a+h}{a}\right| = \ln|(a+h)| - \ln|a|$

$\ln|(a+h)| = \ln|a| + \ln\left|\frac{(1+x)}{(1-x)}\right|$; sostituendo x:

$$③ \quad \boxed{\ln|(a+h)| = \ln|a| + \frac{2h}{(2a+h)}\left\{1 + \frac{h^2}{3(2a+h)^2} + \frac{h^4}{5(2a+h)^4} \cdots\right.}$$

nel caso particolare di $h=1$:

$$④ \quad \boxed{\ln|(a+1)| = \ln|a| + \frac{2}{(2a+1)}\left\{1 + \frac{1}{3(2a+1)^2} + \frac{1}{5(2a+1)^4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2a+1)^{2n-2}}\right.}$$

noto il logaritmo di un numero "a", si può calcolare il logaritmo di $(a+1)$. $\ln|(a+1)| = \ln|a| + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)(2a+1)^{2n-1}}\right)$.

Formula che poteva scriversi:

$$\ln|a+1| = \ln|a| + 2\left\{\frac{1}{(2a+1)} + \frac{1}{3(2a+1)^3} + \frac{1}{5(2a+1)^5} \cdots\right.$$

poniamo: $(2a+1) = n$; $a = \frac{n-1}{2}$; $\ln|a| = \ln|n-1| - \ln|2|$

$(a+1) = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$; $\ln|a+1| = \ln|n+1| - \ln|2|$

sostituendo:

$$\ln|n+1| - \cancel{\ln|2|} = \ln|n-1| - \cancel{\ln|2|} + 2\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{5n^5} + \cdots\right.$$

(5) $$\boxed{\ln\left|\frac{n+1}{n-1}\right| = 2\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{5n^5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)\,n^{2k-1}} + \cdots\right\}}$$

questa formula è valida per $n > 1$ affinché $(n-1) > 0$.

Se nella: $\ln|(x+1)| = \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \right)$

poniamo: $x = (b-1)$ si ha:

(6) $$\boxed{\ln|b| = \frac{(b-1)}{1} - \frac{(b-1)^2}{2} + \frac{(b-1)^3}{3} - \frac{(b-1)^4}{4} \cdots}$$

formula valida per $\boxed{2 \geq b > 0}$ infatti è legata alla validità della formula precedente: $b = (x+1)$; $(1+1) = 2$.

Se in questa poniamo: $b = \left(\frac{x}{a}\right)$; $\ln b = \ln|x| - \ln|a|$;

$b - 1 = \frac{x}{a} - 1 = \frac{x-a}{a}$ cioè sostituendo:

(7) $$\boxed{\ln|x| = \ln|a| + \frac{(x-a)}{a} - \frac{(x-a)^2}{2a^2} + \frac{(x-a)^3}{3a^3} - \cdots}$$

Questa formula è valida per $\boxed{0 < x < 2a}$

ed è condizionata dalla conoscenza di $\ln|a|$ per avere $\ln|x|$.

Nella:

$$\ln\left|\frac{n+1}{n-1}\right| = 2\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{n^5} + \cdots\right.$$

poniamo:

$$\boxed{\frac{n+1}{n-1} = x} \supset \quad n+1 = nx - x \quad \text{da cui:}$$

$(x+1) = n(x-1)$ cioè: $\boxed{\frac{1}{n} = \frac{(x-1)}{(x+1)}}$

si ha:

$$⑧ \quad \boxed{\ln|x| = 2\left[\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x+1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^7 + \cdots\right]}$$

formula valida per $\boxed{x > 0}$

Nella formula:

$$\ln|(1-x)| = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \frac{x^n}{n}\right)$$

poniamo: $\left(x = \frac{u-1}{u}\right)$; $\ln|(1-x)| = \ln\left|\left(\frac{\cancel{u}-\cancel{u}+1}{u}\right)\right|$

$\ln\left(\frac{1}{u}\right) = -\ln|u| = -(\ \cdots$ e togliendo il segno $(-)$

$$⑨ \quad \boxed{\ln|u| = \left(\frac{u-1}{u}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{u-1}{u}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{u-1}{u}\right)^3 + \cdots}$$

questa formula vale per $\boxed{u > \frac{1}{2}}$ infatti per $u = \frac{1}{2}$

si ha: $\left(\frac{u-1}{u}\right) = \left(1 - \frac{1}{u}\right) = \left(1 - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = (1-2) = (-1)$ si ha:

$$\ln\left|\frac{1}{2}\right| = -\ln|2| = -\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)$$

serie armonica a segni alternati che abbiamo già dimostrato essere convergente: $(S_\infty = \ln 2)$ (pag 113), ma se $u = \frac{1}{K}$ con $K > 2$

si ha: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{u-1}{u}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}|1-K|^n\right) = \infty$ quindi

per $K > 2$ la serie diverge. (Vedasi seri a segni alternati)

Serie binomiale

Abbiamo già trattato il binomio di Newton, ove:

$$(a+b)^n = \sum_{K=0}^{K=n} \binom{n}{K} a^{n-K} b^K = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots\dots$$

Consideriamo la funzione:

$$\boxed{f_{(x)} = (1+x)^m} \quad (\text{con } m = \text{reale})$$

abbiamo:

$$f'_{(x)} = m(1+x)^{m-1}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}_{(x)} = [m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)](1+x)^{m-n}$$

perciò applicando MacLaurin.

$$\boxed{(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots\dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots}$$

Naturalmente occorre essere sicuri che, al limite, il termine complementare sia nullo $\left(\lim_{n \to \infty}(P_n) = 0\right)$.

I) Consideriamo: "m" = intero positivo

In questo caso: $\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} = \binom{m}{n}$ = (combinazione di m elementi di classe n)

Le ridotte della serie di ordine: $n = m$, sono lo sviluppo del binomio di Newton, ove per $n > m$ $\binom{m}{n} = 0$ ed anche, per $n > m$, le $f^{(n)}_{(x)} = 0$, infatti: $f^{(n)}_{(x)} = n!;(1+x)^{m-m} = 1 \cdot n! =$ costante, l'ulteriore derivata: $f^{(n+1)}_{(n)} = 0$. Quindi sono nulli gli ulteriori termini della serie.

II) Se "m" non è intero positivo, non si può più parlare di binomio di Newton; interessa invece sapere a quali condizioni lo sviluppo in serie di MacLaurin porta ad una serie convergente.

Calcoliamo il raggio di convergenza: $R_c = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} : \frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n)}{(n+1)!}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{m}{n}-1}\right| = \boxed{R_c = 1}$$

il che implica: $\boxed{-1 < X < +1}$, è possibile dimostrare che, in questo intervallo, $\lim_{n\to\infty}(R_n) = 0$, cioè che è nullo il limite del termine complementare (Cfr. G. Sansone "Lezioni di Analisi Matematica" Vol I, pag 288.) Quindi per "m" reale qualsiasi ed: $(-1 < x < 1)$ vale lo sviluppo in serie di MacLaurin (serie binomiale).

III Se "m" è intero negativo

$$(1+x)^{-m} = \frac{1}{(1+x)^m} = \left(\frac{1}{1+X}\right)^m = f(x) =$$

Si è ricondotto la formula ad "m" positivo:

$$f(0) = 1 \;;\; f' = m\left(\frac{1}{1+x}\right)^{m-1}\left(\frac{-1}{(1+X)^2}\right) =$$

$= -m\left(\frac{1}{1+x}\right)^{m+1}$; ove $f'(0) = -m(1)$; $f''(0) = m(m+1)(1)$; le derivate sono a segni alternati. Se $X>0$; $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{1+x}\right)^m = 0$;

La serie (vedi pag 104) risulterebbe convergente.

Calcolo delle radici ennesime

Nella serie binomiale scritta nella forma:

$$\boxed{(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \cdots \binom{m}{n}x^n + \cdots}$$

per "m" frazionario positivo: $0 < m < 1$; i simboli: $\binom{m}{n}$ non hanno il significato di m elementi di classe n, né tantomeno lo sviluppo di calcolo è il numero di combinazioni. Vediamo come risulta lo sviluppo di calcolo: per $\boxed{m = \frac{1}{2}}$

$$\binom{m}{1} = \binom{1/2}{1} = \frac{1}{2} \; ;$$

$$\binom{m}{2} = \binom{1/2}{2} = \frac{1/2\,(1/2 - 1)}{2!} = \frac{-1}{(2)(4)}$$

$$\binom{m}{3} = \binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{(1)\cdot(2)\cdot(3)} = \frac{+3}{(2)(4)(6)}$$

in generale:

$$\binom{m}{n} = \binom{1/2}{n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{(1)(3)(5)\cdots(2n-3)}{(2)(4)(6)\cdots(2n)}$$

Se chiamiamo: "Semifattoriale" (v. vol. I) il prodotto di tutti i numeri fino ad N, della stessa parità di N, e si indica con N!! (si legge semifattoriale N) avremo:

$$\boxed{\binom{1/2}{n} = (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}}$$

perciò:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \boxed{\sqrt{(1+x)} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1!!}{4!!}x^2 + \frac{3!!}{6!!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n}$$

Vale per: $-1 < x < 1$ come già dimostrato al II) pag. prec.

Però lo sviluppo in serie per radici emmesime, può estendersi anche a numeri $N > 1$; infatti per $\sqrt[m]{N}$ si cerca di scomporre: $N = a^m + R$, (con a abbastanza grande) avremo: $N = a^m\left(1 + \frac{R}{a^m}\right)$, ove: $\frac{R}{a^m} = x < 1$. ; $\boxed{\sqrt[m]{N} = a\sqrt[m]{1 + \frac{R}{a^m}}}$

La serie per il calcolo delle radici converge tanto più rapidamente, quanto è più piccolo x; se $x = 0$, il primo termine della serie è già esatto.

per $x = 0,4$ (intermedio fra zero ed 1) si ha:

$\sqrt{1+0,4} = \sqrt{1,4} = 1,183215957\ldots$ applicando la serie

$1 + \frac{0,4}{2} = 1 + 0,2 = \underline{\underline{1,2}}$ (al secondo termine)

$1,2 - \frac{1}{4!!}(0,4)^2 = 1,2 - \frac{4 \cdot \cancel{4}}{100 \cdot 2 \cdot \cancel{4}} = 1,2 - 0,02 = \underline{\underline{1,18}}$ (al terzo termine)

$1,18 + \frac{3!!}{6!!}(0,4)^3 = 1,18 + \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot 4}{1000 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{6}} = 1,18 + 0,004 = \underline{\underline{1,184}}$ (al IV termine)

$1,184 - \frac{5!!}{8!!}(0,4)^4 = 1,18 - \frac{\cancel{3} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot 4 \cdot 4}{10000 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{6} \cdot 8} = 1,184 - 0,001 = 1,183$. (al V termine)

....

Come si vede le ridotte della serie formano due classi contigue che si approssimano per difetto e per eccesso al valore cercato che è l'elemento separatore delle due classi contigue.

Se avessimo preso: $\sqrt{1 + 0,004} = \sqrt{1,004} = 1,001998004$

$1 + \frac{0,004}{2} = \underline{1,002}$ sarebbe già un'ottima approssimazione al secondo termine della serie, da cui la regola che, per x piccolissimo: $\boxed{\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{x}{2}}$ (in eccesso)

Serie di arcsen (x)

$f(x) = \text{arcsen}(x)$; $f'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$;

per la serie binomiale:

$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \binom{-\frac{1}{2}}{1}x^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{2}x^4 - \binom{-\frac{1}{2}}{3}x^6 + \dots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} x^{2n} + \dots$

quindi considerando le derivate successive:

$$\boxed{\text{arcsen}(x) = x + \frac{1}{2!!}\frac{x^3}{3} + \frac{3!!}{4!!}\frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)}}$$

vale per: $x < 1$.

Come per la serie logaritmica, anche qui dobbiamo considerare la limitazione: $-1 < \text{sen}\,\alpha < +1$ cioè $\boxed{-1 < X < +1}$ mentre: $\boxed{-\frac{\pi}{2} < \text{arcsen}(x) < +\frac{\pi}{2}}$ e che la serie è convergente per $\boxed{X < 1}$.

(Non sono reali valori del seno maggiori di 1)

Essendo: $\text{sen}(30°) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, posto $x = \frac{1}{2}$, potremo calcolare $\pi/6$:

$$\boxed{\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1!!}{2!!}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{3!!}{4!!}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2^5}\right) + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{1}{(2n+1)}\right)\left(\frac{1}{2^{(2n+1)}}\right)}$$

Questa serie converge assai lentamente e non è quindi conveniente per calcolare con buona approssimazione il valore di π.

Serie di arccos(x)

Ricordando che: $\cos(x) = \text{sen}(90° - x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \text{arcsen}(x) \quad \text{(vale per } |x|<1)$$

$$\boxed{\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{2!! \cdot 3} + \frac{3!! \cdot x^5}{4!! \cdot 5} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)} + \right)}$$

Serie di arctang(x) o Serie Ciclometrica

(calcolo di π)

$f(x) = \text{arctg}(x)$ (anche questa serie vale per $|x| \leq 1$).

cioè: $-\frac{\pi}{4} < \text{arctg}(x) < +\frac{\pi}{4}$

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)} = (1+x^2)^{-1} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 - 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = -2$$

Applicando Mac Laurin:

$$\boxed{\text{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{(2n-1)}}{(2n-1)} +}$$

ove per $x = 1$:

$$\boxed{\text{arctg}(1) = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)}}$$

anche questa serie, per il calcolo di π converge troppo lentamente.

La serie dell'arctg(x) $= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ fu ottenuta quasi contemporaneamente da: F. Gregory (1638-1675), e da G.W. Leibniz (1646-1716); la più importante deduzione per il calcolo di π è dovuta a J. Machin, ed è riferita da W. Jones (1675-1749) nel "Synopsis palmariorum matheseos," Londini 1706, p. 263. La formula di Machin è:

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{239}\right)}$$

da cui:

$$\boxed{\pi = 16\left(\frac{1}{1\cdot5^1} - \frac{1}{3\cdot5^3} + \frac{1}{5\cdot5^5} - \frac{1}{7\cdot5^7} + \dots\right) - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot239^3} + \frac{1}{5\cdot239^5} - \dots\right)}$$

Questa espressione è ancor oggi utilizzata per il calcolo di π mediante personal-computer.

Anche Eulero (1707-1783), dalla serie arctg(x) dedusse:

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + \mathrm{artg}\,\frac{1}{3}}$$

Newton (1642-1727) invece utilizzò la serie arcsen(x) per il calcolo di π ed ottenne:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot9} + \dots \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\cdot(2n+1)}$$

oppure:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot2^3} + \frac{3}{5\cdot2^4} + \frac{5}{7\cdot2^{11}} + \frac{5\cdot7}{9\cdot2^{14}} + \dots$$

che convergono lentamente.

Cerchiamo di capire come Eulero e Machin poterono trasformare la serie $arctg(x)$ nella somma o nella differenza di due serie, più rapidamente convergenti. Poniamo: $\boxed{\alpha = arctg(x)}$ $\boxed{x = tg(\alpha)}$

e ricordiamo che:

$$tang(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha_2}{1 - tg(\alpha_1)\,tg(\alpha_2)} = \frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2}$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2) = \boxed{arctg(x_1) + arctg(x_2) = arctg\left(\frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2}\right)}$$

Machin pose: $(x_1) = (x_2) = \frac{1}{5}$

$$2arctg\left(\frac{1}{5}\right) = arctg\left(\frac{1}{5}\right) + arctg\,\frac{1}{5} = arctg\left(\frac{1/5 + 1/5}{1 - 1/25}\right) =$$

$$= \boxed{2 \cdot arctg\,\frac{1}{5} = arctg(5/12)}$$

$$4 \cdot arctg\left(\frac{1}{5}\right) = arctg\,\frac{5}{12} + arctg\,\frac{5}{12} = arctg\left(\frac{5/12 + 5/12}{1 - \frac{25}{144}}\right) =$$

$$= \boxed{4\,arctg\left(\frac{1}{5}\right) = arctg\,(120/119)}$$

ma volendo $arctg(1) = \frac{\pi}{4}$

$$arctg\left(\frac{120}{119}\right) - arctg(1) = arctg\left(\frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}}\right) =$$

$$= arctg\left(\frac{1}{239}\right)$$

quindi:

$$arctg(1) = arctg\left(\frac{120}{119}\right) - arctg\left(\frac{1}{239}\right)$$

e sostituendo si ha la <u>formula di Machin</u>:

$$\boxed{\pi = 4\left(4\,arctg\left(\frac{1}{5}\right) - arctg\left(\frac{1}{239}\right)\right)}$$

Più facilmente si ricava la formula di Eulero

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}\right)$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{5/6}{5/6}\right) = \operatorname{arctg}(1)$$

da cui:

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)}$$

Il procedimento che abbiamo esposto per la formula di J. Machin può essere spinto ulteriormente suddividendo i due termini di arctg. ed i nuovi arctg possono ancora essere suddivisi ottenendo serie che convergono più velocemente, ma divengono più laboriosi i calcoli.

Un'altra formula ricavata da Eulero per il calcolo di $\frac{\pi}{4}$ è:

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 5 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{9}\right) + 2\operatorname{arctg}\left(3/79\right)}$$

Ma anche attualmente si è preferito la formula di Machin esprimibile:

$$\boxed{\pi/4 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\right)\left(\frac{4}{5^{(2n+1)}} - \frac{1}{239^{(2n+1)}}\right)}$$

L'importanza dello studio delle serie è data dal fatto che le serie permettono la definizione ~~ed~~ il calcolo di quella classe di numeri detti trascendenti. Non solo, ma anche il succedersi delle cifre di un numero periodico è esprimibile (come abbiamo visto) in serie di potenze del 10. Quindi la nostra numerazione decimale, in notazione algebrica diventa una serie, finita o infinita di termini. Per esempio:

$1243,25 = 1\cdot10^3 + 2\cdot10^2 + 4\cdot10^1 + 3\cdot10^0 + 2\cdot10^{-1} + 5\cdot10^{-2}$

$\frac{1}{3} = 3,3\bar{3} = 3(10^0 + 10^{-1} + 10^{-2} + \cdots 10^{-n})$ con $n \to \infty$

Se riuscissimo a trasformare le serie in modo che ciascun termine corrisponda alla cifra decimale di quella posizione, in altre parole se riuscissimo a trasformare le serie tutte in serie di potenze (del 10 od anche di un'altra base di numerazione) avremmo finalmente risolto l'annoso problema dei numeri trascendenti. A titolo di esempio riportiamo una sintesi della storia del calcolo di π.

Il calcolo di π

Fin dai tempi più antichi, il calcolo di π ha impegnato gli studiosi. Il problema era "la rettificazione della circonferenza" o "la quadratura del cerchio":

"Qual è 'l geometra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige",...

...... (Dante - Divina Commedia - Paradiso - canto XXXIII - versi 133-135).

Archimede (287 - 212 a.C.) col metodo dei poligoni inscritti e circoscritti alla circonferenza, usando poligoni con 96 lati, delimitò il valore di π, fra $3+\frac{10}{71}$ e $3+\frac{1}{7}$ cioè: $\boxed{\left(3+\frac{10}{71}\right) < \pi < \left(3+\frac{1}{7}\right)}$ in cifre decimali:

$$3,14084507\ldots < 3,1415926535\ldots < 3,142857143 .$$

Il valore: $\left(3+\frac{1}{7}\right) = 22/7$, ove: $\frac{\pi}{2} \simeq 11/7$ è stato praticamente usato dagli Architetti fin quasi ai giorni nostri.

Successivamente Tolomeo (150 d.C.) calcolò: $\underline{\pi \simeq 3,1416}$, e risulterebbe il valore più preciso calcolato in antico.

Nel (III sec d.C), Pappo e Diofanto, matematici Alessandrini, trattarono l'argomento; Pappo riferì la dimostrazione di Dinostrato (335 a.C.) sulla curva quadratrice che porta il suo nome. Diofanto che può definirsi un iniziatore della teoria dei numeri concepì come "numero" i "frazionari" ed i "relativi", trattò

i numeri poligonali. Il calcolo di π si avvaleva di nuo=
vi metodi: "Metodo delle aree"; Il metodo degli isoperi=
metri (applicato anche da Pappo); La spirale di
Archimede; Il metodo degli equivalenti; la curva
Cissoide di Diocle (II sec a.C), la concoide di Nicomede
(III-II sec. a.C), le lunule di Ippocrate. (V sec a.C), la
quadratrice di Dinostrato (IV sec a.c); la proprietà dei nu=
meri trattata da Nicomaco di Gerasa (II-I sec a.C); dimo=
strano la continuità dell'interesse al problema che
perdurerà fino a circa il V sec d.C. Poi, salvo
alcuni matematici arabi del VII-VIII sec d.C. la spe=
culazione matematica perde interesse. Leonardo
Fibonacci, pisano (1170-1250), introduce in Italia l'al=
gebra e l'aritmetica arabo-indiana, inizialmen=
te usata per conteggi commerciali, ma l'uso
della cifra "zero", con la notazione decima=
le, conquistò l'Europa; Il "Liber abbaci" del
Fibonacci è la base della nostra aritmetica.
Nel 1225 scrisse anche il "Liber quadratorum".
In toscana, di matematici, si trova Pier
della Francesca da Borgo S. Sepolcro (Arezzo),
(1416-1492) pittore e matematico scrisse sulla

prospettiva ed un'opera: "Libellus de quinque corporibus regolaribus" in cui usa la sezione aurea. Luca Pacioli pure di Borgo S. Sepolcro (1445-1515), amico di Leonardo da Vinci (1452-1519) scrisse il "De Divina Proporzione" con le illustrazioni disegnate da Leonardo. In questa opera a pagina LXXVII espone il calcolo delle piramidi a base tonda (coni). Considera un cono retto con diametro di base 7 ed altezza dieci ed esprime: "Haremo per la fuperficie dela bafa .38.$\frac{1}{2}$. qual multiplicato ...." Da ciò risulta evidente che al tempo di Luca Pacioli, si prendeva $\pi = 22/7$ infatti: $r^2\pi = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{22}{7} =$
$= 3.\frac{1}{2}$ per $11 = 38\frac{1}{2}$ che per 10 farà 385 e diviso per 3 darà il volume: $128.\frac{1}{3}$ (Si noti la parte decimale espressa in frazione).

Finché non si usarono le serie:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots \quad \text{(Gregory, 1671)}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \quad \text{(Eulero 1736)}$$

$$\pi = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \cdots\right) - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \cdots\right) \quad \text{(Machin 1706)}$$

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3}\right) \quad \text{(Sharp, 1717)},$$

non si avanzò nel calcolo di π.

Riassumendo:

(≃ 250 a.C)	Archimede	$\pi \simeq 3 + \frac{1}{7}$	(metodo dei poligoni)
(150 d.C)	Tolomeo	$\pi \simeq 3{,}1416$	" "
(1579)	Viète	calcola π con 10 cifre decimali	" "
(1593)	Romanus	" " 16 " "	" "
(1610)	Ceulen	" " 33 " "	" "
(1621)	Snell	" " 35 " "	(poligoni con 2^{30} lati)
(1699)	Sharp	" " 72 " "	(mediante serie)
(1706)	Machin	" " 101 " "	" "
(1794)	Vega	" " 137 " "	
(1844)	Dase	" " 201 " "	
(1853)	Rutherford	" " 441 " "	
(1873)	Stanks	" " 707 (solo 527 giuste)	

La ricerca di un maggior numero di cifre era dovuta alla speranza di trovare una periodicità od una legge che definisse il susseguirsi delle cifre. Ma nel 1882 F. Lindemann dimostrò che π è un <u>numero trascendente</u> e decadde il movente principale della ricerca. (Già Lambert (1728-1777) aveva dimostrato: "π è <u>irrazionale</u>")

L'avvento dei computer, i quali, opportunamente programmati, possono fare calcoli velocissimi, ma possono anche dare risposte logiche, su gruppi, insiemi, o frequenze di cifre, ha portato un rinnovato interesse al pro=

blema. Nel 1949 in America, col la calcolatrice ENIAC furono calcolate 2036 cifre in 70 ore di lavoro.
1954 calcolatrice NORC → 3093 cifre in 13 minuti!
1959 " IBM-704 → 10000 cifre 1 ora e 40 minuti.
oggi con un modesto personal computer si calcolano centinaia di cifre in pochi secondi e 10000 cifre in 5 ore. (Cfr. Frattali Flib di Silvana Bettelli e Romolo Biolchini, ed Zanichelli 1989)
(Cfr. rivista "Mathematics of Computation" l'articolo di D. Shanks e J.W. Wrench Jr "Calculation of π to 100.000-Decimals" (Gennaio 1962))
La possibilità di selezionare la frequenza delle cifre, ha portato ad una nuova denominazione di insiemi numerici e precisamente i numeri NORMALI
Un numero normale è definito dal fatto che ciascuna delle 10 cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0; compare in media una volta su dieci; ciascuna coppia come 27 o 99 compare in media una volta su 100; ciascuna tripletta 116, 270, 121 ecc compare in media una volta su mille: .... e così via.
I numeri normali furono introdotti dal matematico francese Émile Borel. Un suo contemporaneo olandese L.E.J. Brouwer, si pose il problema se mai, nell'espressione decimale di π figurano mille zeri consecutivi. (Problema ancor'oggi non risolto).

Lo studio dei numeri, che, via via nel tempo si è sviluppato, ha portato prima, per i numeri non esprimibili mediante frazioni, alla denominazione di numeri irrazionali, e quando anche le potenze di questi numeri non sono razionali, si hanno i numeri trascendenti. Il primo numero trascendente fu scoperto da J. Liouville nel 1851, ed è dato dalla serie:

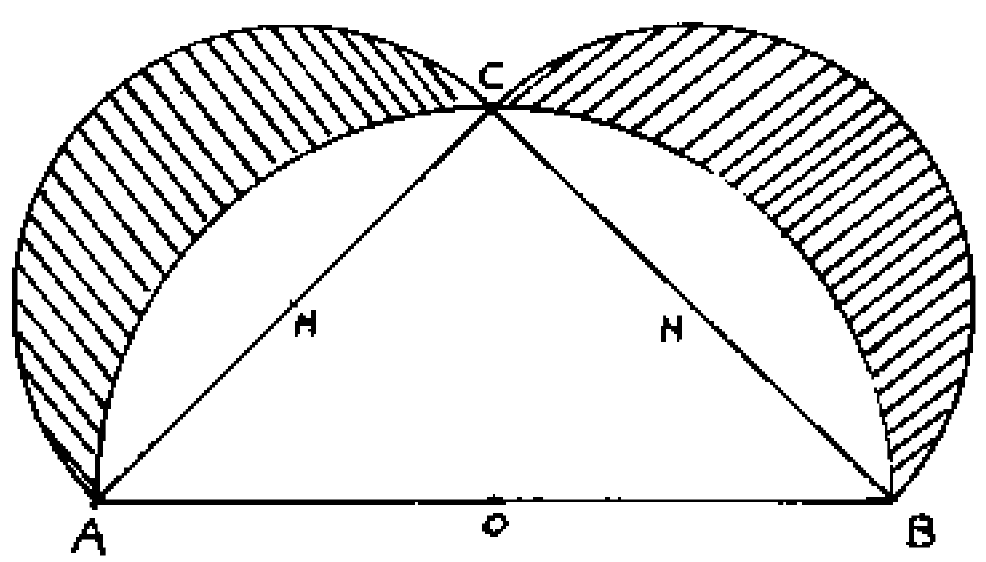
$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10^{1\cdot 2}}+\frac{1}{10^{1\cdot 2\cdot 3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{10^{n!}}$$

È evidente che nel numero di Liouville si può determinare una zona ove vi siano certe quantità di zeri consecutivi, o più di esse. In forma decimale il numero è $0,110001\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001\ 00\ldots$

(Esattamente cinque zeri consecutivi è impossibile fra due cifre 1, ma fra zeri 0, zero ed uno è possibile).

Per concludere sui numeri trascendenti consideriamo i coseni degli angoli del triangolo formato dal lato e dalle diagonali dell'ettagono ove $\alpha=\frac{\pi}{7}$;
$\beta=2\alpha=\frac{2\pi}{7}$; $\gamma=2\beta=4\alpha=\frac{4\pi}{7}$; $\alpha+\beta+\gamma=\pi\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{4}{7}\right)=\pi$
$\cos\alpha=0,9009688679024191$; $\cos\beta=0,6234898018587335$;
$\cos\gamma=-0,2225209339563144$. Ebbene: $(\cos\alpha)(\cos\beta)(\cos\gamma)=-\frac{1}{8}$
$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{10}{8}$; $\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma=\frac{1}{2}$. Come si vede da numeri trasendenti è possibile avere dei razionali.

Le lunule di Ippocrate

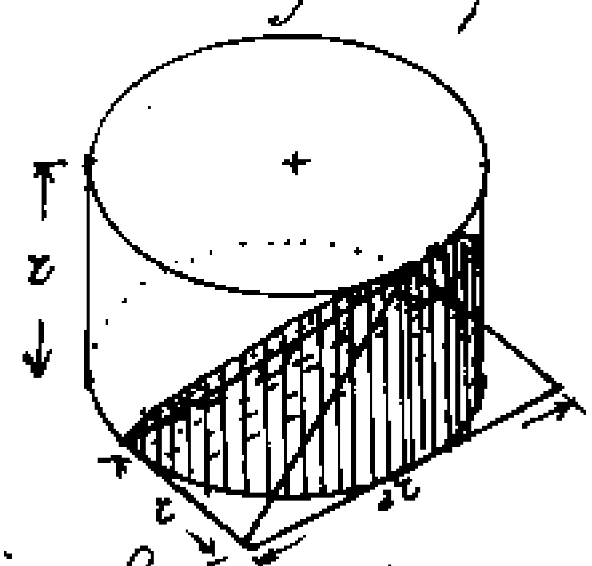


Tracciato il triangolo rettango isoscele: ACB, inscritto in una semicirconferenza, si traccino anche le semicirconferenze esterne al triangolo ed aventi per diametro i cateti $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, Le tre semicirconferenze delimitano due lunule, Se ℓ è la lunghezza di un cateto ed $\ell\sqrt{2} = \overline{AB}$
L'area di una lunula sarà: $A = \frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\pi - \left(\frac{1}{4}\left(\frac{AB}{2}\right)^2\pi - \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{2}\right)^2\right)$

$$A = \frac{\ell^2}{8}\pi - \left(\frac{\overline{AB}^2}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right) = \frac{\ell^2}{8}\pi - \left(\frac{2\ell^2}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right) = \frac{\ell^2}{4}$$

e l'area delle due lunule $= \frac{\ell^2}{2}$ equivalente al triangolo ACB (indipendente da π). Ciò elude π, ma non risolve il problema della quadratura del cerchio.

Analogo il problema della sezione di un cilindro



sezionato con un piano passante per un diametro di base ed inclinato sulla base di $45° = \pi/4$, è possibile dimostrare che il solido tratteggiato in figura ha per volume: $V = \frac{2}{3}r^3$, equivalente alla piramide a base rettangolare $r \times 2r$ ed altezza pari ad r. (Tuttociò indipendente da π)

Cenni di storia delle serie

Il primo a fare uso di serie fu Archimede, il quale, per calcolare l'area della parabola (Τετραγωνισμὸς παραβολῆς) usò la serie:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots$$

che noi definiremmo una somma di termini di una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{4}$, il cui valore: $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 \cdot \frac{1 - 1/4^n}{3/4}$; ed $S_\infty = a_1 \frac{1}{1-q} = \frac{4}{3}$.

Passeranno molti secoli, prima di ritrovare l'uso delle serie. Nel 1650 fu P. Mengoli per primo a riconoscere la divergenza della serie armonica. G.W. Leibniz, nel 1682 mise in evidenza l'esistenza di serie non assolutamente convergenti con la serie: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \pi/4$. A.L. Cauchy, nel suo: "Cours d'Analise de L'Ecol Polyt." ("Analyse algébrique" Paris 1821; tratta le serie anche a termini complessi. e porta il suo nome il criterio generale di convergenza. Tratta le serie doppie e sono sue molte definizioni attuali.

Integrazione per serie

Data una funzione $y=f(x)$ integrabile in un intervallo a,b, ove l'integrale ha un valore finito, tuttavia non esprimibile con una formula in termini finiti. In altre parole, coi metodi di integrazione che conosciamo, non riusciamo a risolvere l'integrale. (Per esempio: $\int \frac{e^x}{x}dx$).

In questi casi la $f(x)$ si sviluppa in serie i cui singoli termini sono integrabili.

Si abbia quindi la serie in x:

$$\boxed{S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)} \quad \text{(convergente in } a,b)$$

Si può dimostrare che:

$$\boxed{\int_a^x S(x)\,dx = \int_a^x u_1(x)\,dx + \int_a^x u_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^x u_n(x)\,dx + \cdots}$$

Per esempio:

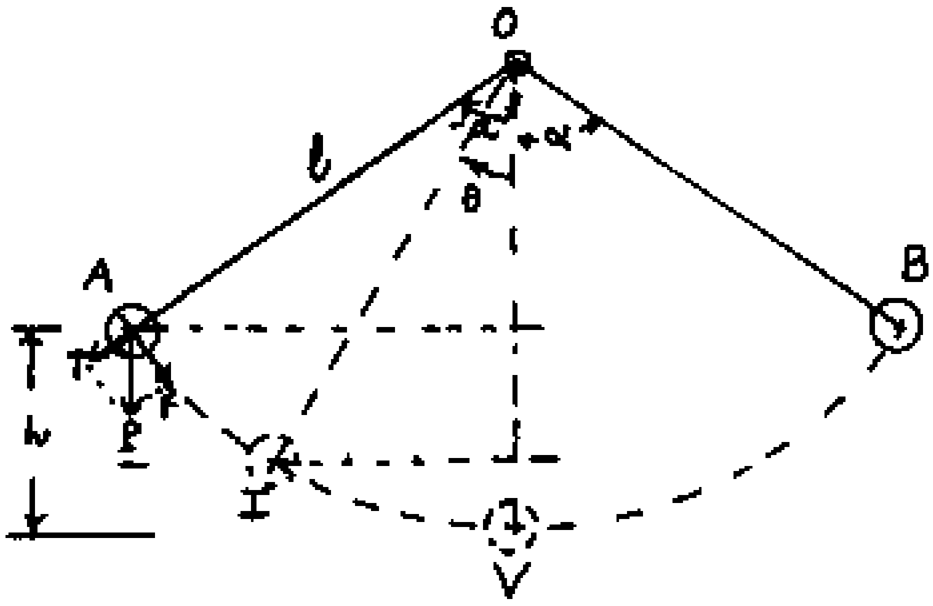
$$\int_a^x \frac{e^x}{x}dx = \int_a^x \frac{1}{x}dx + \int_a^x dx + \int_a^x \frac{x}{2!}dx + \cdots + \int_a^x \frac{x^n}{(n+1)!}dx + \cdots$$

$$\boxed{\int_a^x \frac{e^x}{x}dx = \ln\left(\frac{x}{a}\right) + \sum^{n=\infty}\left(\frac{x^n - a^n}{n!\,n}\right)}$$

A questo tipo di integrale si riduce anche l'integrale: $\int_b^x \frac{dx}{\ln(x)}$ infatti sostituendo $x=e^t$; $t=\ln(x)$

$a=\ln|b|$; $dx = de^t = e^t dt$; $\int_b^x \frac{dx}{\ln x} = \int_{\ln b}^{e^t} \frac{e^t dt}{t}$.

Il problema del pendolo



Si abbia un pendolo di lunghezza "l", fissato in O che oscilla, senza attriti da A a B, compiendo un angolo 2α, per ogni oscillazione semplice. (Si dice oscillazione completa quando da A il pendolo torna in A)

Consideriamo il pendolo in A al tempo t, e consideriamo: $-\alpha$ = l'angolo $\hat{VOA}$; $+\alpha$ = l'angolo $\hat{VOB}$; sia g l'accelerazione di gravità; avremo che la "forza peso" $P = mg$ può scomporsi in due direzioni ed avremo la forza T, che tende il filo del pendolo, e la forza F, tangenziale forza motrice. Il punto A abbia quota "h" rispetto a V; Cioè il lavoro disponibile =(energia potenziale), sarà $\mathcal{L}_0 = Ph = mgh$ ove: $h = l - l\cos\alpha$; $\boxed{h = l(1-\cos\alpha)}$

In un punto I, intermedio fra A e V, il peso P avrà compiuto il lavoro $\mathcal{L}_I = mgl(\cos\theta - \cos\alpha)$, ove $l(\cos\theta - \cos\alpha)$ rappresenta la perdita di quota che è proporzionale alla perdita di energia potenziale. Questa quota di energia potenziale si è trasformata in energia cinetica: $E_c = \frac{1}{2}mV^2$, ove V è la velocità tangenziale, o periferica, avente la direzione della forza F.(motrice).

la F sarà nulla quando la massa pendolare è in V, ove, tutta l'energia potenziale si sarà trasformata in cinetica, la velocità avrà raggiunto il massimo, ed il moto continuerà per la legge d'inerzia, essendo nulla la forza motrice. Per questo l'espressione: $\frac{1}{2}mV^2$ <u>è detta forza viva</u>. (molto meglio chiamarla energia cinetica)

La velocità periferica: $V = \omega l$, ove ω è la velocità angolare: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ avendo scelto θ come variabile oscillante da $-\alpha$ a $+\alpha$ e viceversa.

per cui: $\boxed{E_c = \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} = \boxed{mlg(\cos\theta - \cos\alpha) = L_i}$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha) \quad ; \quad \cos\theta = \left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right); \ \cos\alpha = \left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$\left(\frac{dt}{d\theta}\right)^2 = \frac{l}{2g}\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$$

$$\boxed{\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \ \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}}$$

Se indichiamo con T_1 il tempo impiegato per compiere una oscillazione semplice (da $-\alpha$ a $+\alpha$) e con $T = 2T_1$ <u>il periodo</u> o tempo impiegato a compiere una oscillazione completa, cioè se indichiamo <u>con f = frequenza</u>, = ogni quante unità di tempo il pendolo si ripresenta in A, avremo: $\boxed{f = \frac{1}{T}}$ (la frequenza è l'inverso del Periodo)

Dall'espressione: $\frac{dt}{d\theta}$ calcoliamo il periodo T.

$$\boxed{T = \int_0^T dt = \cancel{2}\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{l}{g}}\ \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}}$$

<u>operiamo un cambiamento di variabile:</u>

Consideriamo α come una costante e poniamo:

$\boxed{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = K}$ e poniamo: $\boxed{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = K \operatorname{sen}\varphi}$

deriviamo per trovare $d\theta$:

$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = K\cos\varphi\,d\varphi$ da cui: $d\theta = \frac{2K\cos\varphi\,d\varphi}{\cos\theta/2} =$

$$d\theta = \frac{2K\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{2K\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}}{\sqrt{1-K^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\,d\varphi$$; sostituendo:

si ha: $$T = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\int\left(\frac{2K\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}}{\sqrt{1-K^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{K^2-K^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\right)d\varphi$$

$$\boxed{T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2\operatorname{sen}^2\varphi}}}$$

Per i limiti di integrazione abbiamo attribuito a φ la massima elongazione, cioé $\operatorname{sen}\varphi = -1$; $\operatorname{sen}\varphi = +1$; (a filo teso per il pendolo). Si può anche scrivere:

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2\operatorname{sen}^2\varphi}} + \int_0^{+\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2\operatorname{sen}^2\varphi}}.\right]$$

I due integrali sono identici se consideriamo una $\varphi_1 = -\varphi$ perciò:

$$\boxed{T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - K^2 \text{sen}^2\varphi}}}$$

ove: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2\text{sen}^2\varphi}}$

è <u>un integrale ellittico di prima specie</u> nella sua forma canonica.

Per risolvere un integrale ellittico occorre fare lo sviluppo in serie; avremo:

<u>Sviluppo in serie</u>
<u>degli integrali ellittici di prima specie</u>

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2\text{sen}^2\varphi}} = \int_0^{\varphi} \left[1 - K^2\text{sen}^2\varphi\right]^{-\frac{1}{2}} d\varphi =$$

$$= \int_0^{\varphi} \left[1 + \frac{1}{2}K^2\text{sen}^2\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}K^4\text{sen}^4\varphi + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}K^6\text{sen}^6\varphi + \cdots\right] d\varphi$$

gli integrali dei singoli elementi della serie sappiamo calcolarli; per esempio:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2\text{sen}^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1!!}{2!!}\right)^2 K^2 + \left(\frac{3!!}{4!!}\right)^2 K^4 + \left(\frac{5!!}{6!!}\right)^2 K^6 + \cdots\cdots + \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 K^{2n}\right]$$

Nel pendolo se consideriamo α piccolo, allora $K = \text{sen}\,\alpha$ sarà piccolissimo, cosicché, in prima approssimazione, possiamo trascurare i termini in potenze di K. Quindi per le piccole oscillazioni il periodo sarà:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{\pi}{2} \quad \text{cioè:} \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

valida per oscillazioni complete; mentre:

$$\boxed{T_s = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$ vale per oscillazioni semplici.

Posto $T_s = 1$ sec. possiamo ricavare $l = \frac{g}{\pi^2}$ =

$l = \frac{9{,}81\,(m/sec^2)}{9{,}8696}$ = cm 99,396 (lunghezza del pendolo che "batte il secondo").

Se invece dalla stessa formula ricaviamo g

$g = l\,\frac{\pi^2}{T_s^2}$ possiamo misurare l'accelerazione di gravità. Per esempio: avendo un pendolo lungo 1 metro: $g = \frac{9{,}8696}{T_s^2}$, si misura il periodo T_s di una oscillazione semplice, o meglio si misura il tempo impiegato per compiere N oscillazioni $T_s = \frac{t}{N}$ per esempio 10 oscillazioni semplici in 10,2 sec. avremo $T_s = \frac{10{,}2}{10} = 1{,}02$; $T_s^2 = 1{,}0404$; $g = \frac{9{,}8696}{1{,}0404} = 9{,}486\ m/sec^2$ $\simeq 0{,}97$ l'accelerazione di gravità terrestre.

Sviluppo in serie dell'integrale ellittico di seconda specie

L'integrale ellittico di seconda specie, è riducibile alla forma:

$$\boxed{E_2(\varphi, K) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - K^2 \operatorname{sen}^2\varphi}\; d\varphi}$$

Sviluppando in serie l'integrando, si ha:

$$\left[1 - K^2 \operatorname{sen}^2\varphi\right]^{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{2}K^2 \operatorname{sen}^2\varphi - \frac{1!!}{4!!}K^4 \operatorname{sen}^4\varphi - \frac{3!!}{6!!}K^6 \operatorname{sen}^6\varphi - \dots\right);$$

$$E_2(\varphi, K) = \varphi - \frac{1}{2}K^2\int_0^{\varphi} \operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi - \frac{1!!}{4!!}K^4\int_0^{\varphi} \operatorname{sen}^4\varphi\, d\varphi - \frac{3!!}{6!!}K^6\int_0^{\varphi} \operatorname{sen}^6\varphi\, d\varphi - \dots$$

Gli integrali li sappiamo calcolare:

$$\int \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = -\cos\varphi + c$$

$$\int \operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi = \frac{-\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + \varphi}{2} + c$$

$$\int \operatorname{sen}^4\varphi\, d\varphi = \frac{3}{8}x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + c$$

- - - - - -

Da ciò è possibile calcolare gli integrali ellittici al variare di K e di φ.

Posto $K = \operatorname{sen}\theta$, diamo una tabella degli integrali ellittici utile per i calcoli.

Tabella degli integrali ellittici

($\theta = \text{arcsen}\,K$)

	$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2 \text{sen}^2\varphi}}$				$\int_0^\varphi \sqrt{1-K^2 \text{sen}^2\varphi}\, d\varphi$			
$\varphi \backslash \theta$	30	45	60	90	30	45	60	90
1	0.0175	0.0175	0.0175	0.0175	0.0175	0.0175	0.0175	0.0175
5	0.0873	0.0873	0.0873	0.0874	0.0872	0.0872	0.0872	0.0872
10	0.1748	0.1750	0.1752	0.1754	0.1743	0.1741	0.1739	0.1736
15	0.2625	0.2633	0.2641	0.2648	0.2611	0.2603	0.2596	0.2588
20	0.3508	0.3526	0.3545	0.3564	0.3473	0.3456	0.3438	0.3420
25	0.4397	0.4433	0.4470	0.4509	0.4330	0.4296	0.4261	0.4226
30	0.5294	0.5356	0.5422	0.5493	0.5179	0.5120	0.5061	0.5000
35	0.6200	0.6300	0.6408	0.6528	0.6019	0.5928	0.5833	0.5736
40	0.7116	0.7267	0.7436	0.7629	0.6851	0.6715	0.6575	0.6428
45	0.8044	0.8260	0.8512	0.8814	0.7672	0.7482	0.7282	0.7071
50	0.8982	0.9283	0.9647	1.0107	0.8483	0.8227	0.7954	0.7660
55	0.9933	1.0337	1.0848	1.1542	0.9284	0.8949	0.8588	0.8192
60	1.0896	1.1424	1.2125	1.3170	1.0076	0.9650	0.9184	0.8660
65	1.1869	1.2545	1.3489	1.5065	1.0858	1.0329	0.9743	0.9063
70	1.2853	1.3697	1.4944	1.7354	1.1632	1.0990	1.0266	0.9397
75	1.3846	1.4879	1.6492	2.0276	1.2399	1.1635	1.0759	0.9659
80	1.4846	1.6085	1.8125	2.4362	1.3161	1.2266	1.1225	0.9848
85	1.5850	1.7308	1.9826	3.1313	1.3919	1.2889	1.1673	0.9962
90	1.6858	1.8541	2.1565	—	1.4675	1.3506	1.2111	1.0000

I numeri immaginari complessi

Abbiamo già introdotto, nel primo volume il concetto di numero complesso e immaginario complesso, in particolare l'operatore immaginario i.
Vogliamo ora estendere quei concetti limitandoci alla geometria piana. (sistemi piani di vettori). Il calcolo vettoriale sarà sviluppato dopo aver trattato la geometria nello spazio tridimensionale.

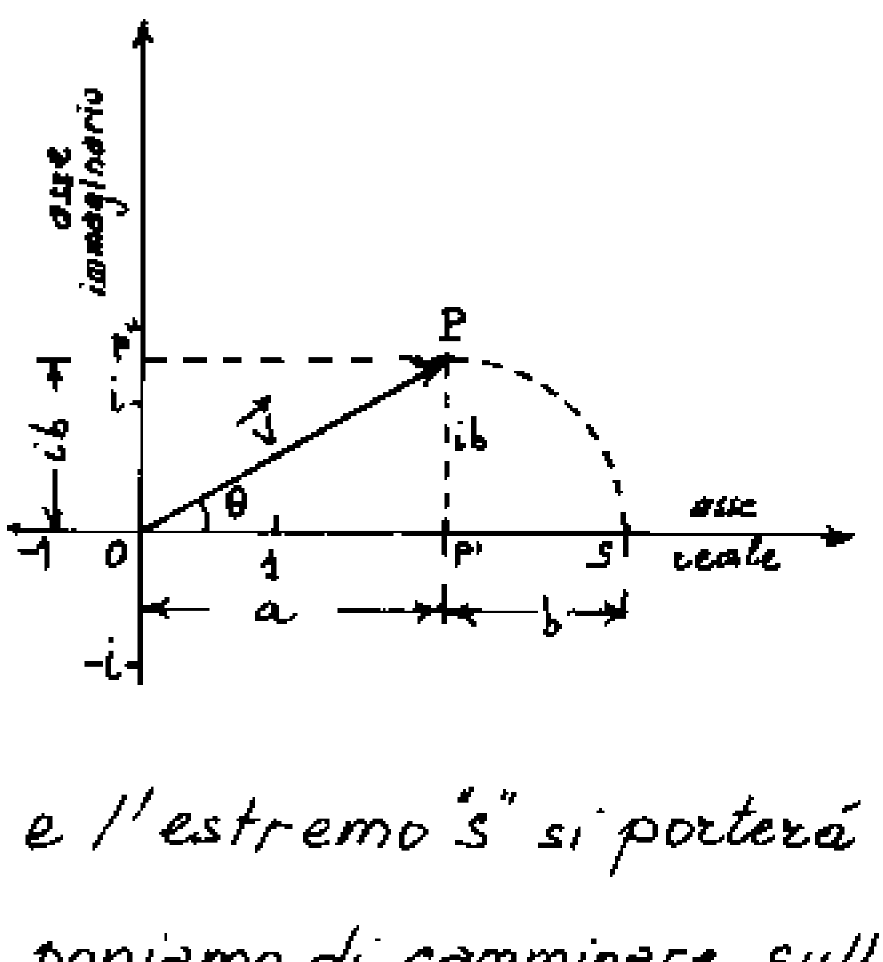
Abbiamo visto che tutti i numeri reali sono rappresentabili sull'asse reale; qualunque sia il punto fissato come origine, e qualunque sia la grandezza-modulo assunto come unità. (L'unità del segmento può essere 1 millimetro, come 1 Kilometro, o addirittura un anno luce ≅ 9461 miliardi di Km.). Ci domandiamo: "cosa cambia al variare del modulo unitario?" Prima di tutto occorre osservare che il dimensionamento del modulo unitario è relativo ad unità di misura convenzionali utili per definire la scala grafica di un disegno, ciò permette di ingrandire particolari minuti, o fare riduzioni per avere una visione generale dell'insieme (Prendere un anno luce come modulo, significa distinguere alla distanza di poco meno di 1mm. frazioni dell'ordine di 10^{-19}. Se invece come modulo prendiamo 1 mm., alla distanza di un millimetro si distinguono i numeri interi.)

È rilevante che, qualunque sia il <u>modulo unitario</u> scelto, esso rappresenti <u>lo stesso infinito</u> numero di punti; e che infiniti anni luce o infiniti millimetri portino a <u>quello stesso infinito</u> (indefinito) che esula dal nostro campo dimensionale. Così come un segmento è composto degli stessi infinito punti della retta; e la retta dello stesso infinito numero di segmenti. Questo tende a dimostrare come non sia diverso ∞^n da ∞; come: $1^n = 1$, come: $0^n = 0$.

La disputa dei matematici è interessante (vedi Vol. I).

Torniamo ai numeri immaginari complessi.

Se ad ogni punto dell'asse reale si fa corrispondere un numero reale, un punto P del piano cosa rappresenta? Se "a" e "b" sono due numeri reali, i segmenti che li rappresentano possono disegnarsi consecutivi sull'asse reale in modo che $\overline{OS} = a+b$. Moltiplichiamo "b" per "i"; o meglio applichiamo l'operatore "i" al segmento "b", esso ruoterà di $\pi/2 = 90°$



e l'estremo "S" si porterà in "P". Se partendo da "O" supponiamo di camminare sull'asse reale, quando arriviamo in "P'" avremo percorso il segmento $\overline{OP'} = +a$, e se continuiamo sulla stessa retta, quando arriviamo in "S" avremo percorso il segmento $\overline{OS} = \overline{OP'} + \overline{P'S} = ^{+}(a+b)$ numero reale. Se invece arrivati in P' percorriamo il segmento $\overline{P'P} = +ib$ arriveremo in P; complessivamente dall'origine abbiamo raggiunto la distanza $\overrightarrow{OP}$, <u>in direzione da 0 a P</u>; $\overline{OP} = \sqrt{a^2+b^2}$; mentre: $\theta = \text{arctg}(b/a)$.;

In effetti noi abbiamo percorso i segmenti $(a+ib)$ che rappresentano un numero immaginario complesso di modulo: $\sqrt{a^2+b^2}$ ed argomento θ.

É qui importante rilevare che percorrendo l'asse reale si considerano segmenti rappresentativi di quantitá numeriche qualificate ed affette dal segno + (piú) o −(meno) a seconda che il verso di percorrenza sia concorde od opposto al verso dell'asse reale.

Percorrendo invece segmenti determinanti numeri immaginari complessi, non solo si hanno intensitá rappresentate dai moduli ed affette da segno dipendente dal verso di percorrenza, ma queste quantitá sono anche caratterizzate <u>dalla direzione</u> determinata dall'angolo θ. Chiameremo quindi <u>"scalari"</u> quelle grandezze dimensionali definite solo dalla quantitá qualificata affetta da segno: (come i volumi: $\pm N\, m^3$ o lavoro o energia: $\pm N$ KWh).

Chiameremo invece <u>vettoriali</u> quelle grandezze che per essere definite necessitano anche <u>della direzione</u>, oltre ché della quantità qualificata affetta dal segno (per esempio: le velocità (N m/sec in direzione Nord.; la pressione; i campi magnetici, i campi elettrici, ecc.). In sintesi, nel campo dei numeri relativi, un numero reale è <u>uno scalare</u>, un numero immaginario complesso è <u>un vettore</u>.

$\vec{V}$ = simbolo della grandezza vettoriale

$|V| = \sqrt{a^2+b^2}$ = <u>modulo</u> scalare del vettore

$\theta = \operatorname{arctg}(b/a)$ = <u>argomento</u> del vettore

notiamo che:

$$\left.\begin{array}{l} a = |V| \cos(\theta) \\ b = |V| \operatorname{sen}(\theta) \end{array}\right\} = \text{le componenti del vettore piano}$$

Però meglio chiamare vettori le grandezze che tratteremo in campo tridimensionale, e denominare queste grandezze: <u>Numeri Complessi</u> che indicheremo col simbolo Z e talvolta con $\vec{V}$ Essi possono rappresentarsi

$\vec{V} = (P-O)$ = forma geometrica del vettore

$Z = (a+ib)$ = " binomia

$Z = |Z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ = forma trigonometrica

$Z = |Z|(e^{i\theta})$ = forma esponenziale.

(abbiamo già dimostrato che $e^{i\theta} = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.

Si osservi che $Z=(a+ib)$ equivale al <u>segmento orientato</u> uscente dall'origine degli assi. Se chiamiamo "x" l'asse reale, ed "y" l'asse immaginario, "a" è l'ascissa "x", mentre "b" è l'ordinata y del punto: $P=(a,b)$. L'insieme di tutte le coppie ordinate di $x \in X$, ed $y \in Y$, (il simbolo $\in$ si legge: "appartenente ad:") dicesi <u>Prodotto Cartesiano</u> e rappresenta tutti i punti del piano x, y. A ciascuno di essi è connesso un numero; reale se il punto giace sulla x, immaginario puro se giace sulla y, ed immaginario complesso per tutti i restanti punti del piano. Vi è quindi un parallelo fra le coordinate cartesiane e l'espressione binomia complessa.

<u>Operazioni sui numeri complessi</u>

<u>Somma</u>: $(a+ib)+(c+id) = ((a+c)+i(b+d))$

<u>Differenza</u>: $(a+ib)-(c+id) = ((a-c)+i(b-d))$

<u>prodotto</u>: $(a+ib)(c+id) = ac+ibc+iad-bd$

$$= ((ac-bd)+i(bc+ad))$$

Il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso che ha come parte reale la differenza fra il prodotto delle parti reali ed il prodotto dei coefficienti immaginari, e per coefficiente immaginario la somma dei prodotti fra la parte reale dell'uno ed il coefficiente immaginario dell'altro scambievolmente.

Quoziente: $\dfrac{(a+ib)}{(c+id)} = \dfrac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \dfrac{(ac+bd)-i(ad-bc)}{(c^2+d^2)}$

$$\boxed{\frac{(a+ib)}{(c+id)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+b^2}\right) + i\left(\frac{bc-ad}{c^2+b^2}\right)}$$

Due numeri complessi si dicono <u>coniugati</u> quando hanno uguali le parti reali ed opposti i coefficienti immaginari. Per esempio: $(a+ib)$ ed $(a-ib)$ per essi è reale sia la somma, sia il prodotto infatti: $(a+ib)+(a-ib) = 2a$.
$(a+ib)\cdot(a-ib) = a^2+b^2 = (|V|)^2$.

reciproco: $\dfrac{1}{a+ib} = \dfrac{1\ (a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$

$$\boxed{\frac{1}{(a+ib)} = \frac{a}{(|V|)^2} - i\frac{b}{(|V|)^2}}$$

$$\boxed{\frac{1}{(a-ib)} = \frac{a}{(|V|)^2} + i\frac{b}{(|V|)^2}}$$

quadrato: $(a+ib)^2 = (a^2-b^2) + i(2ab)$

Queste operazioni possono essere eseguite anche se i numeri complessi sono espressi in forma diversa:

$$|U|(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) \pm |V|(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta) = (|U|\cos\alpha \pm |V|\,\text{sen}\,\beta) + i(|U|\,\text{sen}\,\alpha \pm |V|\,\text{sen}\,\beta)$$

$|U|e^{i\alpha} \pm |V|e^{i\beta}$ (non è sviluppabile in questa forma)

$$|U|(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)\cdot|V|(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta) = |U||V|\left[(\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta) + i(\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta + \text{sen}\,\alpha\cos\beta)\right]$$

$$= |U|\cdot|V|\left[(\cos(\alpha+\beta) + i\,(\text{sen}(\alpha+\beta))\right]$$

$$\boxed{(|U|e^{i\alpha})(|V|e^{i\beta}) = |U||V|\,e^{i(\alpha+\beta)}}$$

si noti la sintesi della forma esponenziale:

$$\boxed{|u|e^{i\alpha} / |v|e^{i\beta} = \frac{|u|}{|v|} e^{i(\alpha-\beta)}}$$ da questa:

$$\boxed{\frac{|u|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)}{|v|(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)} = \frac{|u|}{|v|}\Big(\cos(\alpha-\beta) + i \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\Big)}$$

$$\boxed{\frac{1}{|v|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} = \frac{1}{|v|}(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)}$$

$$\boxed{\frac{1}{|v|e^{i\theta}} = \frac{1}{|v|} e^{-i\theta}}$$

Potenza di un numero complesso

Conviene ovviamente usare la forma esponenziale:

$$\boxed{\left(|v|e^{i\theta}\right)^n = |v|^n \cdot e^{in\theta}} \qquad \boxed{(a+ib)^n = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{in\arctg(b/a)}}$$

$$\boxed{\Big[|v|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\Big]^n = |v|^n\Big(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)\Big)}$$

<u>La potenza di un numero complesso è un numero complesso che ha per modulo la potenza del modulo, e per argomento tante volte l'argomento quant'è l'esponente.</u>

Questa regola è valida anche per esponenti frazionari (razionali) cioè per le radici.

Formula di Moivre

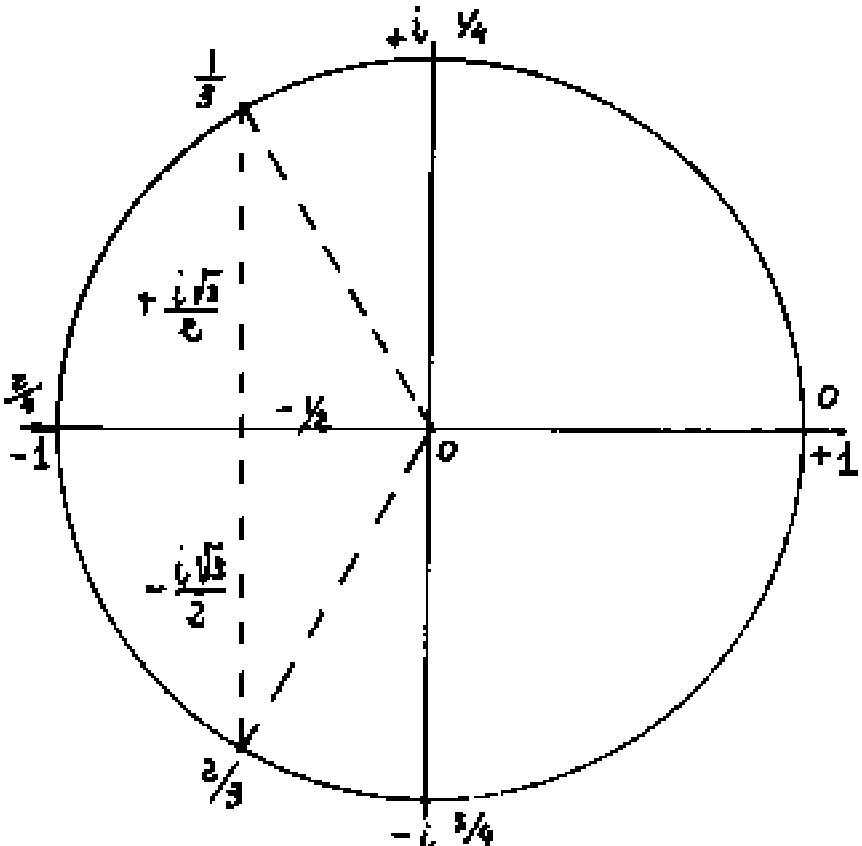
Sia $|z|$ il modulo di un numero immaginario complesso, l'espressione:

$$\boxed{\left[|z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)\right]^{m/n} = |z|^{m/n}\cdot\left(\cos\left(\frac{m\theta}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{m\theta}{n}\right)\right)}$$

è detta formula di Moivre ed è usata per il calcolo delle radici ennesime di un numero complesso. In particolare per la radice quadrata:

$$\boxed{\sqrt{|z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)} = \sqrt{|z|}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\right)}$$

Le radici ennesime dell'unità

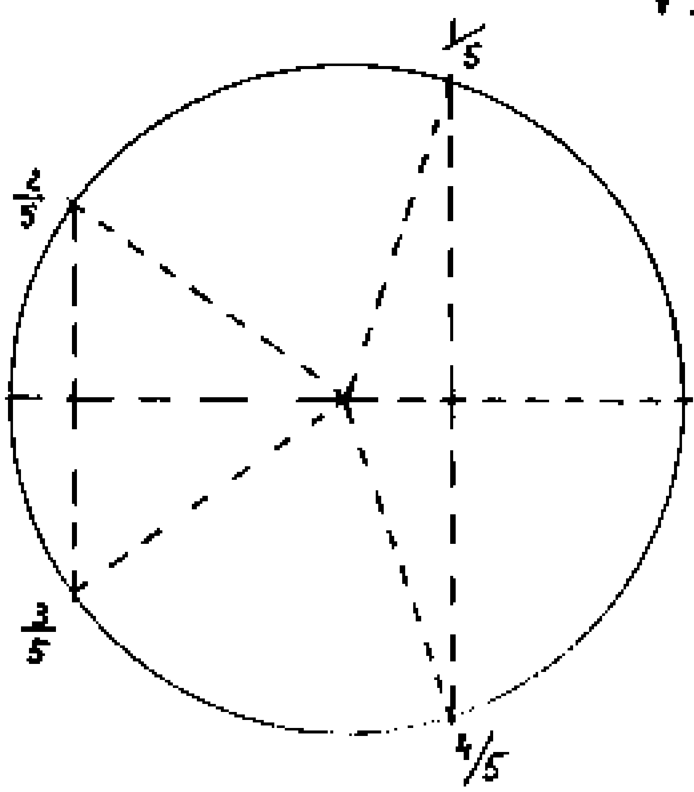


Si traccia, al centro assi, un cerchio di raggio unitario. Si divide la circonferenza in tante parti quante l'indice di radice, questi punti espressi in numeri complessi sono le radici dell'unità il cui modulo: $|1|$ non varia con l'indice di radice.

$$\sqrt{1} = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \quad ; \quad \sqrt[3]{1} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad ; \quad \sqrt[4]{1} = \begin{cases} +1 \\ +i \\ -1 \\ -i \end{cases}$$

Disponendo di tavole trigonometriche la formula di Moivre è di grande ausilio per le espressioni bi=

nomie per esempio: $(1)^{1/5}$ avremo: $\frac{360°}{5} = 72°$; o.
$72° \cdot 1 = 72°$; $72° \cdot 2 = 144°$; $72° \cdot 3 = 216°$; $72° \cdot 4 = 288°$



$\sqrt[5]{1} = \cos(0) + i \,\text{sen}(0) \;\simeq\; 1$ (radice reale)

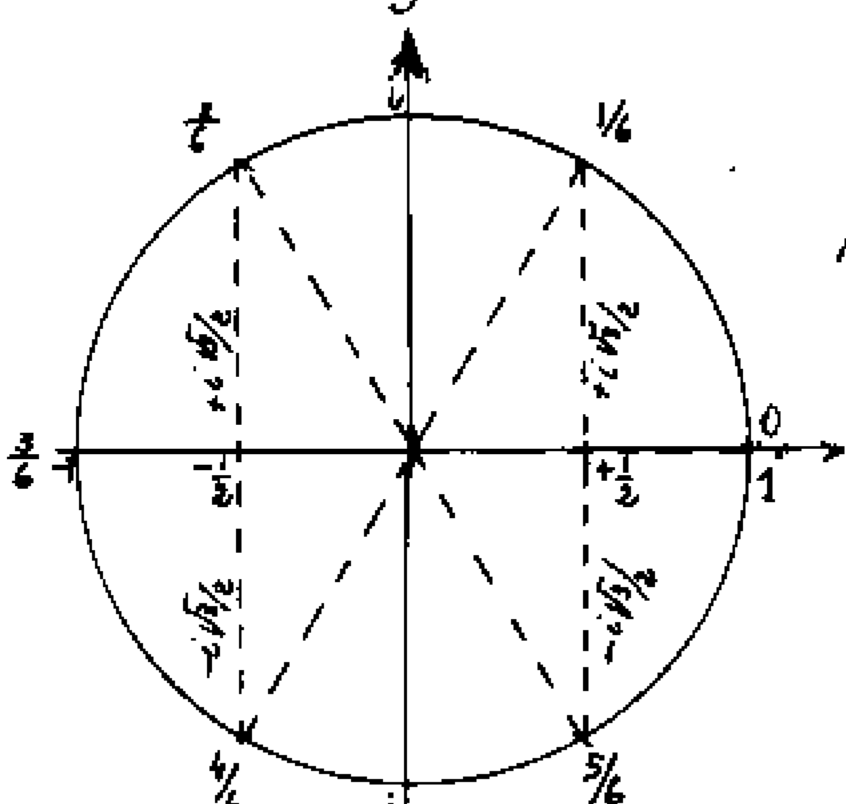
$= \cos(72°) + i\,\text{sen}(72°) \;\simeq +0.30902 + i\,(0,95106)$

$= \cos(144°) + i\,\text{sen}(144°) \;\simeq -0,80902 + i\,(0,58779)$

$= \cos(216°) + i\,\text{sen}(216°) \;\simeq -0,80902 - i\,(0,58779)$

$= \cos(288°) + i\,\text{sen}(288°) \;\simeq +0,30902 - i\,(0,95106)$

Il procedimento puó essere esteso ad indici di radice piú grandi in particolare se l'indice é n; $\frac{2\pi}{n}$ deve essere moltiplicato per ($m = 1, 2, 3, \ldots n-1$) mentre per la prima radice l'angolo é $0 = 2\pi$.



Per la radice sesta dell'unitá si possono scrivere i suoi valori direttamente.

$\sqrt[6]{1} = +1$

$= +\frac{1}{2} + i\,\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$= -\frac{1}{2} + i\,\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$= -1$

$= -\frac{1}{2} - i\,\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$= +\frac{1}{2} - i\,\frac{1}{2}\sqrt{3}$

I sistemi di riferimento

Fissare un punto nello spazio, significa riferire la sua posizione a qualcosa di immutabile. Consideriamo un osservatore ed un punto nello spazio, uniamo idealmente questo punto con la pupilla dell'osservatore e supponiamo di conoscerne la distanza $\overline{OP}$, ciò consente di determinare la posizione di tutti i punti sulla retta $\overline{OP}$ assumendo come unità positiva la distanza $\overline{OP}$ nel verso da O a P. e negative le distanze misurate in verso opposto. In questo caso ad ogni numero reale relativo corrisponde un punto su $\overline{OP}$. Supponiamo ora di conoscere un secondo punto Q; resta determinato il piano POQ e quindi la perpendicolare a tale piano. Ma affinché Q sia veramente determinato occorre conoscere, non solo la distanza $\overline{OQ}$, ma anche l'angolo $P\hat{O}Q$, e se tale angolo è alla destra o alla sinistra dell'osservatore che guarda P. A ciò è connesso il verso della verticale per "O" al piano. Supponiamo di aver tracciato su un foglio una retta orientata $\overrightarrow{Ox}$, (con x variabile); una retta $\overrightarrow{Oy}$ può orientarsi in due modi diversi, cioè in modo che la retta $\overrightarrow{Ox}$ ruoti antiorario per sovrapporsi ad $\overrightarrow{Oy}$ con versi concordanti, oppure ruoti orario. (è il verso di rotazione dell'ope=

ratore "i") Quindi per determinare un punto nel piano, avremo la <u>sequenza</u> di due numeri: $A \equiv (x_A, y_A)$. ed anche: $\overrightarrow{OA} = x_A + i\,y_A$.

Al parallelo fra <u>la forma binomia di un numero complesso e le coordinate cartesiane ortogonali, corrisponde il parallelo fra la forma esponenziale, dello stesso numero complesso, e le coordinate polari.</u>

Il modulo $|\overline{OA}| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$ e l'argomento: $\theta_A = \operatorname{arctg}\left(\frac{y_A}{x_A}\right)$ $\left(\overrightarrow{OA} = |\overline{OA}|\, e^{i\theta_A}\right)$; Possono univocamente determinare tutti i punti del piano.

Ma l'uomo non dispone di una "<u>direzione</u>" privilegiata sulla quale disporre il suo "<u>asse reale</u>", le cose quindi si complicano quando dal sistema piano si passa al sistema tridimensionale, o addirittura ennedimensionale. Assunta una direzione (arbitraria) e su una retta, orientata in tale direzione, fissiamo un punto origine (arbitrario); supponiamo che questa retta sia l'asse di rotazione del suo intorno; L'intorno può ruotare in due versi opposti, per distinguerli ci si avvale del <u>verso</u> della retta orientata. (Due persone che si trovano da bande opposte ad una vetrata trasparente, ed una ~~ene~~ traccia sul vetro una circonferenza muovendosi in verso orario, cioè come lui vede muovere le lancette dell'orologio, l'altra persona vedrà tracciare la circonferenze in verso antiorario, cioè opposto a come vede muovere le lancette dell'orologio. Del resto se l'orologio fosse trasparente, visto dal di sotto, vedremmo muovere le lancette in verso opposto.

Questa semplice relatività dell'osservatore, ha portato ad una non ammirevole confusione in vari testi di meccanica razionale, di analisi, di geometria, ed altri.

Se abbiamo per asse di rotazione, una retta orientata, noi dobbiamo guardare la rotazione del suo intorno ponendo l'occhio dalla parte della punta della freccia che indica il verso della retta, e guardandolo verso la coda, $\longrightarrow$ se vediamo l'intorno della retta muoversi come le lancette dell'orologio, cioè come chi legge vede questo verso di rotazione: $\circlearrowright$, diremo il moto Orario. Se invece vediamo l'intorno della retta muoversi: $\circlearrowleft$, diremo il moto antiorario.

Anche questa è una convenzione, ed è generalmente accettata. Con molta umiltà dobbiamo riconoscere che l'uomo per definire per quale verso ruota un corpo deve: fissare un verso arbitrario all'asse di ruotazione, ed una posizione (arbitrariamente convenuta) per l'osservatore, non basta! Deve paragonarlo ad un movimento che si ritiene noto!

Cerchiamo di capire meglio questo argomento fondamentale, facendone un po' di storia, al fine di evitare perplessità a chi legga testi di anni passati.

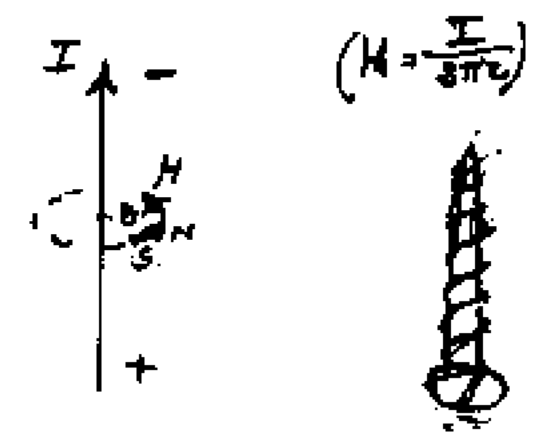
Consideriamo un uomo, in piedi, al centro di un grande orologio orizzontale; egli vede apparire le lancette dell'orologio alla sua sinistra e le vede dirigersi verso la sua destra. Così come un uomo nell'emisfero nord della terra, che guardi verso sud, vede "sorgere" il sole e le stelle alla sua sinistra e li vede dirigersi e tramontare alla sua destra. Un tale moto fu chiamato: <u>sinistrorso</u> perché <u>"sorto"</u> a sinistra o anche <u>destrogiro</u> perché <u>gira</u> verso destra. I latini usavano il verbo: <u>orior</u> per <u>sorgere</u>; Ovidio, nei Tristia: ..."Lucifer <u>ortus</u> erat" = "La stella Venere era <u>sorta</u>". Da ciò la <u>convenzione</u> di chiamare: <u>destrorso</u> o <u>sinistrorso</u> un vento che proveniva <u>da destra</u> o <u>da sinistra</u>. Si aveva cioè, per le ruotazioni: orario = destrogiro = sinistrorso; o, antiorario = sinistrogiro = destrorso. Purtroppo alcuni fecero confusione credendo: sinistrorso = sinistrogiro = antiorario. Sorsero dispute e vennero <u>i "dotti"</u> i quali, senza tener conto che le denominazioni sono solo <u>"convenzioni"</u>, fecero notare che la desinenza <u>"orso"</u> non deriva <u>da "orior"</u>, ma da <u>"adversus"</u> che significa: <u>"rivolto verso"</u> e quindi: sinistrorso = sinistrogiro !!... Se avessero letto i classici avrebbero notato che i due termini erano usati come opposti. (Forse erano dotti solo in latino). Cfr. Levi-Civita-Amaldi, compendio di Meccanica Razionale - Zanichelli - Bologna - 1965 parte II pag. 5 (nota).

Lasciamo perdere le discussioni fra scienziati.

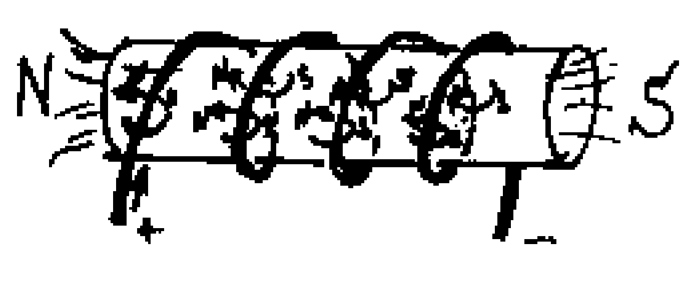
Noi consideriamo una particella infinitesima, (non un punto) che si muova di moto comunque complesso, essa, istante per istante avrà una traslazione secondo una retta orientata (tangente alla traettoria) ed una ruotazione intorno ad un asse, pure orientato, per definire il verso di rotazione.

In generale la retta e l'asse di rotazione non sono coincidenti, inoltre variano istante per istante. <u>Se fossero coincidenti</u> e non mutassero direzione, si avrebbe il moto della vite nella madrevite (il dado) che può essere "destrogira" (come le viti di uso comune, dette appunto destrogire) oppure sinistrogira (come certe viti autobloccanti). Supponiamo di avere un bullone con dado a vite destrogira, e di volerlo avvitare nel bullone, a noi osservatori appare come se la mano destra e la mano sinistra si muovano di verso opposto, però se prendiamo un orologio a lancette, sia la mano destra che la mano sinistra, a cui si rivolge l'orologio, operano un movimento orario tendente ad anticipare la posizione delle lancette e ciò perchè l'orologio una volta è affacciato alla mano destra e l'altra volta è affacciato alla mano sinistra.

La vite destrogira si allontana dall'osservatore che la vede muovere con rotazione oraria, e si avvicina all'osservatore che la vede muovere con rotazione antioraria. Ricordiamo l'esperienza di Oersted, e la legge di Biot e Savart: "Una corrente elettrica, in un conduttore rettilineo, considerata nel verso "convenzionale" dal polo positivo al polo negativo, genera un campo magnetico che ruota intorno al conduttore, "convenendo" che il verso del campo magnetico sia dal polo sud, al polo nord; avremo che i due moti: quello di traslazione della corrente I, e quello di ruotazione del

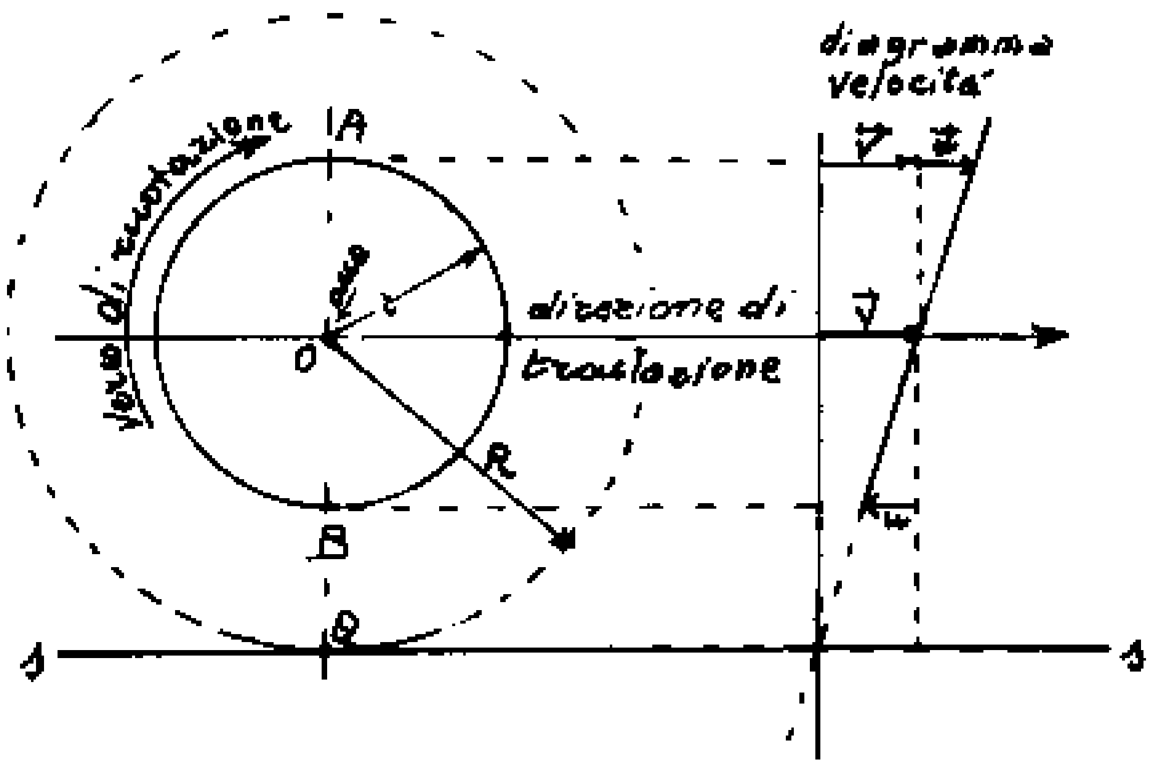


campo magnetico H corrispondono complessivamente al moto di avvitamento della vite destrogira. Con ciò appare chiaro da quale parte sarà il Nord della calamita ottenuta da un avvolgimento a solenoide, di un conduttore di corrente, attorno ad un nucleo ferromagnetico. (v. figura).



Si noti che il verso di avvitamento o svitamento, fra vite e madrevite, è un movimento mutuo, e pertanto indipendente dall'osservatore e dal sistema di riferimento.

Vediamo ora il caso che <u>la retta orientata</u> del moto di traslazione della nostra particella e <u>l'asse di rotazione della particella stessa</u> <u>siano perpendicolari</u>; e che la retta e l'asse <u>si incontrino in un punto interno</u> di <u>un corpo di dimensioni finite</u>, ove si trova la nostra particella infinitesima. Per semplicità consideriamo sferico il corpo.



I punti sull'asse di rotazione sono affetti solo da moto traslatorio (non hanno velocità periferiche di direzione diversa) e sia $\vec{V}$ questa velocità media. Però ad un punto come A occorre aggiungere la velocità di traslazione $u = \omega r$ ove "r" è la distanza da O ed ω la velocità angolare; mentre al punto B, tale velocità va tolta. Se facciamo il diagramma delle velocità nella direzione di traslazione, notiamo che esiste un punto Q la cui velocità è istantaneamente nulla, cioè è come se la sfera di diametro: $\overline{AB} = 2r$ fosse concentrica e solidale con una sfera di raggio $\overline{OQ} = R$ che rotola senza strisciare sulla retta ss. Cioè la normale per Q alla ss, è un'<u>asse di rotazione istantaneo</u> con velocità angolare $\omega_Q = V/R = \omega$. (cioè <u>la velocità angolare è invariante</u> con gli assi)

– Se la direzione di traslazione, e la direzione di ruotazione (possiamo dire "direzione di rotazione" perché l'asse di rotazione può spostarsi parallelamente a se stesso, e deve essere orientato per decidere il verso di rotazione, noi abbiamo convenuto per direzione di rotazione la direzione di avanzamento o avvitamento della vite destrogira), formano un angolo qualsiasi diverso da zero e da $\pi/2$, si può sempre scomporre la direzione di rotazione in due direzioni, una parallela ed una perpendicolare alla direzione di traslazione. Se θ è l'angolo delle due direzioni ed ω la velocità angolare

$$\omega_t = \omega \cos\theta = \text{moto di avvitamento}$$

$$\omega_m = \omega \,\text{sen}\,\theta = \text{moto di rotolamento.}$$

– Se scomponiamo la velocità $\vec{V}$ in direzione normale e parallela alla direzione di rotazione avremo

$$\vec{V}_s = \vec{V}\cos\theta = \text{avanzamento dell'avvitamento}$$

$$\vec{V}_m = \vec{V}\,\text{sen}\,\theta = \text{avanzamento del rotolamento}$$

Fra gli infiniti assi paralleli alla direzione di rotolamento, si è dimostrato che vi è un asse per il quale $\vec{V}_m$ è zero (o minima) questo asse è detto asse di Mozzi. Le direzioni di traslazione e di ruotazione determinano una giacitura di piani paralleli cioè una terza direzione normale alle altre due.

Se con "r" indichiamo la retta del moto di traslazione

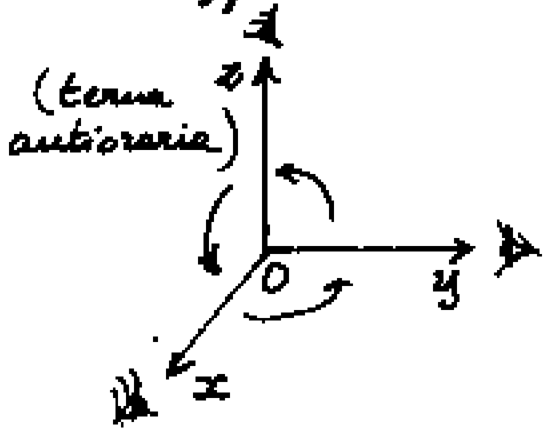
con n la normale ad essa

con t la normale al piano r, n.

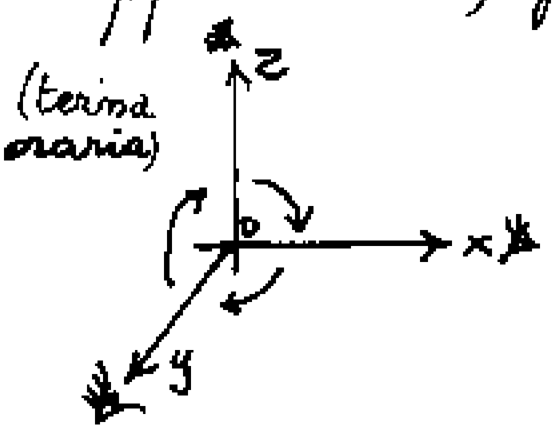
Supponiamo che r ed n si incontrino in C e per C tracciamo t. Sia "O" il punto di t in cui é nulla la traslazione. Il punto "O" sarà fisso, e possiamo introdurre la geometria come: "Una meccanica senza tempo tinta.

Terne destrogire e terne sinistrogire

Nei testi di meccanica razionale, si tiene a porre in evidenza la differenza fra una terna cosiddetta oraria o destrogira ed una terna antioraria o sinistrogira; però difficilmente specificano la posizione dell'osservatore.



Data la terna Oxyz con la precisa sequenza: prima "x", poi "y", poi "z" é detta antioraria o sinistrogira se guardando dalla punta della "Z" verso x y, vediamo la x ruotare antiorario per sovrapporsi ad "y"; guardando dalla punta delle "X" vediamo y ruotare antiorario per sovrapporsi a "Z"; guardando da y vediamo Z ruotare antiorario per tornare ad x. Viceversa si



vedono moti orari di x per andare su y di y su z e di z su x per terne orarie.

La direzione

Noi utilizzeremo la nostra terna: oxyz, detta antioraria o sinistro gira, nata dal parallelismo con la terna: c r n t, ove i <u>moti apparenti</u> dipendenti dalla posizione dell'osservatore non hanno influenza perché <u>nata su definizioni di moto indipendenti dall'osservatore</u> (Vedi pag. prec.).

In particolare quando diciamo "<u>direzione: x</u>" intendiamo l'insieme di tutte le rette parallele ed equiverse all'asse X. Analogamente per la "<u>direzione: y</u>", "<u>direzione z</u>", e qualunque altra "<u>direzione n</u>".

Non ha senso dire: "un punto all'infinito", (anche se sarebbe comodo pensarlo come determinante una direzione). Consideriamo due punti diversi A e B in campo finito, dai quali si collimi in direzione di un terzo punto C sull'asse del segmento $\overline{AB}$. Il segmento $\overline{AB}$ <u>finito</u>, può essere anche molto grande, ma fisso e determinato. Facciamo allontanare "C" (sull'asse) perpendicolarmente, dalla base $\overline{AB}$, via, via che "C" si allontana, l'angolo $A\hat{C}B$ è sempre più piccolo; sia $A\hat{C}B = \varepsilon$, avremo che per distanze molto grandi: $R\varepsilon \cong \overline{AB}$ cioè $\varepsilon \cong \frac{\overline{AB}}{R}$ ed anche: $\lim_{R\to\infty}\left(\frac{\overline{AB}}{R}\right) = 0$ per cui al limite: $\varepsilon \to 0$ e le rette $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ tendono ad <u>essere parallele</u>.

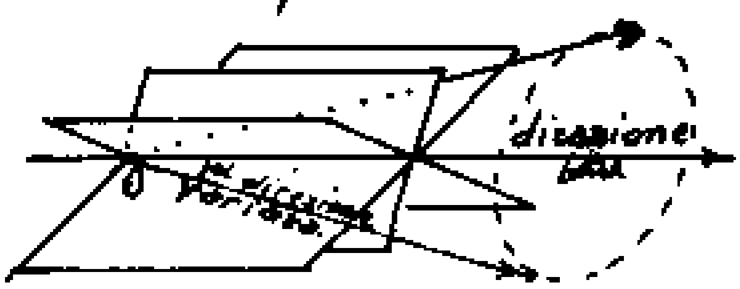
Cioè "la direzione" (verso $C \to \infty$) è la stessa, se presa da due punti distinti in campo finito.

Facciamo ora il discorso inverso: sia C un punto fisso e determinato in campo finito, ed $\overline{AB}$ una base molto grande, sul cui asse giace C. Facendo questa volta allontanare la base e misuriamo da C l'angolo $A\hat{C}B$; anche in questo caso per distanze $R \to \infty$ avremo: $\varepsilon \to 0$, cioè i punti A e B si vedono sovrapposti, ma la base $\overline{AB}$ (molto grande) è tutt'altro che un punto. Perciò all'infinito quello che concepiremmo come un punto può, nelle nostre dimensioni, essere anche una grandezza finita molto grande. Attenzione, con la base AB indefinitamente lontana, non cambia direzione il passare da $\overrightarrow{CA}$ a $\overrightarrow{CB}$.

Cioè il concetto di limite implica due aspetti (due facce): al di qua, ed al di là del limite, prossimi quanto si vuole. Il limite è come il punto, la retta, il piano, non esiste in sé, lo poniamo noi; ed è utilissimo, il porlo infatti: con n comunque indefinitamente grande, ma finito: $3\sum 10^{-n} < \frac{1}{3}$ (al comunque grande si può sempre aggiungere 1) Invece: $\lim_{n\to\infty}\left(3\sum_{0}^{n} 10^{-n}\right) = \frac{1}{3}$.

Non è vero che facendo: 0,3333333..... si raggiunge $\frac{1}{3}$, ci avviciniamo ad $\frac{1}{3}$ Solo idealizzando l'esistenza del limite, si può raggiungere.

Torniamo alla nostra "<u>direzione</u>" che può essere <u>variata di un angolo piccolo a piacere</u>, e grande (non a piacere), al massimo di $\alpha < 360° = 2\pi$. Si noti che una variazione di direzione avviene sempre su uno degli infiniti piani del fascio che ha per asse comune la direzione di partenza. Non basta un solo angolo per definirla; con un solo angolo le infinite direzioni variate con quell'angolo, formerebbero la superficie laterale di un cono avente per asse la direzione base. Per fissare il semipiano occorre anche definire se l'angolo ruota a "destra" o a sinistra del semipiano base. Il problema è analogo a quello di definire un punto sulla superficie sferica: occorre precisare il piano equatoriale, ed il semipiano del meridiano origine, occorre fissare la direzione nord-sud per la latitudine ed Est-owest per la longitudine. La direzione base nel caso delle coordinate geografiche sarebbe sul raggio che uscendo dal centro della terra si dirige verso il punto comune fra il meridiano di Greenwich e l'equatore, punto che si trova nel golfo di Guinea. Se diamo le coordinate di Firenze: lat. 43°46' Nord, long. 11°15' Est., la variazione fra la direzione base e la direzione: centro-terra-Firenze è 45° 20' ma questo angolo non individua



solo Firenze, ma tutti i punti che il cono, con vertice al centro della terra, intercetta sul globo. Partendo da Firenze passerebbe per le Azzorre, attraverso il Brasile, l'oceano Atlantico, la Somalia, l'Arabia Saudita, la Grecia, per tornare a Firenze.

Quindi una variazione di direzione è anche un angolo piano, ma non solo l'ampiezza di tale angolo, ma anche la posizione del semipiano, o del piano se aggiungiamo il verso della variazione. Tre assi coordinati, ovvero tre direzioni coordinate, risolvono il problema. Noi considereremo quindi un "qualsiasi" punto "O" in campo finito come "centro" del nostro sistema di riferimento. Da questo punto irraggiano le infinite semirette nelle infinite "direzioni". Le supponiamo come gli infiniti raggi R di una sfera di centro O, sfera che va crescendo fino al limite del finito ove a ciascun punto della sua superficie corrisponde una direzione da O.

Ci domandiamo se la variazione di direzione sulla superficie sferica indefinitamente grande non può essere né maggiore, né minore di "ds" (differenziale di misura lineare) ove si ha: $\lim_{R \to \infty} \left(\frac{ds}{R} \right) = d\theta$ (differenziale di misura angolare). Cioè se "ds" lo consideriamo la più piccola dimensione lineare, alla sua rottura permane la più piccola variazione angolare di direzione.

Questo concetto lo vediamo meglio se dal centro "O" si fanno uscire due raggi indefinitamente grandi aventi al loro estremo il differenziale ds delimitato ai suoi estremi da due punti distinti A e B. In ogni altra sezione con

$R < R \to \infty$ (R tendente all'∞ non ha ancora passato il limite) i due raggi non sono più distanziati da un micro-segmento, sono coincidenti, cioè sovrapposti, ma differenziati per il diverso orientamento (direzione) se uno è in direzione s l'altro è in direzione $s + ds$. Quindi due raggi sovrapposti possono differire di un $d\theta$; è quanto avviene collimando da C la (molto grande) base $\overline{AB}$ quando questa ha passato il limite: ($R = \infty$).

I cultori dell'ordine dei differenziali direbbero che $d\theta$ è infinitesimo di ordine superiore a ds, in quanto a livello ds/n esiste ancora $d\theta$. Si deve però notare che per un ds rettilineo bastano due punti mentre per un "da" curvilineo occorrono tre punti almeno. ove "ds" sarebbe la corda di "da" sotteso a "$d\theta$".

Possiamo ora trattare la geometria analitica.

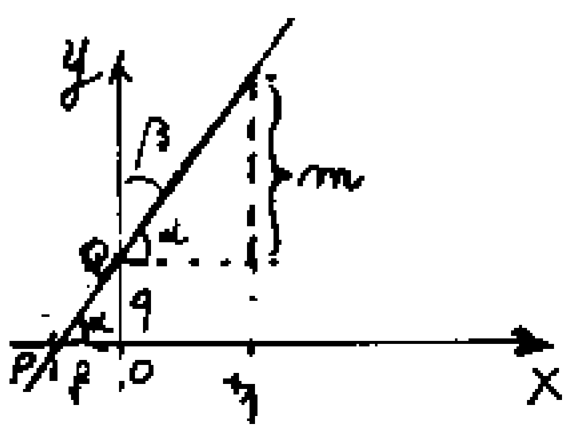
La geometria analitica.
(del piano)

Nel I volume abbiamo già introdotto vari concetti, per comodità riscriviamo le relazioni note e le completiamo.

Rappresentazione di un punto:

$$P \equiv (x_P ; y_P).$$

Equazioni della retta r.



$$\boxed{y = mx + q}$$ forma esplicita

ove: $m = tg(\alpha)$ = coefficiente angolare.

q = coefficiente di traslazione lineare.

Per disegnarla si riporta "q" su y, poi, con ascissa = 1, il punto di ordinata: $(q+m)$ – la retta è l'unione dei due punti.

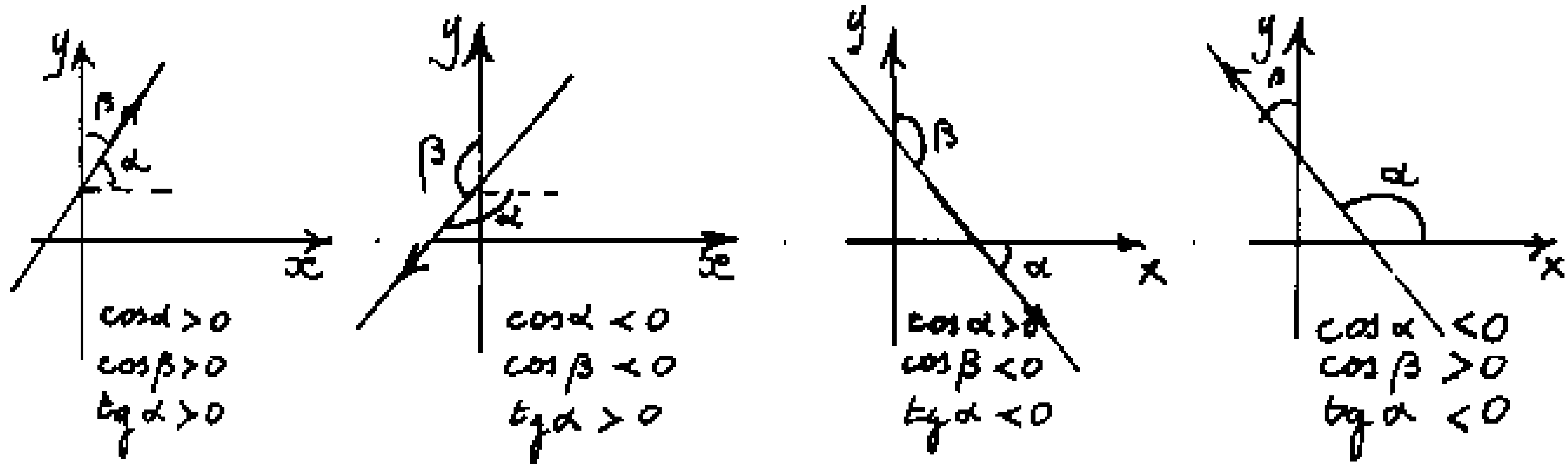
$$\boxed{ax + by + c = 0}$$ forma implicita

è sempre bene trasformarla in forma implicita ponendo: $m = -\frac{a}{b}$; $q = -\frac{c}{b}$. Si noti che essendo $m = tg(\alpha)$ necessariamente a e b sono proporzionali a sen α e cos α ed hanno segno opposto. Poniamo: $a = +K \operatorname{sen}\alpha$; $b = -K\cos\alpha$, avremo che: $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{K^2(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)} = K$; per cui dividendo l'espressione per $\sqrt{a^2+b^2}$; essendo $q = \frac{c}{-b} = -c$: cioè $\frac{c}{K} = q\cos(\alpha) = \delta$ = distanza della retta dall'origine.

cioè: $$\boxed{\cos\beta(x) - \cos(\alpha)y + \delta = 0}$$

Nell'espressione ora scritta, $\cos\beta$ e $\cos\alpha$ sono i coseni direttori della retta nel piano. Però occorre fare molta attenzione ai segni, poiché il coseno è positivo nel I e IV quadrante, mentre il seno è positivo nel I e II, la tangente è positiva nel I e III. D'altra parte l'intera equazione può sempre moltiplicarsi per (-1).

Si hanno i seguenti casi di rette orientate:



$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$ forma segmentaria

Di facile costruzione, essendo noti i punti di intersezione con gli assi: (q su y); (p su x) (col loro segno).

Per trasformarla in esplicita: $\left(m = -q/p\right)$; $(q = q)$.

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}}$$ forma parametrica

Per esempio supponiamo di prendere come parametro t, le lunghezze della retta a partire da un suo punto $P \equiv (x_p; y_p)$, avremo:

$$\begin{cases} x = t\cos\alpha + x_p \\ y = t\,\mathrm{sen}\,\alpha + y_p. \end{cases}$$

$\boxed{(y - y_A) = m(x - x_A)}$ equazione della retta passante per il punto: $A \equiv (x_A, y_A)$ ed avente il coefficiente angolare "m" ; $q = (y_A - m x_A)$. Ad ogni valore di "m", si ha una retta per A, perció puó considerarsi l'equazione di una stella piana di rette con centro in A.

$$\boxed{\frac{(y - y_A)}{(x - x_A)} = \frac{(y_B - y_A)}{x_B - x_A}}$$

equazione della retta passante per due punti noti: $A \equiv (x_A, y_A)$ e $B \equiv (x_B, y_B)$.

ove: $m = \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)$; $q = y_A - x_A\left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)$.

condizione di parallelismo (fra rette)

é di avere lo stesso coefficiente angolare "m".

condizione di perpendicolaritá (fra rette)

é che abbiano coefficienti angolari l'uno l'inverso opposto dell'altro: $\left(m_1 = \frac{-1}{m_2}\right)$.

$\boxed{(y - y_A) = \frac{-1}{m}(x - x_A)}$ equazione della retta per A e perpendicolare alle rette di coefficiente angolare "m"

$$\boxed{\begin{aligned} x_B &= \left(\frac{m}{m^2+1}\right)\left(y_A + \frac{x_A}{m} - q\right) \\ y_B &= \left(\frac{m}{m^2+1}\right)\left(m y_A + x_A + \frac{q}{m}\right) \end{aligned}}$$

Coordinate del punto B di intersezione della retta di eq. $\boxed{y = mx + q}$ e la sua perpendicolare passante per A

$$\boxed{\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

distanza fra i due punti: A e B (o del punto A dalla retta $y = mx + q$ di cui sopra.

La distanza fra i due punti A e B; ricordando che:

$$\boxed{m = \tan g(\alpha)}$$

e che:

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}} \qquad \boxed{\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}}$$

se "m" è il coeff. angolare della retta $\overline{AB}$ si ha:

$$\boxed{|\overline{AB}| = \left|(x_B - x_A)\left(\sqrt{1+m^2}\right)\right|}$$

$$\boxed{|\overline{AB}| = \left|(y_B - y_A)\left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\right)\right|}$$

equazioni della distanza fra due punti A e B su una retta di coeff. angolare "m"

(se sostituissimo: $m = \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)$ otterremmo: $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$)

Se "m" è il coeff. angolare della retta per B ed "$-\frac{1}{m}$" il coeff. angolare della perpendicolare $\overline{AB}$, si ha:

$$\boxed{|\overline{AB}| = \left|(x_B - x_A)\left(\frac{\sqrt{m^2+1}}{m}\right)\right|}$$

$$\boxed{|\overline{AB}| = \left|(y_B - y_A)\left(\sqrt{m^2+1}\right)\right|}$$

equazioni della distanza del punto A dalla retta intercettata in B dalla perpendicolare per A ed avente per equazione: $\frac{y - y_B}{x - x_B} = m$

In generale:

$$\boxed{\delta = \left|\frac{y_A - m x_A - q}{\sqrt{m^2+1}}\right|}$$

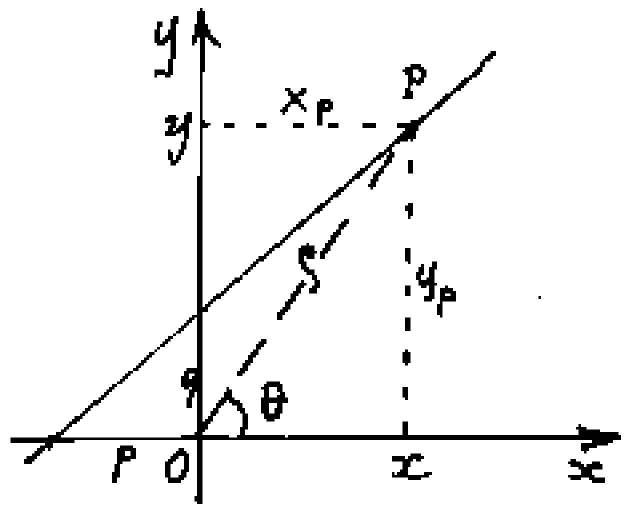
equazione della distanza di un punto $A \equiv (x_A, y_A)$ dalla retta di equazione: $y = mx + q$

Coordinate polari

Rappresentazione di un punto: $P \equiv (\rho, \theta)$

ove: "ρ" = modulo e "θ" = argomento o anomalia

Equazione della retta in coordinate polari



Notiamo che per passare da coordinate cartesiane a coordinate polari basta sostituire:

$\boxed{x = \rho\cos\theta}$; $\boxed{y = \rho\,\text{sen}\,\theta}$

Per la sostituzione inversa: $\boxed{\rho = \sqrt{x^2+y^2}}$; $\boxed{\theta = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)}$

avremo:

in coordinate cartesiane: ; in coordinate polari

$\boxed{y = mx + q}$ $\Rightarrow$ $\rho\,\text{sen}\,\theta = m\cdot\rho\cos\theta + q$

$$\boxed{\rho = \frac{q}{\text{sen}\,\theta - m\cos\theta}}$$

$\boxed{ax + by + c = 0}$ $\Rightarrow$ $a\rho\,\text{sen}\,\theta + b\rho\cos\theta + c = 0$

$$\boxed{\rho = \frac{-c}{a\,\text{sen}\,\theta + b\cos\theta}}$$

$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$ $\Rightarrow$ $\frac{\rho\,\text{sen}\,\theta}{p} + \frac{\rho\cos\theta}{q} = 1$

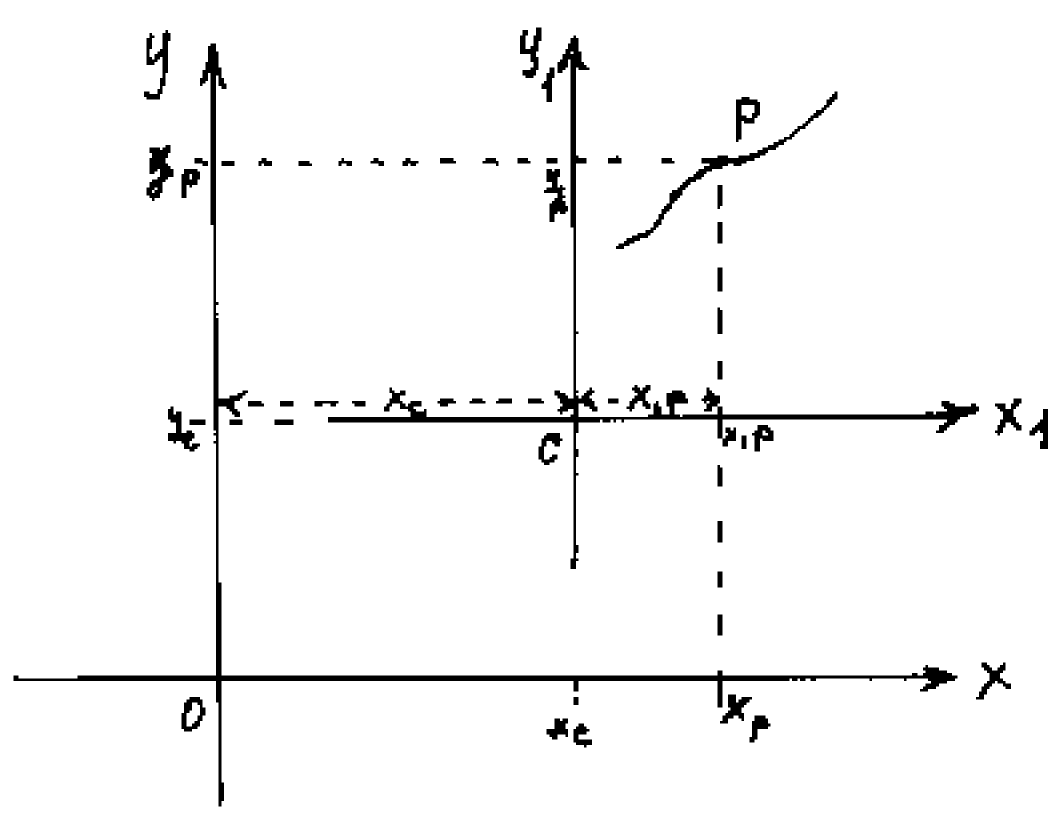
$$\boxed{\rho = \frac{qp}{q\,\text{sen}\,\theta + p\cos\theta}}$$

$\boxed{m(x - x_P) = (y - y_P)}$ $\Rightarrow$ $m(\rho\,\text{sen}\,\theta - x_P) = (\rho\cos\theta - y_P)$

$$\boxed{\rho = \frac{mx_P - y_P}{m\,\text{sen}\,\theta - \cos\theta}}$$

Traslazione di assi

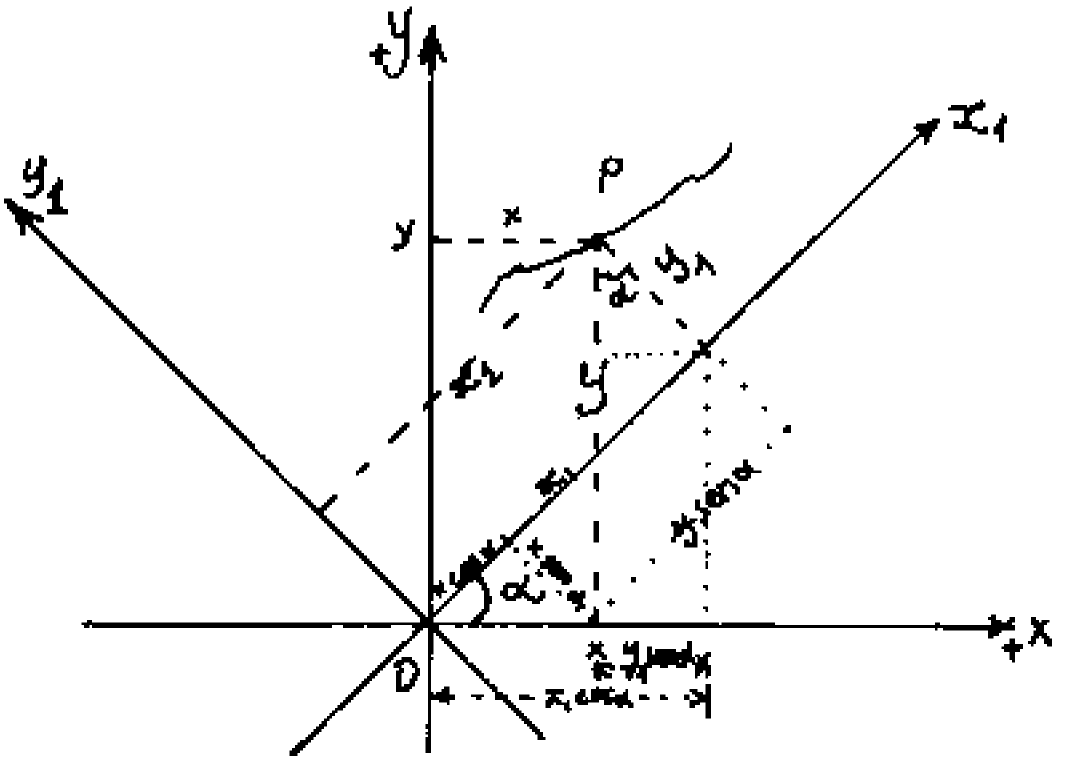
L'argomento è già stato esposto nel primo volume (vedi eq. del cerchio e della parabola), In generale consideriamo due sistemi di assi paralleli: oxy ed cx_1y_1, ove nel sistema oxy il punto: $C \equiv (X_c ; y_c)$ mentre nel sistema: cx_1y_1 il punto C ha $X_{1c}=0$; $y_{1c}=0$ mentre il punto "0" avrà: $X_{1(0)} = -X_c$; $y_{1(0)} = -y_c$.



Data la posizione di un generico punto P del piano, riferita al sistema cx_1y_1, e vogliamo riferire tale posizione al sistema oxy, avremo: $x_p = (x_c + x_{1p})$; $y_p = (y_c + y_{1p})$; se le coordinate x_1 ed y_1 sono correlate da una funzione: $\boxed{y_1 = f_1(x_1)}$, essendo: $y_1 = (y - y_c)$; $x_1 = (x - x_c)$ avremo: $\boxed{(y - y_c) = f_1(x - x_c)}$

Se invece abbiamo correlate le coordinate x, y $\boxed{y = f(x)}$ e vogliamo riferire la curva al sistema cx_1y_1 avremo $\boxed{(y + y_c) = f(x + x_c)}$

Ruotazione di assi



Dato il sistema di assi oxy, ruotiamolo, intorno ad O dell'angolo α (assunto positivo il verso di rotazione del semiasse +x per sovrapporsi al semiasse +y) e chiamiamo ox_1y_1 il sistema ruotato. Considerato un punto P del piano riferito nel sistema oxy, avremo:

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = x\cdot\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ y_1 = y\cdot\cos\alpha - x\cdot\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}}$$

inversamente:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_1\cos\alpha - y_1\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ y = x_1\,\mathrm{sen}\,\alpha + y_1\cos\alpha \end{cases}}$$

Questa seconda espressione si puo' ottenere dalla precedente scambiando x y con $x_1 y_1$ ed (α) con $(-\alpha)$, infatti $\mathrm{sen}(-\alpha) = -\mathrm{sen}(\alpha)$; $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

Se: $y = f(x)$ avremo: $(x_1\,\mathrm{sen}\,\alpha + y_1\cos\alpha) = f(x_1\cos\alpha - y_1\,\mathrm{sen}\,\alpha)$.

In generale da una forma esplicita si passa ad una forma implicita.

Equazione della retta tangente ad una curva piana.

Sia $y = f(x)$ l'espressione di una linea piana, avremo, punto per punto, $y' = f'(x) = \tan g(\alpha) = m =$ = coefficiente angolare della retta tangente.

Sia quindi "T" un punto della linea: $y_T = f(x_T)$; $y'_T = f'(x_T)$; l'equazione della retta tangente in T sarà:

$$\boxed{\frac{y - f(x_T)}{x - (x_T)} = f'(x_T)}$$

Supponiamo ora di voler tracciare le tangenti ad una linea piana da un punto "Q" esterno alla linea.

L'equazione di tutte le rette passanti per "Q" è:

$$\boxed{\frac{y - y_Q}{x - x_Q} = m} \quad \text{od anche:} \quad \boxed{y = mx - mx_Q + y_Q}$$

facendo sistema con: $y = f(x)$, otteniamo le coordinate dei punti comuni alla retta per Q ed alla curva, in funzione di "m"; discutendo le risoluzioni si trova per quali valori di "m" le rette sono: esterne, tangenti, o tagliano la curva.

Si può anche ragionare diversamente, ponendo in incognita le coordinate del punto di tangenza T: $f'(x_T) = \frac{f(x_T) - y_Q}{x_T - x_Q}$, risolvendo rispetto a (x_T) possiamo scrivere l'equazione della retta tangente: $\boxed{y = f'(x_T)\, x - f'(x_T)\, x_Q + y_Q}$

Equazione della tangente e della normale ad una curva.

Sia $y=f(x)$ l'equazione della curva, $y'=f'(x)=tg(\alpha)=$"m", è il coeff. angolare della retta tangente in (x), per cui l'equazione della retta tangente sarà: $\frac{(y-f(x_T))}{((x)-(x_T))}=f'(x_T)$;

ove: $(x_T)=$ ascissa del punto di tangenza; ed anche:

$$\boxed{y=f'(x_T)\cdot x+(f(x_T)-f'(x_T)\cdot x_T)}$$ equaz. della tangente in forma esplicita

$$\boxed{\frac{x}{-(f(x_T)-f'(x_T)\cdot x_T)/f'(x_T)}+\frac{y}{(f(x_T)-f'(x_T)\cdot x_T)}=1}$$ equaz. della tangente in forma segmentaria

ove: $q=(f(x_T)-f'(x_T)\cdot x_T)$; $p=-q/f'(x_T)$ sono i segmenti intercettati dalla retta tangente sugli assi.

Sappiamo che l'equazione della normale ad una retta, ha per coefficiente angolare: $\frac{-1}{m}$; perciò l'equazione della normale per "T" alla curva $=$ (alla tangente), sarà:

$$\frac{(y-f(x_T))}{(x-x_T)}=\frac{-1}{f'(x_T)}$$; ed anche:

$$\boxed{y=\frac{-x}{f'(x_T)}+\left(f(x_T)+\frac{x_T}{f'(x_T)}\right)}$$ Equaz. della normale per T in forma esplicita

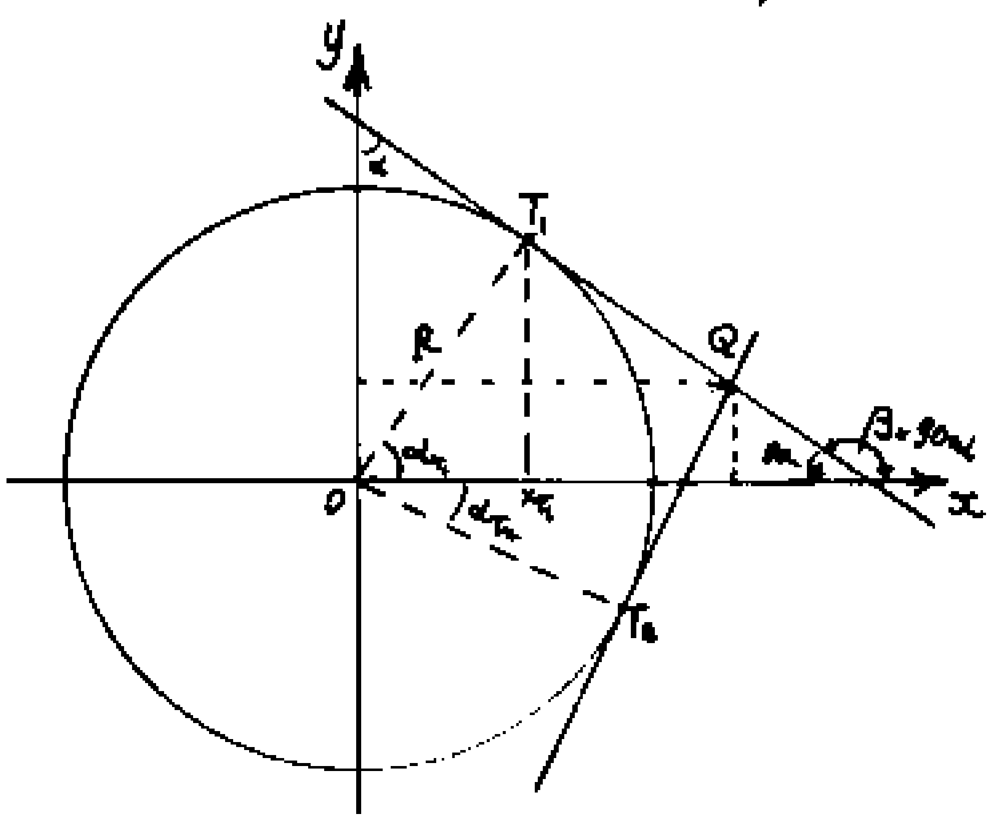
$$\boxed{\frac{x}{(f'(x_T)f(x_T)+x_T)}+\frac{y}{(f(x_T)+x_T/f'(x_T))}=1}$$ Equaz. della normale per T in forma segmentaria

ove: $\left.\begin{aligned}p&=(f(x_T)f'(x_T)+x_T)\\ q&=(f(x_T)+x_T/f'(x_T))\end{aligned}\right\}$ sono i segmenti intercettati sugli assi dalla normale per T.

Equazioni delle rette tangenti al cerchio

Sia: $\boxed{y=f(x)=\sqrt{R^2-x^2}}$; $\boxed{f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}}$

Se è noto il punto T di tangenza. (essendo nota l'equazione basta un solo elemento per determinare T; per es. x_T oppure y_T, o α_T)



Noto x_T:

$$y=\left(\frac{-x_T}{\sqrt{R^2-x_T^2}}\right)x+\frac{x_T^2}{\sqrt{R^2-x_T^2}}+\sqrt{R^2-x_T^2}$$

$$\boxed{y=\left(\frac{-x_T}{\sqrt{R^2-x_T^2}}\right)x+\left(\frac{R^2}{\sqrt{R^2-x_T^2}}\right)}$$

ed anche:

$$\boxed{y=\frac{-x_T}{y_T}x+\frac{R^2}{y_T}}$$

Dividendo ambo i termini delle frazioni per R si ha:

$$y=\frac{-x_T/R}{\sqrt{1-(x_T/R)^2}}\,x+\frac{R}{\sqrt{1-(x_T/R)^2}}$$; ma $x_T/R=\cos(\alpha)$ per cui:

se noto è α_T si ha:

$$\boxed{y=\frac{-\cos\alpha_T\,x+R}{\operatorname{sen}\alpha_T}}$$ equaz. della tangente nel punto (R,α_T)

Se è noto il punto Q esterno al cerchio e da $Q\equiv(x_Q,y_Q)$, vogliamo tracciare le tangenti, si può operare in più modi; e cioè, nel modo classico: la tangente deve passare per Q: $y=mx-mx_Q+y_Q$

ma deve anche passare per T: $\sqrt{R^2-x_T^2}=mx_T-(mx_Q-y_Q)$.

risolviamo rispetto ad x_T:

$$m^2x_T^2 - 2m(mx_Q - y_Q)x_T + (mx_Q - y_Q)^2 = R^2 - x_T^2$$

$$(m^2+1)x_T^2 - 2m(mx_Q - y_Q)x_T + [(mx_Q - y_Q)^2 - R^2] = 0$$

$$x_T = \frac{m(mx_Q - y_Q) \pm \sqrt{m^2(mx_Q-y_Q)^2 - (m^2+1)[(mx_Q-y_Q)^2 - R^2]}}{m^2+1}$$

se $\Delta > 0$ si hanno due risoluzioni, cioè la retta per Q taglia il cerchio.

$\Delta < 0$ Non si hanno punti comuni fra retta e cerchio, cioè la retta per Q è esterna

$\Delta = 0$ Si ha una sola radice cioè un solo punto comune, la retta per Q è tangente

Quindi dobbiamo uguagliare a zero il discriminante:

semplificando: $-(mx_Q - y_Q)^2 + m^2R^2 + R^2 = 0$

cioè: $-m^2x_Q^2 + 2mx_Qy_Q - y_Q^2 + m^2R^2 + R^2 = 0$

$$\boxed{(x_Q^2 - R^2)m^2 - 2(x_Qy_Q)m - (R^2 - y_Q^2) = 0}$$

$$m = \frac{(x_Qy_Q) \pm \sqrt{x_Q^2y_Q^2 + (x_Q^2 - R^2)(R^2 - y_Q^2)}}{x_Q^2 - R^2}$$

condizione di realtà: $\Delta > 0$

$$\cancel{x_Q^2y_Q^2} + x_Q^2R^2 - R^4 - \cancel{x_Q^2y_Q^2} + R^2y_Q^2 > 0$$

cioè: $\boxed{x_Q^2 + y_Q^2 > R^2}$ (che Q sia esterno al cerchio)

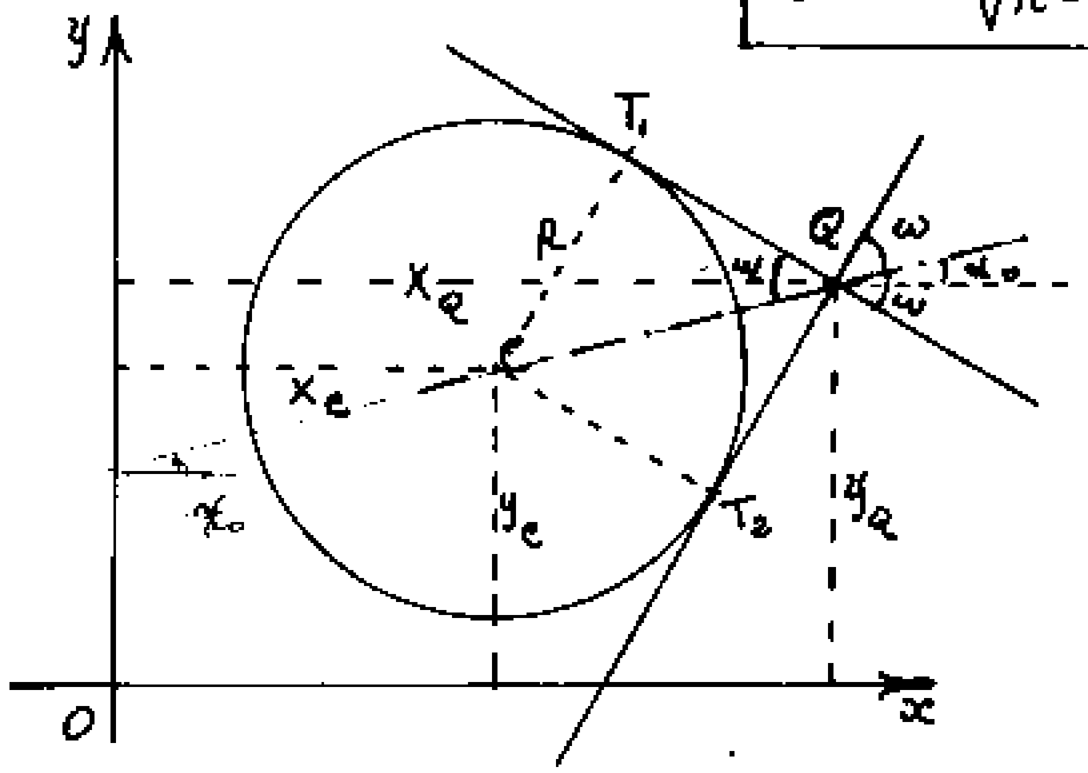
avremo due radici di m, e l'equazione delle due rette tangenti sarà:

$$\boxed{m = \frac{x_Qy_Q \pm R\sqrt{x_Q^2 + y_Q^2 - R^2}}{(x_Q^2 - R^2)} = \frac{y - y_Q}{x - x_Q}}$$

rette tangenti al cerchio non al centro

Sia: $\boxed{y = \sqrt{R^2 - (x - x_c)^2} + y_c}$ l'equazione de cerchio, ove: x_c, y_c sono le coordinate del suo centro.

$$\boxed{y' = \frac{-(x - x_c)}{\sqrt{R^2 - (x - x_c)^2}}}$$



Se è noto il punto di tangenza: T basta l'ascissa: (X_T), $y_T = \sqrt{R^2 - (x_T - X_c)^2} + y_c$; avremo:

$$\frac{(y - y_T)}{(X - X_T)} = \frac{-(x_T - X_c)}{\sqrt{R^2 - (x_T - X_c)^2}}$$

da cui, ponendo: $R^2 = (x_T - X_c)^2 + (y_T - y_c)^2$ si ha:

$$\boxed{y = \left(\frac{-(X_T - X_c)}{(y_T - y_c)}\right) X + \left(\frac{(X_T - X_c)}{(y_T - y_c)}\right) X_T + y_T}$$

equazione della retta tangente in T.

Si noti che, mentre la derivata y' è affetta dal doppio segno dipendente dalla radice quadrata al denominatore, (cioè per ogni x_T (validi) si hanno due rette tangenti); ponendo l'equazione in funzione di x_T ed y_T, sparisce l'ambiguità del doppio segno.

Infatti il coefficiente angolare è > 0 quando: $(X_T > X_c)$ ed $(y_T < y_c)$; oppure: $(X_T < X_c)$ ed $(y_T > y_c)$.

Inversamente: $(m < 0)$ se $(X_T > X_c)$ ed $(y_T > y_c)$ oppure: $(X_T < X_c)$ ed $(y_T < y_c)$.

L'equazione precedente poteva essere scritta direttamente, ricordando la condizione di perpendicolarità: (m; $-\frac{1}{m}$), applicata alla retta per "T" col coefficiente angolare della perpendicolare al raggio $\overline{CT}$; cioè:

$$\boxed{\frac{y - y_T}{x - x_T} = \frac{-(x_T - x_c)}{(y_T - y_c)}}$$

<u>Tangenti al cerchio dal punto Q esterno al cerchio stesso.</u>

L'equazione di tutte le rette passanti per "Q" definita ciascuna dal proprio coeff. angolare m, è: $\boxed{\frac{y - y_Q}{x - x_Q} = m_{(v)}}$ ove: <u>$m_{(v)}$ è una variabile</u>

Se indichiamo con m_o il coefficiente angolare della retta $\overline{QC}$ avremo: $\boxed{\overline{QC} = \sqrt{(x_c - x_Q)^2 + (y_c - y_Q)^2}}$

$$\boxed{\frac{(y_c - y_Q)}{(x_c - x_Q)} = m_o} = \underline{\tan \alpha_o}$$

$$\overline{QT_1} = \overline{QT_2} = \sqrt{(x_c - x_Q)^2 + (y_c - y_Q)^2 - R^2} \;;$$

posto: $\boxed{\tan \omega = R/\overline{QT}}$ con $|\omega|$ = angolo delle rette tangenti con $\overline{QC}$. cioè: $\boxed{\tan(\alpha_o \pm \omega) = \frac{m_o \pm R/\overline{QT}}{1 \mp \frac{m_o R}{\overline{QT}}}}$

L'espressione $tg(\alpha_0 \pm \omega)$ rappresenta i due coeff. angolari delle rette per Q, tangenti al cerchio.

Cioè:

$$\frac{(y-y_Q)}{(x-x_Q)} = \frac{(m_0 \pm R/\overline{QT})}{(1 \mp R m_0/\overline{QT})}$$

ed anche:

$$\boxed{\frac{(y-y_Q)}{(X-X_Q)} = \frac{(m_0\overline{QT} \pm R)}{(\overline{QT} \mp m_0 R)}}$$

<u>è l'equazione delle rette tangenti al cerchio e passanti per Q</u>

Ove sostituendo i valori si ha:

$$\boxed{\frac{(y-y_Q)}{(X-X_Q)} = \frac{(y_c-y_Q)\sqrt{(x_c-x_Q)^2+(y_c-y_Q)^2} \pm R(x_c-x_Q)}{(x_c-x_Q)\sqrt{(x_c-x_Q)^2+(y_c-y_Q)^2} \mp R(y_c-y_Q)}}$$

l'equazione in funzione degli elementi dati; però è preferibile usare l'espressione precedente, e meglio ancora:

$$\boxed{\frac{y-y_Q}{X-X_Q} = tg(\alpha_0 \pm \omega)}$$

<u>Rette bisettrici</u>

(luogo dei punti equidistanti dalle due rette. r; s)

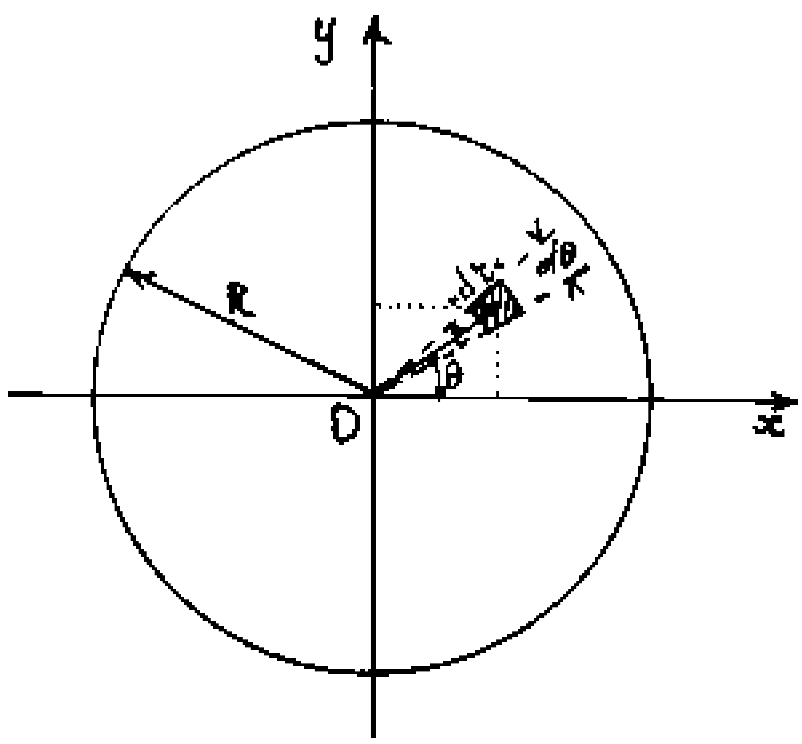
$$\delta = \left|\frac{y-m_r X-q_r}{\sqrt{m_r^2+1}}\right| = \pm\left|\frac{y-m_s X-q_s}{\sqrt{m_s^2+1}}\right|$$

cioè:

$$\boxed{\frac{y-m_r X-q_r}{\left|\sqrt{m_r^2+1}\right|} = \pm\frac{y-m_s X-q_s}{\left|\sqrt{m_s^2+1}\right|}}$$

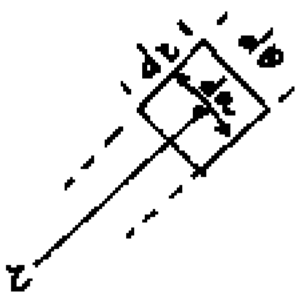
Il calcolo di aree con integrali doppi

Consideriamo un cerchio di raggio R e centro



"O", ciascun punto del cerchio è individuabile in coordinate polari da un raggio "r" variabile da 0 ad R e da un angolo θ variabile da 0 a 2π (espresso in radianti).

Generiamo un'area elementare all'intorno di un punto, considerando un angolo infinitesimo $d\theta$ all'intorno di θ, che moltiplicato per "r", darà un segmento infinitesimo: $\underline{da = r\,d\theta}$ perpendicolare al raggio, che a sua volta moltiplicato per l'incremento del raggio "dr" darà l'area infinitesima: $\underline{dA = r\,d\theta\,dr}$.



Avendo due differenziali occorre duplicare l'integrale: $\int_A dA = \iint da \cdot dr = \iint (r\,d\theta)\,dr$

e ponendo i limiti di integrazione separando le espressioni dei rispettivi differenziali: $A = \int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta$

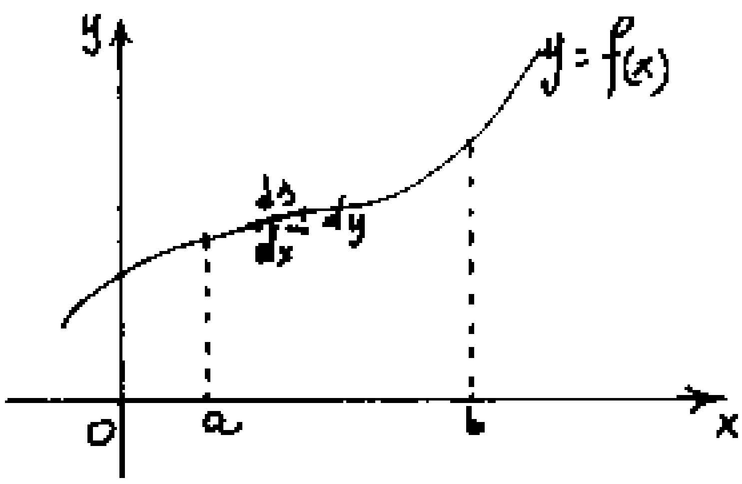
$$A = \left[r^2/2 \right]_0^R \left[\theta \right]_0^{2\pi} = \frac{R^2}{\cancel{2}} \cancel{2}\pi$$

$$\boxed{A = R^2 \pi}$$

Non sempre un integrale doppio è così semplice, una trattazione completa si trova nel III° Vol: "integrali doppi di campo".

Rettificazione di curve piane

Una funzione: $y = f(x)$ puó pensarsi come una linea costituita da tratti rettilinei infinitamente piccoli uno adiacente all'altro.



Consideriamo "ds" il piú piccolo tratto rettilineo di una $y = f(x)$ comunque curvilinea. Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo infinitesimo: dx, dy, ds; avremo:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ma: $\underline{dy = f'_{(x)} \cdot dx}$ perció:

$$\boxed{ds = \left(\sqrt{(f'_{(x)})^2 + 1}\right) dx}$$

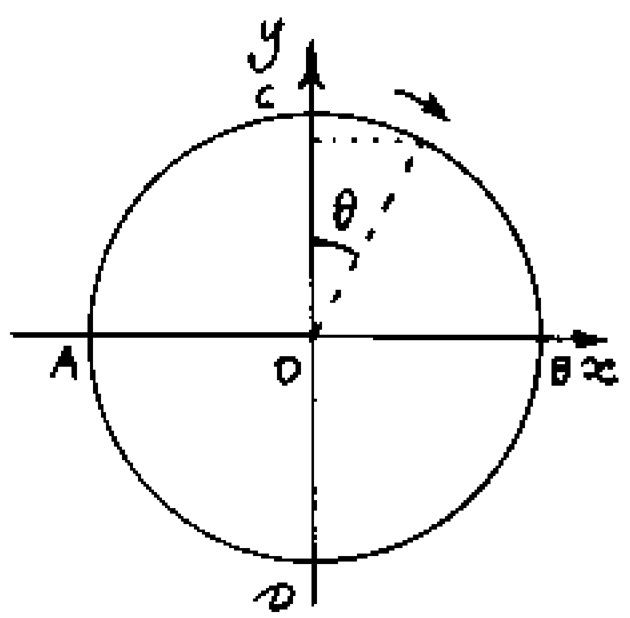
e la lunghezza: "s" del tratto di curva fra le ascisse "a" e "b" sará:

$$\boxed{s = \int_a^b \left(\sqrt{(f'_{(x)})^2 + 1}\right) dx}$$

Formula valida in generale, peró l'integrale tal volta é un integrale ellittico, (per esempio per rettificare l'ellisse, da cui il nome) in tal caso si ricorre alle tabelle di conti fatti, che abbiamo giá esposto nelle pagine precedenti.

Rettificazione della circonferenza.

Dall'equazione della circonferenza al centro assi ricaviamo: "dy"



$$f(x) = y = \sqrt{R^2 - x^2} \; ; \quad \boxed{dy = \frac{-x\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}}$$

da cui:

$$ds = \left(\sqrt{\frac{x^2}{(R^2-x^2)}+1}\right)dx$$

$$\boxed{ds = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx}$$

ed auche: $\boxed{s = \int \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx}$ occorre in questo inte= grale avere un po' di attenzione nel mettere i limiti di integrazione, anche perché ad ogni x corri= spondono due valori di y. Considerando i valori posi= tivi della radice, si ha, per $f(x)$ il semiarco, superiore, ed essendo negativa la derivata si ha il primo quadrante di arco per $x>0$. Se prendiamo l'origine della semicurva positiva in A avremo $(x=-R)$; se prendiamo l'origine del quadrante positivo in C $(x=0)$ e la rustazione sull'arco è oraria al crescere di x. Trasformiamo l'integrale:

$$s = R\int_a^b \frac{d\left(\frac{x}{R}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}} = \left[\arcsen\left(\frac{x}{R}\right)\right]_a^b \; ; \quad \text{per } x=0 \; ; \; \arcsen\left(\frac{x}{R}\right) = 0$$

per $x = \pm R$; $\arcsen\left(\frac{x}{R}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$; quindi l'arco in rad $\left(\frac{x}{R}\right) = \theta$ (ove θ è disegnato in figura). Vediamo alcuni intervalli di integrazione:

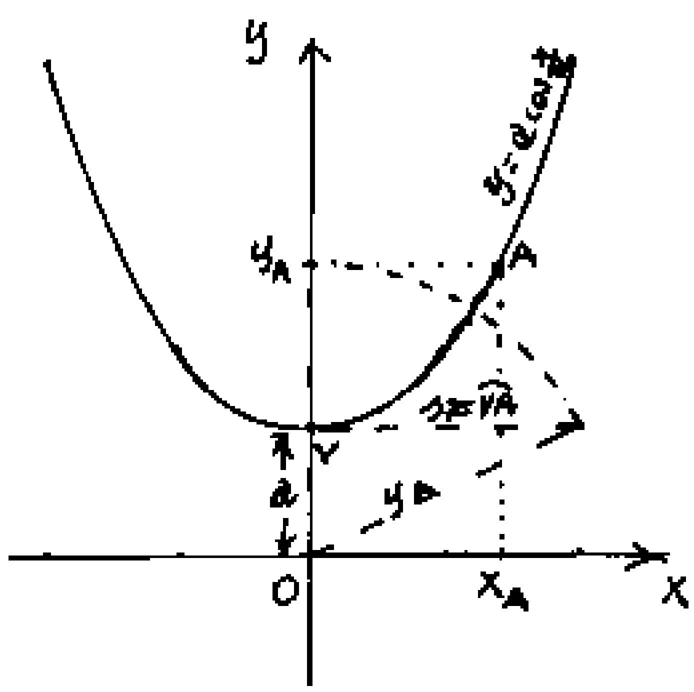
$$S = \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = R\int_0^1 \frac{d\left(\frac{x}{R}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}} = R\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{R}\right)\right]_0^1 = R\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}(2R\pi)$$

$$S = \int_{-R}^{+R} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = R\int_{-1}^{+1} \frac{d\left(\frac{x}{R}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}} = R\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{R}\right)\right]_{-1}^{+1} = R\pi = \frac{1}{2}(2R\pi)$$

$$S = \int_0^{R/2} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = R\int_0^{1/2} \frac{d\left(\frac{x}{R}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)}} = R\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{R}\right)\right]_0^{1/2} = R\frac{\pi}{6} = \frac{1}{12}(2R\pi)$$

Tutto questo per richiamare l'attenzione a non mettere, senza riflettere, l'origine degli archi in B con l'ordinaria ruotazione antioraria.

Rettificazione della catenaria



$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right);\quad y' = \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$dy = \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)dx$$

$$(dy)^2 = \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right)(dx)^2$$

$$ds = \left(\sqrt{1+\operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right)}\right)dx = \left(\cosh\left(\frac{x}{a}\right)d(x)\right)$$

$$S = a\int_0^{(x/a)} \cosh\left(\frac{x}{a}\right)d\left(\frac{x}{a}\right) = \left[a\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^{(x/a)}$$

$$\boxed{S = a\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)}$$

ma: $a\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right) = \sqrt{\left(a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\right)^2 - a^2} = \sqrt{y^2-a^2}$

$$\boxed{S = \sqrt{y^2-a^2}}$$

cio' consente una facile risoluzione grafica, (vedi figura), della $= a\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)$ (Area $OVAX_A = S\cdot a$).

La curvatura ed il raggio di curvatura delle curve piane

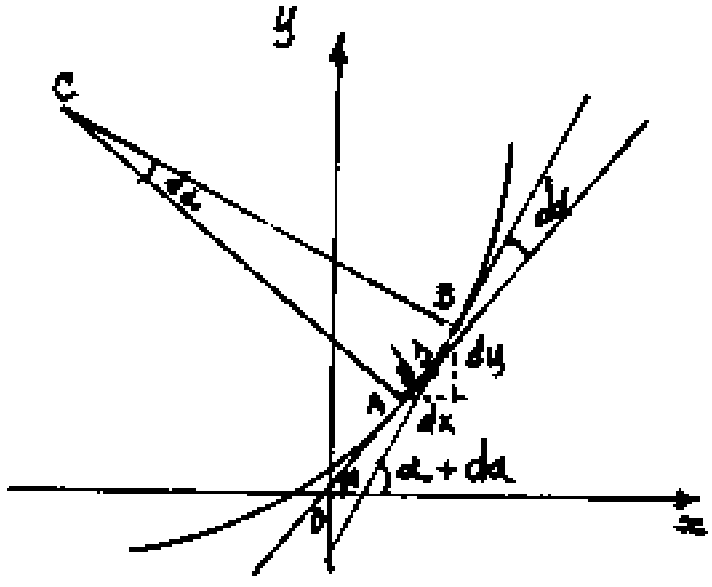
Tutte le curve, salvo la circonferenza, hanno curvatura variabile. La parabola, la catenaria, l'iperbole, hanno maggior curvatura nel vertice.

Dicesi "curvatura" il rapporto fra la variazione angolare di direzione $d\alpha$ e la variazione lineare di spostamento ds, cioé $\frac{d\alpha}{ds}$; poiché $ds = R\,d\alpha$, ove R è il raggio di curvatura si suol dire che la curvatura è l'inverso del Raggio essendo: $\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds}$.

Peró questa dizione è inesatta infatti l'inverso del raggio è, dimensionalmente, l'inverso di una lunghezza; mentre la curvatura è radianti / lunghezza. (che significato avrebbe esprimere il raggio in "cm." o in "Km". se non fosse connesso alla variazione angolare? Due profili stradali hanno, uno una svolta a 90° gradi, uno una svolta di appena 10 gradi, cioè l'arco raccorda 170°; affinché le due curvature siano uguali $\frac{90°}{R_1} = \frac{\pi/2}{R_1} = \frac{10°}{R_2} = \frac{\pi/18}{R_2}$ cioé: $\frac{R_2}{R_1} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$. Il che vuol dire che, per la curva a 90° occorre un raggio R nove volte maggiore di quello necessario ad una deviazione di 10°. (Abbiamo giá evidenziato come l'intero dimensionamento fatto dalla fisica deve essere riveduto.)

Dicesi <u>raggio di curvatura</u>, in un punto di una linea curva, "<u>Il raggio del cerchio osculatore della curva in quel punto</u>". <u>Il cerchio osculatore di una curva ha in comune con la curva almeno un "ds"</u>, <u>mentre un cerchio tangente ha un solo punto in comune con la curva stessa. Si dice: "osculatore"</u> perché combacia con la curva. (Dal latino: osculor, osculatus sum, ari = = baciare).

Calcolo del raggio di curvatura



Consideriamo un tratto infinitesimo di curva e sia "ds" (che disegnamo molto ingrandito), e siano "A" e "B" gli estremi di "ds"; $\widehat{AB} = ds$

$$f'(x_A) = tg(\alpha) \; ; \; f'(x_B) = tg(\alpha + d\alpha)$$

Da A e B possiamo tracciare le normali alla curva, che sono normali anche alle rispettive tangenti. Queste normali si incontrano in C che sarà il centro del cerchio osculatore di raggio $\overline{CA} = \overline{CB}$. L'angolo $A\hat{C}B$ sarà tanto minore (o maggiore), quanto minore (o maggiore) è la curvatura, lo indicheremo con "$d\alpha$". Chiameremo perciò: "<u>curvatura</u>" il rapporto $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}$; $(ds = R\, d\alpha)$.

$\frac{dy}{dx} = \tan g(\alpha)$; differenziando otteniamo:

$$\frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\,d\alpha$$

ma, sappiamo che: $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos\alpha}$ per cui sostituendo:

$$\frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{\cancel{dx^2}} = \frac{ds^2}{\cancel{dx^2}}\,d\alpha$$

dividendo per $|ds^3|$ si ha:

$$\frac{d^2y\,dx - dy\,dx^2}{ds^3} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}$$

ed ancora:

$$\boxed{d^2y = y''\,dx^2}$$

Attenzione: <u>avendo assunto la x come variabile indi=</u>
<u>pendente i "dx" sono costanti, per cui: $d(dx) = d^2(x) = 0$</u>
<u>(da distinguersi da $dx^2 = (dx)(dx) = (dx)^2$)</u>

perciò:

$$\frac{1}{R} = \frac{y''dx^2\cdot dx - 0}{ds^3} = \frac{y''}{(ds/dx)^3}$$

Sappiamo che: (vedi rettificazione di curve piane): $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}$
sostituendo si ha la <u>"curvatura"</u>:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}}$$

<u>Il raggio del cerchio osculatore sarà</u>

$$\boxed{R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}}$$

Esempi:

Il cerchio osculatore nella parabola: $\boxed{y = m x^2}$

$$y' = 2mx \quad ; \quad y'' = 2m$$

$$\boxed{R = \frac{\left(1 + (2mx)^2\right)^{3/2}}{(2m)}}$$

ed essendo: $m = \left(\frac{1}{4a}\right)$

$$R = \frac{\left(1 + \frac{1}{(2a)^2} x^2\right)^{3/2}}{(1/2a)} = \frac{\left((2a)^2 + x^2\right)^{3/2} \left(\frac{1}{2a}\right)^3}{\left(\frac{1}{2a}\right)} =$$

$$\boxed{R = \frac{\left((2a)^2 + x^2\right)^{3/2}}{(2a)^2}}$$

Nel vertice della parabola: $x = 0$ per cui: $\boxed{R = 2a}$

Per $x = 2a$; $R = \frac{(2\sqrt{2})(2a)^3}{(2a)^2} =$ $\boxed{R = 4a\sqrt{2}}$

Il cerchio osculatore nella catenaria: $\boxed{y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}$

$$y' = \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right) \; ; \; y'' = \frac{1}{a}\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = y/a \; ;$$

$$R = \frac{\left(1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{3/2}}{\frac{1}{a}\cosh\left(\frac{x}{a}\right)} = \frac{a\cosh^3\left(\frac{x}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$$\boxed{R = a\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)}$$

Nel vertice della catenaria: $x = 0$; $\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = 1$ $\boxed{R = a}$

ed anche: $R = a\left(\frac{y}{a}\right)^2$; $\boxed{aR = y^2}$ $\boxed{a : y = y : R}$

Nella catenaria, l'ordinata è media proporzionale fra il modulo "a" ed il raggio di curvatura

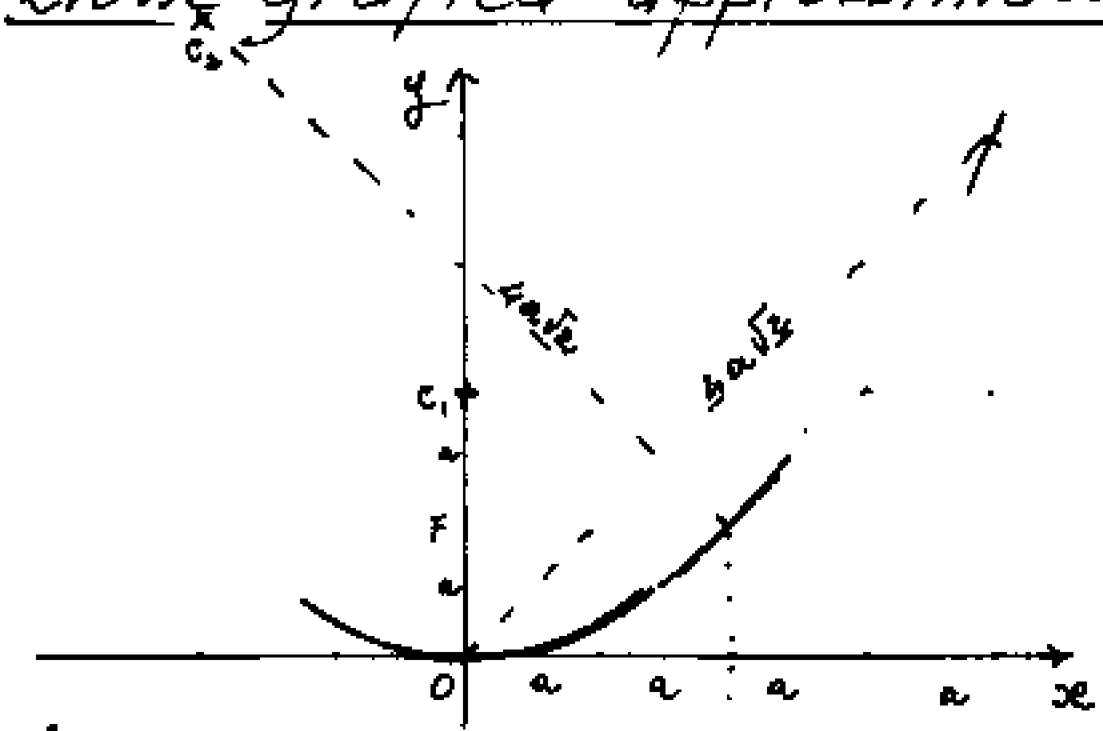
Il cerchio osculatore nella sinusoide: $\boxed{y = sen(x)}$

$$y' = \cos(x) \; ; \quad y'' = -sen(x) = -y$$

$$\boxed{R = \frac{\left(1+\cos^2(x)\right)^{3/2}}{-sen(x)}}$$

per: $x = \pi/2$; $\cos(x) = 0$; $sen(x) = 1$ $\quad \boxed{R = -1}$

I raggi trovati consentono una veloce costruzione grafica approssimata.



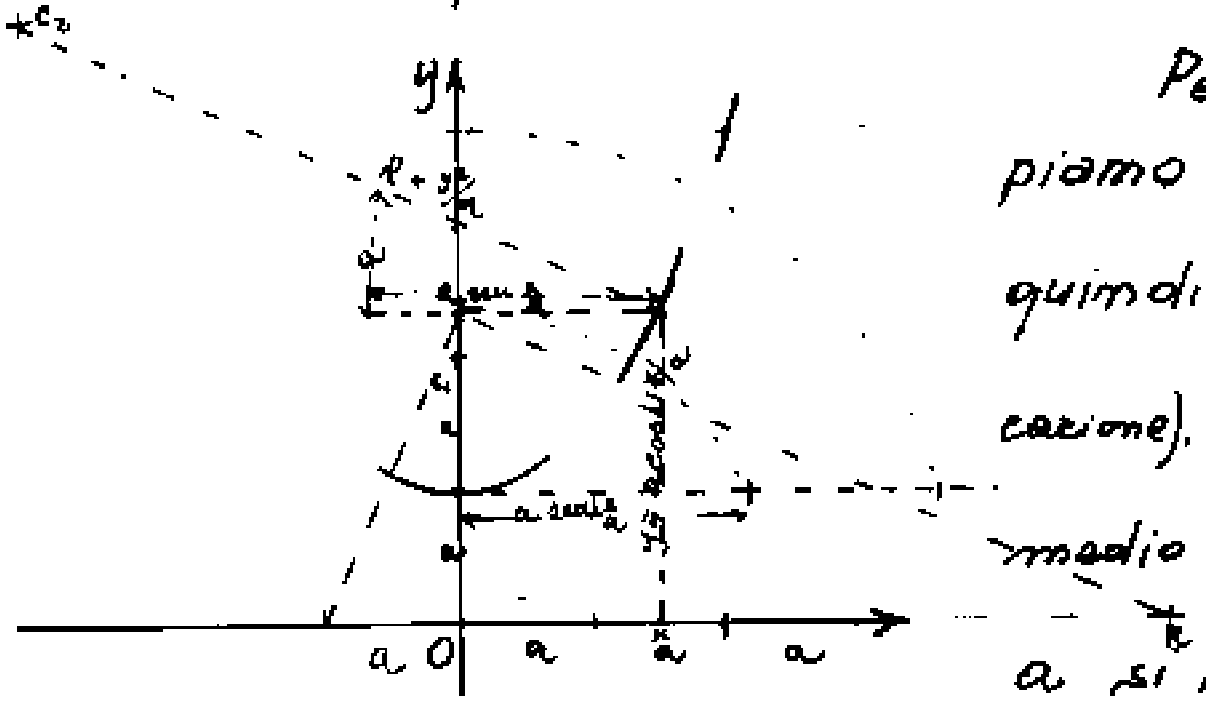
Per la parabola:

$x = 0 \quad R = 2a$

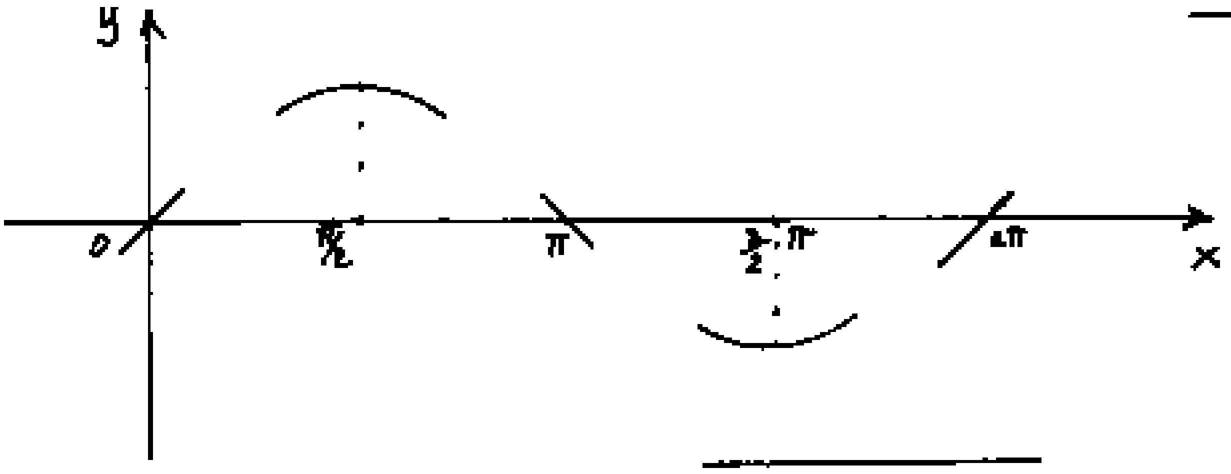
$x = 2a$; $y = a$; $y' = 1$; $R = 4a\sqrt{2}$

$x = 4a$; $y = 4a$; $y' = 2$

$R = 4\sqrt{5}\, a$.



Per la catenaria, sappiamo costruire: $a \, senh\left(\frac{x}{a}\right)$ e quindi la pendenza (vedi attificazione). Conoscendo y che è medio proporzionale fra R ed a si ha R ed il centro.



Per la sinusoide sapendo $y'_0 = y'_{2\pi} = +1$

$y'_\pi = -1$; $R = 1$

I centri di curvatura nel piano
(L'evoluta)

Sia $C \equiv (x_c ; y_c)$ il centro di curvatura di un generico punto di una funzione $y = f(x)$.

Qualunque sia la $y = f(x)$ abbiamo:

$$\boxed{\frac{(y_c - y)}{(x_c - x)} = \frac{-1}{y'}}$$

che <u>esprime il coeff. angolare della normale alla curva nel punto: $(x ; y)$</u>.

(Su tale normale alla curva e quindi alla sua tangente nel punto $(x;y)$; giace il centro $C \equiv (x_c - y_c)$, (infatti il raggio è sempre perpendicolare alla tangente.)

D'altra parte:

$$\boxed{(x_c - x)^2 + (y_c - y)^2 = R^2 = \frac{(1 + y'^2)^3}{(y'')^2}}$$

Dalla precedente relazione si ricava: $(x_c - x)^2 = y'^2 (y_c - y)^2$

sostituendo in questa abbiamo:

$$(\cancel{y'^2 + 1})(y_c - y)^2 = (\cancel{1 + y'^2})(1 + y'^2)^2 / (y'')^2$$

quindi:

$$\boxed{y_c = y + \left(\frac{(1 + y'^2)}{y''}\right)}$$

sostituendo nella prima relazione:

$$(1 + y'^2) / y'' = -(x_c - x) / y'$$

$$\boxed{x_c = x - y'\left(\frac{(1 + y'^2)}{y''}\right)}$$

si hanno così le coordinate del centro.

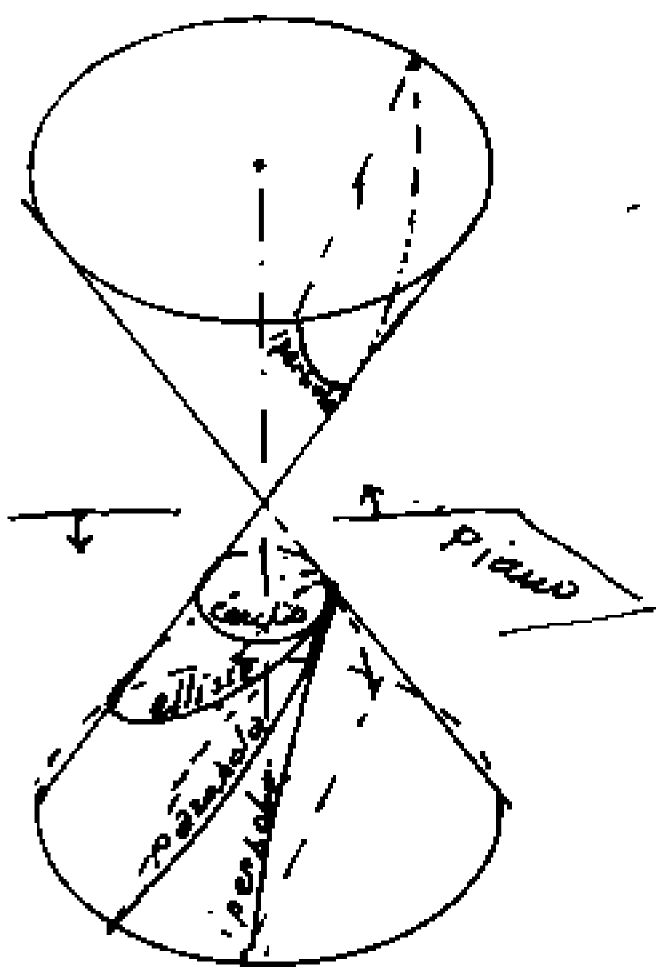
Si può esprimere l'equazione dell'evoluta di una curva Γ, in forma parametrica in x; cioè ad ogni valore dell'ascissa x della curva Γ si hanno le coordinate x_c; y_c del centro del cerchio osculatore (o di curvatura) della curva Γ nel punto x; $f(x)$.

$$\boxed{\begin{cases} x_c = x - f'_{(x)}\left(\dfrac{1 + f'^2_{(x)}}{f''_{(x)}}\right) \\ \\ y_c = f_{(x)} + \left(\dfrac{1 + f'^2_{(x)}}{f''_{(x)}}\right) \end{cases}}$$

Tal volta è possibile eliminare la x ed esprimere una correlazione in x_c; y_c, però la linea che ne risulta pur essendo il luogo dei centri dei cerchi osculatori (o di curvatura) della curva Γ non precisa a quale punto di Γ si riferisce un generico punto del luogo dei centri. La funzione in x_c, y_c, si chiama: <u>Evoluta della Γ</u>. Inversamente se $\exists$ è l'evoluta, allora Γ è <u>l'evolvente di $\exists$</u>.

LE CONICHE

Consideriamo un cono retto sezionato da un piano, che, partendo dalla posizione perpendicolare all'asse del cono, (ove la sezione è <u>un cerchio</u>), <u>"lascia"</u> tale posizione inclinandosi rispetto



a tale asse, (le sezioni ora sono <u>ellissi</u>), finché il piano diventa parallelo ad una generatrice del cono, cioè ne "<u>eguaglia</u>" l'inclinazione. (La sezione è una <u>parabola</u>), <u>"Sorpassata"</u> questa posizione continua la sua ruotazione. (Le sezioni sono <u>iperboli</u>).

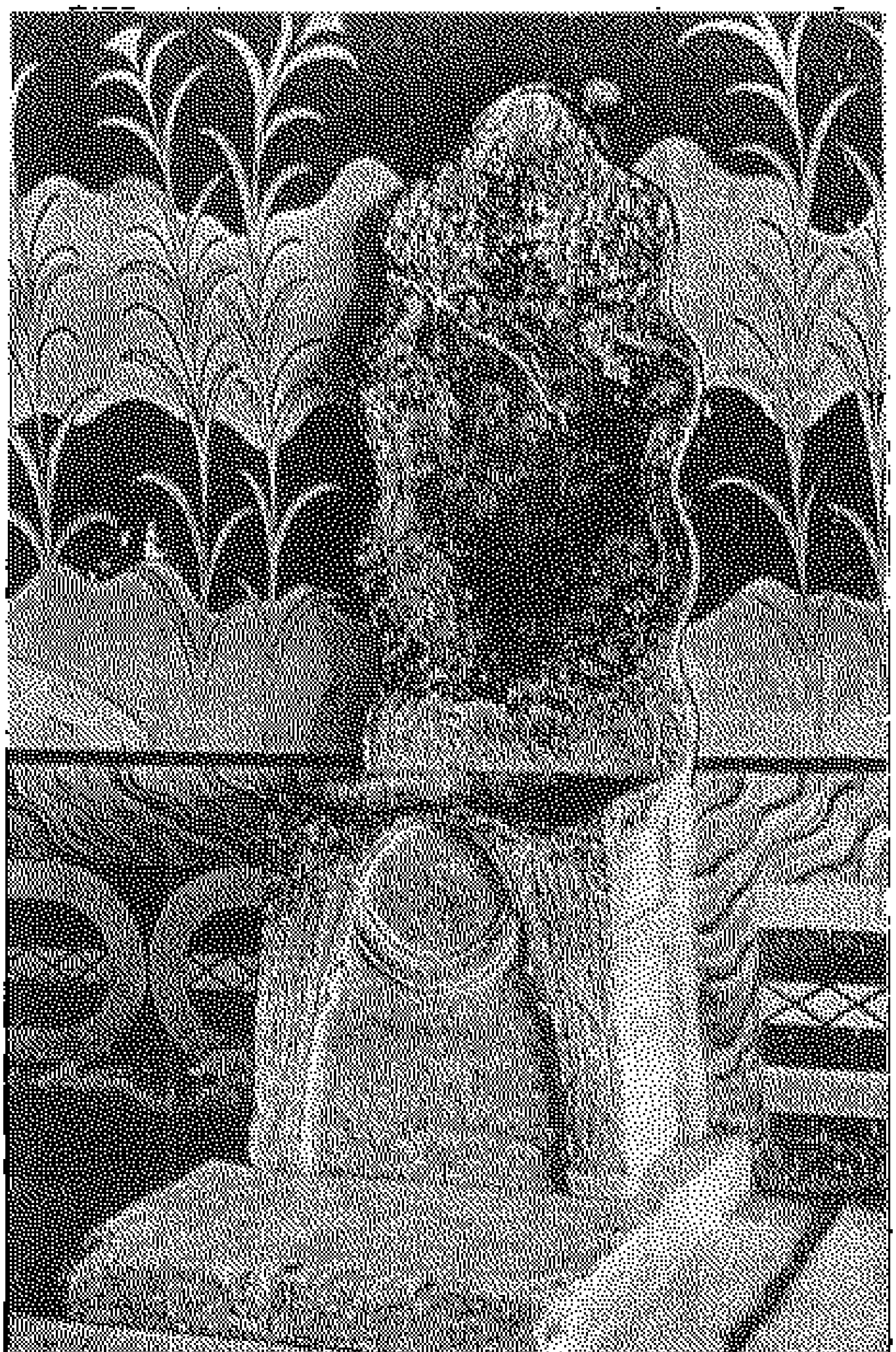
Apollonio Pergeo (3° sec a.C) fece un'ampia trattazione delle coniche, trovó la teoria della polarità, le relazioni fra i diametri coniugati, le relazioni focali ecc. Le denominazioni derivano dal greco:

παραβάλλειν = eguagliare (parabola)

ἐλλείπειν = lasciare (ellisse)

ὑπερβάλλειν = sorpassare (iperbole)

L'inventore delle coniche è ritenuto Menecmo (350 a.C.), peró già Archita da Taranto (430-365 a.C.) aveva trattato, nel suo studio sui solidi, le sezioni di coni e cilindri. Però anche questi dati debbono essere rivisti, infatti le stupende curve scolpite nel trono di pietra del palazzo minoico di Cnosso (oltre 2000 a.C.) denunciano la conoscenza delle coniche, e della catenaria, come fune penteggiante fra due sostegni.



Se si pensa che anche i Greci ritenevano Minosse un mito. (Solo nel 1900 fu scoperto il palazzo di Cnosso, da un archeologo inglese), La prestigiosa cultura minoica era andata perduta fin da allora.

Degli otto libri di Apollonio, a noi in lingua greca sono pervenuti solo i primi 4, il 5, il 6, il 7 sono pervenuti in lingua Araba (tradotti in Latino da G.A. Borelli - Firenze - 1661) l'ottavo è perduto. Secondo un testo di Pappo, anche Euclide aveva trattato le coniche, ed Archimede le parabole.

Consideriamo il minore A_{33} del determinante delle coniche, cioè il minore ottenuto sopprimendo la riga e la colonna di "a_{33}":

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - 2a_{12})$$

avremo il seguente prospetto:

$A \neq 0$; (coniche non degeneri)

$A_{33} > 0$ <u>caso ellittico</u> $\begin{cases} Aa_{11} > 0 \text{ ed } (Aa_{22} > 0) & \underline{\text{ellisse immaginaria}} \\ Aa_{11} < 0 \text{ ed } (Aa_{22} < 0) & \underline{\text{ellisse reale}} \end{cases}$

$A_{33} < 0$ <u>iperbole</u> $\{(a_{11} + a_{22}) = 0 \rightarrow$ <u>iperbole equilatera</u>

$A_{33} = 0$ <u>parabola</u>

Dato un polinomio di 2° grado completo in x,y, (o incompleto) il prospetto permette subito di stabilire se trattasi di un ellisse, un iperbole od una parabola. Noi preferiamo ricavare diversamente le formule, per apprezzare gli elementi di ciascuna curva, che tratteremo separatamente.

Trattiamo le coniche, con i metodi della geometria analitica.

L'equazione completa, polinomio di 2° grado:

$$\boxed{f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0}$$

è una conica.

Si noti che se consideriamo l'equazione dimensionalmente, (per esempio: x ad y lunghezze, i coefficienti con indice 3 sono anch'essi lunghezze) l'indice dei coefficienti è collegato alle grandezze dimensionali cioè 1 con x; 2 con y; 3 con una lunghezza nota; in tal senso tutti i termini sono lunghezze al quadrato.

Il determinante (simmetrico):

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

è detto: determinante delle coniche

ove: $\boxed{a_{ij} = a_{ji}}$

cioè: $(a_{12} = a_{21})$; $(a_{13} = a_{31})$; $(a_{23} = a_{32})$

si noti che per $i \neq j$ a_{ij} figura duplicato nell'equazione perché andrebbe scritto $2a_{ij} = [(a_{ij}) + (a_{ji})]$.

si ha:

$$A = \begin{cases} = 0 & \rightarrow \text{Conica degenere} \\ \neq 0 & \rightarrow \text{Conica non degenere.} \end{cases}$$

Cioè il determinante, consente subito di decidere se l'espressione algebrica è una conica non degenere, cioè non degenera in due rette.

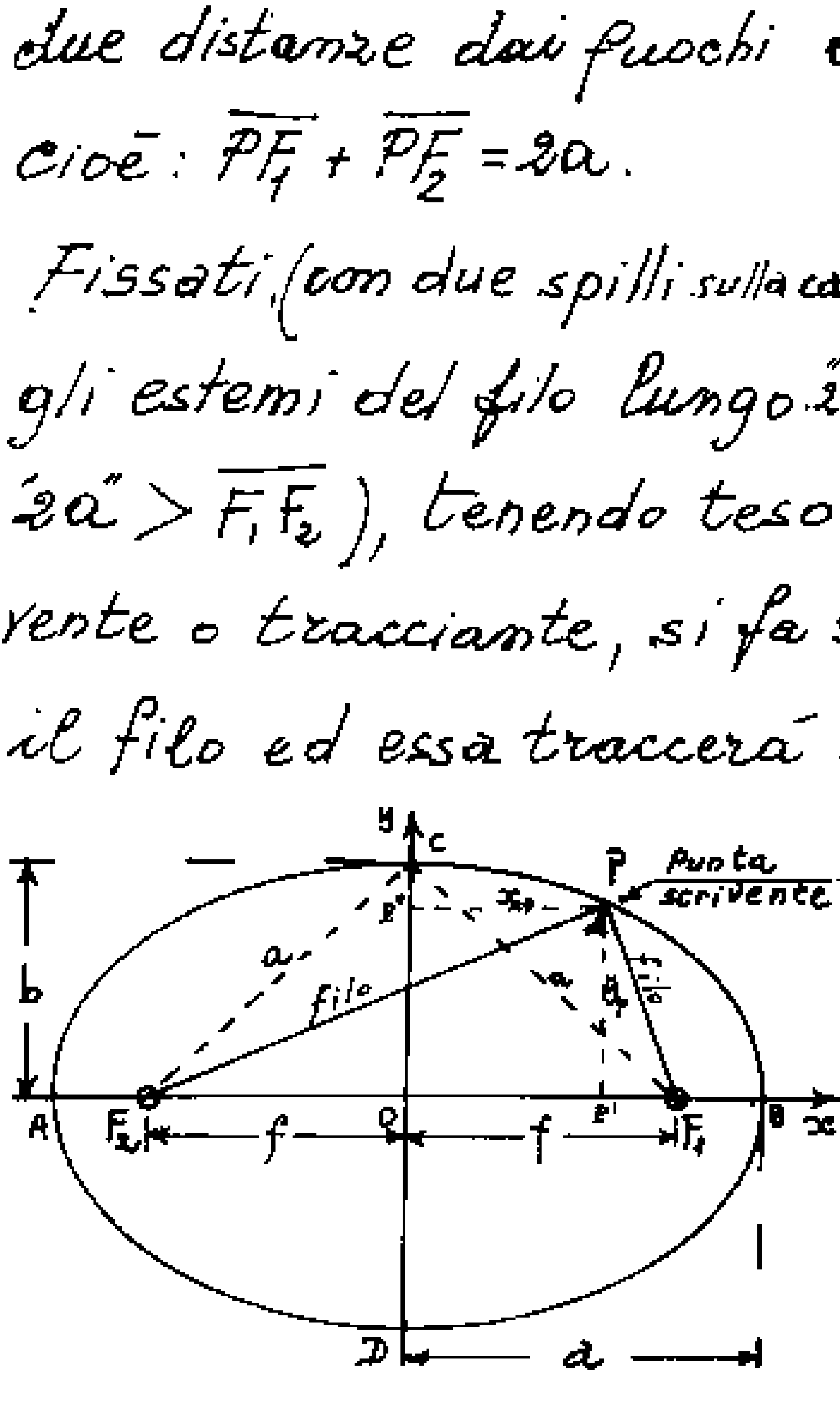
L' Ellisse

"Dicesi ellisse il luogo geometrico dei punti del piano, le cui distanze da due punti detti fuochi, hanno somma costante".

L'ellisse del giardiniere.

La definizione si presta ad un immediato tracciamento dell'ellisse, sulla carta o sul terreno. Dati due fuochi F_1 ed F_2, ed un filo flessibile ed inestendibile lungo $2a$, ($2a$ è la somma costante delle due distanze dai fuochi dei punti P dell'ellisse) cioè: $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$.

Fissati (con due spilli sulla carta, o con due picchetti nel terreno) gli estremi del filo lungo "$2a$" nei fuochi F_1 ed F_2; (con "$2a$" $> \overline{F_1F_2}$), tenendo teso il filo con una punta scrivente o tracciante, si fa scorrere la punta lungo il filo ed essa traccerà un ellisse; infatti in ogni



posizione si ha:

$$\boxed{\overline{F_2P} + \overline{PF_1} = 2a}$$

L'ellisse è detta del giardiniere perchè il metodo è usato per tracciare il profilo di aiuole, o di vasche ellittiche.

L'equazione dell'ellisse al centro

Dalla figura dell'ellisse del giardiniere si nota che, quando la punta scrivente è in A (oppure in B), il filo copre una volta il tratto $\overline{F_1F_2}$ e due volte $\overline{F_2A}$ (oppure $\overline{F_1B}$), ma essendo: $\overline{F_1B} = \overline{F_2A}$ ed $\overline{AB} = \overline{F_1F_2} + 2\overline{F_2A}$; il diametro $\overline{AB}$ è pari alla lunghezza del filo cioè: $\underline{\overline{AB} = 2a}$.

per cui il semidiametro $\overline{OA} = \overline{OB} = a$.

$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sono detti: diametri principali dell'ellisse; od anche: assi dell'ellisse (essendo assi di simmetria).

Sia $b = \overline{OC} = \overline{OD}$ l'altro semidiametro e sia: $f = \overline{OF_1} = \overline{OF_2}$ la distanza focale; vale la legge pitagorica:

$$\boxed{a^2 = b^2 + f^2}$$

Per cui dati gli assi (a, b) dell'ellisse è possibile calcolare la distanza focale f e disegnare i punti F_1 ed F_2 facendo centro in C (oppure in D) con apertura di compasso pari ad "a"; le intersezioni dell'arco tracciato con $\overline{AB}$ sono i fuochi: F_1 ed F_2.

Il rapporto: $f/a = $ "K" è detto eccentricità dell'ellisse. (Talvolta indicata con "e")

Dalla definizione dell'ellisse come luogo geometrico abbiamo:

$$\boxed{\overline{F_2P} + \overline{F_1P} = 2a} \quad (= \text{costante})$$

ma, (vedi figura)

$$\overline{F_2P} = \sqrt{\overline{F_2P'}^2 + y^2} = \sqrt{(f+x)^2 + y^2}$$

$$\overline{F_1P} = \sqrt{\overline{F_1P'}^2 + y^2} = \sqrt{(f-x)^2 + y^2}$$

sostituendo:

$$\sqrt{(f+x)^2 + y^2} + \sqrt{(f-x)^2 + y^2} = 2a.$$

isolando una radice ed elevando a quadrato si ha:

$$(f+x)^2 + \cancel{y^2} = (f-x)^2 + \cancel{y^2} + (2a)^2 - 2(2a)\sqrt{(f-x)^2 + y^2}$$

sviluppando i quadrati e semplificando:

$$\cancel{4}fx - \cancel{4}a^2 = \cancel{4}a\sqrt{(f-x)^2 + y^2}$$

$$f^2x^2 + a^4 - \cancel{2a^2fx} = a^2(f^2 - \cancel{2fx} + x^2 + y^2)$$

sostituendo: $f^2 = (a^2 - b^2)$:

$$\cancel{a^2x^2} - b^2x^2 + \cancel{a^4} = \cancel{a^4} - a^2b^2 + \cancel{a^2x^2} + a^2y^2$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

dividendo per a^2b^2:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

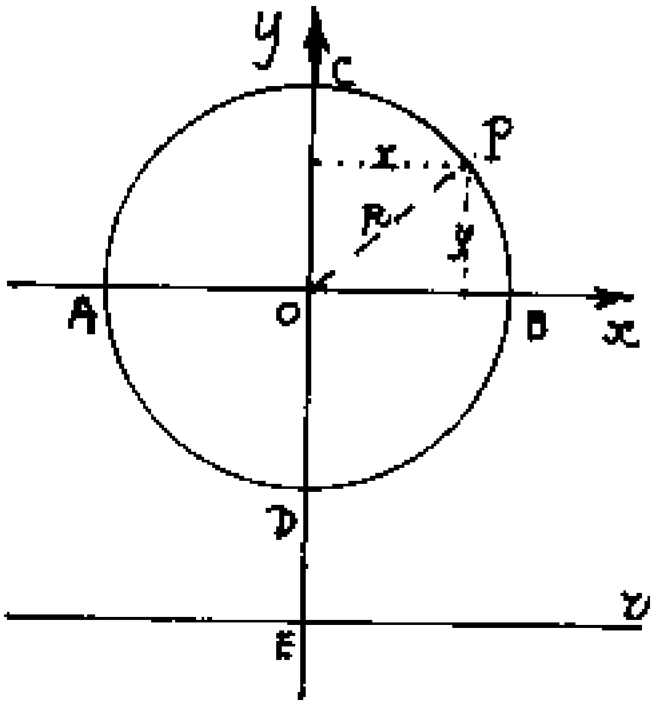
Che l'equazione dell'ellisse al centro assi

Si può scrivere:

$$\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1}$$

Che pitagoricamente significa: distanza unitaria dal centro assi dei punti le cui coordinate sono misurate con modulo "a" in ascisse, e con modulo "b" in ordinate.

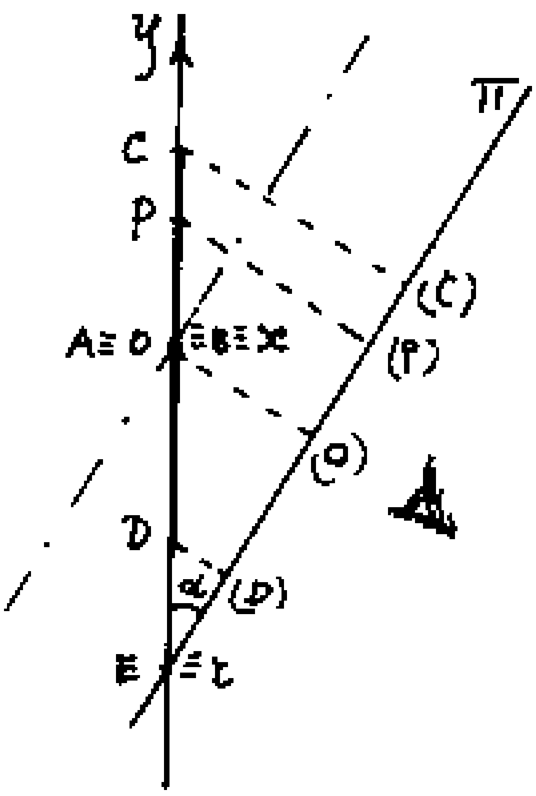
L'ellisse come proiezione di un cerchio.



L'equazione del cerchio al centro assi è: $x^2+y^2=R^2$, che può scriversi:

$$\boxed{\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}=1}$$

cioè il cerchio è un particolare ellisse ove: $a=b=R$.



Consideriamo un piano π inclinato di α rispetto al piano xy ed avente in comune con esso la retta r. Proiettiamo il cerchio ortogonalmente su π, (In figura i piani xy e π sono visti di profilo) ed indichiamo in parentesi le proiezioni. Le ascisse, cioè i segmenti in x, si proiettano in vera grandezza: $(x)=x$; mentre i segmenti in y si proiettano accorciati (scorcio), cioè: $(y)=y\cdot\cos\alpha$; $\boxed{y=\frac{(y)}{\cos\alpha}}$, sostituendo nell'equazione del cerchio

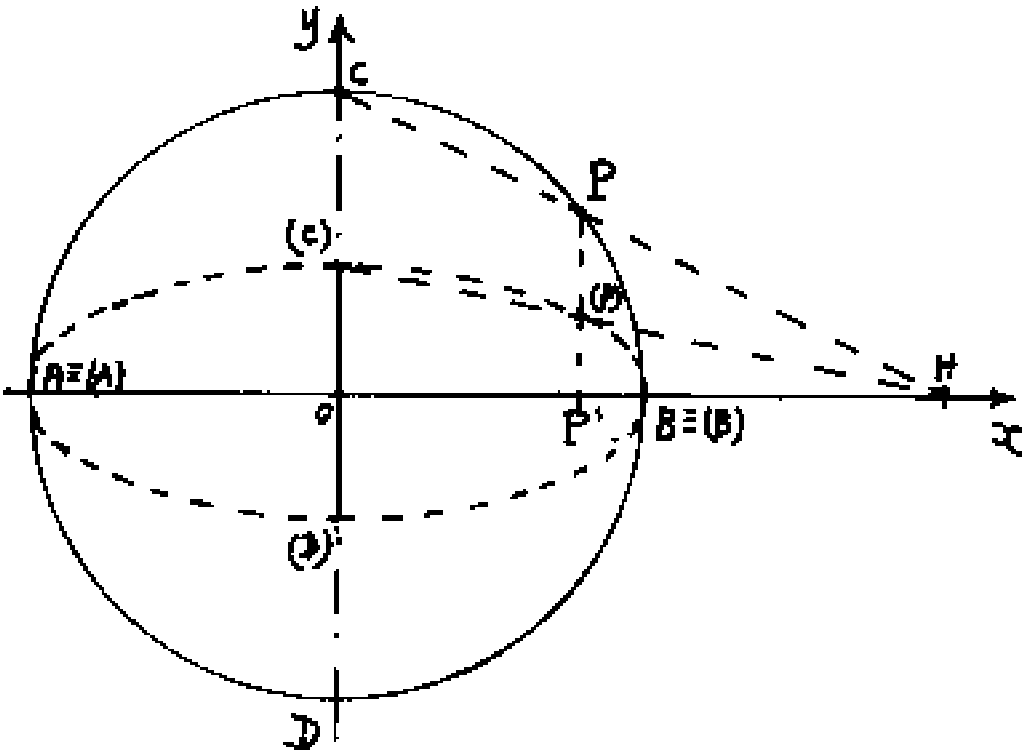
$$\boxed{\frac{(x)^2}{(R^2)}+\frac{(y)^2}{(R^2\cos^2\alpha)}=1}$$

che è l'equazione di un ellisse di semidiametri:

$$\boxed{b=R\cos(\alpha)} \quad ; \quad \boxed{a=R}$$

Costruzioni grafiche dell'ellisse

Se guardiamo perpendicolarmente al piano π, il cerchio che ruota intorno all'asse x (vedi paragrafo e figura precedenti); Se pensiamo inizialmente il piano xy del



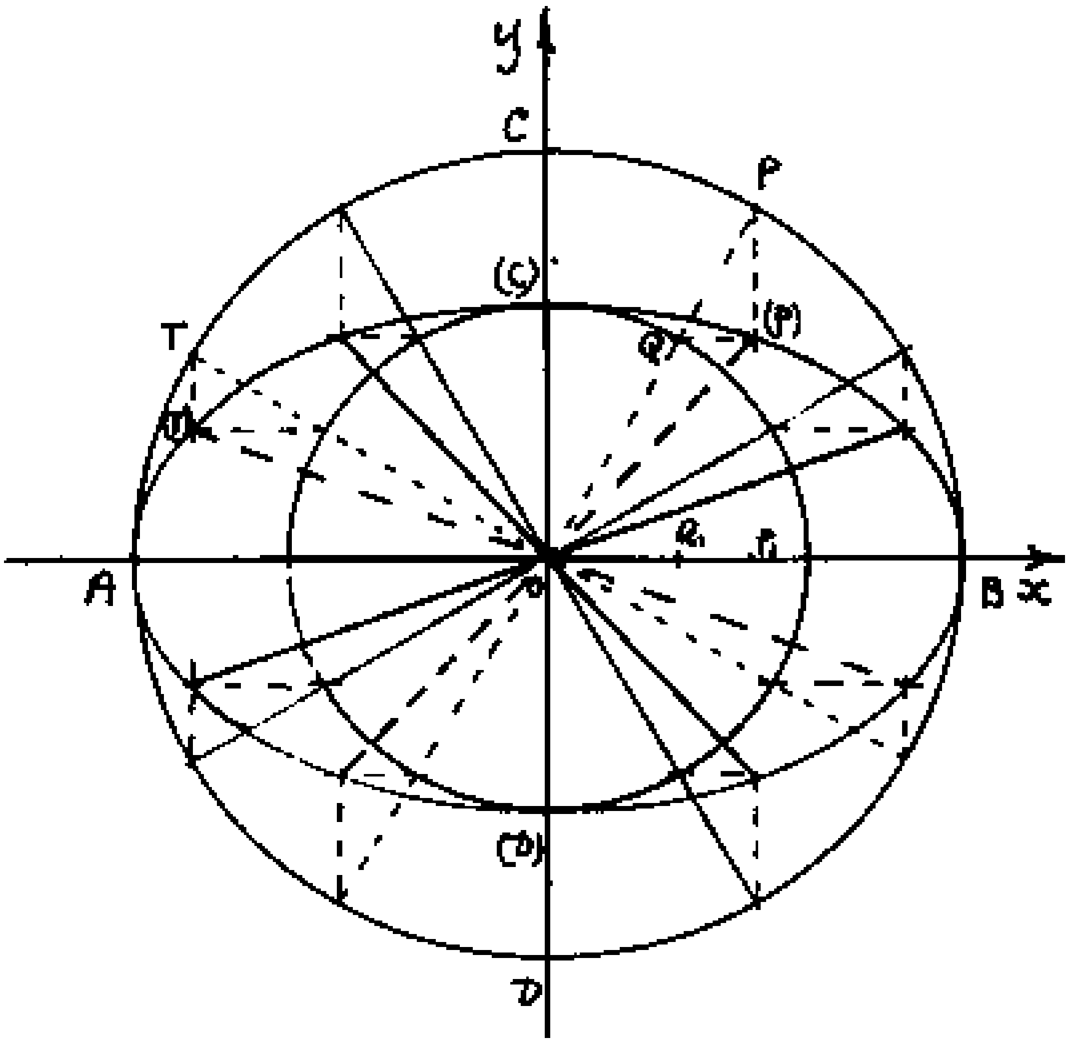
del cerchio parallelo a π, noi vedremo il cerchio come in figura. Via, Via che il cerchio ruota intorno ad x, i punti della circonferenza li vedremo spostarsi lungo segmenti perpendicolari ad x, mentre i punti dell'asse x (parallelo a π) rimangono fermi. Se fissiamo il semiasse minore dell'ellisse in $\overline{O(C)} = \overline{O(D)}$, e prendiamo un punto P qualsiasi sulla circonferenza, anche P nella ruotazione si muoverà perpendicolarmente ad x; e la retta $\overline{CP}$ che incontra in H l'asse x, a ruotazione avvenuta diverrà $\overline{(C)H}$ ed incontrerà in (P) la perpendicolare ad x da P.

Ad ogni punto P della circonferenza corrisponde un punto H sulla x ottenuto per intersezione con la retta $\overline{CP}$ e conoscendo (C) si unisce con H determinando P.

Ripetendo la costruzione si può tracciare l'ellisse punto per punto.

II° Costruzione grafica.

Osserviamo come nella precedente costruzione, i segmenti paralleli ad x, si proiettano su π mantenendosi paralleli e di lunghezza invariata (uguali ascisse dei punti ruotati); mentre i segmenti perpendicolari ad x (le ordinate dei punti), si proiettano su π tutti accorciati nella stessa proporzione (coeff. di propor. $= \cos(\alpha)$)



Se, dati i due semidiametri dell'ellisse, cioé: $\overline{O(C)} = \overline{O(D)}$ ed $\overline{OA} = \overline{OB}$, tracciamo due circonferenze concentriche di raggio: $\overline{OA}$ e di raggio: $\overline{O(C)}$, e tracciamo un generico raggio $\overline{OP}$ che incontrerá la circonferenza di raggio $\overline{O(C)}$ in Q,

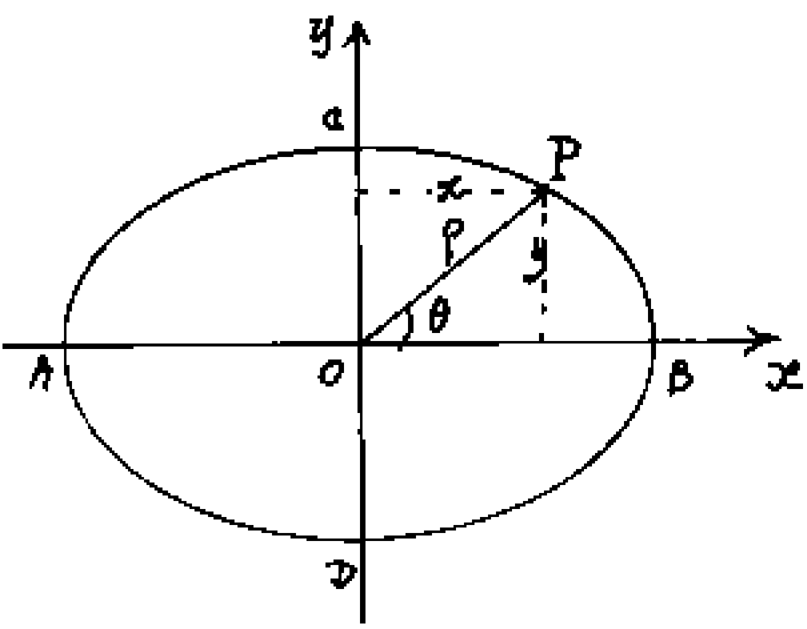
notiamo che: $\cos(\alpha) = \dfrac{\overline{O(C)}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{(P)P_1}}{\overline{PP_1}} = \dfrac{\overline{QQ_1}}{\overline{PP_1}}$ cioé $\boxed{\overline{(P)P_1} = \overline{QQ_1}}$

cioé le ordinate dei punti dell'ellisse ($\overline{P_1(P)}$) sono le ordinate sulla circonferenza minore per lo stesso semidiametro. Basterá quindi da Q tracciare la parallela ad x fino ad incontrare la parallela ad y da P per ottenere un punto (P) dell'ellisse.

Si noti che diametri originariamente perpendicolari sulle circonferenze ($\overline{OP}$ con $\overline{OT}$ ecc), nell'ellisse sono detti: diametri coniugati.

Equazioni dell'ellisse in coordinate polari

Sia: ρ = modulo ; θ = argomento ; $x = \rho\cos\theta$; $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$



sostituendo nella: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

abbiamo:

$$\boxed{\frac{\rho^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta}{b^2} = 1}$$

esplicitiamo ρ

$$\boxed{\rho = \frac{ab}{\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta}}}$$

equazione in coordinate polari dell'ellisse di assi a, b.

È importante l'equazione nella forma:

$$\boxed{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{b^2} = \frac{1}{\rho^2}}$$

$a^2\,\mathrm{sen}^2\theta + b^2(1-\mathrm{sen}^2\theta) = \left(\dfrac{ab}{\rho}\right)^2$, $\qquad a^2(1-\cos^2\theta) + b^2\cos^2\theta = \left(\dfrac{ab}{\rho}\right)^2$

$(a^2-b^2)\,\mathrm{sen}^2\theta = \dfrac{b^2}{\rho^2}(a^2-\rho^2)$; $\qquad -(a^2-b^2)\cos^2\theta = \dfrac{a^2}{\rho^2}(b^2-\rho^2)$

$$\boxed{\mathrm{sen}\,\theta = \frac{b}{\rho f}\sqrt{a^2-\rho^2}}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{a}{\rho f}\sqrt{\rho^2-b^2}}$$

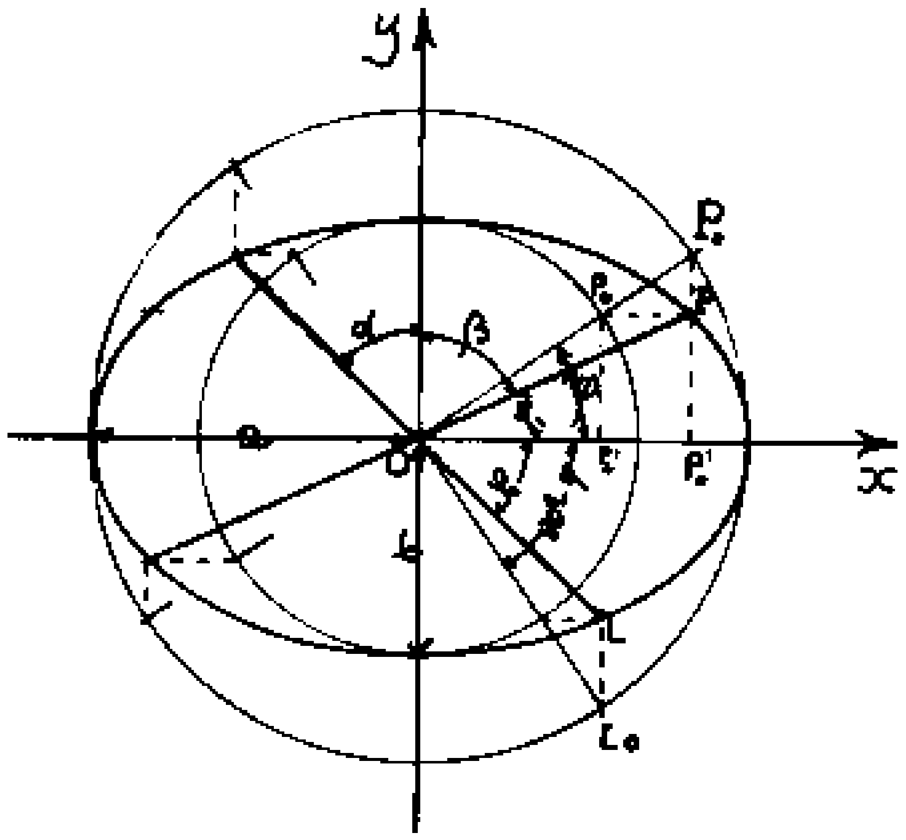
$$\boxed{\mathrm{tang}\,\theta = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2-\rho^2}{\rho^2-b^2}}}$$

Equazioni in coordinate polari risolte rispetto a funzioni di θ. Da queste equazioni è possibile rilevare i limiti di ρ:

$$b \le \rho \le a$$

I diametri coniugati dell'ellisse

Diconsi diametri coniugati nell'ellisse, quei diametri che nel cerchio originario erano perpendicolari.



Sia φ l'angolo che un raggio generico del cerchio forma con l'asse maggiore (asse x) dell'ellisse, e $(90°-\varphi)$ l'angolo che il raggio perpendicolare forma con lo stesso asse. Siano φ_1 e φ_2 gli angoli che i corrispondenti semidiametri dell'ellisse formano con lo stesso asse x, e siano α e β gli angoli, che i diametri coniugati dell'ellisse, formano con l'asse minore.

Noti: a e b, raggi dei cerchi e semidiametri principali dell'ellisse:

$\boxed{\overline{P_0P_0'} = a \operatorname{sen}\varphi}$; $\boxed{\overline{PP_0'} = \overline{P_*P_*'} = b \operatorname{sen}\varphi}$; $\boxed{\overline{OP_0'} = a\cos\varphi}$ quindi:

$$\boxed{\overline{OP} = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\varphi} \quad ; \quad \overline{OL} = \sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}$$

sono l'ampiezza dei semidiametri coniugati dell'ellisse in funzione dell'angolo φ formato dal raggio del cerchio originario.

Quadrando e sommando si ha:

$$\boxed{\overline{OP}^2 + \overline{OL}^2 = a^2 + b^2}$$

importante legge Pitagorica: "La somma dei quadrati dei diametri coniugati dell'ellisse è costante"

Si noti che anche i diametri principali (a, b) sono diametri coniugati, sono l'unica coppia che mantiene la perpendicolarità dei raggi del cerchio originario.

$\boxed{a^2+b^2=d^2}$ "d" è la semidiagonale del rettangolo circoscritto all'ellisse, ed è la costante ipotenusa dei diametri coniugati presi come cateti

Dalla figura si ha:

$$\boxed{\tan(\varphi_1)=\frac{b \operatorname{sen}\varphi}{a\cos\varphi}=\frac{b}{a}\tan(\varphi)} \; ; \; \boxed{\tan(\varphi_2)=\frac{b(\operatorname{sen}(90°-\varphi))}{a(\cos(90°-\varphi))}=\frac{b}{a}\frac{1}{\tan(\varphi)}}$$

moltiplicando le due espressioni:

$$\boxed{\tan(\varphi_1)\cdot\tan(\varphi_2)=\frac{b^2}{a^2}}$$

Equazione dei diametri coniugati dell'ellisse con angoli misurati da bande opposte dell'asse maggiore

poiché $\alpha=(90°-\varphi_2)$; $\beta=(90°-\varphi_1)$ si ha:

$$\boxed{\tan(\alpha)\tan(\beta)=\frac{a^2}{b^2}}$$

Equazione dei diametri coniugati dell'ellisse con angoli misurati da bande opposte dell'asse minore.

Indichiamo ora $\rho_1=\overline{OP}$; $\rho_2=\overline{OL}$ i due semidiametri coniugati dell'ellisse che formano gli angoli φ_1 ed φ_2 con l'asse maggiore; tenendo conto delle relazioni di cui sopra, calcoliamo le funzioni di φ_1 e di φ_2 e della loro somma $(\operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2))$.

$$\boxed{\rho_1^2+\rho_2^2=a^2+b^2}$$

Dalla figura si ha:

$$\operatorname{sen}\varphi_1 = \frac{b \operatorname{sen}\varphi}{\rho_1} \quad ; \quad \cos\varphi_1 = \frac{a \cos\varphi}{\rho_1}$$

$$\operatorname{sen}\varphi_2 = \frac{b \cos\varphi}{\rho_2} \quad ; \quad \cos\varphi_2 = \frac{a \operatorname{sen}\varphi}{\rho_2}$$

$$\operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2) = \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2$$

$$\operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2) = \frac{ab \operatorname{sen}^2\varphi}{\rho_1\rho_2} + \frac{ab \cos^2\varphi}{\rho_1\rho_2}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2) = \frac{ab}{\rho_1\rho_2}}$$

Notate che $(\varphi_1+\varphi_2)$ è l'angolo acuto formato dai semidiametri coniugati dell'ellisse (Gli altri due semidiametri formano l'angolo $(\alpha+\beta)$ che risulta sempre un angolo ottuso); ma: $\boxed{\operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2) = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$ Perció se costruiamo un parallelogramma avente per lati adiacenti i semidiametri coniugati e per angoli $(\varphi_1+\varphi_2)$ ed $(\alpha+\beta)$ L'area di tale parallelogramma sará:

$$A = \rho_1\rho_2 \operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2) = \rho_1\rho_2 \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = ab$$

$$\boxed{A = ab}$$

L'area è costante ed è pari ad un quarto dell'area del rettangolo circoscritto all'ellisse.

Se nel cerchio originario dell'ellisse tracciamo le corde perpendicolari ad un diametro, queste sono da esso bisecate e sono parallele alle tangenti al cerchio nei punti estremi del diametro stesso.

Da ció si deducono altre proprietá dei diametri coniugati dell'ellisse:

1) Le rette tangenti all'ellisse nei punti estremi di un diametro, sono parallele al diametro coniugato

2) In un ellisse un diametro biseca le corde parallele al suo coniugato.

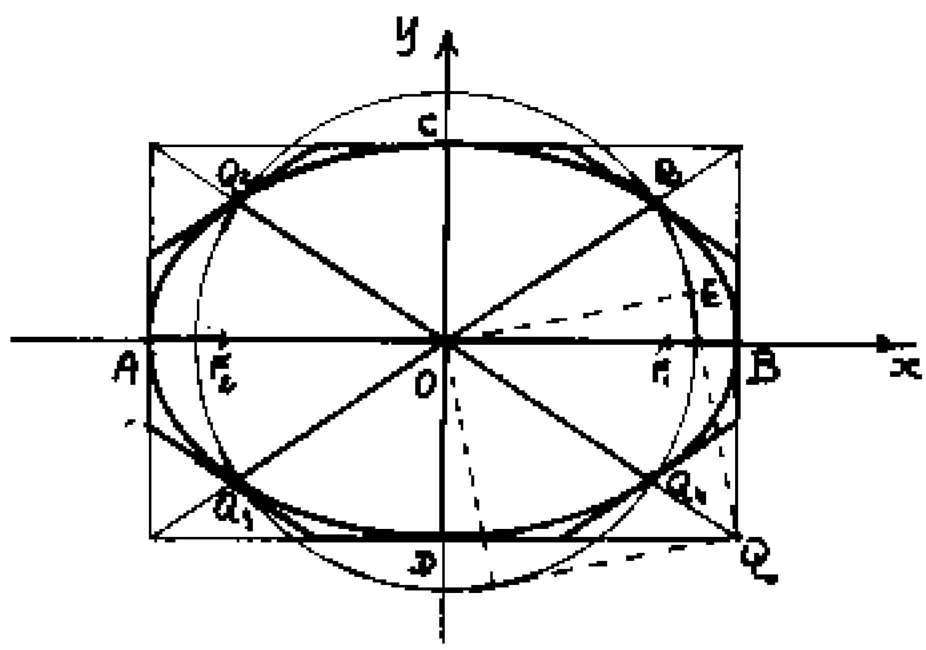
3) I soli diametri che dal cerchio proiettato sull'ellisse, permangono perpendicolari sono i diametri principali

4) I diametri coniugati dell'ellisse sono di diversa lunghezza, salvo quelli che nel cerchio erano a 45° con gli assi, anche nell'ellisse formano angoli uguali; $(\varphi_1 = \varphi_2)$; $(\alpha = \beta)$; perció: $tg^2\alpha = \frac{a^2}{b^2}$ cioé: $tang(\alpha) = a/b$, cioé i diametri coniugati che nel cerchio originario formavano angoli a 45° con gli assi, nell'ellisse giacciono sulle diagonali del rettangolo che lo circoscrive. E poiché: $(\rho_1^2 + \rho_2^2) = (a^2 + b^2)$; $\rho_d = \rho_1 = \rho_2$ ed anche: $(a^2+b^2) = d^2$ (semidiagonale del rettangolo)^2; si ha: $2\rho_d^2 = d^2$, cioé:

$$\boxed{\rho_d = \frac{d}{\sqrt{2}}}$$

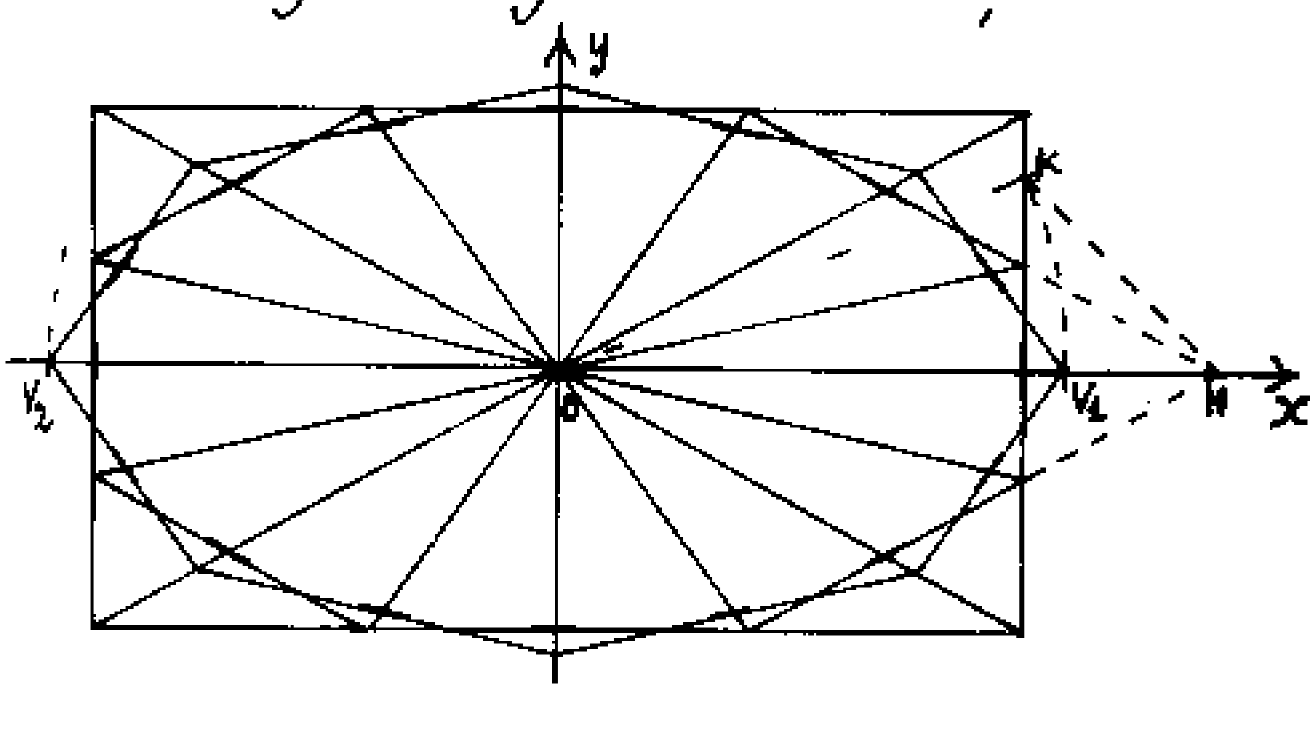
5) L'ampiezza dei diametri coniugati che giacciono sulle semidiagonali del rettangolo circoscritto all'ellisse é pari all'ampiezza delle semidiagonali stesse divise per $\sqrt{2}$.

Si può anche dire: "Il lato del quadrato, che ha per diagonale la semidiagonale del rettangolo circoscoscritto all'ellisse, è l'ampiezza dei semidiametri coniugati che giacciono sulle semidiagonali stesse.



Ciò implica una facile costruzione grafica per ottenere i punti dell'ellisse sulle diagonali del rettangolo ad esso circoscritto.

Basta costruire su una semidiagonale come $\overline{OQ_0}$ il quadrato di lato $\overline{OQ_0}/\sqrt{2} = \overline{OE}$ e riportarlo in $\overline{OQ_1}, \overline{OQ_2}, \overline{OQ_3}, \overline{OQ_4}$. Così oltre i punti: A, B, C, D, dell'ellisse si hanno i punti Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. È anche opportuno ricordare che le tangenti in Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sono parallele alle diagonali. Ciò delinea anche meglio l'ellisse. Questa costruzione è complementare a quella che faremo utilizzando i raggi di curvatura. L'ottagono che ora circoscrive l'ellisse è la proiezione dell'ottagono regolare che circoscrive il cerchio origine. Volendo incrementare i punti di tangenza con l'ellisse possiamo proiettare il poligono a 16 lati che circoscrive il cerchio origine. A tal fine basterà proiettare un altro ottagono regolare che circoscrive il cerchio origine, avente però i vertici su gli assi x ed y. Interessano in particolare i due vertici V_1 e V_2 sull'asse x, perché coincidono con la loro proiezione. Se prolunghiamo i lati obliqui della proiezione dell'ottagono già tracciato fino ad incontrare l'asse x nei punti H_1 ed H_2 comuni ai prolungamenti dei lati obliqui del primo ottagono circoscritto al cerchio origine. Quindi se da H tracciamo rette a 45° sull'asse x fino ad incontrare in K i lati verticali del rettangolo che circoscrive l'ellisse, il segmento $\overline{OK}$ è, in vera grandezza, la semidiagonale dell'ottagono regolare, che riportiamo sull'asse x in V_1 e V_2.

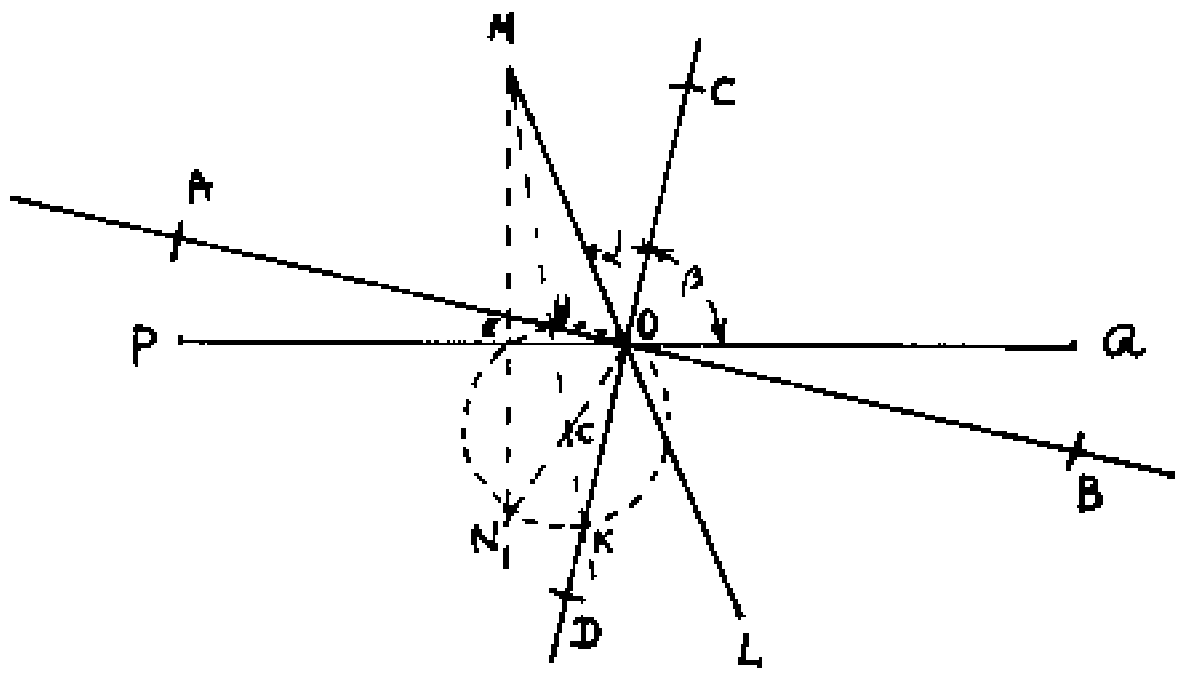


Dai V le parallele alle diagonali minori della proiezione dell'ottagono, fino ad incontrare le diagonali del rettangolo; e da questi punti le parallele (opportune) alle diagonali maggiori, fino all'incontro con l'asse y. Abbiamo così disegnato la proiezione del secondo ottagono e possiamo tratteggiare l'ellisse agli estremi dei diametri coniugati. Per raccordare due tratti basta trovare il punto comune alle due normali, correggendo il raggio medio.

Dati due diametri coniugati disegnare i diametri principali

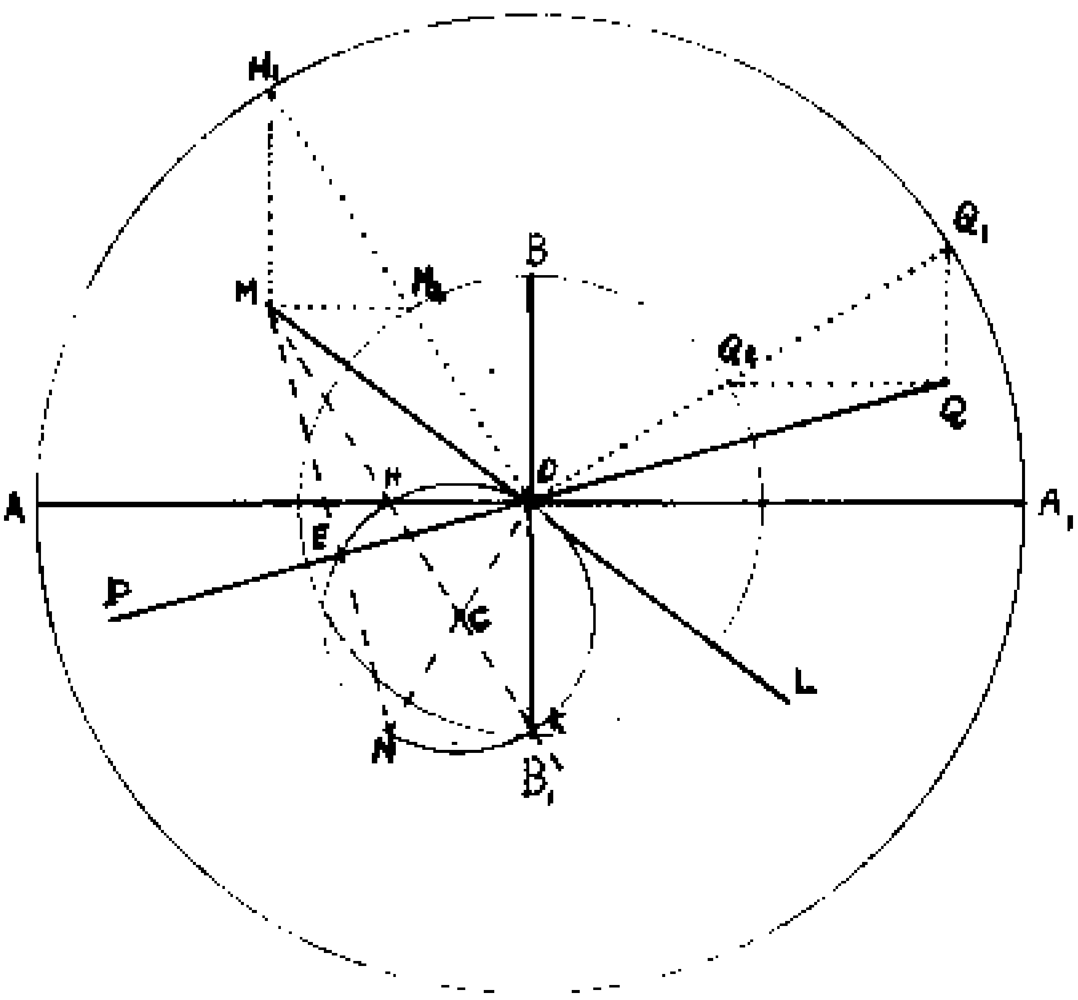
Dei diametri coniugati sappiamo che è costante la somma dei quadrati: $\rho_1^2+\rho_2^2=a^2+b^2$; sappiamo che è costante l'area del parallelogramma da essi costituito; $\rho_1\rho_2 \operatorname{sen}(\alpha+\beta)=ab$; sappiamo l'equazione: $tg\alpha \cdot tg\beta = \frac{a^2}{b^2}$; sappiamo che "a" è massimo, e "b" è minimo.

Siano dati i diametri coniugati $\overline{PQ}$ ed $\overline{ML}$ di centro



"O". Da un estremo del diametro coniugato minore, (dal punto M) tracciamo la perpendicolare al diametro maggiore e su di essa riportiamo il semidiametro maggiore e sia N il punto definito. ($\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{MN}$). Unito N con O (centro assi) si traccia il cerchio di diametro: $\overline{NO}$, si unisce M col centro "C" e si prolunga determinando i punti di intersezione "H" e "K" che uniti con "O" danno le direzioni dei diametri principali, mentre i segmenti: $\overline{MH}$ ed $\overline{MK}$ sono le ampiezze dei semidiametri principali dell'ellisse. É possibile così disegnare i punti A, B, C, D ove $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sono i diametri richiesti.

Si possono fare varie dimostrazioni della costruzione ora effettuata; nell'enciclopedia delle matematiche elementari e complementi, ed. Hoepli, Volume II, parte 2ª, pag. 102, viene riportata la seguente dimostrazione (con simboli diversi): "Infatti se conduciamo da O la parallela e la perpendicolare ad MHK e per M e Q le parallele ad OH ed OK, si ha: $\overline{OM_1} = \overline{KM}$, $\overline{OM_2} = \overline{HM}$, cioè M_1 appartiene al circolo di centro O e raggio $a = \overline{MK}$ ed il punto M_2 appartiene al circolo di centro "O" e raggio $b = \overline{MH}$. Lo stesso può dirsi per i punti Q_1 e Q_2 rispettivamente. Se ne conclude che se si considera l'ellisse di semiassi "a" e "b" sulle rette OH ed OK, rispettivamente, in essa ML e PQ sono due diametri coniugati, perché corrispondono ai due diametri ortogonali dei circoli considerati."

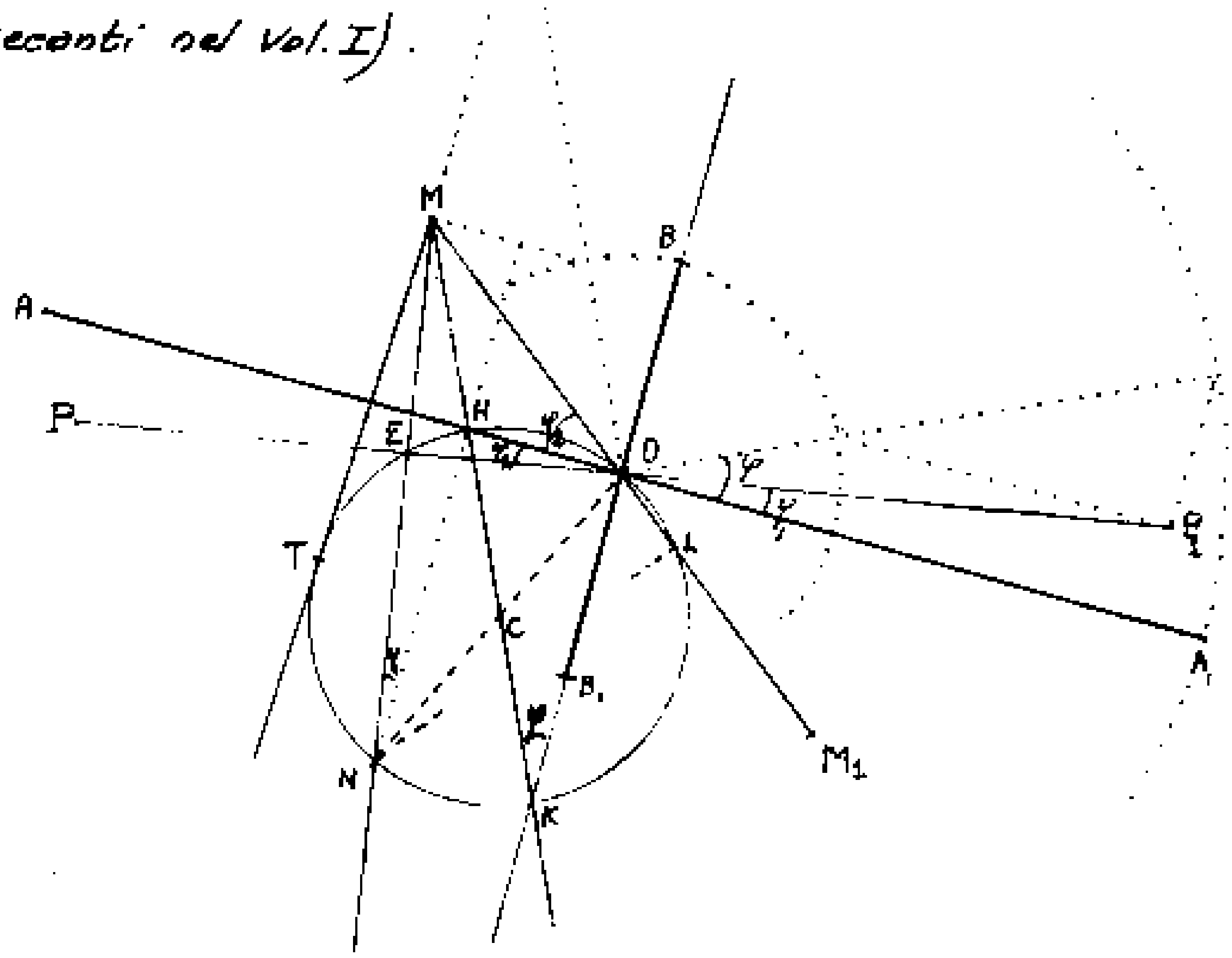


Un'altra dimostrazione può farsi in base ad elementi di geometria proiettiva che però non abbiamo ancora trattato. Noi preferiamo avvalerci del teorema delle secanti.

L'ellisse ed il teorema delle secanti

Nelle matematiche applicate troveremo spesso problemi di fisica in cui, valori caratteristici oscillano fra un massimo ed un minimo. Tali valori vengono spesso rappresentati coi semidiametri di un ellisse che variano appunto da un massimo: "a" ad un minimo: "b". (Ellisse d'inerzia, ellisse di elasticità, ellisse delle tensioni, ecc che nello spazio tridimensionale divengono ellissoidi).

A noi interessa confrontare <u>i segmenti di secante da un punto esterno ad una circonferenza, con i semidiametri coniugati di un ellisse.</u> (vedi teorema delle secanti nel Vol. I).



Sia M un punto esterno al cerchio di centro C, da M tracciamo la tangente MT, la secante generica HEN, la secante passante per il centro C e sia MHCK, si potrebbe chiamare "secante principale" perché su di essa si misurano i segmenti: massimo = $\overline{MK}$ = "a", minimo = $\overline{MH}$ = "b".

Se da N tracciamo il diametro NCO, è possibile tracciare anche la secante $MOLM_1$, dipendente dalla secante MEN. (arbitraria).

Per il teorema della tangente e della secante si ha:

$$\boxed{\overline{MT}^2 = (\overline{ME})(\overline{MN}) = (\overline{MK})(\overline{MH}) = (\overline{MO})(\overline{ML})}$$

Si unisca ora OE, OH, OK, e poniamo:

$E\hat{O}H = \varphi_1$; $H\hat{O}M = \varphi_2$; per cui: $E\hat{O}M = (\varphi_1 + \varphi_2)$

Se indichiamo con $\rho_1 = \overline{MN}$ e $\rho_2 = \overline{MO}$ avremo $\overline{ME} = \rho_2 \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)$

sostituendo:

$$\boxed{\overline{MT}^2 = \rho_1 \rho_2 \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2) = ab = \rho_2(\overline{ML})}$$

L'uguaglianza centrale è la relazione dei diametri coniugati ρ_1 e ρ_2 formanti l'angolo acuto $(\varphi_1 + \varphi_2)$ nell'ellisse di diametri principali "a" e "b"

$\overline{MT}$ è medio geometrico di ab cioè: $\overline{MT} = \sqrt{ab}$ (lato del quadrato equivalente al rettangolo ab).

Se calcoliamo il seno dell'angolo formato dalle diagonali del rettangolo che circoscrive l'ellisse si ha:

$\operatorname{sen} 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$; ma: $\left(\frac{b}{d}\right) = \operatorname{sen} \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$; $\left(\frac{a}{d}\right) = \cos \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$; perciò

$\operatorname{sen} 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) = 2\left(\frac{b}{d}\right)\left(\frac{a}{d}\right) = 2\frac{ab}{d^2}$ e poiché i semidiametri

coniugati che giacciono sulle diagonali del rettangolo cir=
coscritto all'ellisse li abbiamo indicati con ρ_d, avremo:

$$\rho_d^2 \operatorname{sen} 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) = \rho_d^2\, 2\frac{ab}{d^2} = ab = \overline{MT}^2 \quad ; \quad (\rho_d = d/\sqrt{2})$$

$$\overline{MT} = \rho_d \sqrt{\operatorname{sen} 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)} = \rho_d \frac{1}{d}\sqrt{2ab} = \sqrt{ab}$$

Quindi le tangenti al cerchio nel teorema delle secanti e delle tangenti sono connesse ai dia=metri coniugati dell'ellisse, che giacciono sulle diagonali del rettangolo ad esso circoscritte, e che nel cerchio originario formavano angoli di $\pm 45°$ con l'asse x.

Tracciamo ora la parallela e la perendicola=re da "O" alla secante principale MHCK ed indichia=mo con φ l'angolo $M\hat{K}B$, avremo che $A\hat{H}M = (90° - \varphi)$.

$(\overline{MH})\cos\varphi = (\overline{MO})\operatorname{sen}\varphi_2$ cioè: $b\cos\varphi = \rho_2 \operatorname{sen}\varphi_2$

$(\overline{MH})\operatorname{sen}\varphi = (\overline{MN})\operatorname{sen}\varphi_1$ $\quad b\operatorname{sen}\varphi = \rho_1 \operatorname{sen}\varphi_1$

$(\overline{MK})\operatorname{sen}\varphi = (\overline{MO})\cos\varphi_2$ $\quad a\operatorname{sen}\varphi = \rho_2\cos\varphi_2$

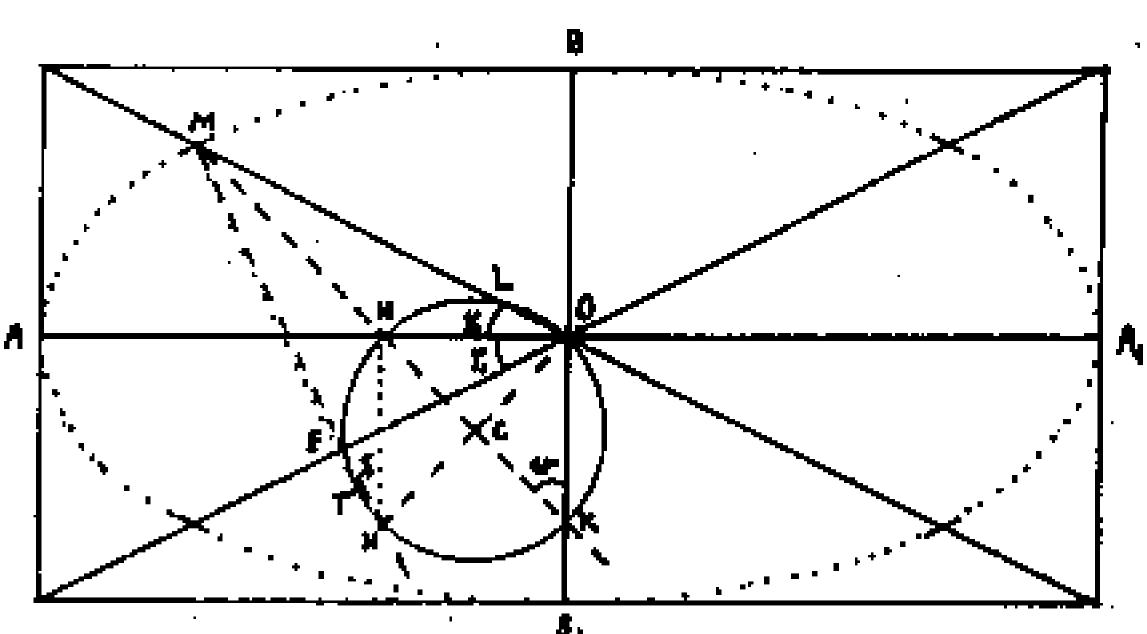
$(\overline{MK})\cos\varphi = (\overline{MN})\cos\varphi_1$ $\quad a\cos\varphi = \rho_1\cos\varphi_1$

Queste correlazioni angolari erano già state calcolate nella costruzione dell'ellisse e dimostrano che ai diame=tri coniugati dati corrispondono i diametri pricipali co=struiti. Resta da dimostrare $(\overline{MO})(\overline{ML})$, unito $\overline{NL}$ con $N\hat{L}M = \frac{\pi}{2}$ ed $M\hat{N}L = (\varphi_1 + \varphi_1)$ avremo: $(\overline{MO})(\overline{ML}) = \rho_1\rho_2 \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_1)$ cioè la secante MOL dipendente da MEN, è correlata a diametri coniugati simmetrici.

Invertiamo il discorso; e sia dato un ellisse e i suoi diametri principali, ad ogni punto M dell'ellisse corrisponde l'estremo di un semidiametro e se da M tracciamo la parallela al semidiametro del cerchio originario, questa formerà l'angolo φ col semiasse minore o maggiore a seconda che $\overline{OM}$ è un semidiametro minore o maggiore dell'ellisse. Su questa retta possiamo fissare C ove "C" è il centro del cerchio: $\overline{MC} = \left(\frac{a+b}{2}\right)$; di raggio $\left(\frac{a-b}{2}\right)$ ciò consente di tracciare il diametro coniugato.

Si nota che ad ogni punto dell'ellisse corrisponde un cerchio ove le secanti da tale punto sono connesse ai diametri coniugati dell'ellisse.

Consideriamo perciò qualche caso particolare, per esempio scegliendo M su $\int_d$ (Interessante notare che il segmento $\overline{MN}$ non è la tangente, e che L dal IV quadrante è passata al II. Quindi facendo variare il semidiametro coniugato del caso precedente a questo, per continuità deve esistere un cerchio per il quale "L" coincide con "O".)



La condizione per cui: E, N, T coincidano, è che il triangolo <u>MNO sia rettangolo in N</u>; e poiché: $\overline{OM} = \rho_2$; $\overline{MN} = \rho_1$; $\overline{ON} = (a-b)$; avremo:

$$\boxed{\rho_2^2 - \rho_1^2 = (a-b)^2}$$

ricordando che:

$$\boxed{\rho_2^2 + \rho_1^2 = a^2 + b^2} = d^2$$

sommando e sottraendo le due espressioni e risolvendo si ha:

$$\boxed{\rho_2^2 = a^2 + b^2 - ab} \Rightarrow \rho_2 = \sqrt{a^2+b^2-ab}$$

$$\boxed{\rho_1^2 = ab} \Rightarrow \rho_1 = \sqrt{ab}$$

poiché:

$$\operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2) = ab/\rho_1\rho_2$$

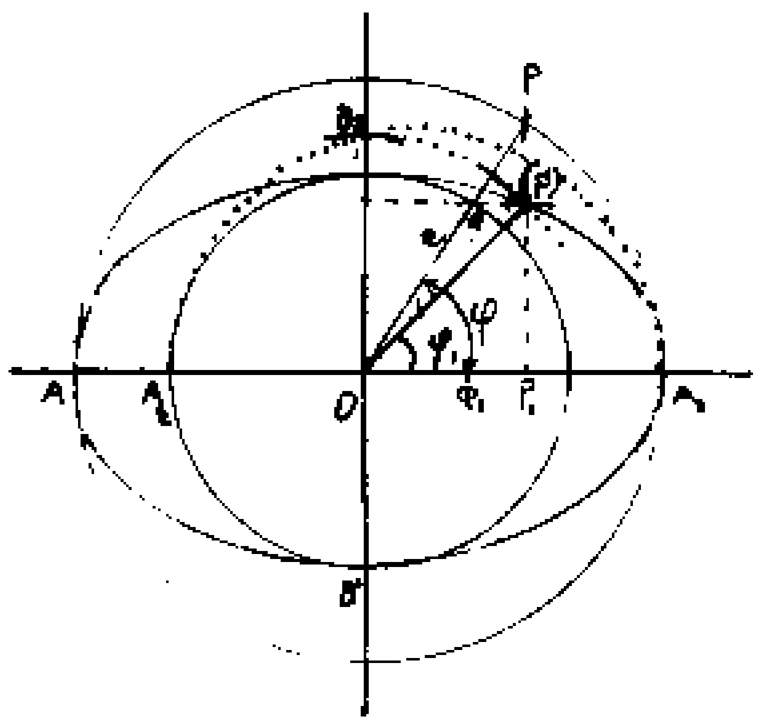
avremo:

$$\boxed{\operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2) = \sqrt{\frac{(ab)}{(a^2+b^2-ab)}}}$$

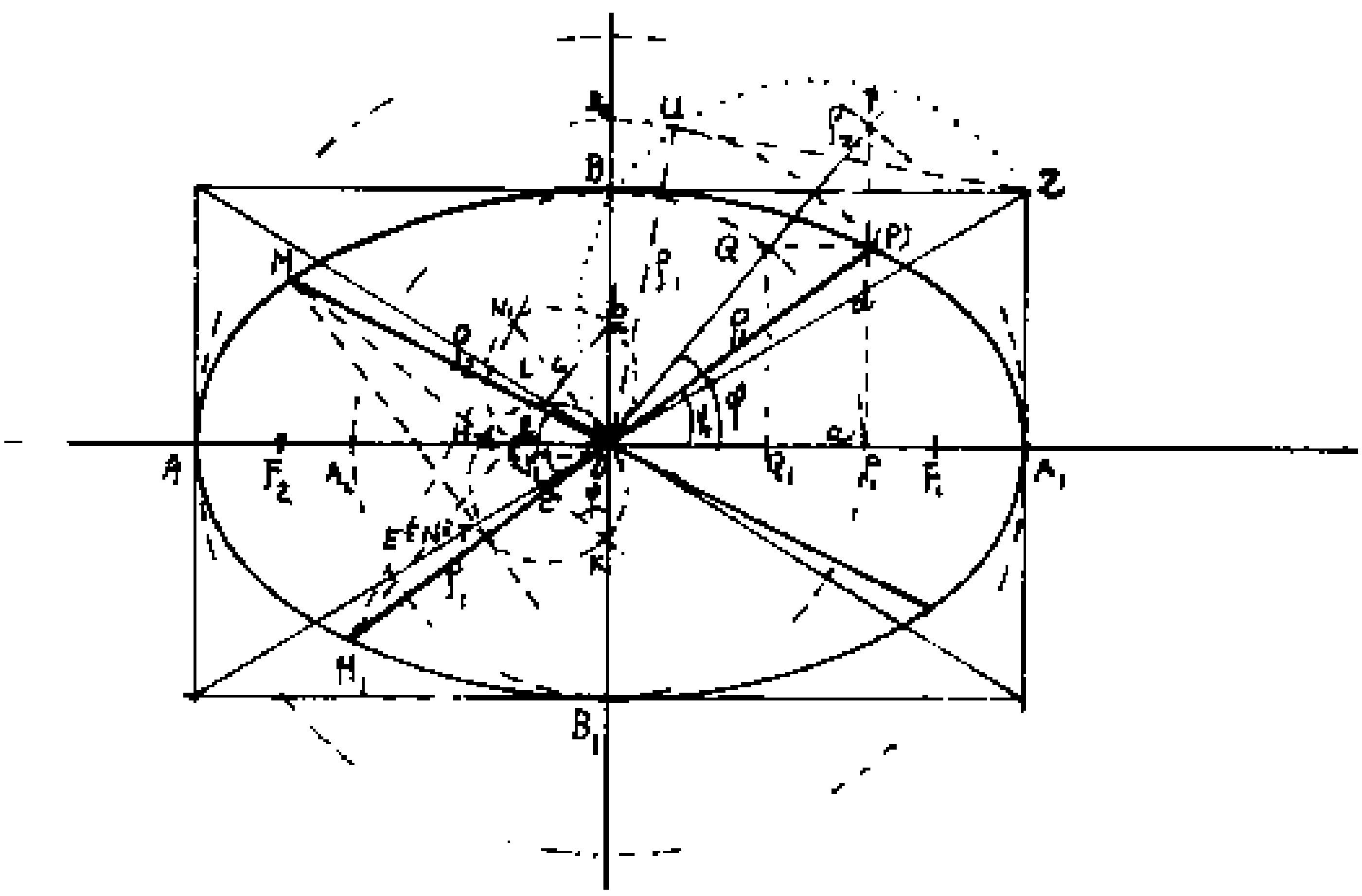
Per individuare la posizione di ρ_1 e ρ_2 con E, N, T coincidenti, interessano i valori di φ_1 e φ_2.

Sappiamo che: $\operatorname{sen}\varphi_1 = \frac{b \operatorname{sen}\varphi}{\rho_1}$; $\operatorname{sen}\varphi_2 = \frac{b\cos\varphi}{\rho_2}$

Occorre calcolare φ. Noti i diametri 2a, 2b, e quindi



di l'ellisse, tracciati i cerchi per la costruzione grafica, tracciamo anche un semicerchio di diametro $\overline{A_2A_1}$ che incontrerà in B_2 il semiasse minore: $\overline{OB_2} = \rho_1 = \sqrt{ab}$. riportiamo $\overline{OB_2}$ in $\overline{O(P)}$ e da (P) ricostruiamo: $P, P_1, Q, Q_1, \varphi_1$; si ricordi che la se=



miciirconferenza di diametro "d" è luogo geometrico dei vertici retti dei triangoli rettangoli che hanno per cateti gli assi: $(\rho_1^2+\rho_2^2=a^2+b^2=d^2)$, perciò riportato $\overline{OB_2}=\rho_1$ in $\overline{OU}$ si ha $\overline{UZ}=\rho_2$.

Volendo calcolare φ, abbiamo: $x_p=a\cos\varphi$; $y_p=(a-b)\operatorname{sen}\varphi$; $x_p^2+y_p^2=\rho_1^2=$

$\rho_1^2=ab=a^2+(b^2-2ab)\operatorname{sen}^2\varphi$; $\operatorname{sen}\varphi=\sqrt{\frac{a^2-ab}{2ab-b^2}}$ $\boxed{\operatorname{sen}\varphi=\sqrt{\frac{a(a-b)}{b(2a-b)}}}$

$\operatorname{sen}\varphi_1=\frac{b\operatorname{sen}\varphi}{\rho_1}=\frac{\cancel{b}}{\sqrt{a\cancel{b}}}\sqrt{\frac{\cancel{a}}{\cancel{b}}\frac{(a-b)}{(2a-b)}}=$ $\boxed{\operatorname{sen}\varphi_1=\sqrt{\frac{(a-b)}{(2a-b)}}}$

$\boxed{\cos\varphi_1=\sqrt{\frac{a}{(2a-b)}}}$; $\boxed{\operatorname{tang}\varphi_1=\sqrt{\frac{(a-b)}{a}}}$ $\underline{\cos(2\varphi_1)=2\cos^2\varphi_1-1}$;

$\cos(2\varphi_1)=\frac{2a}{(2a-b)}-1=\boxed{\frac{b}{(2a-b)}=\cos(2\varphi_1)}$ Facendo la costruzio= ne del cerchio delle bisettrici da M si ha: $E\equiv N\equiv T$.

Facendo la costruzione del cerchio delle bisettrici prendendo M_1 all'estremo di ρ_1 avremo il triangolo rettangolo M, N, O rettangolo in "O" ciò risolve il problema che "L_1" coincida con "O"

Dall'equazione dell'ellisse: $\boxed{y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}$ si possono ricavare le <u>coordinate polari</u>:

$$\rho^2 = b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)+x^2 = \frac{b^2a^2-b^2x^2+a^2x^2}{a^2} = \frac{b^2a^2+f^2x^2}{a^2}$$

$$\boxed{\rho = \frac{1}{a}\sqrt{b^2a^2+f^2x^2}} \qquad \boxed{\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2}{x^2}-1}\right)}$$

ove "ρ" è <u>l'ampiezza del semidiametro</u>; (generico)

"θ" = "φ" è <u>l'angolo che "ρ" forma con le ascisse.</u>

Supponiamo questo sia "ρ_1; φ_1", e cerchiamo <u>il suo coniugato</u> "ρ_2"; φ_2 avremo: $(\tan\varphi_1)(\tan\varphi_2) = \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2}{x_1^2}-1}\right)(\tan\varphi_2) = \frac{b^2}{a^2}$

cioè: $\boxed{\tan\varphi_2 = \frac{b}{a}\left(\frac{x_1}{\sqrt{a^2-x_1^2}}\right)}$ ed essendo: $\rho_2 = \frac{ab}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta_2+b^2\cos^2\theta_2}}$

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \operatorname{sen}\varphi_2 = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi_2}} = \left(\frac{b\,x_1}{a\sqrt{a^2-x_1^2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2x_1^2}{a^2(a^2-x_1^2)}}}\right) =$$

$$\operatorname{sen}\varphi_2 = \left(\frac{b\,x_1}{a\sqrt{a^2-x_1^2}}\right)\frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^4-a^2x_1^2+b^2x_1^2}} = \boxed{\operatorname{sen}\varphi_2 = \frac{b\,x_1}{\sqrt{a^4-f^2x_1^2}}}$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2-x_1^2}\right)+1}} = \frac{a\sqrt{a^2-x_1^2}}{\sqrt{a^4-a^2x_1^2+b^2x_1^2}} = \boxed{\cos\varphi_2 = \frac{a\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^4-f^2x_1^2}}}$$

Si noti che i valori di $\operatorname{sen}\varphi_2$, $\cos\varphi_2$, $\tan\varphi_2$ e ρ_2 sono stati ricavati in funzione di x_1 ascissa di ρ_1 diversa, (salvo $\rho_{45°}$) da x_2, ascissa di ρ_2.

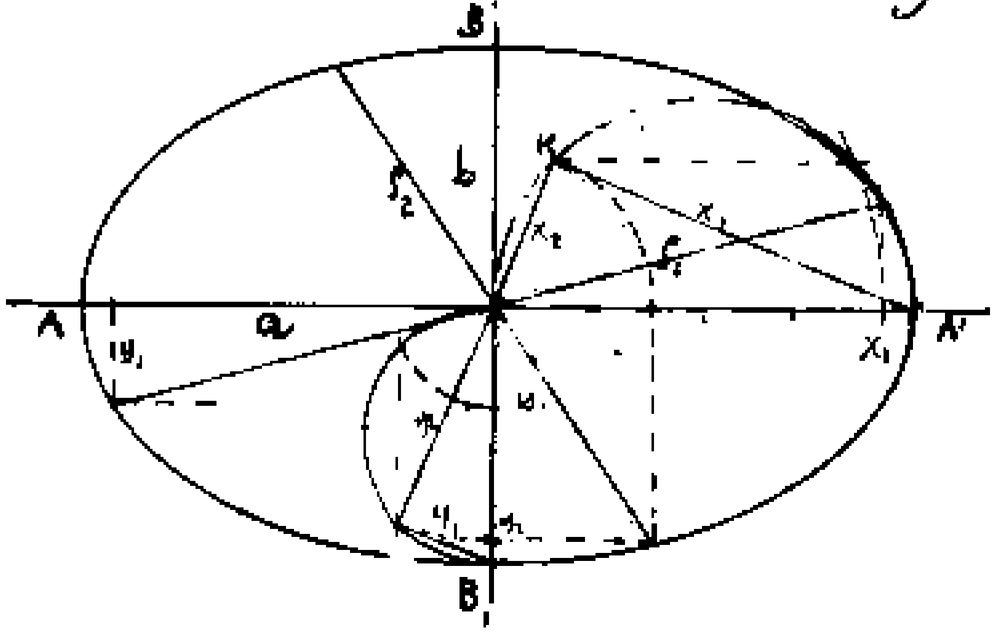
$$\tan(\varphi_2) = \frac{\cancel{b}\,x_1}{\cancel{a}\sqrt{a^2-x_1^2}} = \frac{\cancel{b}\sqrt{a^2-x_2}}{\cancel{a}\;X_2} \supset \frac{1}{\left(\frac{a}{x_1}\right)^2-1} = \frac{\left(\frac{a}{x_2}\right)^2-1}{1}$$

$$\left(\frac{a}{X_2}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{a}{x_1}\right)^2-1}+1 = \frac{(a/x_1)^2}{(a/x_1)^2-1} \supset \frac{1}{1-\left(\frac{x_1}{a}\right)^2}\;),\; \left(\frac{X_2}{a}\right)^2 = 1-\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 \rightarrow \boxed{X_2 = \sqrt{a^2-x_1^2}}$$

L'importante formula, ora trovata, che lega le ascisse di due diametri coniugati, al semiasse maggiore dell'ellisse, indipendentemente dal semiasse minore:

$$\boxed{X_2 = \sqrt{a^2 - X_1^2}}$$

ammette una facile costruzione grafica delle ascisse dei diametri coniugati: basta tracciare un



semicerchio di diametro "a", ad ogni punto del semicerchio corrispondono due cateti di valore uguale alle ascisse di due diametri coniugati. Se ad x_1 ed x_2 sostituiamo: $x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$, cioè: $x^2 = (a^2 - \frac{a^2 y^2}{b^2})$, avremo: $\sqrt{a^2 - \frac{a^2 y_2^2}{b^2}} = \sqrt{a^2 - (a^2 - \frac{a^2 y_1^2}{b^2})}$

$$\boxed{y_1 = \sqrt{b^2 - y_2^2}}$$

Attenzione! Mentre la x è esplicitata in x_2, la y è esplicitata in y_1. (Vale l'analoga costruzione grafica, ma non lega: (x_1, y_1); (x_2, y_2), che determinerebbero gli estremi di due diametri coniugati)

Le relazioni pitagoriche possono scriversi

$$\boxed{X_1^2 + X_2^2 = a^2} \quad ; \quad \boxed{y_1^2 + y_2^2 = b^2}$$

ed essendo: $X_1^2 + y_1^2 = \rho_1^2$; $X_2^2 + y_2^2 = \rho_2^2$; sommando le prime membro a membro: $X_1^2 + y_1^2 + X_2^2 + y_2^2 = \boxed{a^2 + b^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2}$

Le relazioni trovate ci consentono di disegnare il semidiametro coniugato in un dato ellisse.

1) Tracciando la parallela per il centro alle tangenti l'ellisse alle estremità del diametro.

2) Unendo il centro O col punto medio di una corda parallela al diametro dato.

3) avvalendoci della formula: ($tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2 = \frac{b^2}{a^2}$) o dell'analoga ($tg\alpha \cdot tg\beta = \frac{a^2}{b^2}$), si disegna da banda opposta dell'asse maggiore l'angolo $\varphi_2 = arctg\left[\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{tg\varphi_1}\right]$, (noto φ_1), (se noto β si disegna α da banda opposta dell'asse minore.

4) Utilizzando la formula pitagorica: ($\rho_1^2 + \rho_2^2 = a^2 + b^2 = d^2$), la semicirconferenza di diametro d è luogo dei vertici retti nei triangoli rettangoli ove ρ_1 e ρ_2 sono cateti. Si noti che qualsiasi ρ deve: $\boxed{b < \rho < a}$.

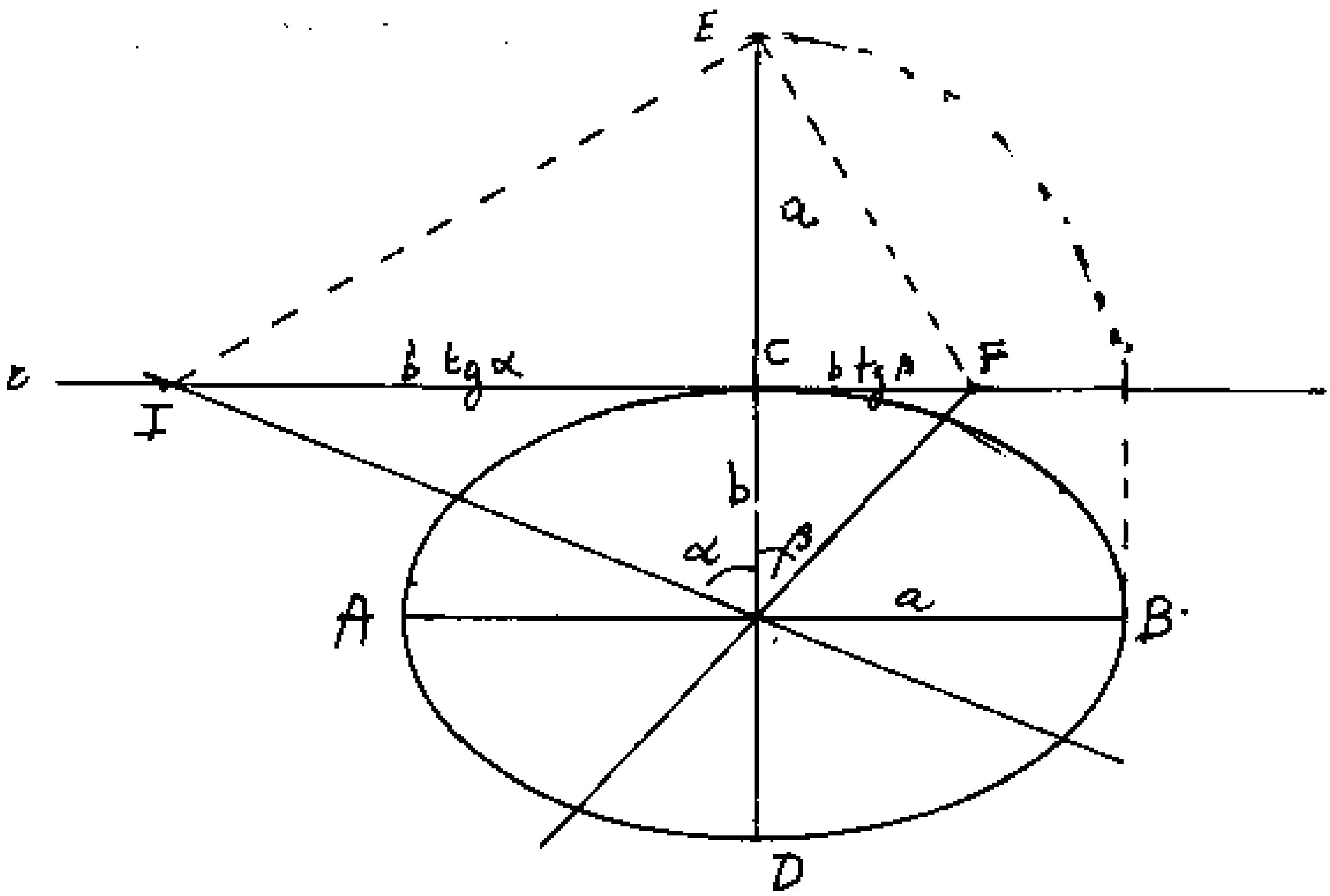
5) Se nota l'ascissa o l'ordinata degli estremi di un diametro si possono determinare l'ascissa o l'ordinata del suo coniugato, utilizzando le relazioni:

$$\boxed{x_1^2 + x_2^2 = a^2} \qquad \boxed{y_1^2 + y_2^2 = b^2}$$

Solo i diametri principali formano angoli retti gli altri diametri coniugati non formano mai angoli retti. Può sorgere il problema: "dati due diametri di un ellisse formanti angoli retti, trovare i diametri principali se essi non lo sono. (Vedi più avanti)

Costruzione grafica del diametro coniugato

Dato l'ellisse di diametri $2a = AB$; $2b = CD$; si disegna la retta r per C parallela ad AB e perpendico=



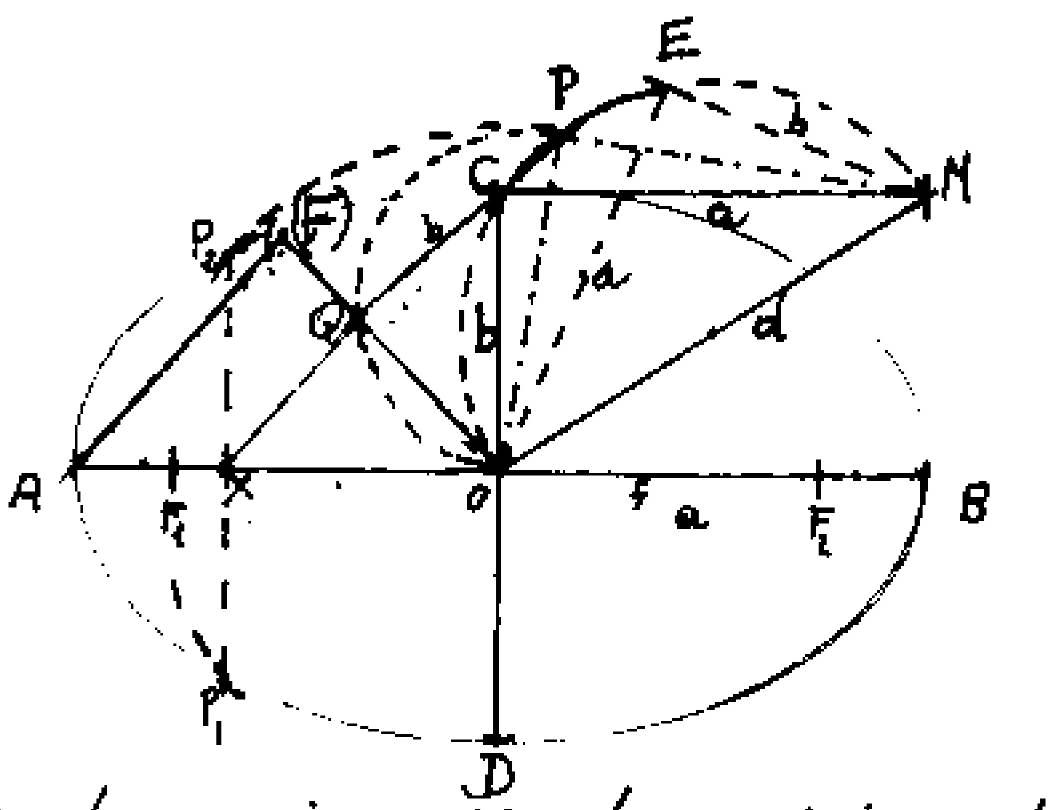
larmente da C si riporta in $\overline{CE}$ il segmento "a".
Tracciato ora un qualsiasi diametro che in=contra in I la retta r e forma con $\overline{CD}$ l'an=golo α, cosicché $\overline{IC} = b\tan\alpha$. Unito I con E e da E la perpendicolare ad $\overline{IE}$ fino ad incontrare in F la r, per F passa il dia=metro coniugato, infatti $\overline{CF} = b\cdot\tan\beta$., e

$$b\tan(\alpha)\cdot b\tan(\beta) = b^2\tan\alpha\cdot\tan\beta = a^2.$$

cioè: $$tg\alpha\cdot tg\beta = \frac{a^2}{b^2}$$

equazione dei diametri coniugati.

Se l'ellisse non è stato disegnato, ma si conoscono i semidiametri principali: "a" e "b"; e conoscendo l'ampiezza di un generico semidiametro, si vuol conoscere l'ampiezza del suo coniugato, ci si avvale della legge pitagorica: $\rho_i^2 + \rho_c^2 = a^2 + b^2 = d^2$; ove "d" = semidiagonale del rettangolo circoscritto all'ellisse. L'arco di circonferenza $\overset{\frown}{PE}$ di diametro "d", delimitato dai vertici retti dei due triangoli di cateti "a","b"; e "b","a"; è il luogo di tutti i vertici retti dei triangoli di ipotenusa "d" ed hanno per cateti i diametri coniugati di questo ellisse.



Sia: $\overline{OC} = \overline{EM} = b$

sia: $\overline{OE} = \overline{CM} = a$

$\overline{OM} = d$; Se $\overline{PM}$ è l'ampiezza di un semidiametro $\overline{OP}$ è l'ampiezza del suo coniugato.

Qualora si voglia la posizione di un semidiametro di ampiezza nota (per es $\overline{OP}$), si traccia una semicirconferenza su $\overline{OP}$, da P si riporta: $b = \overline{PQ}$; unito OQ, vi si riporta $\overline{OF_1} = f = \overline{O(F)}$, unito A con (F). da Q la parallela ad A(F) trova X, da X la normale ad AB e con centro O e raggio $\overline{OP}$ si trovano i punti P_1 e P_2 dell'ellisse. $\boxed{\overline{OX} = \frac{a}{f}\sqrt{\rho^2 - b^2}}$ ove = ρ = ampiezza del semidiametro.

I Raggi di curvatura dell'ellisse

Scriviamo l'equazione cartesiana dell'ellisse in forma esplicita:

$$\boxed{y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}$$

derivando:

$$\boxed{y' = \frac{-b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}}$$

derivando di nuovo: $y'' = -\frac{b}{a}\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2 - x^2}\right) = \frac{-b}{a}\left(\frac{a^2 - x^2 + x^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}\right)$

$$\boxed{y'' = \frac{-ab}{(a^2 - x^2)^{3/2}}}$$

essendo:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\,\frac{x^2}{a^2 - x^2}\right)^{3/2}}{\frac{-ab}{(a^2 - x^2)^{3/2}}}$$

si ha:

$$\boxed{R = \frac{\left[a^2(a^2 - x^2) + b^2x^2\right]^{3/2}}{a^3(-ab)}}$$

raggio di curvatura dell'ellisse nel punto generico di ascissa x

ed anche:

$$\boxed{R = \frac{\left[a^2 - \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)x^2\right]^{3/2}}{-(ab)}}$$

" "

"

$$\boxed{R = \frac{(a^4 - f^2x^2)^{3/2}}{-(a^4 b)}}$$

" "

Nei vertici dell'ellisse abbiamo: $x = 0$ ed $x = \pm a$

<u>per $x = 0$</u> : $R_{x=0} = \frac{a^6}{-a^4 b}$;

$$\boxed{R_b = \frac{-a^2}{b}}$$

= <u>raggio agli estremi dell'asse "b"</u>

<u>per $x = a$</u> : $\left(R_{x=a} = \frac{a^3 b^3}{-a^4 b}\right)$

$$\boxed{R_a = \frac{-b^2}{a}}$$

<u>raggio agli estremi dell'asse "a"</u>

Altre forme dell'espressione di R.

essendo: $\frac{a^4 y^2}{b^2} = (a^2 - x^2)$

$$R = \frac{(a^4y^2/b^2 + b^2x^2)^{3/2}}{-a^4 b} =$$

$$\boxed{R = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{3/2}}{-a^4b^4}} = R = \frac{\left[\left(\frac{a}{b}y\right)^2 + \left(\frac{b}{a}x\right)^2\right]^{3/2}}{-ab}$$

In coordinate polari:

$$\boxed{R = \rho^3 \frac{(a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta)^{3/2}}{a^4 b^4}}$$

$$\boxed{R = \rho^3 \frac{\left[\left(\frac{a \sin\theta}{b}\right)^2 + \left(\frac{b\cos\theta}{a}\right)^2\right]^{3/2}}{ab}}$$

Notiamo che per $x = f$ si ha:

1) L'ordinata nei fuochi dell'ellisse: $\boxed{y_f = \frac{b^2}{a} = R_a}$

2) Che il raggio di curvatura nei punti di ascissa: $x = f$

$$\boxed{R_f = \frac{(a^4 - f^4)^{3/2}}{-a^4 b}} = \frac{-b^2}{a}\left(\frac{a^2+f^2}{a^2}\right)^{3/2}$$

$$\boxed{R_f = -R_a\left(1 + \left(\frac{f}{a}\right)^2\right)^{3/2}} = \boxed{R_f = -R_a(1+\varepsilon^2)^{3/2}}$$

Questi elementi sono utili per una costruzione grafica dell'ellisse.

Costruzione grafica utilizzando i raggi di curvatura dell'ellisse

Sono dati i diametri principali $2a$ e $2b$.
Le formule dei raggi di curvatura nei vertici dell'ellisse possono scriversi:

$$\boxed{-R_b : a = a : b}$$

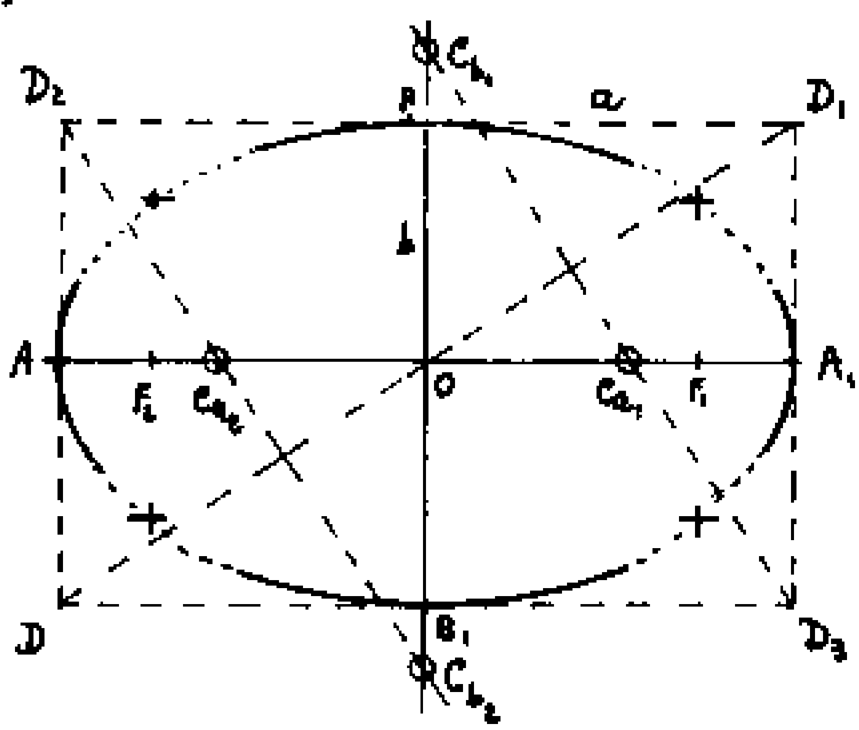
$$\boxed{-R_a : b = b : a}$$

cioè:

$$\boxed{-R_b \cdot b = a^2} \quad ; \quad \boxed{-R_a \cdot a = b^2}$$

E' evidente che possiamo utilizzare la costruzione grafica dedotta dal secondo teorema di Euclide.

Disegnati gli assi dell'ellisse, costruiamo il rettangolo circoscritto all'ellisse i cui lati saranno: $2a$, $2b$. Da due vertici opposti del rettangolo tracciamo le perpendicolari all'altra diagonale, queste incontreranno gli



assi nei centri dei cerchi osculatori dei vertici: C_{a_1}, C_{a_2}, C_{b_1}, C_{b_2}. Si noti che i triangoli: $C_{b_1}B_1D_3$ e D_1BO sono simili per cui vale la prima proporzione scritta.

Anche il triangolo: $C_{a_1}A_1D_3$ è simile, per cui vale la seconda proporzione.

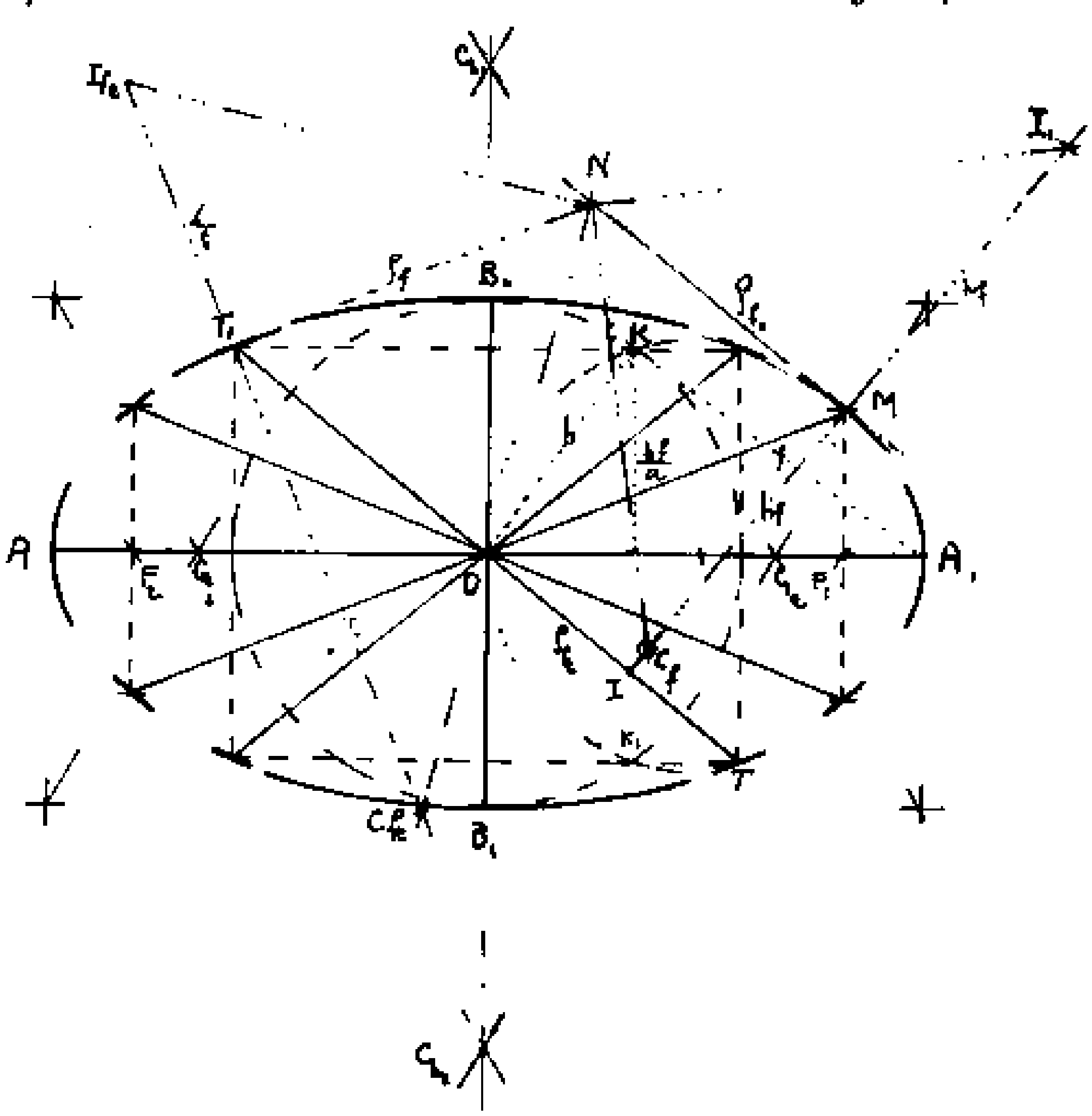
Si noti anche che i cerchi osculatori in B, B_1 sono esterni all'ellisse, mentre i cerchi osculatori in A ed A_1 sono interni all'ellisse. Nella costruzione possiamo utilizzare solo una piccola parte dei cerchi osculatori, (sono esatti solo per un differenziale ds) cioè finché non superano la tolleranza grafica. Possiamo però costruire esatte le ordinate sui fuochi che sono pari ad R_a: $\boxed{y_f = b^2/a}$.

Abbiamo già detto che questa costruzione è complementare a quella degli ottagoni circoscritti, nel senso che i "tratti" di ellisse allora disegnati possono essere raccordati, o ampliati coi cerchi osculatori.

Trattiamo ora i punti: $\boxed{x_f = \pm f}$; $\boxed{y_f = \pm b^2/a = \pm R_a}$ (ricordando che le coordinate degli estremi dei semidiametri coniugati seguono le pitagoriche: $(x_1^2 + x_2^2 = a^2)$; $(y_1^2 + y_2^2 = b^2)$); abbiamo: $\boxed{x_{f_c} = \pm b}$; $\boxed{y_{f_c} = \pm \frac{bf}{a}}$. Consideriamo il semicerchio di diametro "a"; il triangolo rettangolo OKA_1, in esso inscritto, avrà per cateti: $\boxed{\overline{OK} = b = x_{f_c}}$ $\boxed{\overline{KA_1} = f = x_f}$ l'altezza di tale rettangolo, relativa ad "a" sarà: $\boxed{h_a = \frac{bf}{a} = y_{f_c}}$

Queste osservazioni consentono, dati i diametri $2a$, $2b$, dell'ellisse di tratteggiare otto punti estremi dei diametri di ascissa $\pm f$ e dei loro coniugati e simmetrici.

Costruito, al solito, il rettangolo circoscritto, all'ellisse ed i centri C_a, C_{a_1}, C_b, C_{b_1}, si traccia un cerchio di diametro "a" $= (\overline{OA_1})$ ed un cerchio di raggio "b" e centro D; i due cerchi si incontrano in K e K_1. Trovati i fuochi $F_1 F_2$ (col cerchio di raggio "a" e centro in B) da "F" si riportano le ordinate $y_f = R_a$ (ciò determina quattro punti dell'ellisse). Le parallele ad $\overline{AA_1}$ dai punti K sono le ordinate dei punti di ascissa "b" (ciò determina altri quattro punti). Ora agli estremi di ogni diametro si tracciano piccoli tratti paralleli al diametro coniugato, sulle normali ad essi, si riportano i rispettivi raggi di curvatura. Abbiamo già calcolato $\boxed{R_\rho = R_a \left(\frac{a^2+\rho^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$ che, in questa forma non è comodo graficizzare.



Cerchiamo di trasformare la formula per rendere più facile la costruzione grafica. Abbiamo:

$\rho_f = \sqrt{f^2 + \frac{b^4}{a^2}}$ = semidiametro di ascissa f. sia: $(\overline{OM})$

$\rho_{f_c} = \sqrt{b^2 + \frac{b^2 f^2}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + f^2}$ = semidiametro coniugato di ρ_f

R_f = raggio di curvatura all'estremo di ρ_f

$$R_f = \frac{(a^4 - f^4)^{3/2}}{-a^4 b} = \frac{[(a^2-f^2)(a^2+f^2)]^{3/2}}{-a^4 b} = \frac{-b^3(a^2+f^2)\sqrt{a^2+f^2}}{a^4} =$$

$$-R_f = \left(\frac{b^2(a^2+f^2)}{a^2}\right)\left(\frac{b}{a}\frac{\sqrt{a^2+f^2}}{(ab)}\right) = \frac{(\rho_{f_c}^2)(\rho_{f_c})}{(ab)} =$$

$$|R_f| = \frac{(\rho_{f_c}^2)\cancel{(\rho_{f_c})}}{\cancel{(\rho_{f_c})}(\rho_f)\,\mathrm{sen}(\varphi_1+\varphi_2)} \qquad \text{ma: } (\rho_f)\,\mathrm{sen}(\varphi_1+\varphi_2) = h_f = \overline{MI}$$

perciò:

$$h_f |R_f| = \rho_{f_c}^2$$

cioè:

$$\boxed{R_f : \rho_{f_c} = \rho_{f_c} : h_f}$$

Per l'estremo M tracciamo una parallela ed una perpendicolare ad $\rho_{f_c} = \overline{OT}$. Sulla parallela riportiamo $\overline{MN} = \rho_{f_c}$ e la perpendicolare che incontra in I ρ_{f_c} ove $\overline{MI} = h_f$, si prolunghi esternamente riportando: $\overline{MI_1} = h_f$.
Quindi unito I_1 con N e da N la perpendicolare ad $\overline{NI_1}$ fino ad incontrare in C_f il segmento $\overline{MI}$.

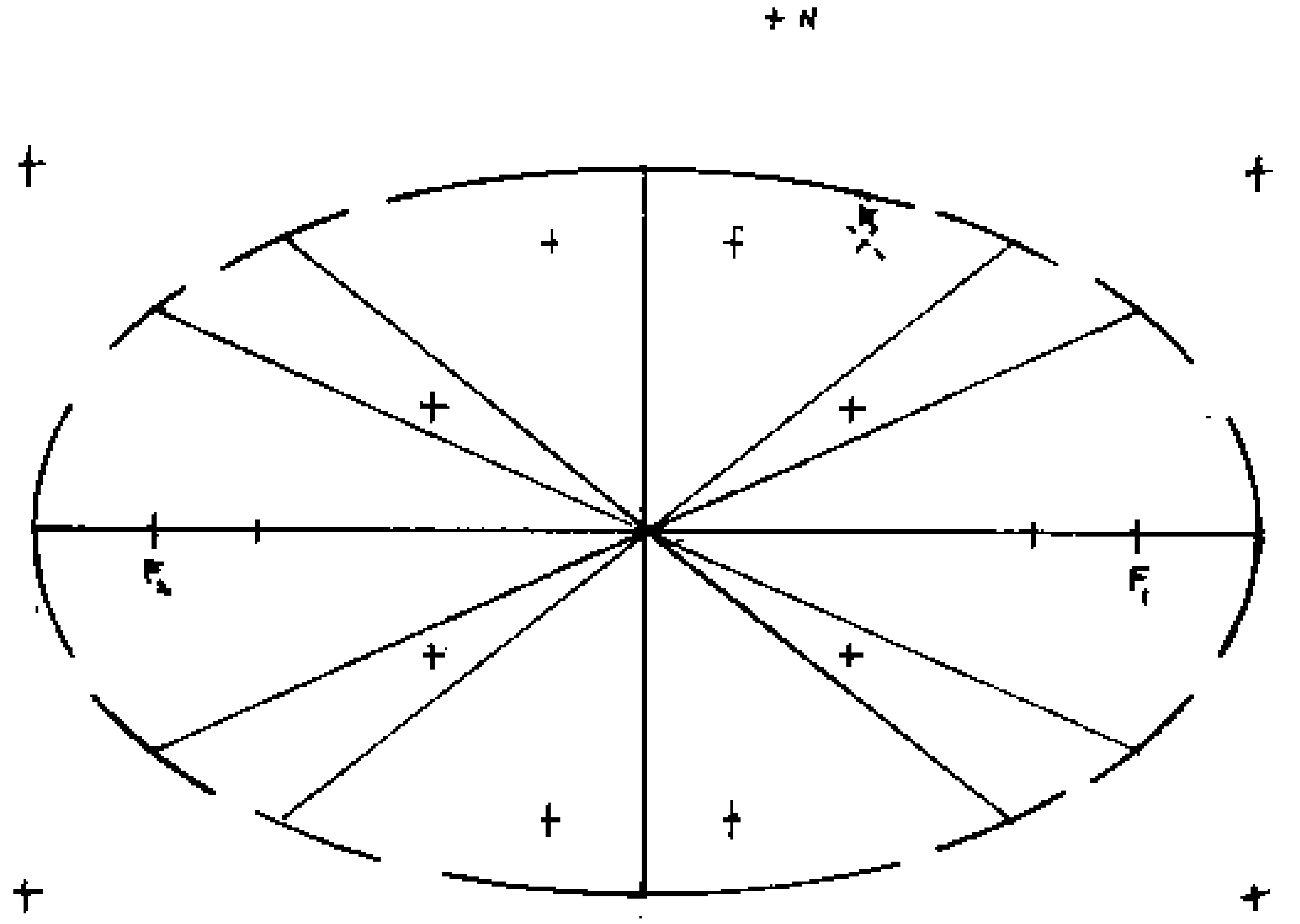
<u>C_f è il centro del cerchio osculatore in M.</u>

$$R_{f_c} = \frac{(a^4 y_{f_c} + b^4 x_{f_c})^{3/2}}{-a^4 b^4} = \frac{\left(\cancel{a^4}\frac{b^2 f^2}{\cancel{a^2}} + b^4 b^2\right)^{3/2}}{-a^4 b^4} = \frac{(a^2 f^2 + b^4)^{3/2}}{-a^4 b} = \frac{\left(\sqrt{f^2 + \frac{b^4}{a^2}}\right)\left(f^2 + \frac{b^4}{a^2}\right)}{-ab} = \frac{\cancel{\rho_f}\,\rho_f^2}{-\cancel{\rho_f}\,\rho_{f_c}\,\mathrm{sen}\,\varphi_1\varphi_2}$$

$$\boxed{R_{f_c} : \rho_f = \rho_f : h_{f_c}}$$

La costruzione è analoga alla precedente, e se la eseguiamo per T_1 troveremo lo stesso N; $x_N = (f - b)$; $y_N = (y_f + y_{f_c})$.

Infatti l'ascissa di "M" è "f"; l'ascissa di "T" è "b" perciò: $\boxed{x_N = (f - b)}$ analogamente $\boxed{y_N = \frac{bf}{a} + \frac{b^2}{a} = \frac{b}{a}(b+f)}$ ciò consente di disegnare i punti N. (quattro), e gli otto centri dei cerchi osculatori agli estremi di ρ_f e ρ_{f_c}.



Nella figura abbiamo un ellisse delineato da archi di cerchio osculatori nei vertici ed agli estremi dei semidiametri di ascissa "f" e dei loro coniugati.

Per completare l'argomento sui raggi di curvatura nei punti particolari dell'ellisse, calcoliamo i raggi di curvatura nei punti sulle diagonali del rettangolo circoscritto.

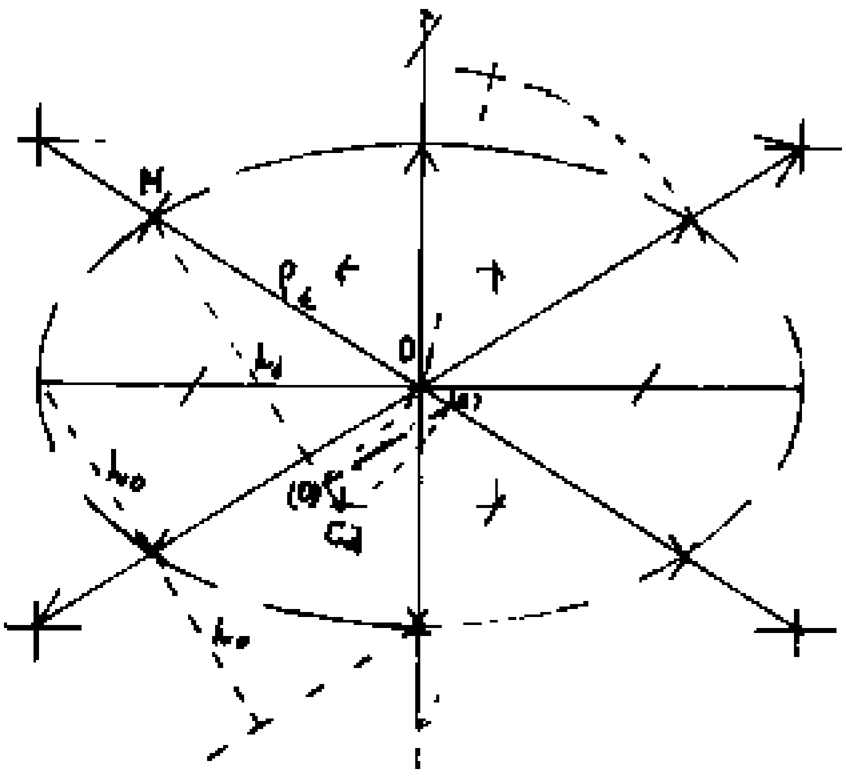
Il raggio di curvatura nei punti sulle diagonali del rettangolo circoscritto all'ellisse.

Sappiamo che: $\boxed{\rho_d = d/\sqrt{2}}$; $\boxed{x_{\rho_d} = a/\sqrt{2}}$; $\boxed{y_{\rho_d} = b/\sqrt{2}}$

$$R_d = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{3/2}}{-a^4 b^4} = \frac{(a^4 b^2/2 + b^4 a^2/2)^{3/2}}{-a^4 b^4} = \frac{(a^2+b^2)^{3/2}}{-2\sqrt{2}(ab)} = \frac{d^3}{2\sqrt{2}(ab)}$$

$$R_d = \rho_d^3/ab = \rho_d^3/\rho_d^2 \,\mathrm{sen}\, 2\,\mathrm{arctg}(b/a) = R_d = \rho_d/\left(\frac{2ba}{d^2}\right)$$

$$\boxed{R_d : \rho_d = \rho_d : h_d}$$



In figura è stato tratteggiato un ellisse con archi di cerchio osculatore nei vertici e nei punti sulle diagonali del rettangolo circoscritto.

Prolungo h_d e vi riporto $\rho_d = \overline{M(O)}$, traccio la parallela alla diagonale fino a (c) per similitudine di triangoli $h_d : \rho_d = \rho_d : \overline{M(c)}$ cioè $\overline{M(c)} = R_d$ che riporto in $\overline{MC_d} = R_d$. Trovato un centro, si costruiscono gli altri simmetrici agli assi.

Dalla: $R_d = \dfrac{d^3}{2\sqrt{2}\,ab}$ possiamo ricavare: $= R_d = \dfrac{d^2}{2\sqrt{2}\,h_o}$; $\left(h_o = \dfrac{ab}{d}\right)$

$$\boxed{R_d : d = d : 2\sqrt{2}\,h_o}$$

meno comoda da graficizzare.

I centri di curvatura dell'ellisse (l'evoluta)

L'approssimazione dei cerchi osculatori usati per tratti finiti, ha posto in evidenza la variazione continua dei raggi e dei centri di curvatura.

Abbiamo già calcolato le coordinate dei centri di curvatura per una generica $y = f(x)$:

$$\begin{cases} y_c = f(x) + \dfrac{1 + f'^2_{(x)}}{f''_{(x)}} \\[2ex] x_c = x - f'_{(x)} \dfrac{1 + f'^2_{(x)}}{f''_{(x)}} \end{cases}$$

Per l'ellisse avremo:

$$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad ; \quad f'_{(x)} = \frac{-b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad ; \quad f''_{(x)} = \frac{-ab}{(a^2-x^2)^{3/2}}$$

per cui:

$$\frac{1 + f'^2_{(x)}}{f''_{(x)}} = \left(1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}\right)\left(\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{-ab}\right) = \frac{\left(a^2(a^2-x^2)+b^2x^2\right)\left(-\sqrt{a^2-x^2}\right)}{a^3b} =$$

$$\boxed{\frac{1 + f'^2_{(x)}}{f''_{(x)}} = \left(\frac{-b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)\left(\frac{a^4 - (a^2-b^2)x^2}{a^2b^2}\right)}$$

$$y_c = \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)\left(+1 - \frac{a^4 - c^2x^2}{a^2b^2}\right) = \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)\left(\frac{a^2b^2 - a^4 + a^2x^2 - b^2x^2}{a^2b^2}\right)$$

$$y_c = \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)\left(\frac{b^2(a^2-x^2) - a^2(a^2-x^2)}{a^2b^2}\right) = \quad \boxed{y_c = \frac{(b^2-a^2)}{(a^3b)}(a^2-x^2)^{3/2}}$$

ed anche: $y_c = \dfrac{b^2-a^2}{b^4}\cdot\dfrac{b^3}{a^3}\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^3$ $\quad \boxed{y_c = \dfrac{-c^2}{b^4}y^3}$

$$x_c = x - \left(\cancel{\frac{b}{a}}\,\frac{x}{\cancel{\sqrt{a^2-x^2}}}\right)\left(\frac{-\cancel{b}}{a}\cancel{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\left(\frac{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}{a^2\cancel{b^2}}\right) = \frac{\cancel{a^4x} - \cancel{a^4x} + a^2x^3 - b^2x^3}{a^4}$$

$\boxed{x_c = \dfrac{+c^2x^3}{a^4}}$ forma simmetrica alla: $\boxed{y_c = \dfrac{-c^2}{b^4}y^3}$

Risolvendo rispetto ad x ed y abbiamo:

$$\boxed{x = \left(+\frac{a^4 x_c}{\rho^2}\right)^{1/3}} \quad ; \quad \boxed{y = \left(\frac{-b^4 y_c}{\rho^2}\right)^{1/3}}$$

sostituendo nell'equazione dell'ellisse si ha:

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{+a^4 x_c}{\rho^2}\right)^{2/3} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{-b^4 y_c}{\rho^2}\right)^{2/3} = 1$$

cioè:

$$\boxed{\left(\frac{a x_c}{\rho^2}\right)^{2/3} + \left(\frac{b y_c}{\rho^2}\right)^{2/3} = +1}$$

equazione dell'evoluta dell'ellisse.

che può scriversi:

$$\boxed{(a x_c)^{2/3} + (b y_c)^{2/3} = (\rho^2)^{2/3}}$$

Il segno meno (-) alla y_c ordinata del centro di curvatura indicava che il centro stesso era da banda opposta, rispetto agli assi, del punto a cui si riferisce. (Sparisce col quadrato)

In forma esplicita l'equazione dell'evoluta dell'ellisse sarà:

$$\boxed{y_c = \frac{1}{b}\left((\rho^2)^{2/3} - (a x_c)^{2/3}\right)^{3/2}}$$

L'equazione dell'evoluta dell'ellisse in coordinate polari:

$$\boxed{\left(\frac{f}{\rho}\right)^{2/3} = (a\cos\theta)^{2/3} + (b\,\mathrm{sen}\,\theta)^{2/3}}$$

Il luogo dei centri di curvatura dell'ellisse e la curva asteroide

L'equazione dell'evoluta = (luogo dei centri di curvatura) è per l'ellisse:

$$\boxed{(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}}$$

sia "a" il modulo grafico:

$$(x)^{2/3} + \left(\frac{b}{a}y\right)^{2/3} = \left[a\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)\right]^{2/3}$$

posto: $\boxed{\left(\frac{b}{a}\right) = \cos(\varphi)}$ (ove φ è l'angolo formato dal semiasse "b" con la congiungente il fuoco) cioè:

$\boxed{b = a\cos(\varphi)}$; $\boxed{f = a\,\mathrm{sen}(\varphi)}$; l'equazione diventa:

$$\boxed{x^{2/3} + (\cos(\varphi)\cdot y)^{2/3} = (f\,\mathrm{sen}(\varphi))^{2/3}}$$

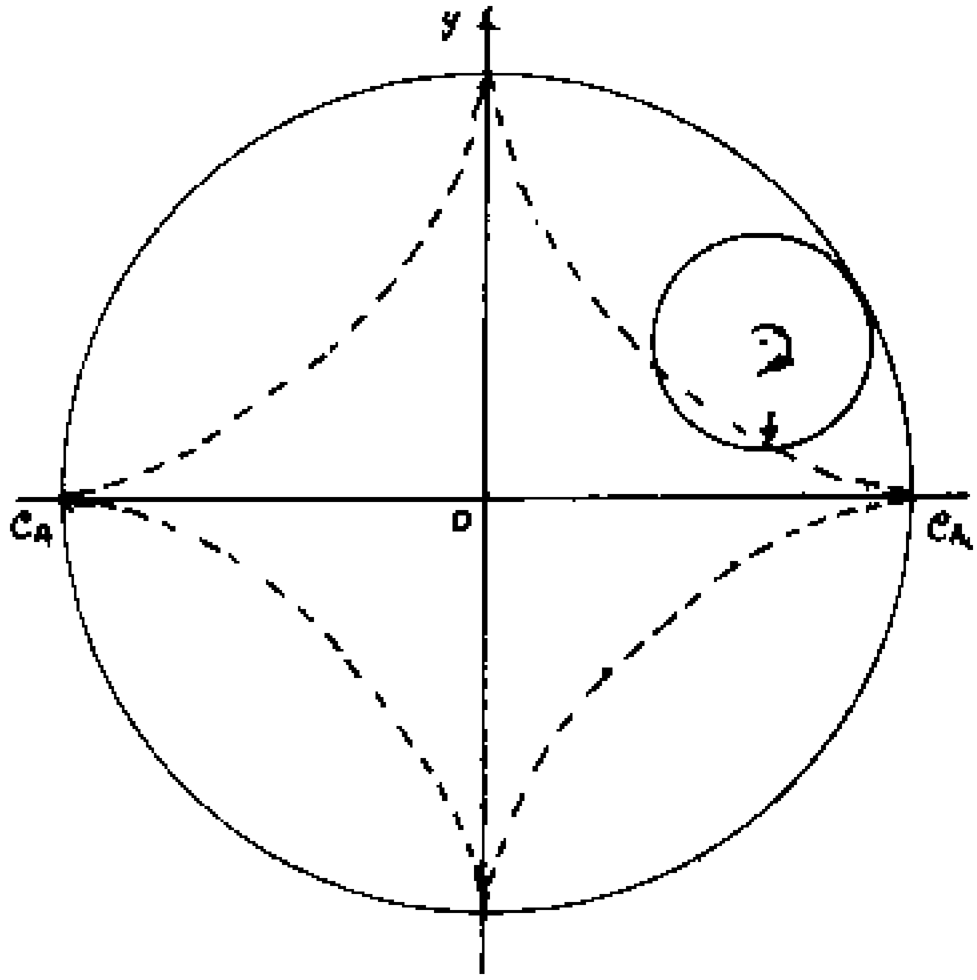
Premesso che l'equazione dell'asteroide è:

$$\boxed{x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}}$$

avremo che l'equazione dell'evoluta dell'ellisse è la proiezione di una asteroide ruotata dell'angolo "φ" intorno all'asse "x" ed avente: $R = f\,\mathrm{sen}(\varphi)$.

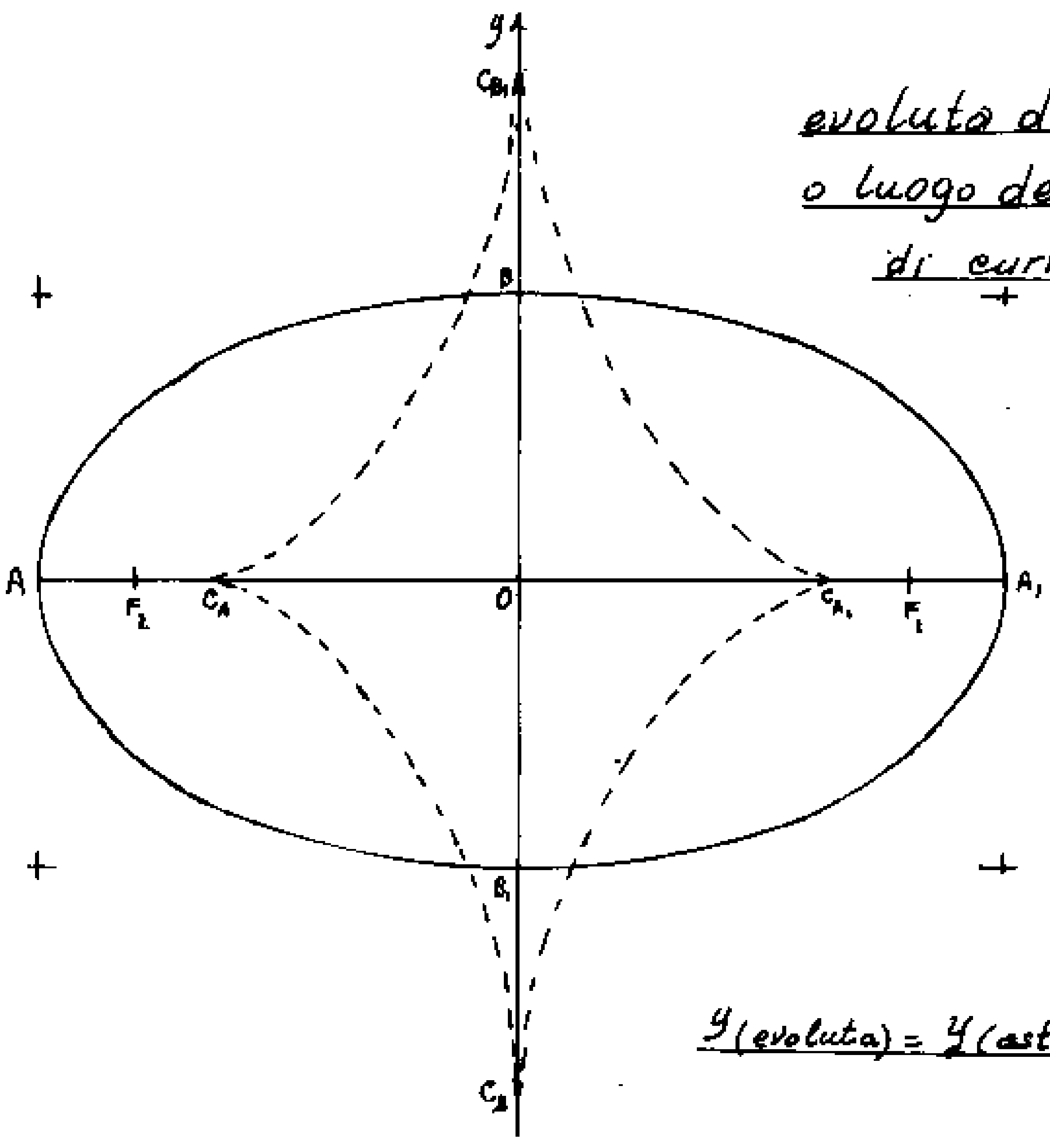
La curva asteroide è una "ipocicloide" a quattro cuspidi ed è generata da un punto su una circonferenza di raggio $R/4$ che rotola, senza slittare, internamente ad una circonferenza di raggio R. (vedasi Vol. II per maggiori dettagli)

Disegnamo le due curve:



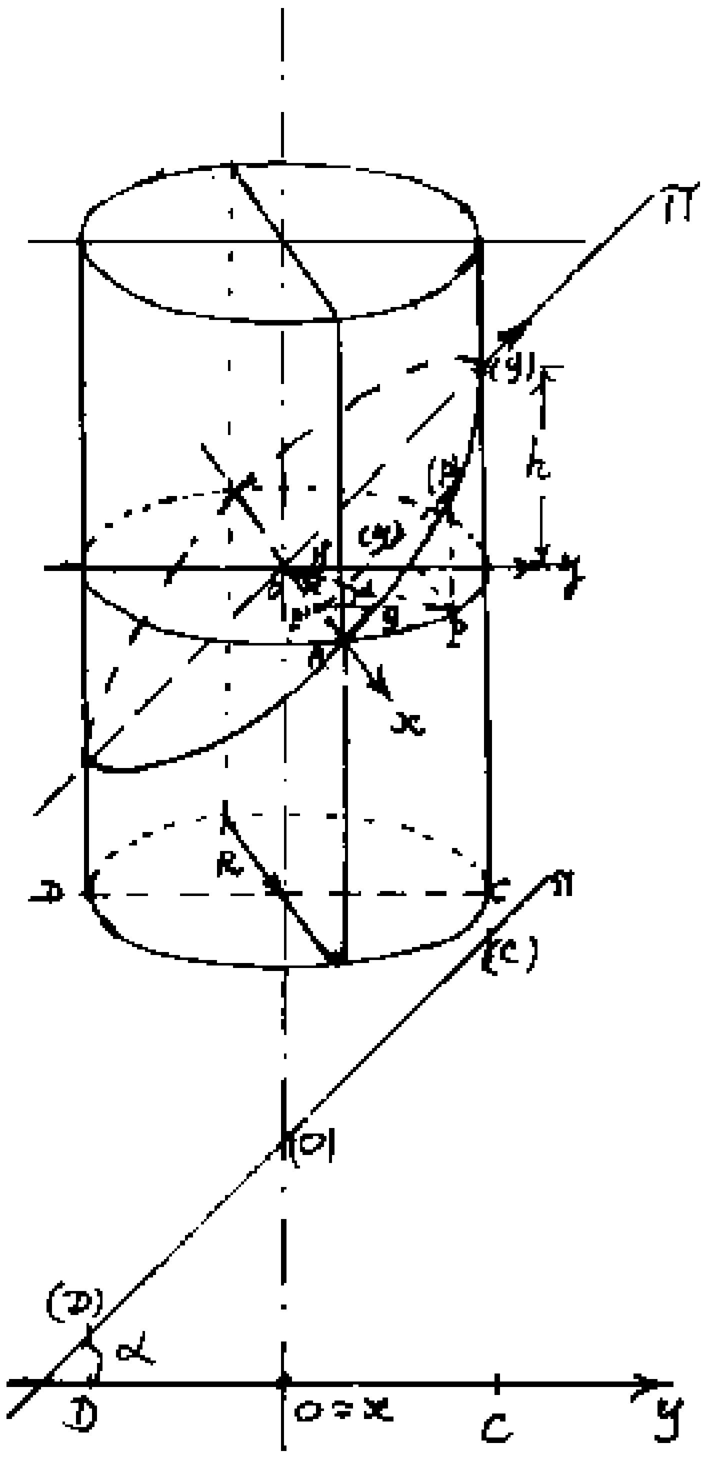
curva asteroide

evoluta dell'ellisse o luogo dei centri di curvatura



$y_{(evoluta)} = y_{(asteroide)} / \cos(\varphi)$

L'ellisse come sezione di un cilindro con un piano



Il problema è analogo a quello della proiezione di un cerchio su un piano π, (che abbiamo già trattato), solo che in questo caso, i raggi proiettanti, anziché essere perpendicolari a π, sono perpendicolari al piano di giacitura del cerchio. (Sono le generatrici del cilindro). Indicando in parentesi i punti proiettati avremo:

$$\boxed{\begin{aligned}(x) &= x\\ (y) &= y/\cos\alpha\end{aligned}}$$

sostituendo:

$$\boxed{\frac{(x^2)}{R^2} + \frac{(y)^2}{(R/\cos\alpha)^2} = 1}$$

può scriversi:

$$\boxed{(x)^2 + (\cos\alpha\,(y))^2 = R^2}$$

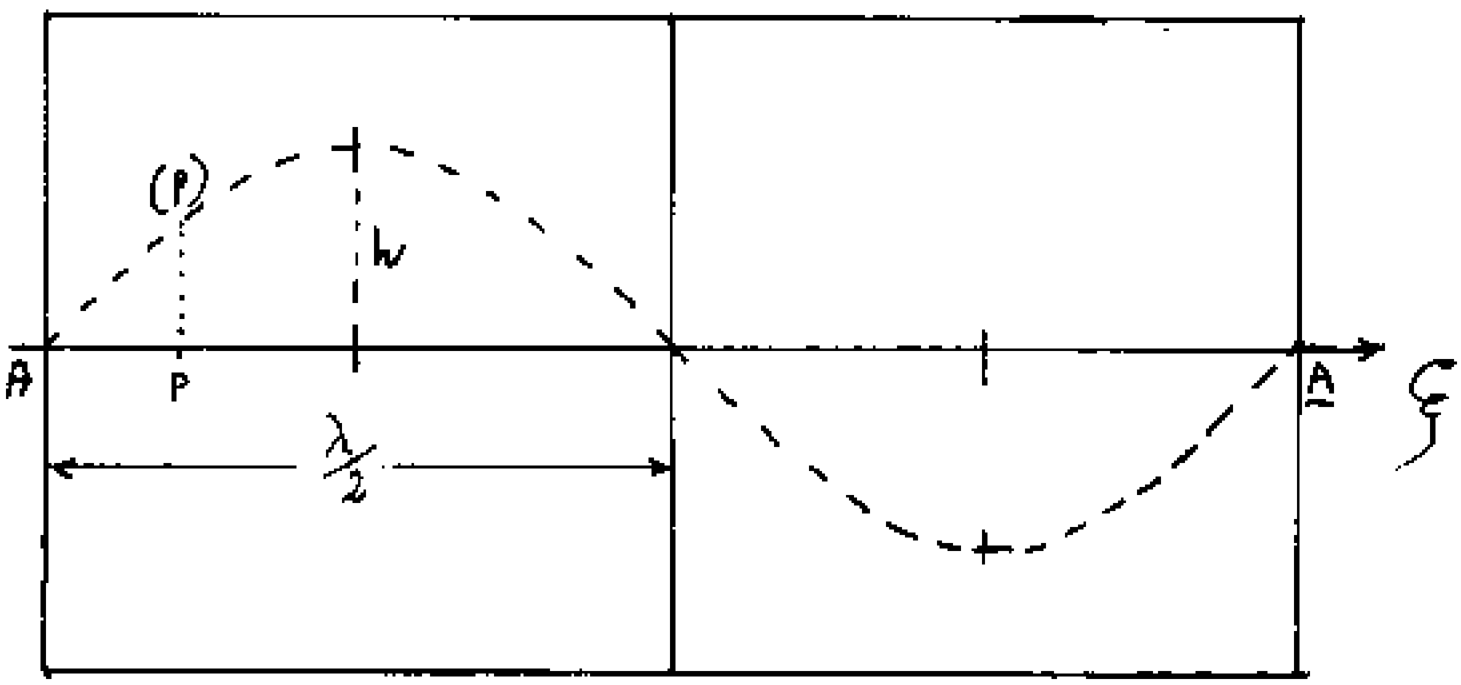
e riportando l'ellisse sul piano del cerchio:

$$\boxed{y = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{R^2 - x^2}}$$

quest'ultima evidenzia che le ordinate del cerchio base del cilindro, sono divise per $(\cos(\alpha))$ per ottenere le ordinate dell'ellisse.

Relazione fra l'ellisse e la sinusoide

Supponiamo di tagliare il cilindro, (che ha come sezione un ellisse), lungo la generatrice passante per il punto comune al semiasse x ed all'ellisse, e di svolgere in piano la superficie cilindrica; otterremo un rettangolo di altezza pari al cilindro, e di base pari alla circonferenza di base del cilindro rettificata. L'ellisse della sezione si svilupperà in una <u>sinusoide</u>.



La lunghezza d'onda della sinusoide sarà: $\boxed{\lambda = 2\pi R}$, mentre l'ampiezza "h" della sinusoide sarà: $\boxed{h = R\,\mathrm{tang}(\alpha)}$ (ove α è l'inclinazione del piano di sezione, rispetto ai piani di base del cilindro retto circolare).

Cerchiamo di definire l'ordinata di (P) cioè: $\overline{P(P)}$, in funzione dell'arco $\widehat{AP} = R\cdot\varphi$, ove $\varphi = \widehat{AOP}$; $\overline{P(P)} = R\,\mathrm{sen}(\varphi)\,\mathrm{tang}\,\alpha$; ma $R\,\mathrm{tang}(\alpha) = h$ per cui: $\boxed{\overline{P(P)} = h\,\mathrm{sen}(\varphi)}$ $\overline{P(P)} = \boxed{\eta = h\left(\mathrm{sen}\left(\frac{\widehat{AP}}{R}\right)\right)}$

Ciò dimostra essere <u>una sinusoide</u> la curva ottenuta svolgendo il cilindro ove A ed $\underline{A}$ erano coincidenti.

<u>La curva sinusoide è quindi della stessa lunghezza dell'ellisse.</u>

Inversamente, data una sinusoide di lunghezza d'onda λ e di ampiezza h, la cui formula, in piano, è: $\boxed{\eta = h \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\xi\right)}$, avremo che avvolgendo su un cilindro il piano della sinusoide, in modo che $\xi=\lambda$ e $\xi=0$ coincidano, avremo $\boxed{\frac{\lambda}{2\pi} = R}$ = raggio del cerchio di base del cilindro $\boxed{R=b}$ <u>semiasse minore dell'ellisse.</u>

<u>Il semiasse maggiore dell'ellisse sarà:</u> $\boxed{a=\sqrt{R^2+h^2}}$

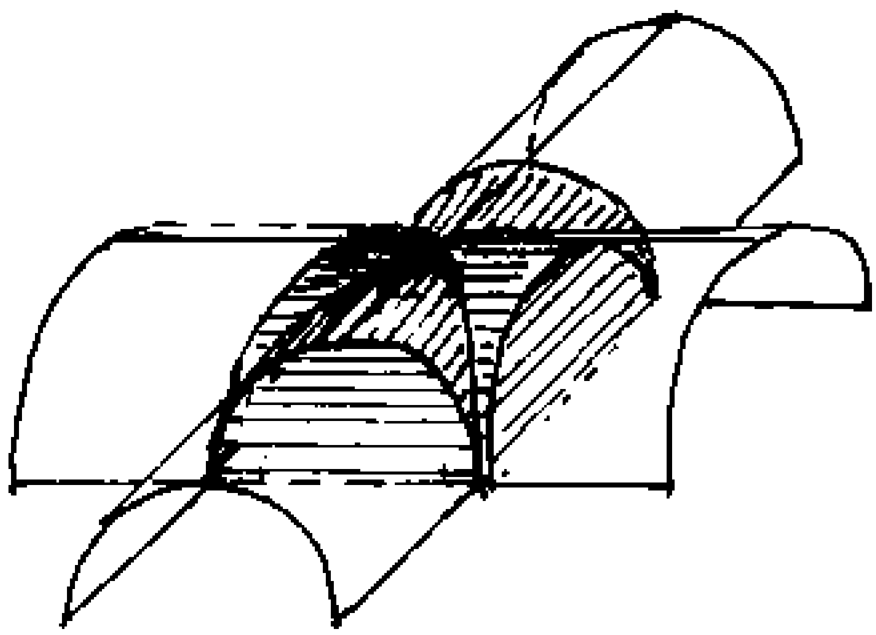
cioè: $\boxed{b=\frac{\lambda}{2\pi}}$; $\boxed{a=\sqrt{h^2+\frac{\lambda^2}{4\pi^2}}}$. Il piano di giacitura dell'ellisse è inclinato di $\boxed{\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{h}{R}\right)}$ $\boxed{\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}$ rispetto alla base del cilindro.

Se: $h=1$; $\lambda = 2\pi$; e quindi: $R=1$; $\alpha = 45° = \frac{\pi}{6}$, si avrebbe una vera sinusoide trigonometrica; e l'ellisse che otterremmo, avvolgendola ad un cilidro di raggio $=1$, avrebbe per semiassi: $b=1$; $a=\sqrt{2}$.

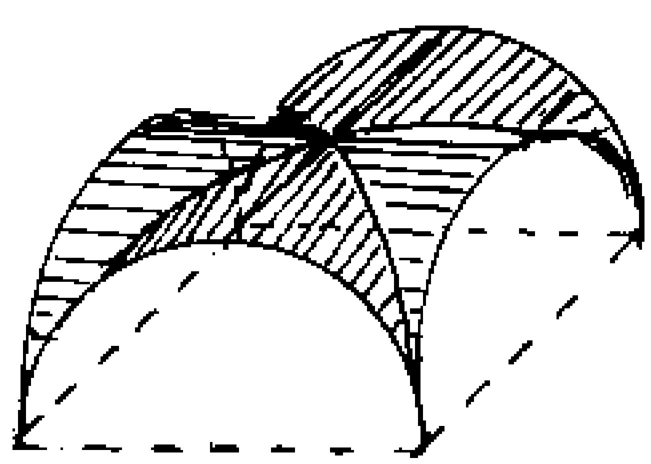
Le correlazioni trovate ci consentono di passare da un ellisse ad una curva sinusoidale e viceversa. Ciò trova applicazione nella costruzione di modelli in lamiera o cartoncino.

Applicazioni alle volte a crociera · padiglione

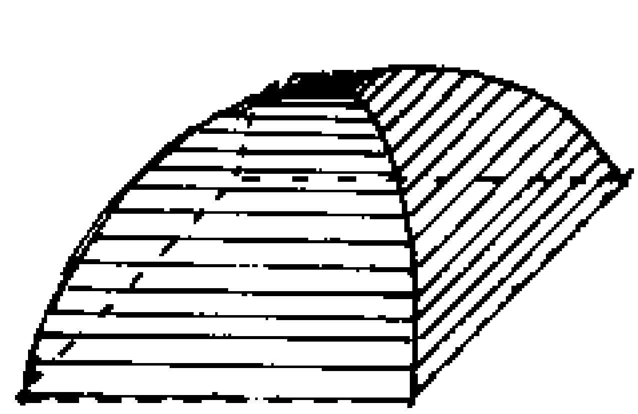
Consideriamo l'intersezione di due semicilindri orizzontali, alla stessa quota, e perpendicolari fra loro.



Se i cilindri hanno uguale raggio, la zona di intersezione è quadrata come base. Delimitiamola sezionando i cilindri con piani verticali passanti per i quattro lati del quadrato e per le due diagonali. Ogni semicilindro, sulla zona di intersezione viene diviso in 4 parti dai piani verticali passanti in diagonale, e precisamente *due fusi* e *due unghie*; le sole *unghie* dei due cilindri formano, sulla pianta quadrata, *una volta a crociera*; i soli *fusi* dei due cilindri formano *una volta a padiglione*

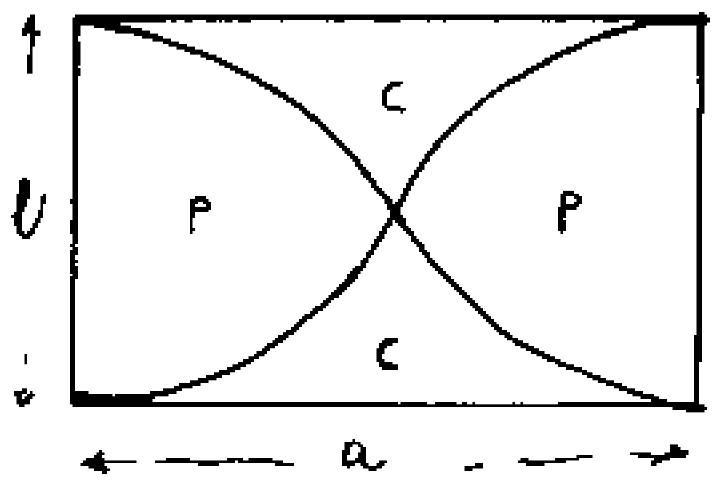


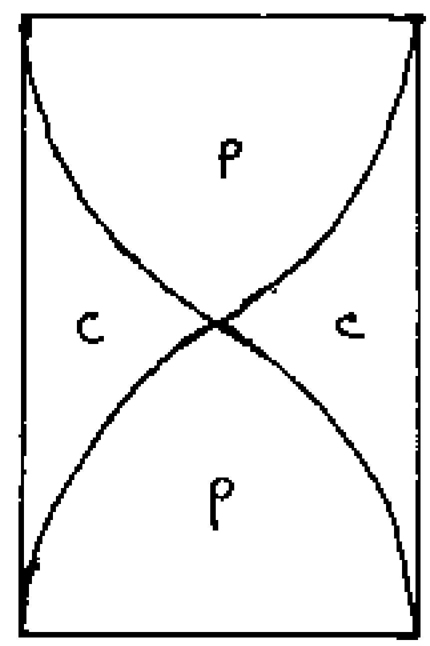
volta a crociera
(unghie)



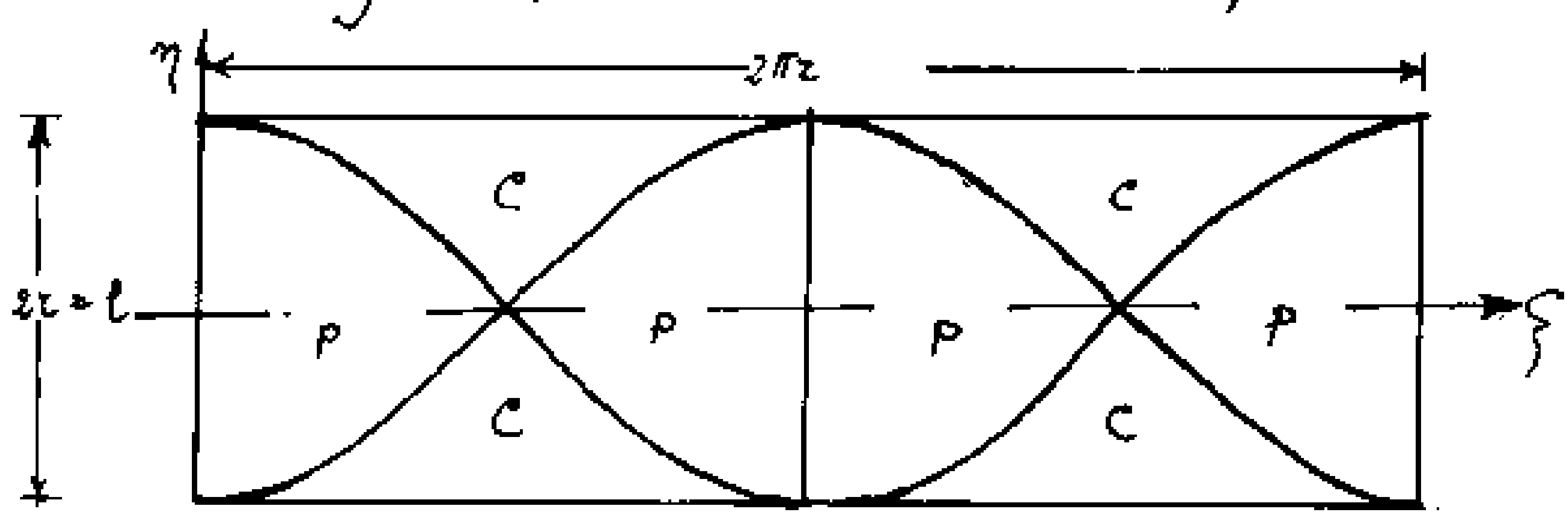
volta a padiglione
(fusi)

Sia "r" il raggio dei due semicilindri ed "a" = $r\pi$ la lunghezza dei semiarchi. Sviluppando in piano i due semicilindri, che si intersecano ortogonalmente, otteniamo due rettangoli di lati: $l = 2r$; $a = r\pi$. Le semiellissi delle sezioni coi piani verticali diagonali, sui semicilindri svolti in rettangoli diventano sinusoidi:



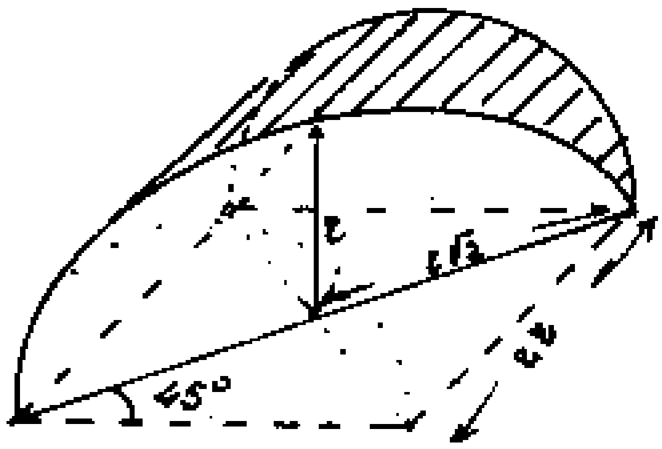


si sono indicate con "c" le parti che formano la crociera, e con "p" le parti che costituiscono il padiglione. Per fare un modellino di volta a crociera ed uno di volta a padiglione conviene disporre di un rettangolo di cartoncino $2r$ per $2r\pi$ e



disegnarvi due cosinusoidi opposte considerando "r" = modulo grafico unitario.

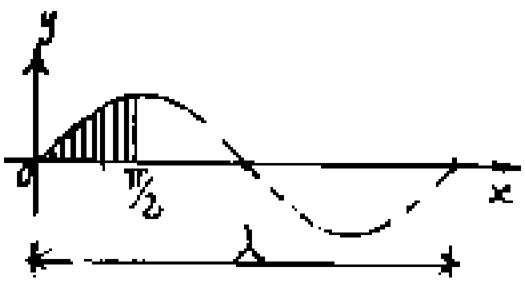
Consideriamo un semiellisse intersezione con un piano verticale in diagonale, esso ha per semiassi: "r" ed "$r\sqrt{2}$", ed essendo $\alpha = 45°$, ($\tan(\alpha) = 1$), (v. pag. prec.), la sinusoide che si ottiene svolgendo il cilindro



avrà per equazione: $\boxed{\eta = r \operatorname{sen} \varphi}$ però, in questo caso, trattandosi di semicilindri, la generatrice origine di φ è spostata di 90° per cui $\operatorname{sen}(90-\varphi) = \cos(\varphi)$, da cui le cosinusoidi sui modellini. (Per il disegno delle sinusoidi vedi esempi di cerchi osculatori).

Confronti fra la volta a crociera e la volta a padiglione.

Sia "ℓ" il lato del quadrato d'imposta delle volte ($\ell = 2r$); L'area di base sarà: $\boxed{A = \ell^2}$ ed il volume del semicubo circoscritto alle volte sarà $\boxed{V = \frac{\ell^3}{2}}$



Poiché l'area di $\frac{1}{4}$ d'onda di sinusoide è: $A_{\lambda/4} = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi/2} = \boxed{A_{\lambda/4} = 1}$

dallo sviluppo dei modellini abbiamo:

Area della superficie della volta a paglione $= 8r^2 A_{\lambda/4} = \boxed{A_p = 2\ell^2}$

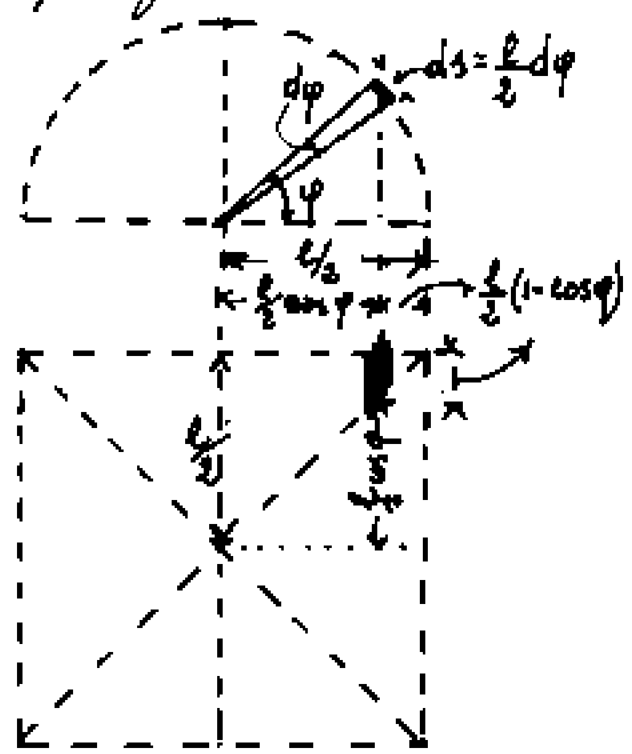
(L'area della superficie della volta a padiglione è il doppio dell'area d'imposta)

Area della superficie della volta a crociera: $A_c = 8r^2\left(\frac{\pi}{2} - A_{\lambda/4}\right)$

$A_c = \frac{8r^2}{2}(\pi-2) = 4r^2(\pi-2)$; $\boxed{A_c = \ell^2(\pi-2)} = \ell^2(1,14159..) =$

$A_c \cong \ell^2+(14\%)\ell^2$ (l'area della superficie della volta a crociera è pari all'area d'imposta maggiorata di poco più del 14%.

Qualora non avessimo utilizzato lo sviluppo in piano nel modellino di volte, per calcolare l'area della superficie di una "unghia" della volta a crociera (vedi figura):



$$dA_c = \frac{\ell}{2}(1-\cos\varphi)\,ds$$

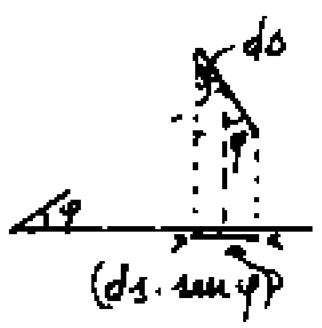
$$dA_c = \frac{\ell}{2}(1-\cos\varphi)\left(\frac{\ell}{2}\,d\varphi\right)$$

$$A_c = 8\int_0^{\pi/2}\frac{\ell^2}{4}(1-\cos\varphi)\,d\varphi$$

$$A_c = 2\ell^2\left[\frac{\pi}{2}-1\right]$$

$$\boxed{A_c = \ell^2(\pi-2)}$$

Per il calcolo dei volumi occorre notare che la proiezione sulla base d'imposta dell'area elementare dA è $dA' = (dA \cdot \operatorname{sen}\varphi) = \left(\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\right)\left(\frac{\ell}{2}(1-\cos\varphi)\right)$



anche l'altezza è funzione di φ, cioè: $h_\varphi = \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\varphi$; per cui: $dV = \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\varphi \cdot dA'$

$$dV = \frac{\ell^3}{8}\left(\operatorname{sen}^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi\right)d\varphi$$

$$V_c = \cancel{8}\frac{\ell^3}{\cancel{8}}\int_0^{\pi}(\operatorname{sen}^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi)\,d\varphi = \ell^3\left[\frac{-\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi+\varphi}{2} - \frac{\operatorname{sen}^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi/2} = \ell^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)$$

$$\boxed{V_c = \frac{\ell^3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)} \qquad \boxed{V_c = \frac{\ell^3}{2}(0,90413)}$$

Il volume delimitato fra la base d'imposta e la volta a crociera è circa i 9/10 del volume del semicubo circoscritto.

Per la volta a padiglione, l'elemento di area proiettato è $dA'_p = (ds\, sen\varphi)(\frac{\ell}{2}\cos\varphi) = \frac{\ell^2}{4}(sen\varphi\cos\varphi)\,d\varphi$

$$dV_p = h_{(\varphi)} \cdot dA'_p = \frac{\ell^3}{8}(sen^2\varphi\cos\varphi)\,d\varphi$$

$$V_p = \cancel{8}\cdot\frac{\ell^3}{\cancel{8}}\int_0^{\pi/2} sen\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \ell^3\left[\frac{sen^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi/2}$$

$$\boxed{V_p = \ell^3/3}$$

Il volume delimitato fra la base e la volta a padiglione è un terzo del volume del semicubo circoscritto.

Per ottenere lo stesso volume della volta a crociera occorre alzare le pareti di: $\frac{\ell^3}{\ell^2}\left(\frac{9}{10}-\frac{1}{3}\right) = \frac{17}{30}\ell$ che per 4 pareti diventa: $\frac{34}{15}\ell^2$ di muratura da aggiungere a $2\ell^2 = A_p$

$\frac{64}{15}\ell^2 = 4{,}27\,\ell^2$. (metri quadri di muratura complessiva)

Per chiudere le pareti di una volta a crociera occorrono:

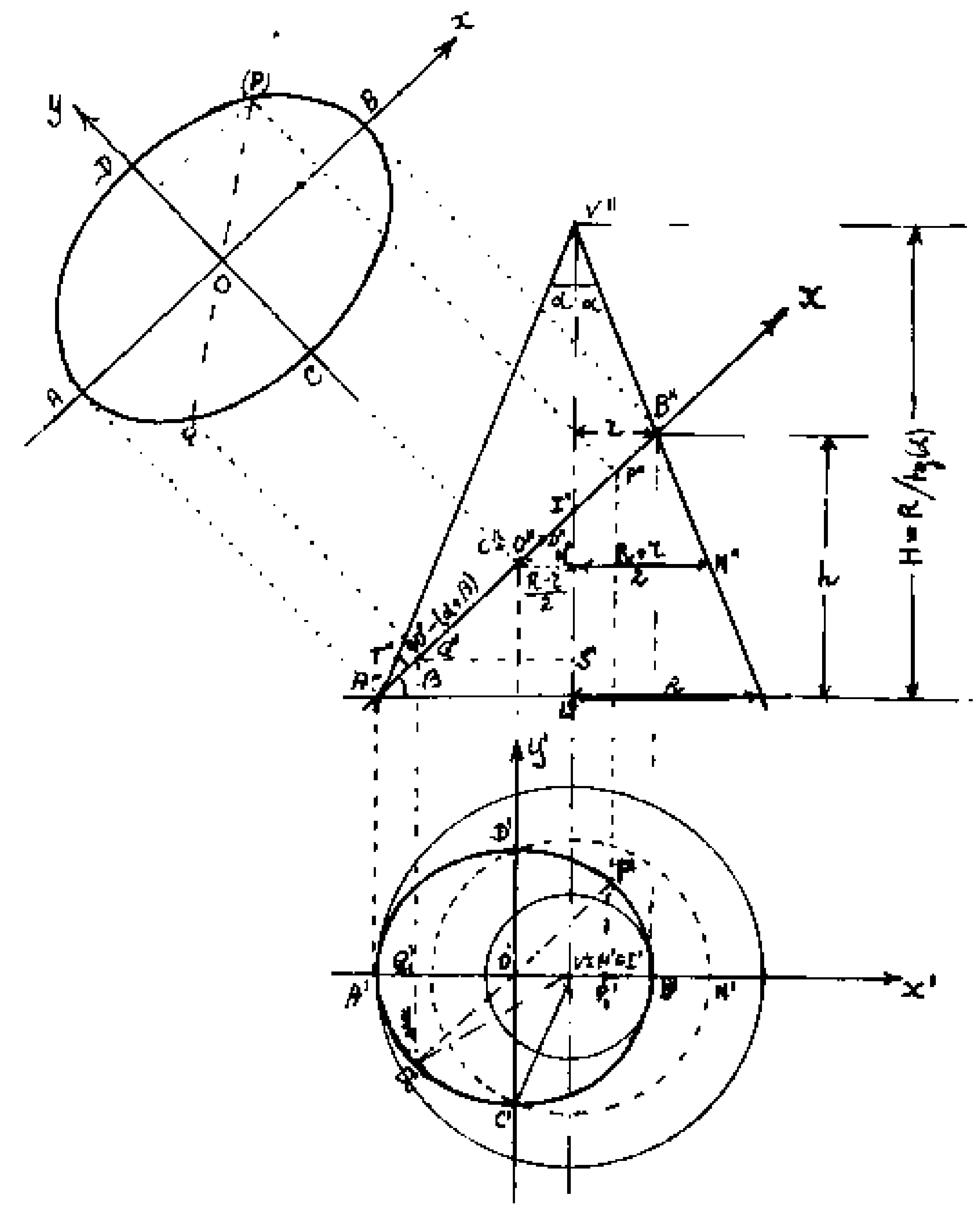
$2r^2\pi = \frac{\ell^2}{2}\pi = 1.57\,\ell^2$ da aggingere $A_c = 1.14\,\ell^2 = 2{,}71\,\ell^2$ (metri quadri di muratura complessiva).

per un vano di egual volume.

con la crociera: (m² di parete = $1.57\,\ell^2$) + (m² di volta = $1.14\,\ell^2$) = m² $2{,}71\,\ell^2$

Col padiglione: (" = $2{,}27\,\ell^2$) + (" = $2\ell^2$) = m² $4{,}27\,\ell^2$

L'ellisse come intersezione di un piano con un cono



Un cono di apertura 2α sia sezionato da un piano inclinato di β sulla base del cono. Siano "r" ed "R" i raggi di base del tronco di cono sezionato. L'altezza del tronco sarà: $h = (r+R)\,tg\,\beta$. ed anche: $h = (R-r)\,tg\,\alpha$.

per cui: $\boxed{tg(\alpha)\cdot tg(\beta) = \dfrac{(R-r)}{R+r}}$. Bastano quindi tre grandezze per definire l'intersezione: $\boxed{R = r\,\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}}$

Calcoliamo il semidiametro maggiore:

$$\boxed{a = \overline{OA} = \overline{OB} = \frac{(R+r)}{2\cos\beta}}$$

Calcoliamo il semidiametro minore

$$b = \overline{OC} = \overline{O'C'} = \sqrt{\overline{M'C'}^2 + \overline{M'O'}^2} = \sqrt{\overline{M''N''}^2 - \left(\frac{R-r}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 - \left(\frac{R-r}{2}\right)^2}$$

$$\boxed{b = \sqrt{Rr}}$$ (medio proporzionale fra i raggi)

Assunta come asse x la traccia del piano di sezione: $(A''B'')$ e per asse y la perpendicolare ad x, passante per "O" e giacente sulla sezione retta del cono; per un generico punto Q della intersezione si ha:

$$\boxed{x_Q = \overline{O''Q''}} \quad ; \quad \boxed{y_Q = \overline{Q'Q'_1}}$$

Il segno dipende dal verso arbitrario degli assi.

Dal triangolo $Q'_1 H' Q'$ (e sua seconda proiezione)

$$\boxed{y_Q^2 = \overline{Q'_1H'}^2 - \overline{Q'_1H'}^2} \qquad \boxed{y_Q^2 = \overline{T''S''}^2 - \overline{Q''S''}^2}$$

$$\boxed{R : H = \overline{TS''} : (H - \overline{L'S'})} \qquad \boxed{\frac{R}{H} = \tan(\alpha)} \qquad \boxed{\overline{LS} = (a-x)\operatorname{sen}\beta = (a-x)\operatorname{tg}\beta\cos\beta}$$

$$\overline{T''S''} = R - (\overline{L''S''})\operatorname{tg}(\alpha) \qquad \boxed{\overline{T''S''} = R - (a-x)\operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)\cos(\beta)}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta) = \frac{R-r}{R+r}} \quad ; \quad \boxed{Q''S'' = x\cos\beta + \frac{R-r}{2}} \qquad \boxed{\left(\frac{R-r}{R+r}\right)\cos\beta = \frac{R-r}{2a}}$$

$$\boxed{y_Q^2 = \left(R - (a-x)\frac{(R-r)}{2a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\left(\frac{R+r}{2}\right) + \left(\frac{R-r}{2}\right)\right)^2}$$

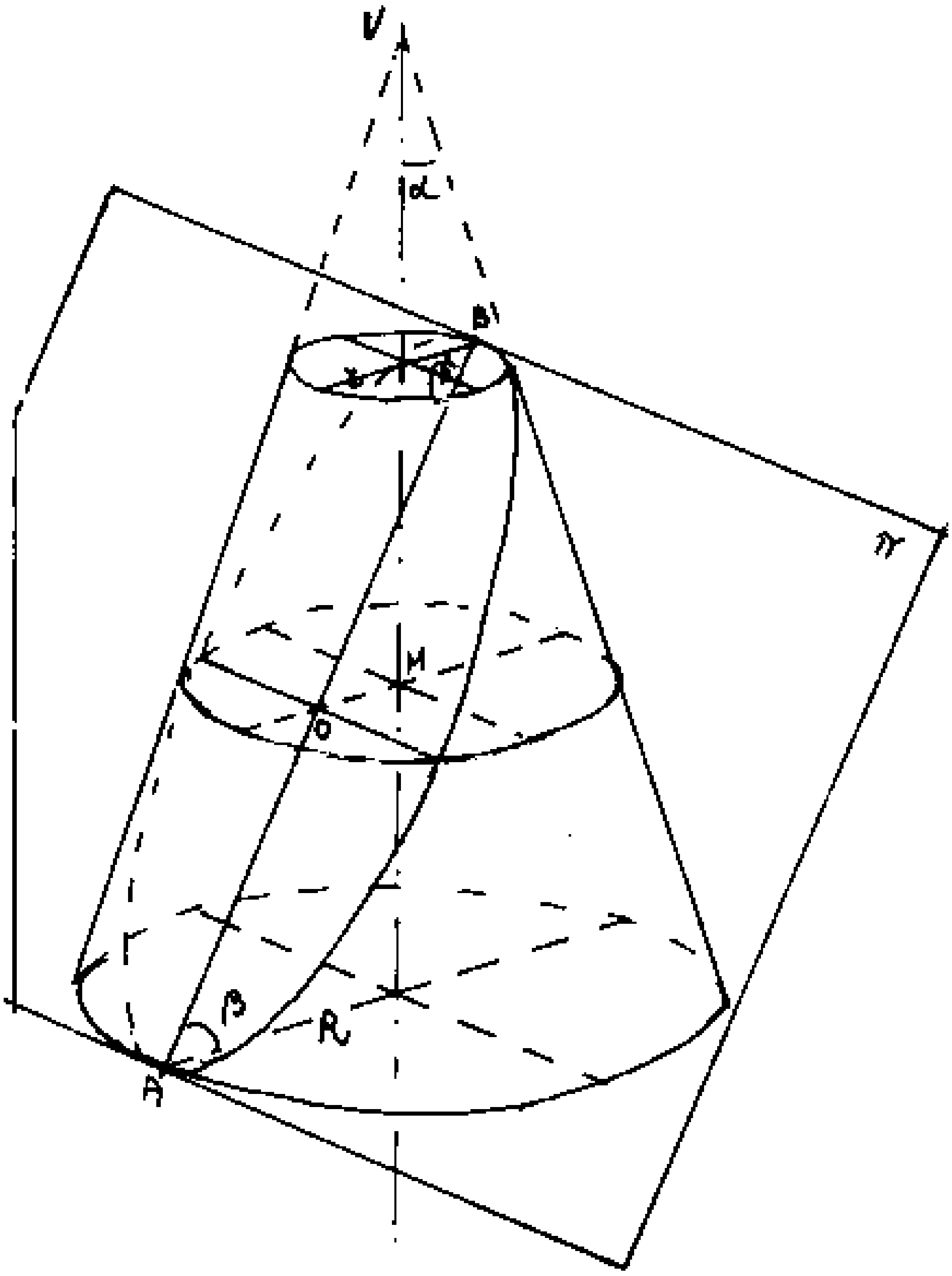
$$y_Q^2 = \left[\left(\frac{R+r}{2}\right) + \left(\frac{R-r}{2}\right)\left(\frac{x}{a}\right)\right]^2 - \left[\left(\frac{R+r}{2}\right)\left(\frac{x}{a}\right) + \left(\frac{R-r}{2}\right)\right]^2 = \left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \left(\frac{R-r}{2}\right)^2\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{R+r}{2}\right)^2\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{R-r}{2}\right)^2$$

$$y^2 = Rr - Rr\left(\frac{x}{a}\right)^2 \quad ; \quad (Rr = b^2)$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Ciò dimostra che la intersezione fra un cono ed un piano (che lo attraversi) è un'ellisse.

Un tronco di cono di raggi "r" ed "R" ed altezza $h = (R-r)\,tg(\alpha)$, tagliato diagonalmente da un piano inclinato di β sulle basi, per cui vale la relazione: $tang(\alpha) \cdot tang(\beta) = \frac{R-r}{R+r}$; la linea comune al piano ed alla superficie laterale del tronco di cono è una ellissi di assi:



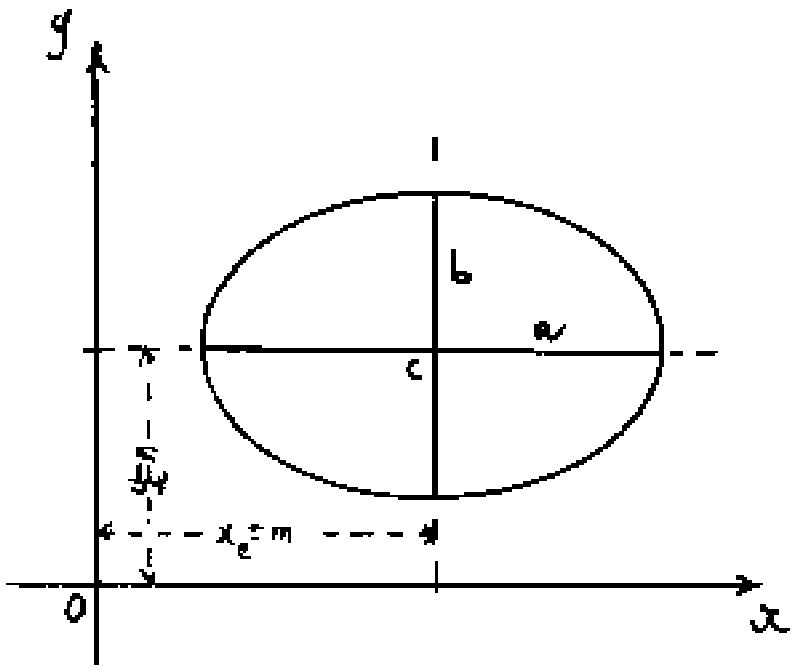
$$\boxed{a = \frac{(R+r)}{2\cos\beta}}$$

$$\boxed{b = \sqrt{Rr}}$$

Si può anche pensare il vertice del cono come un centro di proiezione di una sezione retta circolare su un piano inclinato di β rispetto al piano della sezione retta; si ha così che

<u>l'ellisse è ancora la proiezione di un cerchio, (in proiezione centrale)</u>. (La proiezione centrale ha il centro di proiezione in campo finito, la proiezione di Monge o per raggi paralleli ha il centro di proiezione all'infinito)

L'equazione dell'ellisse riferita ad assi traslati



Siano: m ed n le coordinate del centro dell'ellisse, avremo:

$$\boxed{\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1}$$

cioè, sviluppando:

$$b^2(x^2 - 2mx + m^2) + a^2(y^2 - 2ny + n^2) - a^2b^2 = 0$$

ed ordinando:

$$\boxed{b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2mx - 2a^2ny + b^2m^2 + a^2n^2 - a^2b^2 = 0}$$

forma classica dell'equazione delle coniche.

dividendo per a^2b^2 si ha:

$$\boxed{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) - 2\left(\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2}\right) + \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) = 1}$$

esplicitando y si ha:

$$\boxed{y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x-m)^2} + n}$$

Confrontiamo ora con l'equazione generale delle coniche:

$a_{11} = b^2$; $a_{12} = 0$ (manca il termine in xy); $a_{22} = a^2$; $a_{13} = -b^2m$; $a_{23} = -a^2n$;

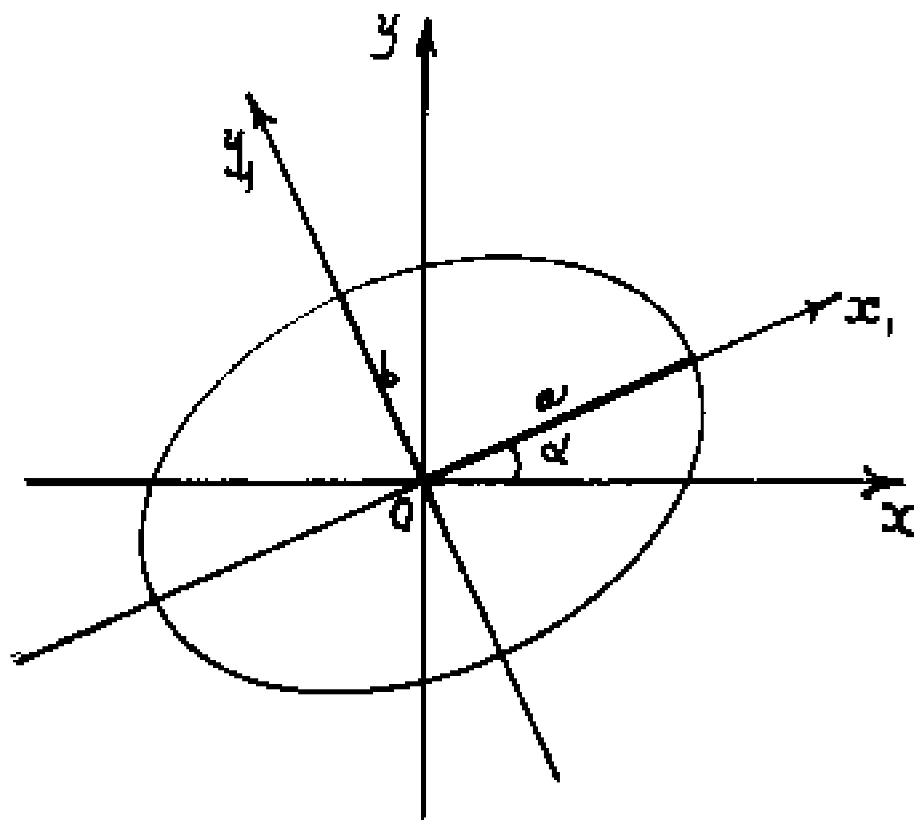
$a_{33} = b^2m^2 + a^2n^2 - a^2b^2$. Si noti che i coefficienti sono fra loro correlabili.

Cioè affinché si tratti di ellissi ad assi traslati deve essere: $\boxed{a_{12} = 0}$

$a_{33} = \left(\frac{a_{13}^2}{a_{11}} + \frac{a_{23}^2}{a_{22}} - a_{11} \cdot a_{22}\right)$ che può scriversi: $\boxed{a_{11}a_{23}^2 + a_{22}a_{13}^2 - a_{11}^2a_{22}^2 = a_{11}a_{22}a_{33}}$

Esplicitando la y è possibile ricavare "n"; esplicitando la x è possibile ricavare "m", da cui "a" e "b" e controllare in che forma sono i coeff. dell'equaz. data.

L'equazione dell'ellisse ad assi ruotati



L'equazione per la rotazione degli assi (V. prec.) è:

$$\begin{cases} x_1 = y\,\mathrm{sen}\,\alpha + x\cos\alpha \\ y_1 = y\cos\alpha - x\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$$

l'equazione dell'ellisse al centro: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$

può scriversi:

$$\boxed{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 - a^2 b^2 = 0}$$

sostituendo: $b^2(y^2\,\mathrm{sen}^2\alpha + x^2\cos^2\alpha + 2xy\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha) = b^2 x_1^2$

$a^2(y^2\cos^2\alpha + x^2\,\mathrm{sen}^2\alpha - 2xy\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha) = a^2 y_1^2$

sommando: $$\boxed{(a^2\,\mathrm{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)X^2 + (a^2\cos^2\alpha + b^2\,\mathrm{sen}^2\alpha)y^2 + (b^2 - a^2)\,\mathrm{sen}(2\alpha)\,Xy = a^2b^2} \quad (1)$$

dividendo per: a^2b^2 si ha:

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{b^2} + \frac{\cos^2\alpha}{a^2}\right)X^2 + \left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2} + \frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{a^2}\right)y^2 + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\mathrm{sen}(2\alpha)\,Xy = 1} \quad (2)$$

Ricordando che: (vedi eq in coord. polari)

$\left(\frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{b^2} + \frac{\cos^2\alpha}{a^2}\right) = \frac{1}{\rho_x^2}$; (ρ_x = semidiametro sull'asse x)

$\left(\frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\alpha}{b^2}\right) = \frac{1}{\rho_y^2}$; (ρ_y = semidiametro sull'asse y)

si ha: $$\boxed{\frac{X^2}{\rho_x^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2} + \left[\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\mathrm{sen}(2\alpha)\right]Xy = 1}$$

Attenzione: ρ_x e ρ_y non sono, né possono essere diametri coniugati essendo fra loro perpendicolari.

sommando: $\boxed{\dfrac{1}{\rho_x^2} + \dfrac{1}{\rho_y^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}}$ si ha una importante relazione: "La somma dei quadrati dei reciproci di due semidiametri ortogonali, in un ellisse è costante"

facendo la differenza:

$$\boxed{\frac{1}{\rho_x^2} - \frac{1}{\rho_y^2} = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\cos(2\alpha)}$$

si ha:

"La differenza dei quadrati dei reciproci di due semidiametri ortogonali, in un ellisse è pari alla differenza dei quadrati dei reciproci dei semidiametri principali moltiplicata per il coseno dell'angolo doppio fra i due sistemi"

Ma dati due semidiametri ortogonali di un ellisse, le due relazioni scritte non sono sufficienti a risolvere il problema perché le incognite sono tre: "a", "b", "α".

Questo problema, di cui abbiamo già fatto cenno, si presenta spesso nei calcoli di matematica applicata, per esempio nel calcolo dell'ellisse d'inerzia, di una figura piana, non simmetrica, (per esempio la sezione ad L) per essa è facile trovare $\rho_{(x)}$ e $\rho_{(y)}$, ma occorre avvalerci dei momenti d'inerzia centrifughi per trovare a, b, α.

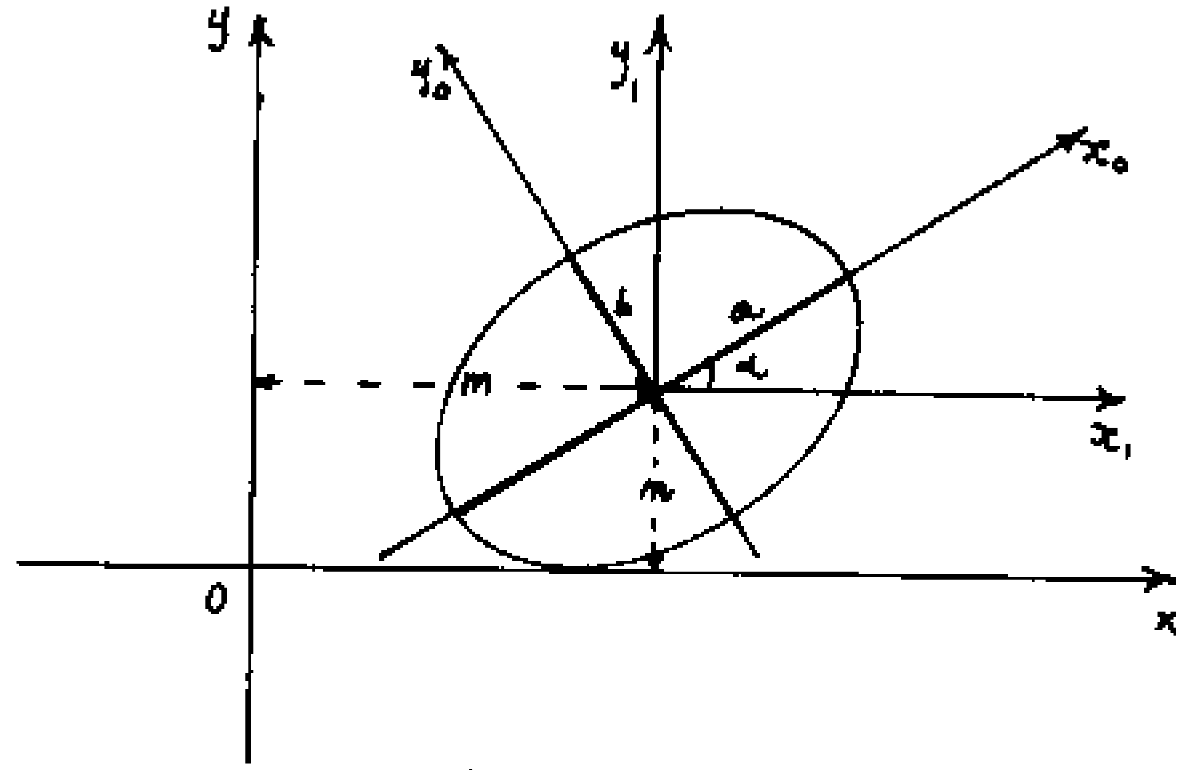
Se confrontiamo l'equazione dell'ellisse ad assi ruotati con l'equazione generale delle coniche si ha: $a_{11} = \left(a^2 \operatorname{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha\right)$; $2a_{12} = \left(b^2 - a^2\right)\operatorname{sen}(2\alpha)$;
$a_{22} = \left(a^2\cos^2\alpha + b^2\operatorname{sen}^2\alpha\right)$; $2a_{13} = 0$; $2a_{23} = 0$; $a_{33} = -a^2b^2$.
Nell'equazione dell'ellisse ad assi <u>solo</u> ruotati mancano i termini in x ed y, figura invece: a_{12} in xy.
Si nota che se poniamo $a_{33} = 1$ si ha l'equazione nella forma (2). per cui:

$$\frac{a_{11} + a_{22}}{a_{33}} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad ; \quad \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{33}} = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\cos(2\alpha)$$

perciò: $$\frac{2a_{12} \cdot a_{33}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\operatorname{sen}(2\alpha)}{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\cos(2\alpha)} = \operatorname{tang}(2\alpha).$$

trovato: α ; $\frac{a_{11} - a_{22}}{a_{33}\cos\alpha} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$; $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ era noto, quindi per somma e sottrazione si ricavano i diametri principali dell'ellisse.

L'equazione dell'ellisse ad assi ruotati e traslati



Basta sostituire: $(x-m)$ ed $(y-n)$ alle x ed y nell'equazione dell'ellisse ad assi ruotati. Si ha:

$$\boxed{(a^2\operatorname{sen}^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)(x-m)^2+(a^2\cos^2\alpha+b^2\operatorname{sen}^2\alpha)(y-n)^2+(b^2-a^2)\operatorname{sen}(2\alpha)(x-m)(y-n)=a^2b^2}$$

essendo:

$$(x-m)^2=(x^2-2mx+m^2);\ (y-n)^2=(y^2-2ny+n^2);\ (x-m)(y-n)=(xy-my-nx+mn)$$

avremo: i coefficienti:

$$a_{11}=(a^2\operatorname{sen}^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)$$

$$a_{22}=(a^2\cos^2\alpha+b^2\operatorname{sen}^2\alpha)$$

$$2a_{12}=(b^2-a^2)\operatorname{sen}(2\alpha)$$

$$2a_{13}=-[2m\,a_{11}+n2a_{12}]$$

$$2a_{23}=-[2n\,a_{22}+m2a_{12}]$$

$$a_{33}=[m^2a_{11}+n^2a_{22}+mn\,2a_{12}-a^2b^2]$$

che riportati nell'equazione generale:

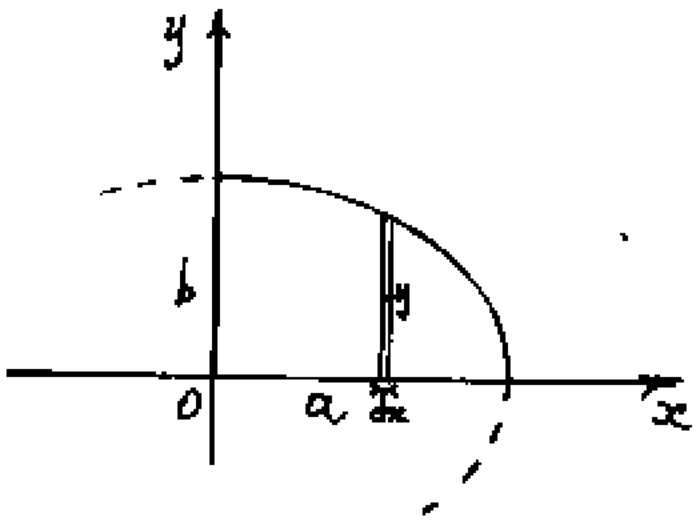
$$\boxed{a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0}$$

danno l'equazione dell'ellisse ad assi ruotati e traslati, l'equazione è completa, affinché sia un ellisse: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0$; affinché sia reale: $(Aa_{11}<0)$ ed $(Aa_{22}<0)$.

L'area dell'ellisse

L'equazione dell'ellisse:

$$\boxed{y = b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$



L'area dell'ellisse:

$$A = 4\int_0^a y \cdot dx = A = 4b\int_0^a \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\, dx$$

$$\boxed{A = 4ab\int_{x=0}^{x=a}\left(\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) d\left(\frac{x}{a}\right)}$$

posto: $\left(\frac{x}{a}\right) = sen(t)$; $t = arcsen\left(\frac{x}{a}\right)$; $d\left(\frac{x}{a}\right) = d\,sen(t)$

$$A = 4ab\int\sqrt{1-sen^2(t)}\; d\,sen(t)$$

$$A = 4ab\int \cos^2 t\, dt$$

$$A = 4ab\left[\frac{sen\,t\cos t + t}{2}\right]$$

$$A = 4ab\left[\frac{\left(\frac{x}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} + arcsen\left(\frac{x}{a}\right)}{2}\right]_0^a$$

$$A = 4ab\left(\frac{arcsen(1)}{2}\right) = 4ab\left(\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{A = ab\pi}$$

Abbiamo visto che l'area dei parallelogrammi costruiti sui semidiametri coniugati dell'ellisse è (ab), perciò <u>l'area dell'ellisse equivale π volte l'area del parallelogrammo costruito su due semidiametri coniugati, qualsiasi.</u>

La rettificazione dell'ellisse e gli integrali ellittici

La lunghezza di un qualsiasi tratto x_1, x_2 di curva $y = f(x)$ rettificata è espresso da:

$$\boxed{\Gamma = \int_{x_1}^{x_2} \left(\sqrt{f'^2_{(x)} + 1}\right) dx}$$

Anziché fare la derivata dell'equazione dell'ellisse è più comodo considerare che la lunghezza di un ellisse rettificata è pari alla lunghezza di una intera onda di sinusoide rettificata. Abbiamo già visto che la relazione fra un ellisse di semidiametri "a", "b" ed una sinusoide di ampiezza h e lunghezza d'onda λ è:

$$\boxed{\lambda = 2\pi b} \quad ; \quad \boxed{h = \sqrt{a^2 - b^2}}$$

l'equazione di tale sinusoide sarà:

$$y = h \operatorname{sen} \frac{x}{b} \qquad \boxed{y = \left(\sqrt{a^2 - b^2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x}{b}\right)}$$

<u>Rettifichiamo per prima la sinusoide semplice:</u>

$$\boxed{y = \operatorname{sen}(x)} \qquad y' = \cos(x)$$

corrispondente all'ellisse di semiassi: $\boxed{b = 1}$; $\boxed{a = \sqrt{2}}$

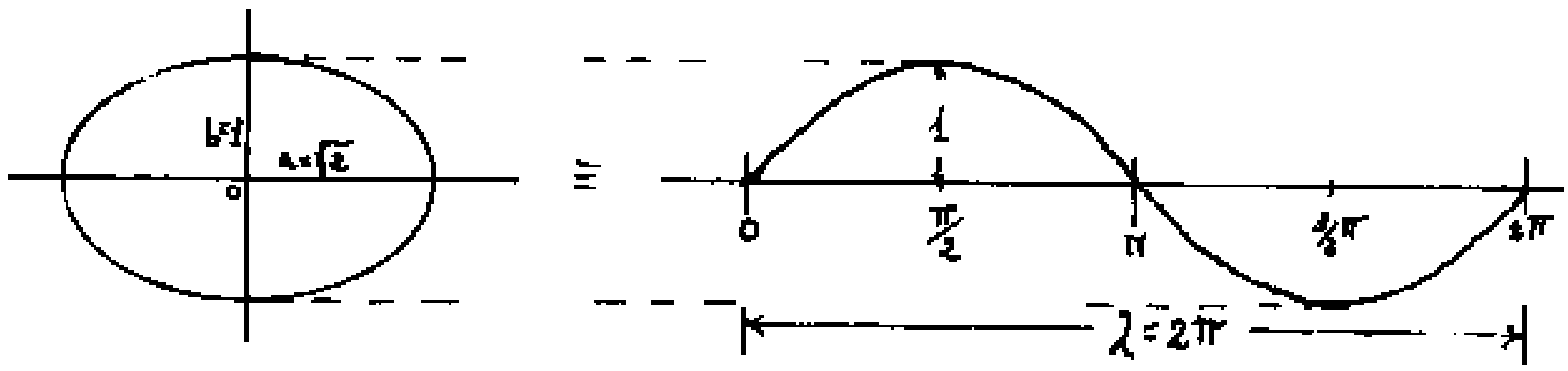
$$\Gamma = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\; dx = \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \tfrac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x}\; dx$$

$$\Gamma = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \operatorname{sen}^2(x)}\; dx = 4\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2 x}\; dx$$

con $\theta = \frac{\pi}{4}$; <u>forma classica dell'integrale ellittico di seconda specie:</u>

dalle tabelle si ha: $\boxed{x = \varphi = 90°;\ \theta = 45°;\ 1{,}3506}$; <u>$\Gamma = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 1{,}3506 = 7{,}64015$</u>

Quindi le lunghezze rettificate dell'ellisse: $\boxed{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1}$ e della sinusoide: $\boxed{y=sen(x)}$ sono equivalenti a: 7,64015.



Cioè un cilindro, di raggio unitario, sezionato da un piano inclinato a $45° = \frac{\pi}{4}$ sulle basi ha per sezione l'ellisse in figura e se sviluppato in piano si ha la sinusoide in figura.

Rettifichiamo ora un ellisse di assi generici: "a", "b"; al quale corrisponde la sinusoide di ampiezza: $h=\sqrt{a^2-b^2}=f$; e di lunghezza d'onda: $\lambda=2\pi b$. L'equazione della sinusoide: $\boxed{y=f\,sen(\frac{x}{b})}$ infatti per $x=\lambda \rightarrow y=f\,sen(2\pi)$. $\quad y'=\frac{f}{b}\cos(\frac{x}{b})\,d(x)$; $\Gamma=\int_\lambda\left(\sqrt{1+\frac{f^2}{b^2}\cos^2(\frac{x}{b})}\right)d(x)$

$$\Gamma=\int_\lambda\left(\sqrt{1+\frac{f^2}{b^2}-\frac{f^2}{b^2}sen^2(\frac{x}{b})}\right)d(x)=\int_\lambda\sqrt{\left(\frac{b^2+f^2}{b^2}-\frac{a^2f^2}{a^2b^2}sen^2(\frac{x}{b})\right)}\,d(x)=a\int\left(\sqrt{1-\frac{f^2}{a^2}sen^2(\frac{x}{b})}\right)d\left(\frac{x}{b}\right)$$

si è portato "a" in evidenza e b sotto segno di differenziale.

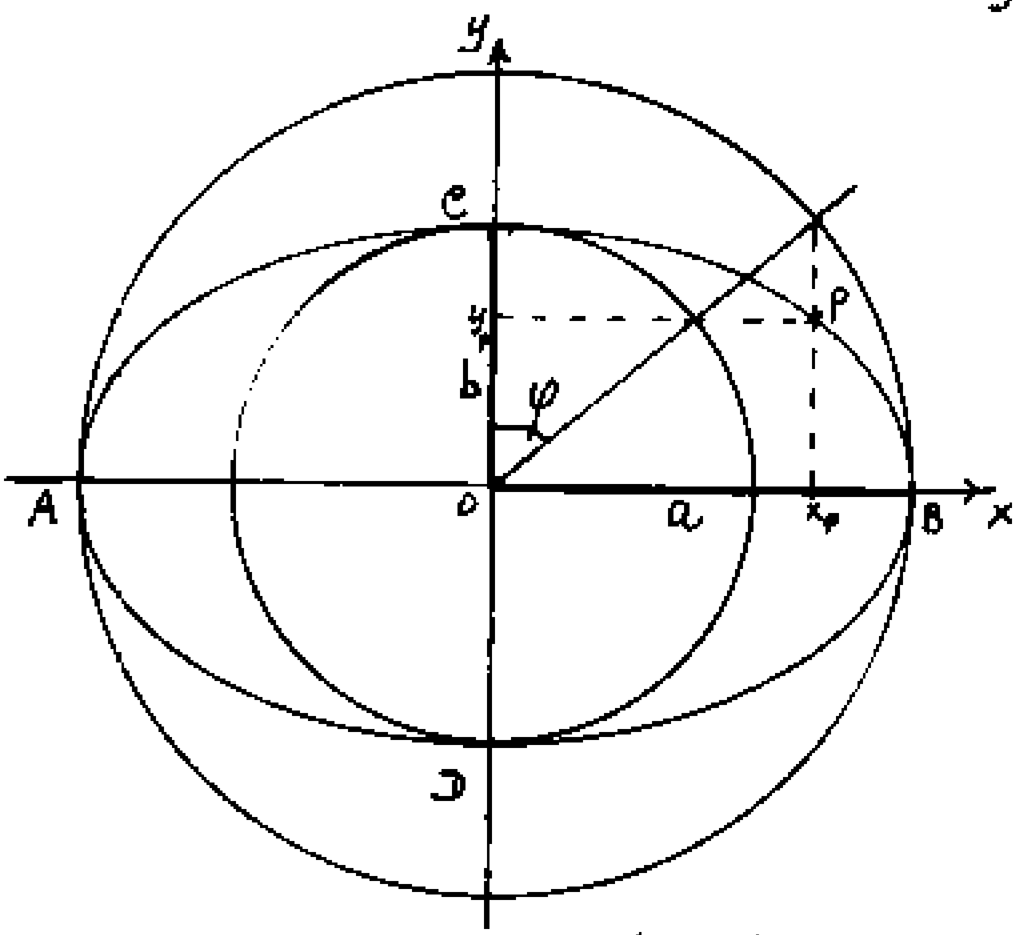
posto: $\left(\frac{x}{b}\right)=\varphi$; $\left(\frac{f}{a}\right)=K$ = eccentricità si ha l'integrale ellittico di seconda specie: $\boxed{\Gamma=a\int_0^\varphi\left(\sqrt{1-K^2sen^2\varphi}\right)d\varphi}$

ponendo: $\theta=arcsen(K)$ l'integrale può scriversi: $\boxed{\Gamma=a\int_0^\varphi\left(\sqrt{1-sen^2\theta\,sen^2\varphi}\right)d\varphi}$ dalle tavole degli integrali ellittici potremo ricavare un numero: $E(\kappa,\varphi)$ col quale definire la lunghezza dell'arco di ellisse (o di sinusoide)

$$\boxed{\Gamma_{(\varphi)_K}=a\,E_{(\varphi,K)}}$$

Le coordinate parametriche dell'ellisse

Riprendiamo la costruzione grafica dell'ellisse, ed indichiamo con φ l'angolo che un raggio dei cerchi forma con l'asse minore dell'ellisse; avremo:



$$\boxed{\begin{aligned} x &= a \operatorname{sen} \varphi \\ y &= b \cos \varphi \end{aligned}}$$

che sono le coordinate parametriche dell'ellisse nel parametro "φ".

Utilizzo delle coordinate parametriche per la rettificazione dell'ellisse.

La: $ds^2 = dx^2 + dy^2$ diventa: $ds^2 = (x'^2_{(\varphi)} + y'^2_{(\varphi)})\,d\varphi^2$

cioè: $\Gamma = \int_0^\varphi \left(\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2 \operatorname{sen}^2\varphi}\right) d\varphi = \int_0^\varphi \left(\sqrt{a^2 - (a^2-b^2)\operatorname{sen}^2\varphi}\right) d\varphi =$

$$\Gamma = a\int_0^\varphi \left(\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}\operatorname{sen}^2\varphi}\right) d\varphi \quad ; \quad \text{ma: } \frac{c}{a} = K = \text{accentricitá} \, ;$$

$$\boxed{\Gamma = a\int_0^\varphi \left(\sqrt{1 - K^2 \operatorname{sen}^2\varphi}\right) d\varphi}$$

per $\theta = \operatorname{arcsen}(K)$

$$\boxed{\Gamma_{(k,\varphi)} = a\int_0^\varphi \left(\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\varphi}\right) d\varphi}$$

Formule che abbiamo giá trovato, questo procedimento evidenziando "φ" fa vedere quale arco di ellisse viene rettificato. (in figura l'arco $\overset{\frown}{CP}$).

Gli integrali ellittici

Abbiamo già visto "lo sviluppo in serie" degli integrali ellittici di prima e seconda specie, a proposito del problema del pendolo, ed abbiamo dato un tabella di integrali calcolati. Abbiamo ritrovato gli integrali ellittici per rettificare l'ellisse e la sinusoide, vogliamo ora dare una definizione degli integrali ellittici: (Cfr. G. Sansone - Lezioni di Analisi Matematica - Vol. II pag 139 - ed Cedam - Padova - 1945) "Gli integrali della forma: $\int f(x, \sqrt{P(x)})\,dx$ dove f è il simbolo di una funzione razionale dei suoi argomenti, e $P(x)$ un polinomio intero della variabile x di terzo o quarto grado, prendono il nome di integrali ellittici." Se $P(x)$ è di grado superiore al quarto, si dicono integrali iperellittici.

È possibile dimostrare che operando una trasformazione lineare sulla variabile x è possibile ridurre il $P(x)$ dal 3° al 4° o viceversa. La espressione: $f(x, \sqrt{P(x)}) = \dfrac{A(x) + B(x)\sqrt{P(x)}}{C(x) + D(x)\sqrt{P(x)}}$ ove: $A(x), B(x), C(x), D(x)$ sono polinomi razionali interi in x. L'espressione può ridursi $= \dfrac{L(x)}{M(x)} + \dfrac{N(x)}{M(x)} \dfrac{1}{\sqrt{P(x)}}$; Sappiamo risolvere: $\int \frac{L(x)}{M(x)}dx$; per il secondo integrale scomponiamo: $\frac{N(x)}{M(x)} = q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \dots q_{n-1} x + q_n + \sum_{i,l} \frac{A_{il}}{(x-\alpha_i)^l}$

Quindi basterà considerare integrali $I_l = \int \frac{x^l}{\sqrt{P(x)}}dx$; $J_l = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^l \sqrt{P(x)}}$.

È possibile ridurre J_l alla forma: $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{P(x)}}$ (ove: $l = 1$)

Questa espressione è ancora possibile trasformarla, si ottengono così. Gli integrali ellittici di prima, seconda e terza specie di Legendre.

Scomposto: $P(x) = a_0(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$ e sostituendo $t = (ax+b)/(x+d)$, si arriva a dimostrare che gli integrali ellittici si esprimono, oltre che con le funzioni note, con i seguenti tre integrali: detti da Legendre:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-K^2t^2)}}$$ integrale ellittico di prima specie.

$$\int \frac{\sqrt{1-K^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$ " " di seconda "

$$\int \frac{dt}{(1+at^2)\sqrt{(1-t^2)(1-K^2t^2)}}$$ " " di terza "

(i quali rappresentano tre nuove trascendenti)

Ponendo: $t = \mathrm{sen}(\varphi)$ si ha: $dt = \cos\varphi\, d\varphi$

$$\int \frac{\cancel{\cos\varphi}\, d\varphi}{\sqrt{\cancel{(1-\mathrm{sen}^2\varphi)}(1-K^2\mathrm{sen}^2\varphi)}} = \boxed{\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2\mathrm{sen}^2\varphi}}} \quad (\text{I}^a \text{ specie})$$

$$\int \frac{\sqrt{1-K^2\mathrm{sen}^2\varphi}}{\cancel{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\varphi}}}\,\cancel{\cos\varphi}\, d\varphi = \boxed{\int \sqrt{1-K^2\mathrm{sen}^2\varphi}\, d\varphi} \quad (\text{II}^a \text{ specie})$$

Questi due integrali abbiamo imparato a svilupparli in serie, e si è data per essi una tabella di conti fatti.

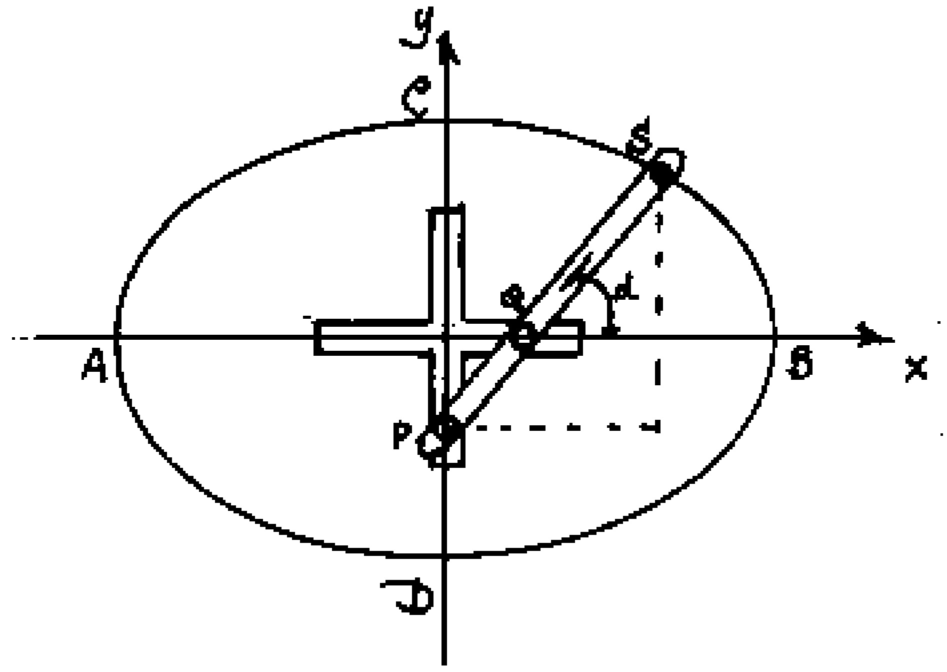
L'ellisse nella matematica applicata.

L'ellisse è particolarmente importante nella matematica applicata ad altre discipline scientifiche. Basti ricordare l'orbita dei corpi celesti, l'ellisse in meccanica, in statica, in scienza delle costruzioni, ecc. Avremo occasione di ampliare le cognizioni sull'ellisse nel trattare casi di specifica applicazione.

(vedasi per. geometria proiettiva, l'equilibrio, ecc).

L'ellissografo

Esistono strumenti chiamati ellissografi, capaci di disegnare l'ellisse con tratto continuo.



Uno di questi apparecchi è costituito da due guide a croce, entro cui possono scorrere due perni "P" e "Q" posti a distanza fissa su un'asta all'estremo della quale c'è una punta scrivente S. Sia: $\overline{PS}=a$; $\overline{QS}=b$ cioè $(a-b)=\overline{PQ}$ detto "α" l'angolo variabile dell'asta sulle ascisse, avremo:

$$\boxed{x = a\cos\alpha} \; ; \quad y = a\,\text{sen}\alpha - (a-b)\,\text{sen}\alpha = \boxed{y = b\,\text{sen}\alpha}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \cos^2(\alpha) \; ; \quad \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \text{sen}^2(\alpha) \quad \text{perciò:}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

è la curva tracciata da S con tratto continuo.

Equazione delle rette tangenti all'ellisse

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$ eq. dell'ellisse esplicitata in y

derivando: $y' = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \tan(\alpha)$.

---

1) Se è noto il punto di tangenza T, di ascissa: x_T,

essendo: $y_T = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_T^2}$ dalla: $\frac{y - y_T}{x - x_T} = tg(\alpha)$ si ha

$$\frac{\left(y - \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_T^2}\right)}{(x - x_T)} = -\frac{b}{a}\frac{x_T}{\sqrt{a^2-x_T^2}}$$

esplicitando y:

$$y = -\frac{b}{a}\frac{x x_T - x_T^2}{\sqrt{a^2-x_T^2}} + \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_T^2} = \frac{b}{a}\frac{a^2 - \cancel{x_T^2} - x x_T + \cancel{x_T^2}}{\sqrt{a^2-x_T^2}}$$

eq. della retta tangente in T l'ellisse. $$\boxed{y = \left(\frac{-b\,x_T}{a\sqrt{a^2-x_T^2}}\right)x + \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2-x_T^2}}\right)}$$ in forma esplicita

in forma segmentaria:

$$\boxed{\frac{x}{(a^2/x_T)} + \frac{y}{(ab/\sqrt{a^2-x_T^2})} = 1}$$

può scriversi:

$$\boxed{\frac{x}{(a^2/x_T)} + \frac{y}{(b^2/y_T)} = 1}$$

La distanza di una tangente l'ellisse dal centro "O"

sarà: $\delta = (a^2/x_T)(ab/\sqrt{a^2-x_T^2})\Big/\sqrt{a^4/x_T^2 + a^2b^2/(a^2-x_T^2)}$; semplificando:

(f = distanza focale)

$K = \left(\frac{f}{a}\right)$ = eccentricità

$$\boxed{\delta = \frac{a^2 b}{\sqrt{a^4 - f^2 x_T^2}}}$$ $\delta = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - K^2 x_T^2}}$

2) Se il punto noto della tangente è esterno all'ellisse;

$Q \equiv (x_Q, y_Q)$; $\frac{(y - y_Q)}{(x - x_Q)} = m$ = (eq. di tutte le rette passanti per Q)

Il sistema:
$$\begin{cases} y = m(x - x_Q) + y_Q \\ y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}$$

permette di trovare i punti comuni all'ellisse e alle rette per Q.

$$mx - (mx_Q - y_Q) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\boxed{\left(m^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)X^2 - 2m(mX_Q - y_Q)X + \left[(mX_Q - y_Q)^2 - b^2\right] = 0}$$

equazione di 2° grado le cui radici sono le ascisse dei punti comuni all'ellisse ed alla retta di coeff. angolare "m". Tale retta se taglierà l'ellisse avremo due radici reali $(\Delta > 0)$, se è tangente all'ellisse, una sola radice reale $(\Delta = 0)$, ed infine se la retta è esterna all'ellisse avremo radici immaginarie. $(\Delta < 0)$. A noi interessa $(\Delta = 0)$ cioè: $m^2(mx_Q - y_Q)^2 - \left[m^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]\left[(mx_Q - y_Q)^2 - b^2\right] = 0$

$m^2b^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\left[mX_Q + y_Q\right]^2 = 0$ $\quad m^2a^2 + b^2 - m^2X_Q^2 - y_Q^2 + 2mx_Qy_Q = 0$

$$\boxed{(a^2 - X_Q^2)m^2 + (2X_Qy_Q)m + (b^2 - y_Q^2) = 0}$$

La presente equazione di 2° grado fornisce i due coeff. angolari delle due rette per "Q".

$$\boxed{m = \frac{-X_Qy_Q \pm \sqrt{X_Q^2y_Q^2 - (a^2 - X_Q^2)(b^2 - y_Q^2)}}{(a^2 - X_Q^2)}}$$

$$\boxed{m = \frac{-X_Qy_Q \pm \sqrt{a^2y_Q^2 + b^2X_Q^2 - ab^2}}{(a^2 - X_Q^2)}}$$

quando $\Delta = 0 = (a^2y_Q^2 + b^2X_Q^2 - a^2b^2) = 0 \rightarrow y_Q = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_Q^2}$; Q appartiene all'ellisse, si ricade nel caso precedente: $m = \frac{-X_Q\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_Q^2}\right)}{(a^2 - X_Q^2)} = -\frac{b}{a}\frac{X_Q}{\sqrt{a^2 - X_Q^2}} = -\frac{b}{a}\frac{X_T}{\sqrt{a^2 - X_T^2}}$

3) Se è noto il pu to $Q \equiv (x_Q, y_Q)$, esterno all'ellisse, per il quale deve passare la retta tangente, e poniamo come incognita il punto T di tangenza:

$$\boxed{\frac{(y_T - y_Q)}{(x_T - x_Q)} = -\frac{b\, x_T}{a\sqrt{a^2 - x_T^2}}}$$

$$\left(y_T = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_T^2}\right) \qquad \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_T^2} - y_Q = \frac{-b x_T^2 + b x_T x_Q}{a\sqrt{a^2 - x_T^2}}$$

$$a^2 \cancel{- x_T^2} - \left(\frac{a}{b}\sqrt{a^2 - x_T^2}\right) y_Q = \cancel{- x_T^2} + x_T x_Q$$

$$a^4 - 2a^2 x_Q x_T + x_T^2 x_Q^2 = \frac{a^4}{b^2} y_Q^2 - \frac{a^2}{b^2} x_T^2 y_Q^2$$

$$\left(x_Q^2 + \frac{a^2}{b^2} y_Q^2\right) x_T^2 - \left(2a^2 x_Q\right) x_T + \frac{a^4}{b^2}\left(b^2 - y_Q^2\right) = 0$$

$$\boxed{\left(b^2 x_Q^2 + a^2 y_Q^2\right) x_T^2 - \left(2a^2 b^2 x_Q\right) x + a^4\left(b^2 - y_Q^2\right) = 0}$$

equaz. di 2° grado in x_T che ha come radici le ascisse dei due punti di tangenza delle rette per Q.

$$x_T = \frac{a^2 b^2 x_Q \pm \sqrt{\left(a^2 b^2 x_Q\right)^2 - \left(b^2 x_Q^2 + a^2 y_Q^2\right) a^4 \left(b^2 - y_Q^2\right)}}{b^2 x_Q^2 + a^2 y_Q^2}$$

$$= a^2 \, \frac{b^2 x_Q \pm \sqrt{\cancel{b^4 x_Q^2} - [\cancel{b^4 x_Q^2} + a^2 b^2 y_Q^2 - b^2 x_Q^2 y_Q^2 + a^2 y_Q^4}}{\left(b^2 x_Q^2 + a^2 y_Q^2\right)}$$

$$\boxed{x_T = a^2 \, \frac{b^2 x_Q \pm y_Q \sqrt{-a^2 b^2 + b^2 x_Q^2 + a^2 y_Q^2}}{\left(b^2 x_Q^2 + a^2 y_Q^2\right)}}$$

ascissa dei punti di tangenza.

L'equazione della normale all'ellisse

Tracciamo la normale dal punto T di tangenza.

l'equazione della normale sarà:

$$\boxed{\frac{y-y_T}{x-x_T} = \frac{+a\sqrt{a^2-x_T^2}}{b\,x_T}}$$

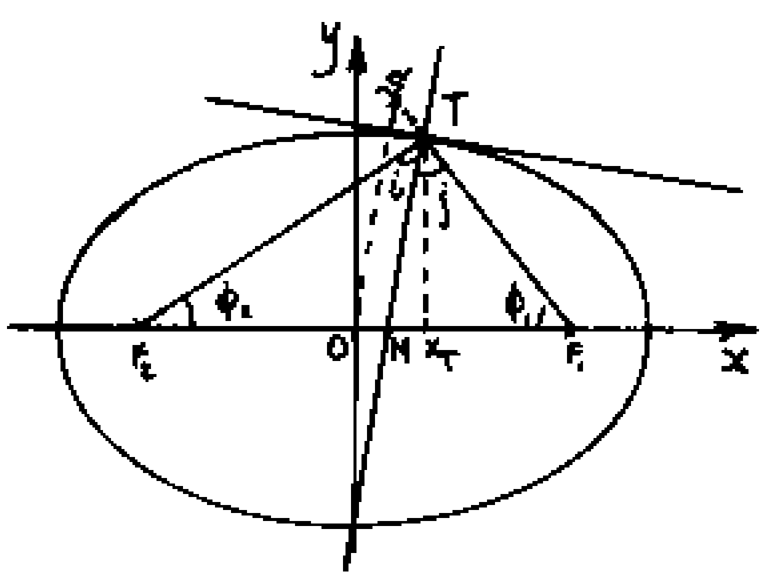
$$y = \left(\frac{a\sqrt{a^2-x_T^2}}{b\,x_T}\right)x + y_T - \left(\frac{a\sqrt{a^2-x_T^2}}{b\,\cancel{x_T}}\right)\cancel{x_T}$$

ma: $y_T = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_T^2}$; > $y_T\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right) = -\frac{f^2}{b^2}y_T$

$$\boxed{y = \frac{y_T}{b^2}\left(\frac{a^2}{x_T}x - f^2\right)}$$ (in forma esplicita)

$$\boxed{\frac{x}{(x_T f^2/a^2)} + \frac{y}{(-y_T f^2/b^2)}}$$ (in forma segmentaria)

Detto N il punto di intersezione della normale con l'asse x:



$\boxed{\overline{ON} = \frac{f^2}{a^2}x_T}$; $\overline{NF_2} = f + \overline{ON}$;

$\boxed{\overline{NF_2} = \frac{f(a^2+fx_T)}{a^2}}$; $\overline{NF_1} = f - \overline{ON}$;

$\boxed{\overline{NF_1} = \frac{f(a^2-fx_T)}{a^2}}$; $OT = \sqrt{x_T^2+y_T^2}$

$\overline{OT} = \sqrt{x_T^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2-x_T^2)}$; $\boxed{\overline{OT} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2b^2+f^2x_T^2}}$

$$\overline{NT} = \sqrt{(x_T-\overline{ON})^2+y_T^2} = \sqrt{\left(x_T^2+\frac{f^4}{a^4}x_T^2-\frac{2f^2}{a^2}x_T^2\right)+\left(\frac{b^2}{a^2}(a^2-x_T^2)\right)} = \boxed{\overline{NT} = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4-f^2x_T^2}}$$

$$\overline{F_2T} = \sqrt{(f+x_T)^2+y_T^2} = \sqrt{a^2-\cancel{b^2}+x_T^2+2fx_T+\cancel{b^2}-\frac{b^2}{a^2}x_T^2} = \frac{1}{a}\sqrt{(a^4+2a^2fx_T+f^2x_T^2)}$$

$= \frac{1}{a}\sqrt{(a^2+fx_T)^2}$ $\boxed{\overline{F_2T} = \frac{a^2+fx_T}{a}}$; $\overline{F_1T} = \sqrt{(f-x_T)^2+y_T^2}$; $\boxed{\overline{F_1T} = \frac{a^2-fx_T}{a}}$

se consideriamo: $\left(\frac{f}{a}\right) = K$ = eccentricità le lunghezze dei raggi focali diventano: $\boxed{F_2T = a+Kx_T}$; $\boxed{F_1T = a-Kx_T}$

Poichè: $\overline{NF_1} = \frac{f}{a}\frac{a^2-fx_T}{a} = \frac{f}{a}\overline{F_1T}$ possiamo scrivere la proporzione : $\boxed{\overline{NF_1} : \overline{F_1T} = f : a}$ dalla quale nasce la regola : " Per tracciare la normale all' ellisse da un suo punto T, si prolunga il raggio $\overline{F_1T}$ fino ad "S" in modo che: $\overline{F_1S} = a$, unito quindi S con O, la parallela ad $\overline{SO}$ da T è la retta normale all' ellisse."

Calcoliamo le grandezze angolari.

$\tan g(\phi_2) = \left(\frac{y_T}{f+x_T}\right)$; $\boxed{\tan g\,\phi_2 = \frac{b\sqrt{a^2-x_T^2}}{a(f+x_T)}}$ $\boxed{\tan g\,\phi_1 = \frac{b\sqrt{a^2-x_T^2}}{a(f-x_T)}}$

$\mathrm{sen}(\phi_2) = \left(\frac{y_T}{\overline{F_2T}}\right)$; $\boxed{\mathrm{sen}\,\phi_2 = \frac{b\sqrt{a^2-x_T^2}}{(a^2+fx_T)}}$ $\boxed{\mathrm{sen}\,\phi_1 = \frac{b\sqrt{a^2-x_T^2}}{(a^2-fx_T)}}$

$\cos(\phi_2) = \left(\frac{\mathrm{sen}\,\phi_2}{tg\,\phi_2}\right)$; $\boxed{\cos\phi_2 = \frac{a(f+x_T)}{(a^2+fx_T)}}$ $\boxed{\cos\phi_1 = \frac{a(f-x_T)}{(a^2-fx_T)}}$

$$\mathrm{Sen}(j) = \mathrm{sen}(\phi_1)\frac{\overline{NF_1}}{\overline{NT}} = \frac{\cancel{b}\sqrt{a^2-x_T^2}}{\cancel{(a^2-fx_T)}}\;\frac{f\cancel{(a^2-fx_T)}}{\cancel{a^2}}\;\frac{\cancel{a^2}}{\cancel{b}\sqrt{a^4-f^2x_T^2}}$$

$$\boxed{\mathrm{sen}(j) = \frac{f\sqrt{a^2-x_T^2}}{\sqrt{a^4-f^2x_T^2}}}$$

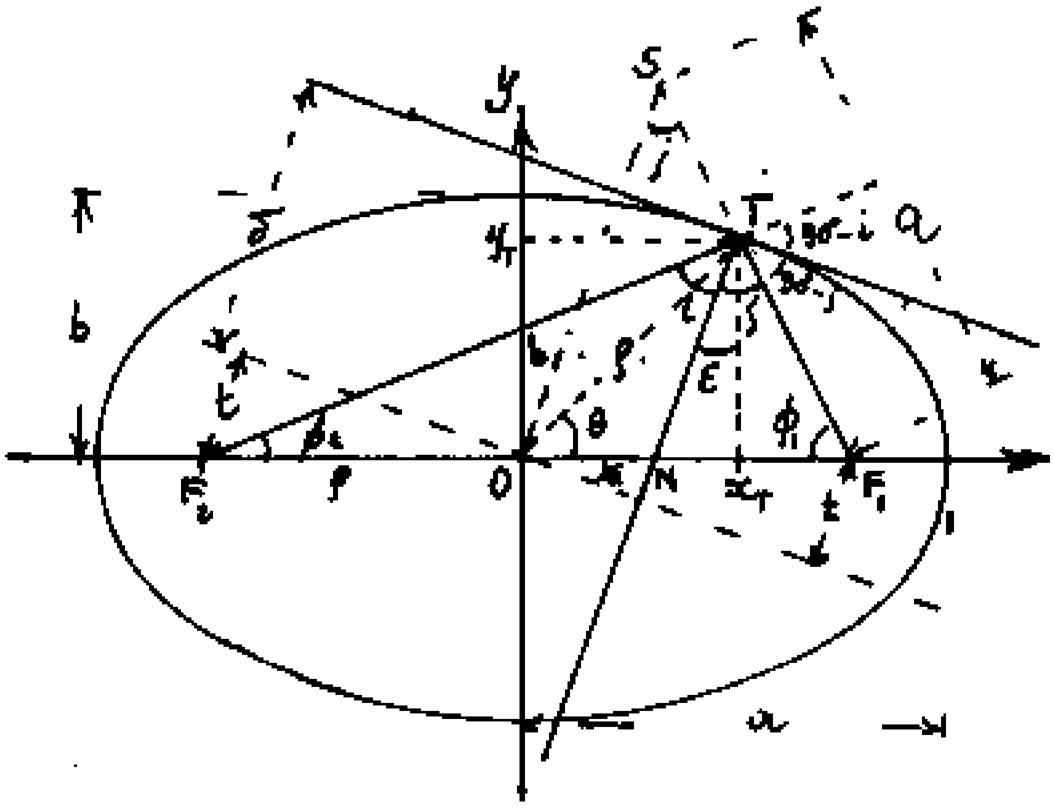
$$\mathrm{sen}(i) = \mathrm{sen}(\phi_2)\frac{\overline{NF_2}}{\overline{NT}} = \frac{\cancel{b}\sqrt{a^2-x_T^2}}{\cancel{(a^2+fx_T)}}\;\frac{f\cancel{(a^2+fx_T)}}{\cancel{a^2}}\;\frac{\cancel{a^2}}{\cancel{b}\sqrt{a^4-f^2x_T^2}}$$

$$\boxed{\mathrm{sen}(i) = \frac{f\sqrt{a^2-x_T^2}}{\sqrt{a^4-f^2x_T^2}}}$$

Resta dimostrato che $\mathrm{sen}(j) = \mathrm{sen}(i)$, cioè: $(j) = (i)$ da cui: " La normale all' ellisse in un suo punto T è bisettrice fra i raggi focali che convergono allo stesso T.

Le proprietà focali dell'ellisse

Le principali proprietà focali dell'ellisse sono state già dimostrate nel corso della trattazione fatta sull'ellisse. Tuttavia ne riportiamo ora le tre essenziali.



1ª) La somma delle distanze dei fuochi da un generico punto (T) dell'ellisse è pari al diametro maggiore dell'ellisse.

La distanza focale: $\overline{OF_1} = \overline{OF_2} = f$ ove: $f^2 = (a^2 - b^2)$; $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$;

$\boxed{\sqrt{(f+x_T)^2 + y_T^2} + \sqrt{(f-x_T)^2 + y_T^2} = 2a}$ (definizione di ellisse)

2ª) Il prodotto delle distanze dai fuochi della tangente è costante e vale b^2.

Siano: $(\delta + t)$ e $(\delta - t)$ tali distanze, dobbiamo dimostrare che $(\delta^2 - t^2) = b^2$; abbiamo visto: $\delta = \frac{a^2 b}{\sqrt{a^4 - f^2 x^2}}$

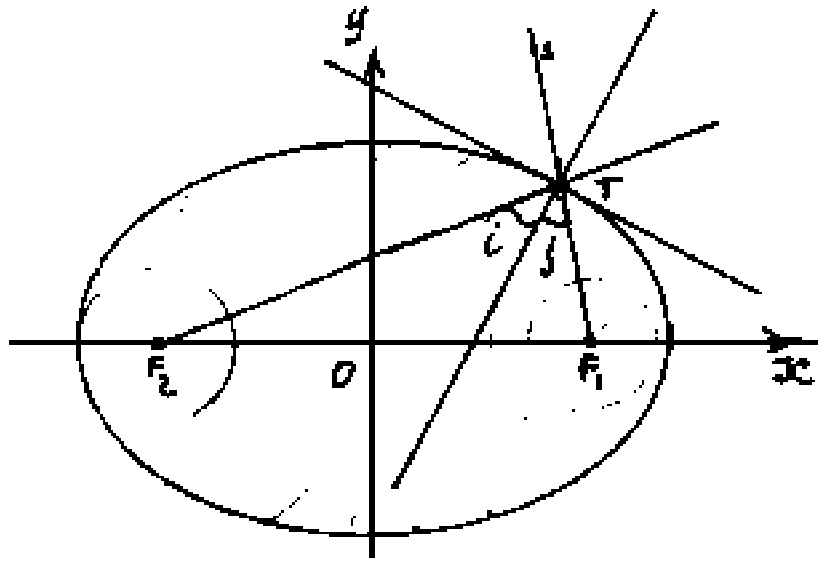
$\delta^2 = a^2 \frac{a^2 b^2}{a^4 - f^2 x_T^2}$; $sen^2(i) = \frac{f^2(a^2 - x_T^2)}{a^4 - f^2 x_T^2}$ per cui:

$$\cos^2(i) = \frac{a^4 - \cancel{f^2 x_T^2} - f^2 a^2 + \cancel{f^2 x_T^2}}{a^4 - f^2 x_T^2} = \cos^2(i) = \frac{a^2(a^2 - f^2)}{a^4 - f^2 x_T^2} = \frac{a^2 b^2}{a^4 - f^2 x_T^2}$$

$$\delta^2 = a^2 \cos^2(i) \; ; \; t^2 = f^2 sen^2 \varepsilon = \frac{f^2 x^2}{a^2} \cos^2(i) \rightarrow \delta^2 - t^2 = \frac{a^4 - f^2 x^2}{a^2} \cos^2 i = \frac{b^2 \cancel{\cos^2 i}}{\cancel{\cos^2 i}}$$

Si può anche dire: 2°) "<u>b è medio proporzionale fra le distanze della tangente dai fuochi dell'ellisse</u>."

3°) "<u>La normale e la tangente all'ellisse bisecano gli angoli formati dai raggi focali.</u>"

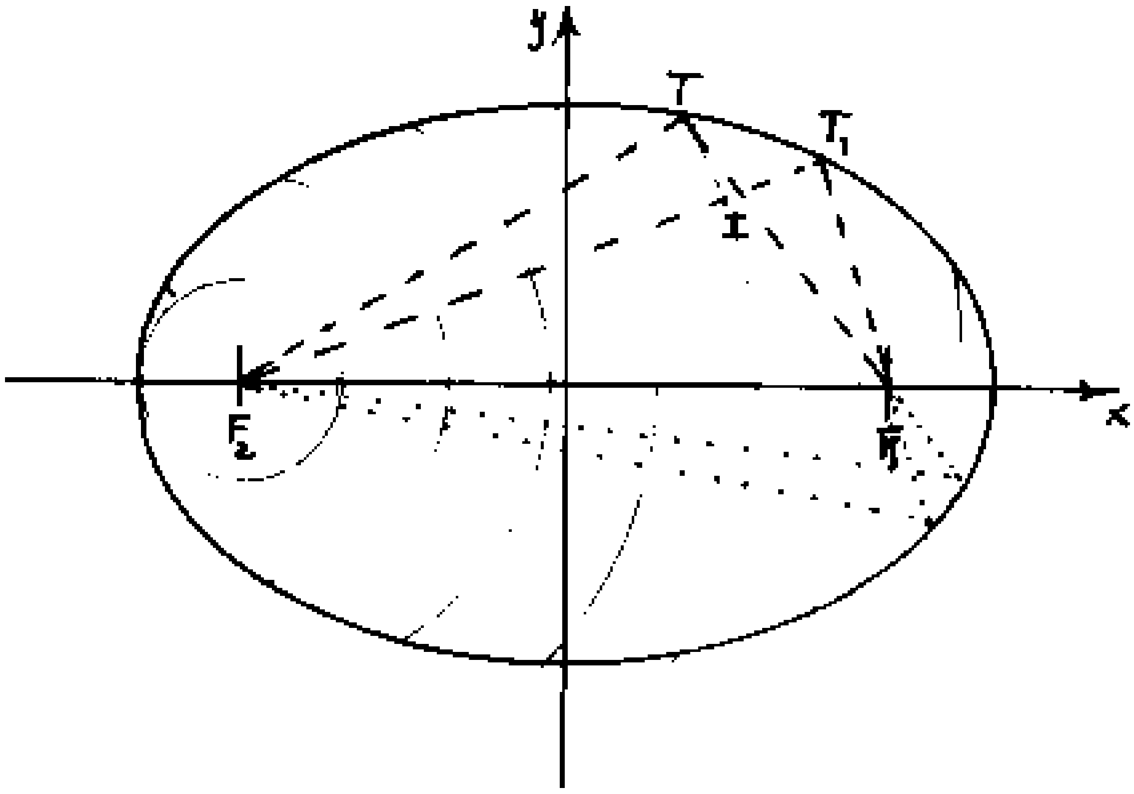


Questa proprietà è già stata dimostrata con: $\hat{i} = \hat{j}$ per la normale, per la tangente sarà: $(90° - i) = (90° - j)$.

È una proprietà importantissima perché se consideriamo speculare il contorno ellittico, un raggio incidente come $\overline{F_2T}$ si rifletterà in TF_1.

Si narra che nell'antichità Dionisio, disponendo di una grotta con volta ellissoide, ponesse i prigionieri in un fuoco dell'ellisse e che, stando nell'altro fuoco, udisse i loro discorsi, anche fatti a voce molto bassa. (Questa prigione scavata nella roccia esiste nei pressi di Siracusa ed è <u>detta Orecchio di Dionisio</u>)

Se in una vasca ellittica, piena d'acqua, si getta un sasso in uno dei fuochi, vedremo formarsi increspature di onde concentriche col fuoco che, allargandosi, vanno a riflettersi sul bordo della vasca e riconcentrandosi nell'altro fuoco vi provocano uno sbuffo d'acqua simile a quello provocato dal sasso, all'atto della caduta, sia pure attenuato.



Il fenomeno è molto interessante; cerchiamo di vederne qualche applicazione.

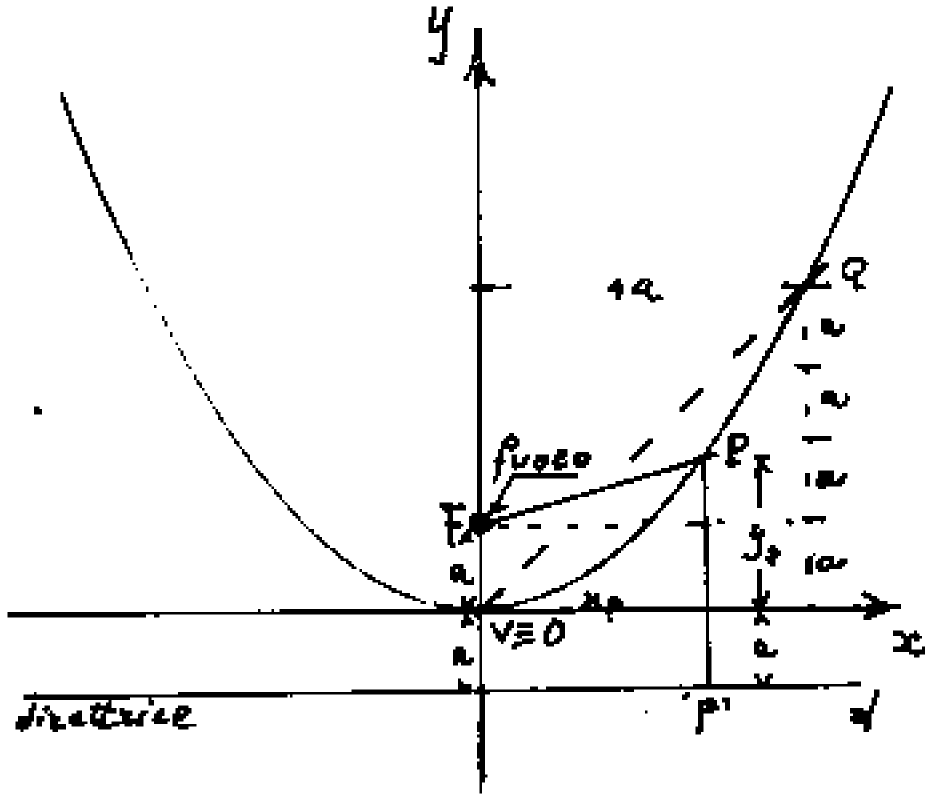
Consideriamo una emissione (o perturbazione) in F_2 che si propaghi in tutte le direzioni. Ciascun raggio uscente da F_2, che arriva per riflessione in F_1, percorre lunghezze uguali, qualunque sia il punto T ove si è riflesso; infatti: $\overline{F_2T}+\overline{TF_1}=2a=$ costante, quindi se "u" è la velocità di trasmissione nel mezzo: $\tau=\frac{2a}{u}$ sarà il tempo impiegato dai singoli raggi per ritrovarsi in F_1.

Potrebbe sembrare che due raggi come $\overline{TF_1}$ ed $\overline{F_2T_1}$ interferiscano in I, però è facile dimostrare che $\overline{F_2T_1}$ è arrivato in I "prima" di F_2TF_1. Ciò può applicarsi a tutti i raggi. Un volta riprodotto il fenomeno in F_1, F_1 diventa emittente ed i raggi tornano in F_2; il periodo sarà 2τ cioè: $\frac{4a}{u}=T$ e la frequenza dell'oscillazione sarà $\boxed{\nu=\frac{u}{4a}}$

Se il fenomeno emissivo in F_2 è sinusoidale di lunghezza d'onda: $\lambda=2a$, si ottiene un oscillatore permanente che non emana esternamente, ma tiene accumulato in sé il suo quoto di energia.

La Parabola

"*Dicesi parabola il luogo geometrico di tutti i punti equidistanti da un punto detto fuoco e da una retta detta direttrice.*"



(Ricaviamo l'eq. al centro, anche se, per la parabola ad asse verticale, ciò è già stato fatto nel Vol. I)

Per il luogo geometrico:

$$\overline{FP} = \overline{PP'}$$

sostituendo: $\sqrt{x_P^2+(y_P-a)^2} = (y_P+a)$ da cui: $x_P^2 - 2ay_P = 2ay_P$;

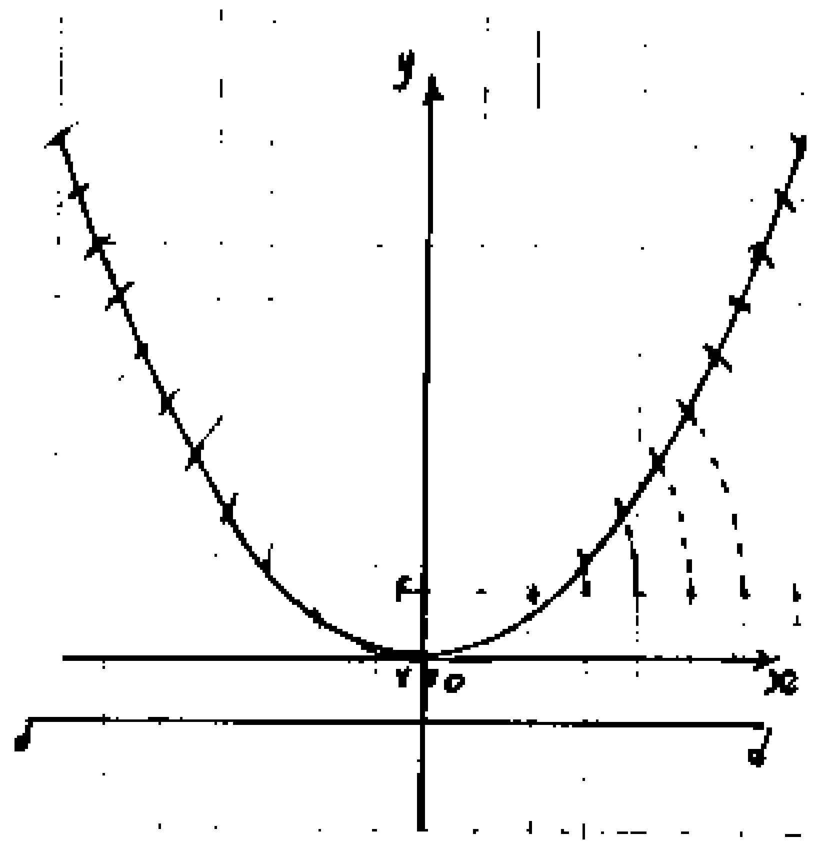
per la genericità di P, possiamo scrivere:

$$\boxed{y = \frac{x^2}{4a}} \quad \text{od anche posto: } \left(m=\frac{1}{4a}\right) \quad \boxed{y = mx^2}$$

equazione della parabola al centro.

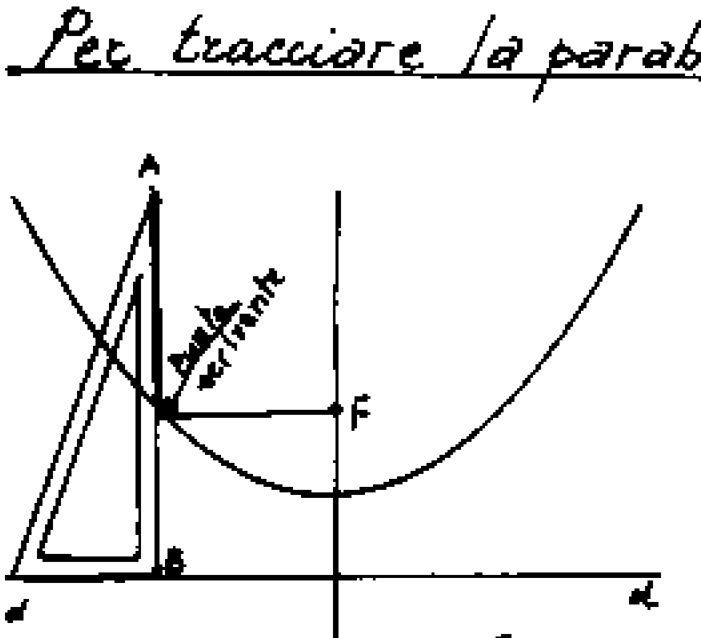
Notiamo che per $(x = 4a)$ anche $y = (4a)$ infatti sostituendo: $y = \frac{(4a)^2}{(4a)} = 4a$. Ciò vuol dire che, se abbiamo il grafico di una parabola con il suo asse, ed assumiamo tale asse come y; e dal vertice V l'ortogonale asse x, una retta $y = x$ (a 45° da $O \equiv V$) incontrerà la parabola in un punto Q tale che $x_Q = y_Q = 4a$ cioè dividendo in 4 parti una coordinata di Q si ottiene "a". $a = \frac{x_Q}{4} = \frac{y_Q}{4} = y_F$.

Costruzione grafica della parabola

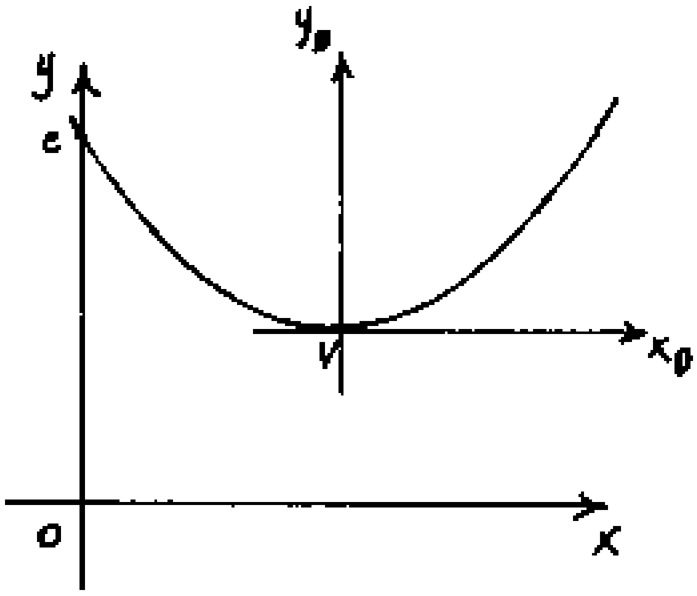


Disponendo di carta quadrettata o millimetrata, si riporta la retta direttrice dd su una linea orizzontale della quadrettatura, (si suppone disegnata). Si disegna l'asse y su una linea verticale della quadrettatura vi si indica il vertice $V \equiv O$ ed il fuoco F. Da O si traccia l'asse x e da F una parallela ad x (si traccia o si pensa tracciata). Si nota che le linee orizzontali della quadrettatura possono rappresentare le progressive distanze dalla direttrice, mentre le linee verticali della quadrettatura possono rappresentare le progressive distanze da F. Perció facendo centro in F col compasso, si apre di raggio via via crescente quanto indicano le verticali sulla parallela ad x per F e si riportano sulle orizzontali determinando punti della parabola.

<u>Per tracciare la parabola a tratto continuo</u>, si fissa all'estremo A di un cateto di una squadra un filo flessibile lungo quanto il cateto $\overline{AB}$ e si fissa l'altro estremo nel fuoco F. Una punta scrivente, tiene il filo aderente la squadra, mentre questa scorre lungo la direttrice dd, disegna la parabola.



Equazione della parabola ad assi traslati



$$(y-y_v) = m(x-x_v)^2$$

$$\boxed{y = mx^2 - (2mx_v)x + (y_v + mx_v)}$$

espressione nota:

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

valida per parabole ad asse parallelo a y.

confrontando con l'espressione generale delle coniche:

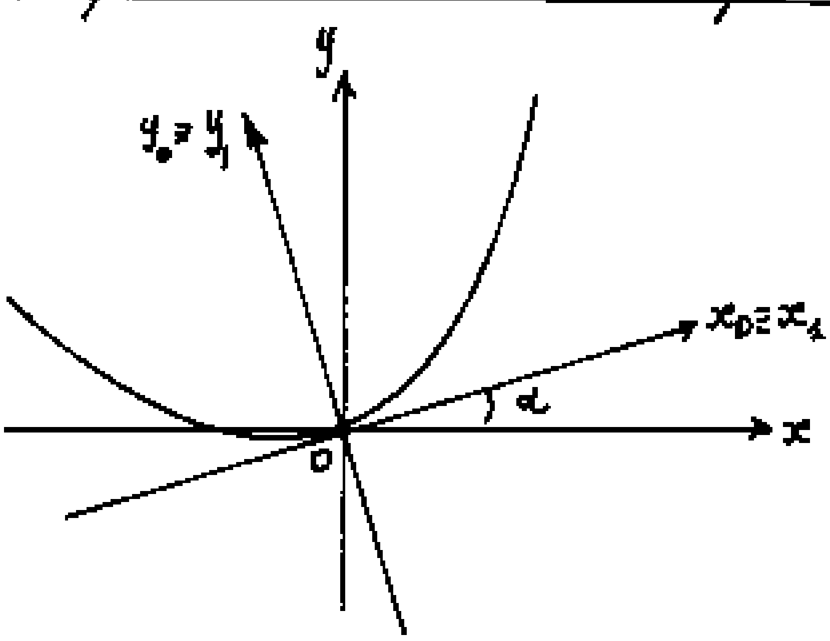
$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

si ha: $a_{12} = 0$; $a_{22} = 0$; $a_{13} = (-mx_v)$; $a_{11} = m$; $a_{23} = -\frac{1}{2}$;

$a_{33} = (y_v - mx_v)$; quindi dividendo l'espressione generica per $2a_{23}$

abbiamo: $\frac{a_{11}}{2a_{23}} = -m$; $\frac{-a_{13}}{a_{11}} = x_v$; $\frac{a_{33} + a_{13}}{2a_{23}} = -y_v$.

Equazione della parabola ad assi ruotati



L'equazione al centro $y_1 = \frac{x_1^2}{4a}$

$$\begin{cases} x_1 = y \operatorname{sen}\alpha + x\cos\alpha \\ y_1 = y\cos\alpha - x \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

sostituendo:

$$(y\cos\alpha - x\operatorname{sen}\alpha) = (y\operatorname{sen}\alpha + x\cos\alpha)^2 / 4a .$$

$$(4a\cos\alpha)y - (4a\operatorname{sen}\alpha)x = y^2\operatorname{sen}^2\alpha + x^2\cos^2\alpha + (2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)xy$$

$$\boxed{(\cos^2\alpha)x^2 + (\operatorname{sen}^2\alpha)y^2 + 2(\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)xy + (4a\operatorname{sen}\alpha)x - (4a\cos\alpha)y = 0} \quad (1)$$

dividendo per $(\cos^2\alpha)$:

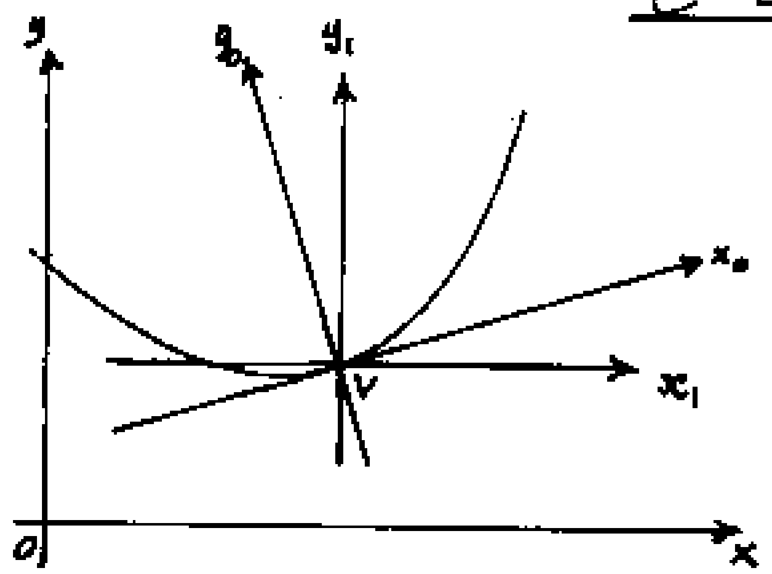
$$\boxed{x^2 + tg^2(\alpha)\, y^2 + 2(tg(\alpha))xy + 2\left(\frac{2a\, tg\alpha}{\cos\alpha}\right)x - 2\left(\frac{2a}{\cos\alpha}\right)y = 0} \quad (2)$$

l'equazione generica delle coniche (che può risultare moltiplicata per un numero K) sarà: (per l'eq. nella forma 1)):

$a_{11} = K\cos^2\alpha$; $a_{22} = K\,\text{sen}^2\alpha$; perciò: $\frac{a_{22}}{a_{11}} = tg^2\alpha$; e ricavata "α" ; $\boxed{K = a_{11}/\cos^2\alpha}$; inoltre: $2a_{12} = (2K\,\text{sen}\alpha\cos\alpha)$; $\frac{2a_{12}}{a_{11}} = 2\,tg\alpha$

$\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)^2 = \left(\frac{a_{22}}{a_{11}}\right)$; $\boxed{K = a_{11} + a_{22}}$; $a = \left(\frac{a_{13}}{4K\,\text{sen}\alpha}\right) = \frac{-a_{23}}{4\cos\alpha}$; $\boxed{a_{33} = 0}$

Equazione della parabola ad assi ruotati e traslati



Riportiamo nell'equazione della parabola ad assi solo ruotati $(x - x_V)$ ed $(y - y_V)$ rispettivamente al posto della x e della y.

Avremo:

$$\boxed{(x-x_V)^2 + tg^2(\alpha)(y-y_V)^2 + 2\,tg(\alpha)(x-x_V)(y-y_V) + 2\left(2a\frac{tg\alpha}{\cos\alpha}\right)(x-x_V) - 2\left(\frac{2a}{\cos\alpha}\right)(y-y_V) = 0}$$

$$x^2 + (tg^2\alpha)y^2 + 2(tg\alpha)(xy) + 2\left(2a\frac{tg\alpha}{\cos\alpha} - x_V - tg\alpha\,y_V\right)x - 2\left(\frac{2a}{\cos\alpha} + tg\alpha\,y_V + tg\alpha\,x_V\right)y$$
$$+\left[x_V^2 + y_V^2\,tg^2(\alpha) + 2(tg\alpha\,x_V y_V) - 2\left(\frac{2a\,tg\alpha\,x_V}{\cos\alpha}\right) + 2\left(\frac{2a}{\cos\alpha}y_V\right)\right] = 0$$

moltiplicando per $\cos^2(\alpha)$ si ha:

$$\boxed{\begin{aligned}&(\cos^2\alpha)x^2 + (\text{sen}^2\alpha)y^2 + 2(\text{sen}\alpha\cos\alpha)xy + 2(2a\,\text{sen}\alpha - x_V\cos^2\alpha - \text{sen}\alpha\cos\alpha\,y_V)x + \\ &\quad -2(y_V\,\text{sen}\alpha\cos\alpha + x_V\,\text{sen}\alpha + 2a\cos\alpha)y + \\ &+\left[\cos^2\alpha\,x_V + \text{sen}^2\alpha\,y_V + 2\,\text{sen}\alpha\cos\alpha\,x_V y_V - 2(2a\,\text{sen}\alpha)x_V + 2(2a\cos\alpha)y_V\right] = 0\end{aligned}}$$

Poiché i primi tre coeff. sono identici all'eq. della parabola solo traslata vale: $tg\alpha = \frac{a_{22}}{a_{11}}$; $K = a_{11}/\cos^2\alpha$; $\left(\frac{a_{13}}{K} + \frac{a_{23}\,tg\alpha}{K}\right) = \left((-\cos^2\alpha) + \left(\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}\right)\right)x_V$

da cui si trova "x_V" sostituendo si trova "y_V" ed "a".

Le rette tangenti alla parabola

$y = mx^2$ = eq. al centro assi della parabola

$y' = 2mx = \frac{x}{2a} = \tan(\alpha) =$ (derivata prima)

---

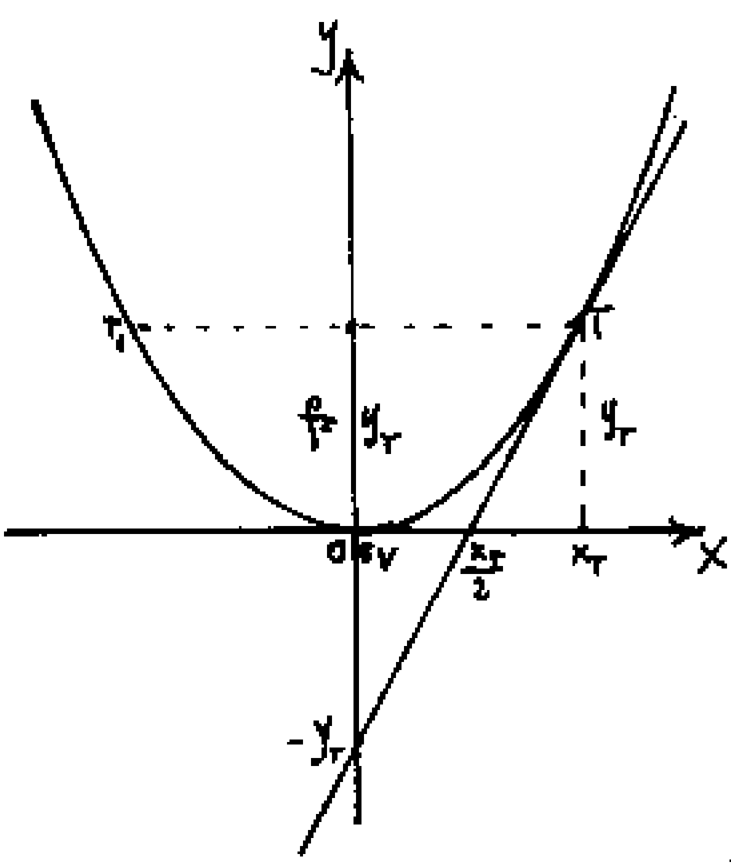
1) Se è noto il punto di tangenza $T \equiv (x_T, y_T)$; $(y_T = m\, x_T^2)$

$$\frac{y - y_T}{x - x_T} = \tan \alpha = \frac{(y - m x_T^2)}{(x - x_T)} = 2 m x_T$$

in forma esplicita: $\boxed{y = (2m x_T)\, x - m\, x_T^2}$ = equazione della retta tangente in T alla parabola.

in forma segmentaria: $\boxed{\frac{x}{(x_T/2)} + \frac{y}{(-m x_T^2)} = 1}$

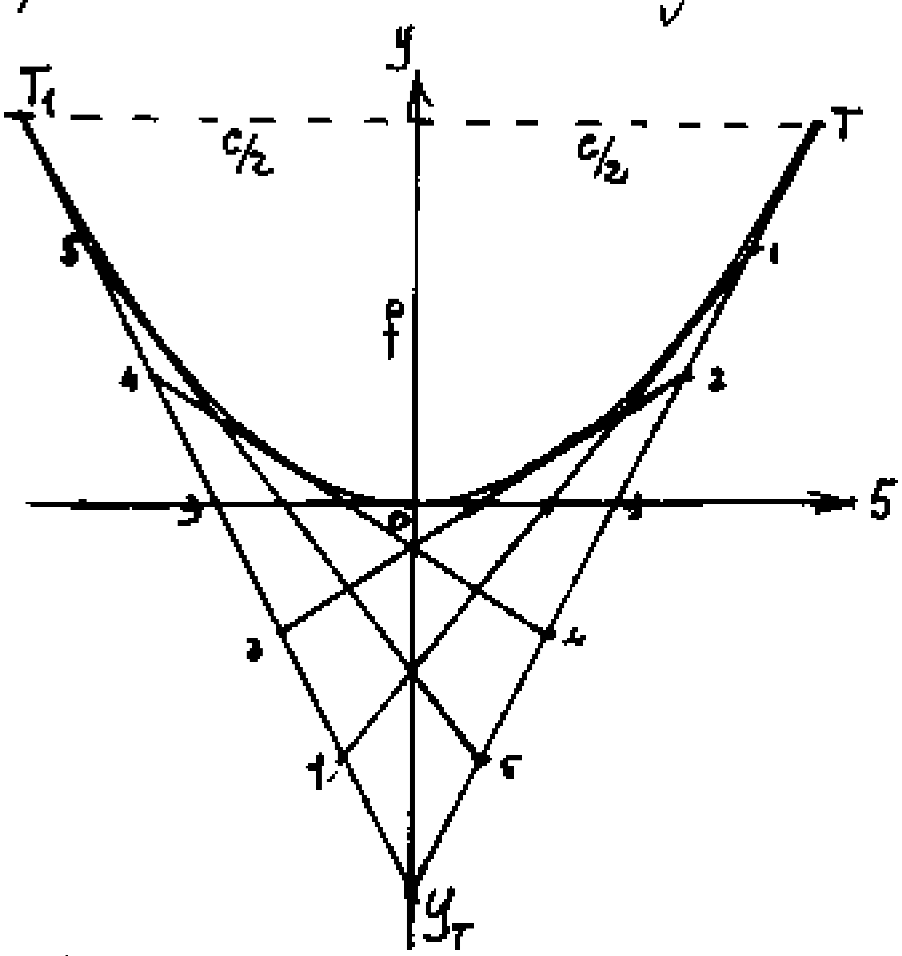
che può scriversi: $\boxed{\frac{x}{x_T/2} + \frac{y}{-y_T} = 1}$



Questa forma di equazione evidenzia che la retta tangente alla parabola in un punto $T \equiv (x_T ; y_T)$, taglia gli assi rispettivamente in $\frac{x_T}{2}$ ed $-y_T$. Questa osservazione è molto importante, consente di dire f = (freccia di un arco di parabola) $= y_T = |-y_T|$, ed anche $\overline{T_1 T}$ = (corda di un arco di parabola) $= x_T = (2\, \frac{x_T}{2})$. Ciò consente la costruzione grafica della parabola per tangenti.

Costruzione grafica della parabola per tangenti.

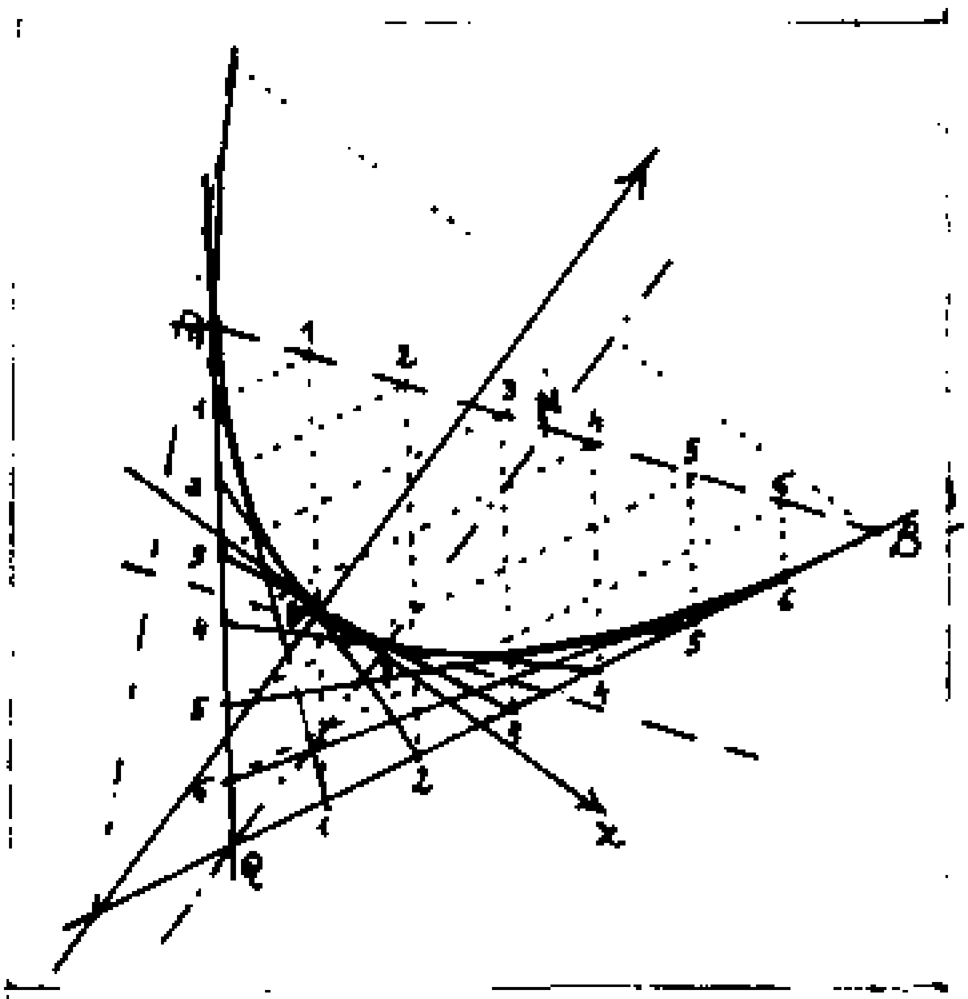
Sia data la corda e la freccia di una parabola. L'asse della corda è l'asse y ove a distanza f dalla corda si trova il vertice della parabola e per esso tracciamo l'asse x. Se la corda è $\overline{T_1T} = 2c = 2|x_T|$; preso su y un punto $= -y_T = f$ ed unito con T e T_1 avremo tracciato le tangenti in T e T_1. Si noti che: $\overline{O(\frac{x_T}{2})} = \overline{(\frac{x_T}{2})x_T}$; $f = \overline{Oy}$ $\overline{Oy} = -\overline{y_T O}$. quindi anche: $-\overline{y_T(\frac{x_T}{2})} = \overline{(\frac{x_T}{2})T}$. Se da T sulla tangente scendiamo di un segmento "s", mentre sulla tangente: $\overline{y_T T_1}$ si sale dello stesso segmento "s", l'unione di tali punti è una tangente della parabola.



Perciò dividiamo il segmento $\overline{Ty_T}$ in un numero "n" qualsiasi di parti e numeriamo i punti di separazione: T, 1, 2, ...(n-1), y_T; e nello stesso numero di parti $y_T T_1$ e numeriamo y_T, 1, 2, 3, .. (n-1), T_1. Unendo i numeri omonimi si ottengono (n-1) tangenti la parabola. Quanto maggiore è "n", meglio è definita la parabola. Per trovare in quale punto la tangente è comune alla parabola, basta trovare ove la tangente taglia le x e raddoppiando l'ascissa si trova x_T.

Il procedimento ora esposto puó generalizzarsi.

<u>Dati due punti A e B e le tangenti in A e B alla parabola, costruire la parabola per tangenti. e trovare gli assi di riferimento.</u>

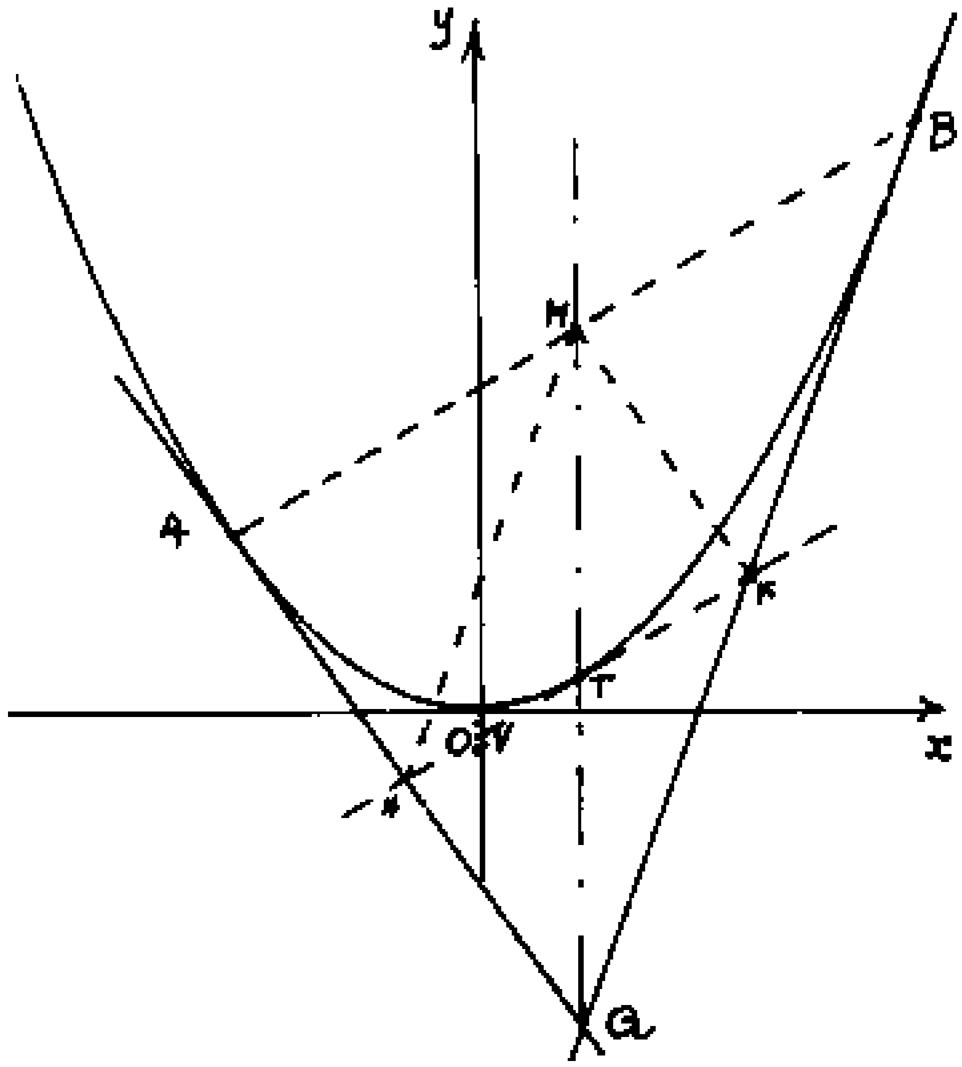


Si unisce A con B e da ogni punto P di $\overline{AB}$ possiamo tracciare le parallele alle tangenti in A e B fino ad incontrare la non parallela. Avendo numerato i punti P di $\overline{AB}$ riportiamo gli stessi numeri sui punti corrispondenti. Unendo i numeri omonimi delle tangenti in A e B abbiamo le tangenti alla parabola.

Noi peró vogliamo trovare la posizione del vertice e l'asse della parabola.

<u>Occorre dimostrare che data una corda $\overline{AB}$ di una parabola; il punto di mezzo M di tale corda (comunque inclinata rispetto all'asse della parabola), il punto T di tangenza della retta parallela alla corda, ed il punto Q comune alle rette tangenti agli estremi della corda: M, T, Q sono tre punti allineati e la loro retta è parallela all'asse della parabola.</u>

Quindi basta la tangente perpendicolare ad MTQ per individuare il vertice e l'asse della parabola. Ma prima dimostriamo il teorema.



Sia: $y = mx^2$ l'equazione della parabola; una corda $\overline{AB}$, comunque inclinata sull'asse avrà per equazione:

$$\frac{y - y_A}{x_1 - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = tg(\alpha)$$

Il punto M medio di $\overline{AB}$ avrà:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \; ; \; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Tenuto presente che il coeff. angolare della retta in T tangente alla parabola e parallela ad $\overline{AB}$ dovrà essere: $y' = 2mx_T = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, ma $y_B = mx_B^2$; $y_A = mx_A^2$; avremo:

$$2mx_T = m\frac{x_B^2 - x_A^2}{(x_B - x_A)} = m(x_B + x_A) \; ; \text{ cioè } \; x_T = \frac{x_B + x_A}{2} = x_M .$$

Resta così dimostrato che la retta $\overline{MT}$ è parallela all'asse della parabola.

Consideriamo ora le rette tangenti in A e B alla parabola:

$y = (2mx_A)x - mx_A^2$; $y = (2mx_B)x - mx_B^2$; il punto comune Q, avrà:

$$x_Q = \frac{\cancel{m}(x_A^2 - x_B^2)}{2\cancel{m}(x_A - x_B)} = \frac{x_A + x_B}{2} = x_M = x_T .$$

Resta così dimostrato che x_T, x_Q, x_M sono tre punti allineati e paralleli all'asse delle ascisse.

Si noti che $\overline{MQ}$ e la retta tangente in T alla parabola e parallela ad $\overline{AB}$ sono diagonali di un parallelogramma: HMKQ perciò T è medio fra M e Q ed è medio fra H e K.

3) Tangenti alla parabola da un punto Q esterno alla parabola stessa.

L'equazione delle rette per Q è: $\dfrac{y-y_Q}{x-x_Q} = \tan\alpha$.

facendo sistema con l'equazione della parabola si ha:

$$y = tg(\alpha)x + y_Q - tg(\alpha)x_Q = mx^2 \quad ; \quad \boxed{(m)x^2 - (tg(\alpha))x - (m x_Q - y_Q) = 0}$$

$$x = \frac{tg(\alpha) \pm \sqrt{tg^2\alpha - 4m(tg\alpha\, x_Q - y_Q)}}{2m}$$

per: $\begin{cases} \Delta_x > 0 & \text{si hanno le ascisse dei punti di intersezione} \\ \Delta_x = 0 & \text{" " " " " " di tangenza.} \\ \Delta_x < 0 & \text{non si hanno punti comuni.} \end{cases}$

a noi interessa: $\Delta_x = tg^2(\alpha) - 2(2m x_Q)\, tg(\alpha) + 4m y_Q = 0$

$$tg(\alpha) = 2m x_Q \pm \sqrt{4m^2 x_Q^2 - 4m y_Q}$$

$$\boxed{tg(\alpha) = 2m\left(x_Q \pm \sqrt{x_Q^2 - y_Q/m}\right)}$$

$$\boxed{tg(\alpha) = \frac{x_Q}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{x_Q^2}{4a} - y_Q\right)\frac{1}{a}}}$$

per $\Delta_\alpha = 0$: $\left(\frac{x_Q^2}{4a} = y_Q\right)$ il punto Q sarebbe sulla parabola e si ricade nel caso precedente cioè il punto Q sulla retta tangente, da esterno andrebbe a coincidere col punto di tangenza T.

l'eq. della retta tangente per $\Delta_\alpha = 0$:

$$\boxed{y = (2m x_Q)x - m x_Q^2} \quad ; \quad \boxed{y = \frac{x_Q}{2a}x - \frac{x_Q^2}{4a}}$$

Invece per $\Delta_\alpha < 0$ il punto Q rimane interno alla concavità delimitata dalla parabola, e le radici sono immaginarie perché da punti interni alla concavità parabolica è impossibile tracciare rette tangenti. Per $\Delta_\alpha > 0$, si hanno finalmente radici reali.

Sostituendo l'espressione di $\tan g(\alpha)$ nell'equazione della retta tangente si hanno due rette:

$$\boxed{\frac{y - y_Q}{x - x_Q} = \frac{x_Q}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{x_Q^2}{4a^2} - \frac{y_Q}{a}\right)}}$$

$$\begin{cases} y_1 = \left(\dfrac{x_Q}{2a} + \sqrt{\dfrac{x_Q^2}{4a^2} - \dfrac{y_Q}{a}}\right)(x_1 - x_Q) + y_Q \\ y_2 = \left(\dfrac{x_Q}{2a} - \sqrt{\dfrac{x_Q^2}{4a^2} - \dfrac{y_Q}{a}}\right)(x_2 - x_Q) + y_Q \end{cases}$$

Cerchiamo per ciascuno di esse il punto T di tangenza, a tal fine facciamo sistema con l'equazione della parabola: $y = \frac{x^2}{4a}$

$$\frac{x_T^2}{4a} = \frac{x_Q}{2a} x_T + \left(\sqrt{\left(\frac{x_Q^2}{4a^2}\right) - \frac{y_Q}{a}}\right) x_T - \left[\left(\frac{x_Q^2}{2a}\right) + \left(\sqrt{\frac{x_Q^2}{4a^2} - \frac{y_Q}{a}}\right) x_Q\right] + y_Q$$

$$x_T^2 - 2\left(x_Q + \sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q}\right) x_T + \left[2x_Q^2 + 2x_Q\sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q} - 4a y_Q\right] = 0$$

$$x_T = \left(x_Q + \sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q}\right) \pm \sqrt{x_Q^2 + x_Q^2 - 4a y_Q + 2x_Q\sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q} - \left[2x_Q^2 + 2x_Q\sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q} - 4a y_Q\right]}$$

Cioè: $\boxed{x_T = \left(x_Q \pm \sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q}\right)}$ (abbiamo verificato che $\Delta_{(x)} = 0$ come avevamo imposto).

$$\boxed{y_T = \frac{x_T^2}{4a}} = \left(2x_Q^2 - 4a y_Q \pm 2x_Q\sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q}\right)\frac{1}{4a}$$

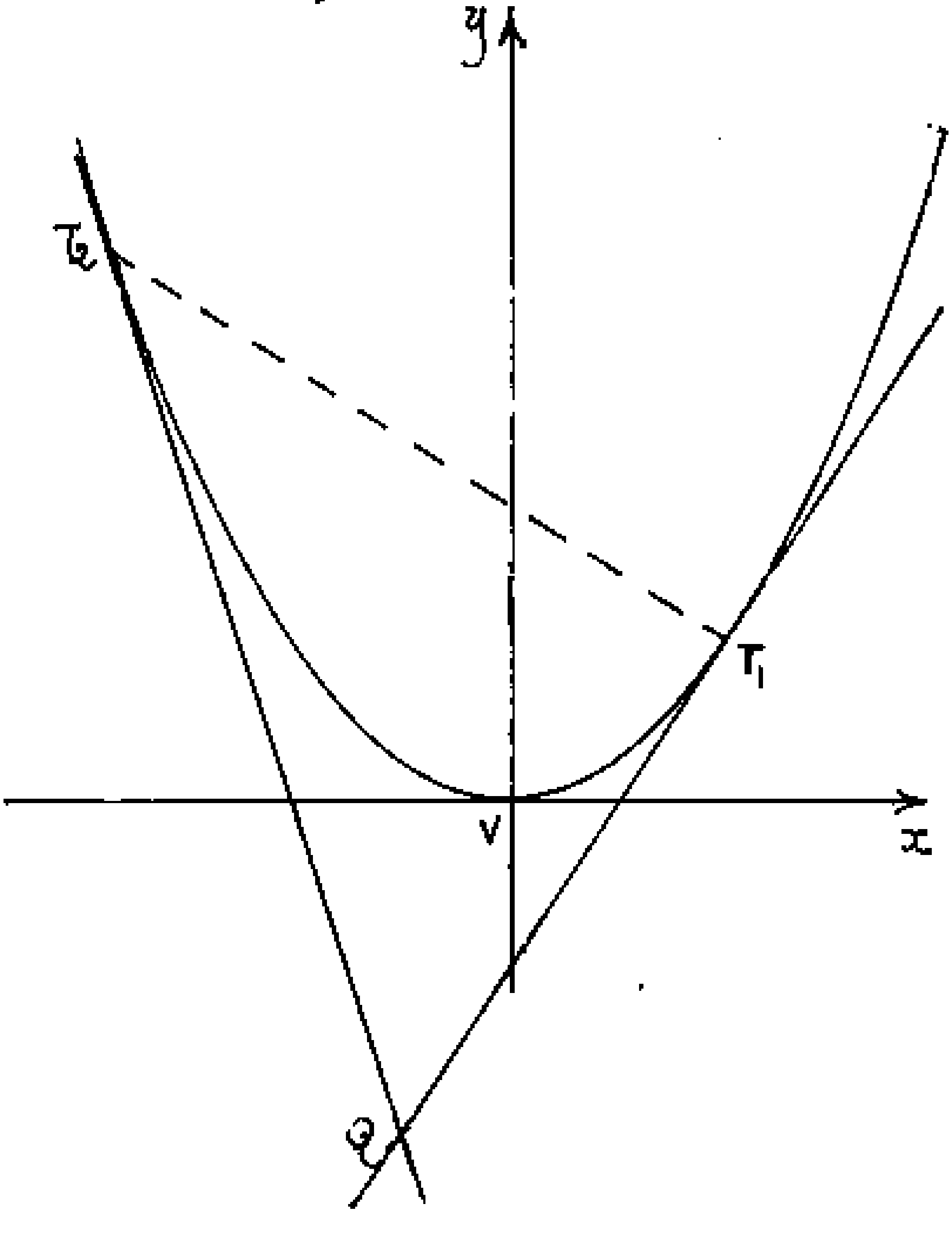
$$\boxed{y_T = \frac{x_Q^2}{2a} - y_Q \pm \frac{x_Q}{2a}\sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q}}$$

$$x_{T_1} = x_Q + \sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q} \quad ; \quad y_{T_1} = \frac{x_Q^2}{2a} - y_Q + \frac{x_Q}{2a}\sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q}$$

$$x_{T_2} = x_Q - \sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q} \quad ; \quad y_{T_2} = \frac{x_Q}{2a} - y_Q - \frac{x_Q}{2a}\sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q}$$

$$\boxed{\left(x_{T_1} - x_{T_2}\right) = 2\sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q}} \quad ; \quad \boxed{\left(y_{T_1} - y_{T_2}\right) = \frac{x_Q}{a}\sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q}}$$

La lunghezza della corda: $\overline{T_1T_2} = \sqrt{4x_Q^2 - 16a y_Q + \frac{x_Q^4}{a^2} - \frac{4x_Q^2 y_Q}{a^2}}$



Se la corda $\overline{T_1T_2}$ è parallela ad x, Q giace sulle y, e si ha la costruzione grafica della parabola per tangenti.

Si nota che in V la tangente (asse x) è normale alla corda (asse y) e che quest'ultima è infinita.

Calcoliamo prima l'equazione della normale.

La normale alla parabola

Supponiamo, al solito, che la normale sia tracciata dallo stesso punto T ove avevamo considerato la tangente. (Il punto T è sulla parabola). L'equazione sarà: (si confronti l'equazione per una curva: $f(x)$): $\dfrac{y-y_T}{x-x_T} = \left(-y'_T\right)^{-1} = \dfrac{-1}{y'_T} = \left(\dfrac{-1}{2m\,x_T}\right)$

cioè:

$$\boxed{y = \frac{-x}{2m\,x_T} + \left(y_T + \frac{1}{2m}\right)}$$ in forma esplicita

è meglio esprimere in x_T perché ad ogni x_T corrisponde un sol punto nella parabola mentre, ogni y_T corrisponde a due diversi punti sulla parabola.

$$\left(y = \frac{-x}{2m\,x_T} + m x_T^2 + \frac{1}{2m}\right)$$

oppure:

$$\left(y = \frac{-x}{x_T}\,2a + \frac{x_T^2}{4a} + 2a\right)$$

$$\boxed{\left(\frac{y}{2a}\right) = -\left(\frac{2a}{x_T}\right)\left(\frac{x}{2a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x_T}{2a}\right)^2 + 1}$$ (modulare)

$$\left(\left(\frac{2a}{x_T}\right)\left(\frac{x}{2a}\right) + \left(\frac{y}{2a}\right) = \frac{x_T^2 + 8a^2}{8a^2}\right)$$

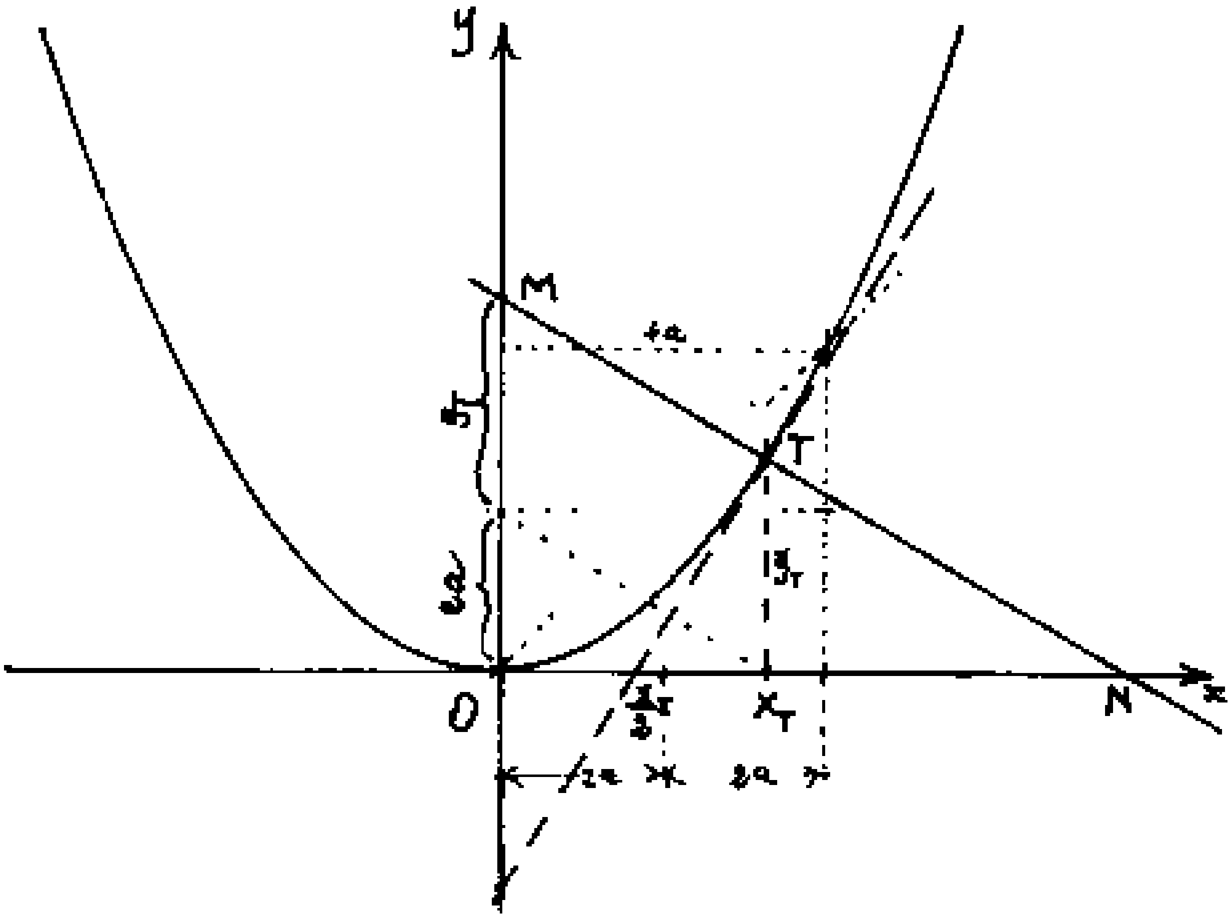
$$\left(\frac{8a^2}{8a^2 + x_T^2}\right)\left(\frac{2a}{x_T}\right)\frac{x}{2a} + \left(\frac{8a^2}{8a^2 + x_T^2}\right)\left(\frac{y}{2a}\right) = 1$$

finalmente, semplificando abbiamo l'equazione della normale alla parabola in <u>forma segmentaria</u>

$$\boxed{\frac{x}{\left(\dfrac{x_T\left(x_T^2+8a^2\right)}{8a^2}\right)}+\frac{y}{\dfrac{\left(x_T^2+8a^2\right)}{(4a)}}=1}$$

anche questa espressione è opportuno scriverla in <u>forma modulare</u>. (ove $1 = {}^{2a}/_{2a}$)

$$\boxed{\frac{(x/2a)}{\left(\dfrac{x_T}{2a}\right)\left[\left(\dfrac{x_T}{2a}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)+1\right]}+\frac{(y/2a)}{\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_T}{2a}\right)^2+1\right]}=1}$$



Per similitudine di triangoli potevamo scrivere:

$\overline{x_T N} : y_T = y_T : \frac{x_T}{2}$

$\overline{x_T N} = m^2 x_T^4 \frac{2}{x_T} = \frac{x_T (x_T)^2}{8a^2}$

da cui: $\overline{ON} = \overline{Ox_T} + \overline{x_T N}$

$\overline{ON} = \left(x_T + \frac{1}{2}\left(\frac{x_T}{2a}\right)^2 x_T\right)$

$\overline{ON} = x_T\left(\left(\frac{x_T}{2a}\right)^2\frac{1}{2}+1\right)$

Avremo inoltre: $\overline{OM} : \overline{ON} = \frac{x_T}{2} : y_T$; da cui: $\overline{OM} = \left(\frac{\overline{ON}\ x_T}{2y_T}\right)$

$\overline{OM} = \cancel{x_T}\left[\left(\frac{x_T}{2a}\right)^2\frac{1}{2}+1\right]\frac{\cancel{x_T}}{2m x_T^2} = \boxed{\overline{OM} = (2a)\left[\left(\frac{x_T}{2a}\right)^2\frac{1}{2}+1\right]}$

e poiché:

$\frac{x}{\overline{ON}} + \frac{y}{\overline{OM}} = 1$ avremo: $\frac{x}{x_T\left[\left(\frac{x_T}{2a}\right)^2\frac{1}{2}+1\right]} + \frac{y}{(2a)\left[\left(\frac{x_T}{2a}\right)^2\frac{1}{2}+1\right]} = 1$

ove dividendo numeratore e denominatore per (2a), si ha la forma modulare sopra scritta.

Dalla:

$$\boxed{y = -\left(\frac{2a}{x_T}\right)x + (2a + y_T)}$$

la costruzione grafica della normale, in un punto T della parabola, risulta notevolmente facilitata, infatti sulle ordinate basta riportare: $(2a + y_T)$ per trovare M; $\overline{OM} = (2a + y_T)$.

e l'espressione segmentaria della normale:

$$\boxed{\frac{x}{\frac{x_T}{2a}(2a + y_T)} + \frac{y}{(2a + y_T)} = 1}$$

---

2) Consideriamo ora un punto <u>Q non sulla parabola</u>, e da Q, vogliamo tracciare la normale alla parabola. Si nota che mentre per la tangente Q doveva essere <u>esterno</u> alla parabola, per la normale Q può anche essere <u>interno</u> alla concavità parabolica senza giacere sulla linea "parabola".

Ogni retta uscente da Q <u>esterno</u> alla parabola può incontrare la parabola in due punti, essere tangente, essere esterna cioè non incontrare la parabola. Ogni retta uscente da Q <u>interno</u> alla concavità parabolica incontra necessariamente la parabola; e, se tale retta non è parallela all'asse della parabola, la incontra in due punti; se è parallela, la incontra in un punto solo.

Rifacendosi al caso generale, siano T e T_u i due punti in cui la normale in T (non in T_u) alla parabola, e passante per Q, taglia la curva. Avremo:

$$\boxed{\frac{y_T - y_Q}{x_T - x_Q} = \left(\frac{-1}{y'_T}\right)}$$

si noti che, in generale: $y'_T \neq y'_{T_u}$

possiamo scrivere:

$$\boxed{\frac{mx_T^2 - y_Q}{x_T - x_Q} = \frac{-1}{2m\,x_T}}$$

equazione in cui l'unica incognita è x_T

$mx_T^2 - y_Q = \frac{-\cancel{x_T}}{2m\cancel{x_T}} + \frac{x_Q}{2m\,x_T}$ da cui:

$$\boxed{2m^2x_T^3 \quad -2m\left(y_Q + \frac{1}{2m}\right)x_T - x_Q = 0}$$

Non abbiamo ancora trattato le equazioni di 3° grado, (vedi volume V), per cui occorrerà ricorrere a qualche artificio per uscirne.

Cominciamo col considerare che, una retta <u>normale alla parabola</u> nel punto T, se non è l'asse, incontra la parabola in un altro punto T_u; vogliamo correlazionare T_u e T. A tal fine basta far sistema fra la normale in T e l'equazione della parabola:

$$-\left(\frac{2a}{X_T}\right)X+\left(2a+y_T\right)=\frac{X^2}{4a}$$

$$X^2+\frac{8a^2}{X_T}X-\left(8a^2+4ay_T\right)=0$$

$$X^2+2\left(\frac{4a^2}{X_T}\right)X-\left(8a^2+X_T^2\right)=0$$

$$X=\frac{-4a^2}{X_T}\pm\sqrt{\frac{16a^4}{X_T^2}+8a^2+X_T^2}$$

$$X=\frac{-4a^2}{X_T}\pm\sqrt{\frac{16a^4+8a^2X_T^2+X_T^2}{X_T^2}}$$

$$X=\frac{-4a^2}{X_T}\pm\sqrt{\frac{(4a^2+X_T^2)^2}{X_T^2}}=\left(\frac{-4a^2}{X_T}\pm\frac{4a^2+X_T^2}{X_T}\right)$$

$$X=\begin{cases}-\cancel{\frac{4a^2}{X_T}}+\cancel{\frac{4a^2}{X_T}}+X_T = X_T\\ -\frac{4a^2}{X_T}-\frac{4a^2}{X_T}-X_T = X_{T_u}=\left(\frac{-8a^2}{X_T}-X_T\right)\end{cases}$$

$$\boxed{X_{T_u}=\frac{-8a^2-X_T^2}{X_T}}\qquad X_{T_u}=-\left(\frac{X_T\,4a\cdot 2a}{X_T^2}+X_T\right)$$

$$X_{T_u}=-X_T\left(\frac{2a}{y_T}+1\right)\qquad \boxed{X_{T_u}=-X_T\left(\frac{2a+y_T}{y_T}\right)}$$

una equazione di 2° grado che abbia per radici X_{T_u} e X_T, è del tipo: $\boxed{(X-X_T)(X-X_{T_u})=0}$

cioè: $X^2-(X_T+X_{T_u})X+(X_T)(X_{T_u})=0$

sostituendo:

$$\boxed{X^2-\left(\frac{2aX_T}{y_T}\right)X-X_T^2\left(\frac{2a+y_T}{y_T}\right)}$$

Possiamo ora tornare al nostro problema.

Alla corda $\overline{T_1T_2}$, unione dei punti di tangenza delle rette uscenti da Q, imponiamo di essere, in T_1, normale alla parabola, cioè poniamo: $T_1 = T$; e $T_2 = T_u$.

Mentre T_1 (con coordinate entrambe positive) varia dal centro assi, (vertice della parabola), all'infinito: $\boxed{0 \leq x_T \leq \infty}$ $\boxed{0 \leq y_T \leq \infty}$; si nota che esiste un limite alle coordinate di T_u a cui corrisponde un valore intermedio delle coordinate di T.

derivando la: $\boxed{x_{T_u} = \frac{-(8a^2 + x_T^2)}{x_T}}$

si ha:

$$\frac{d(x_{T_u})}{d(x_T)} = \frac{(-2x_T)(x_T) + 8a^2 + x_T^2}{x_T^2} = \frac{8a^2 - x_T^2}{x_T^2} = 0$$

da cui: $x_T^2 = 8a^2$; $\boxed{x_T = 2a\sqrt{2}}$; $\boxed{y_T = 2a}$

sostituendo:

$$x_{T_u} = \frac{-(8a^2 + 8a^2)}{2a\sqrt{2}}$$

$\boxed{x_{T_u} = -4a\sqrt{2}}$; $\boxed{y_{T_u} = 8a}$

La retta tangente in T avrà per equazione:

$$\boxed{\frac{(y - 2a)}{(x - 2a\sqrt{2})} = +\sqrt{2}}$$

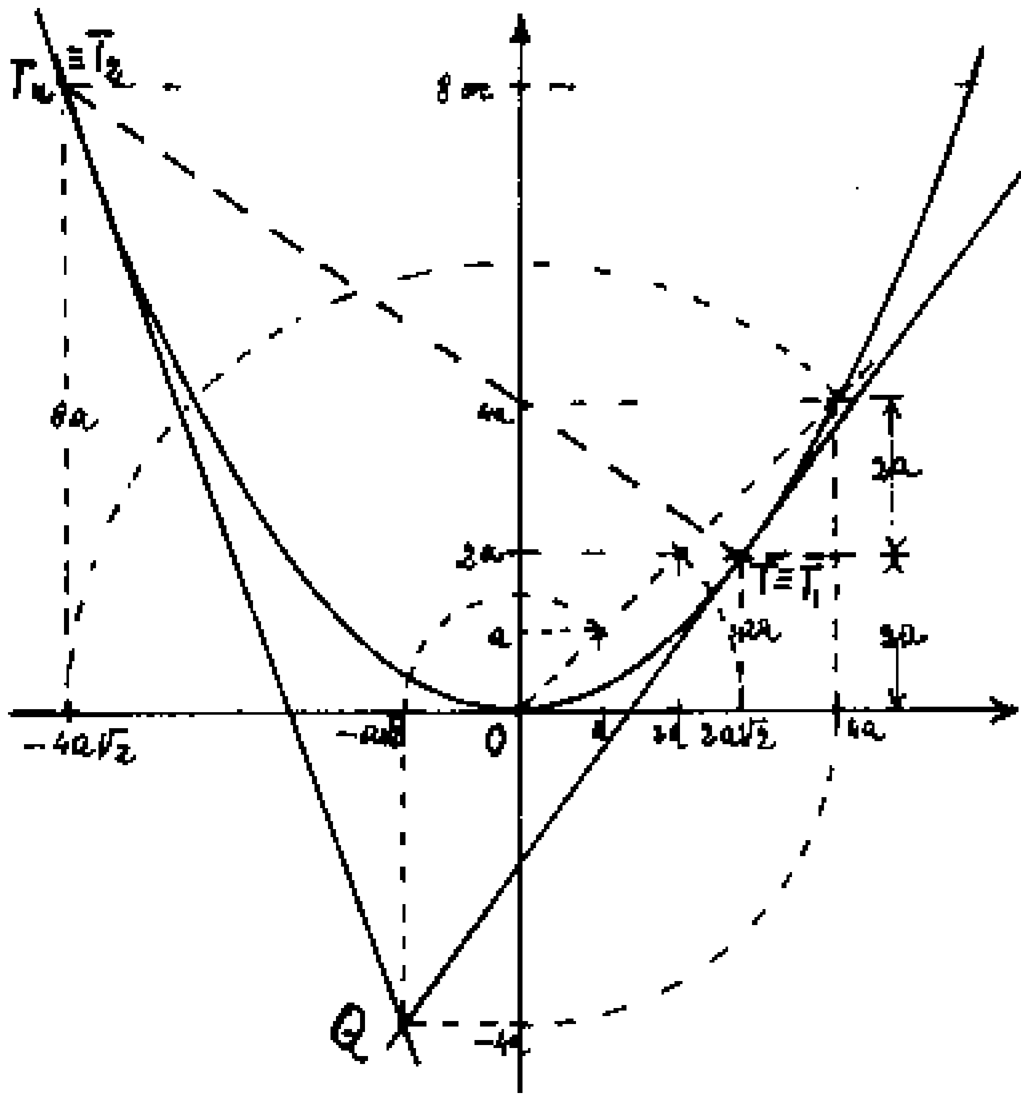
$$\boxed{y = +\sqrt{2}x - 2a}$$

L'equazione della retta tangente in T_u sarà:

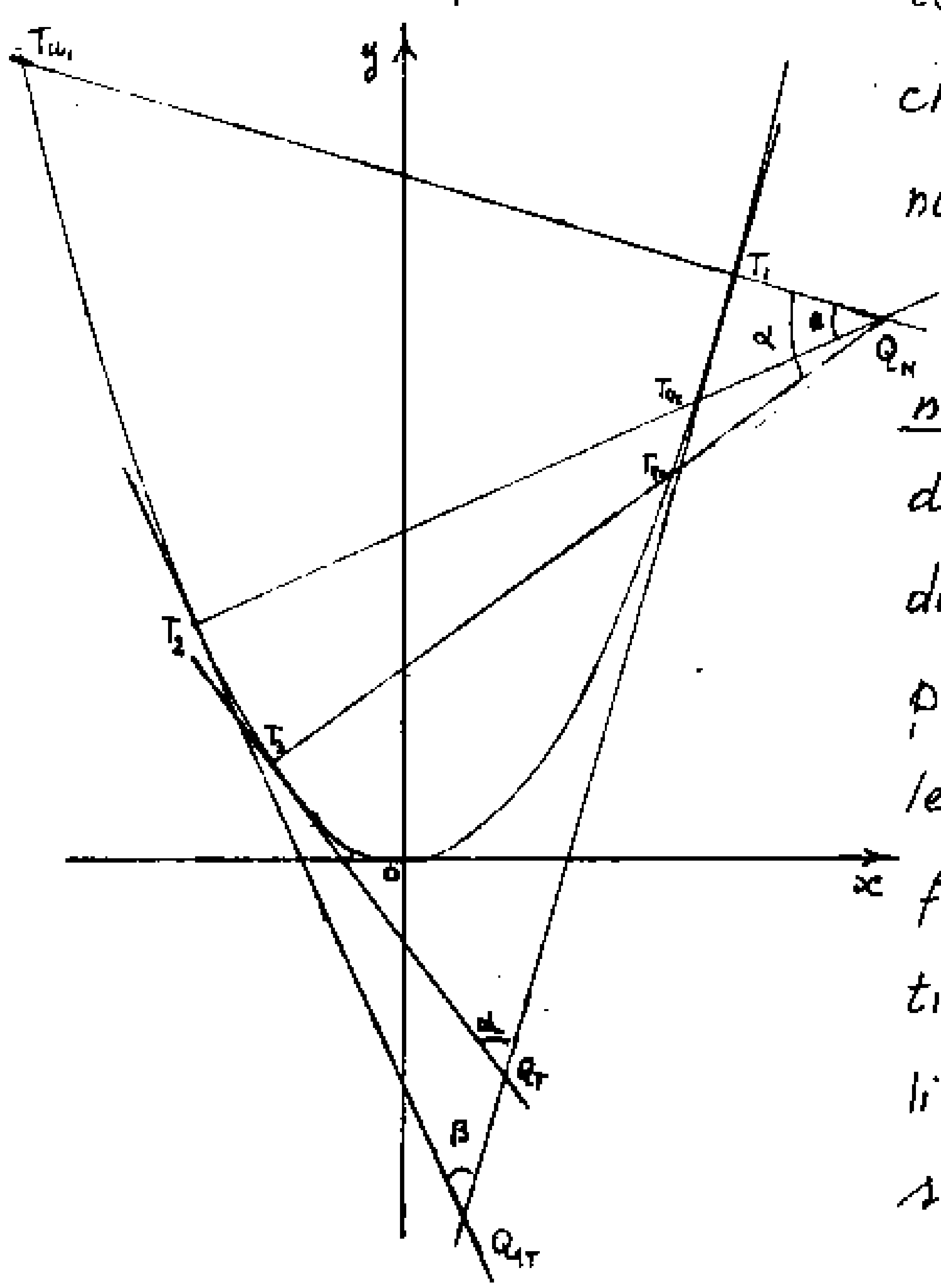
$\boxed{\frac{y - 8a}{x + 4a\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}}$ $\boxed{y = -(2\sqrt{2})x - 8a}$ da cui

facendo sistema: $\boxed{x_Q = -a\sqrt{2}}$; $\boxed{y_Q = -4a}$

Presentiamo il grafico di tali condizioni limite. Ma vi sono altre correlazioni fra le rette tangenti e le rette normali alla parabola.



Sia T_u sulla parabola, il punto dal quale si tracciano le normali; esiste sempre una normale in T_u. Per $y_{T_u} < 8a$ si ha solo la normale in T_u. Dalla figura sottostante è possibile rilevare che da un punto esterno alla parabola <u>è possibile tracciare tre normali</u>, una nel ramo dalla parte del punto, e due nel ramo opposto di parabola. E facile rilevare che gli angoli formati dalle tangenti sono uguali agli angoli delle normali per gli stessi punti.

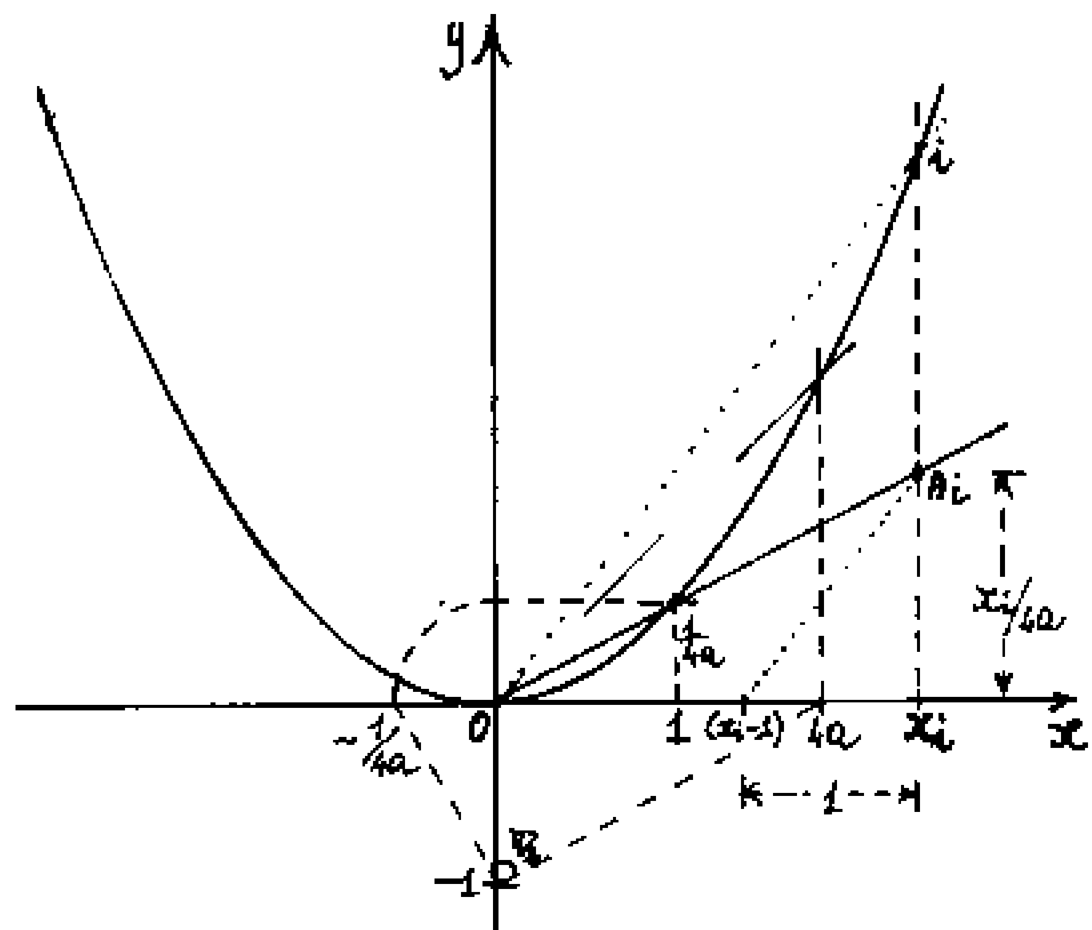


Resta con ciò giustificato l'equazione di terzo grado, che ammette tre radici, che possono essere, tre reali, oppure una sola reale e due immaginarie coniugate. Quest'ultimo caso lo abbiamo esaminato nel calcolare il limite delle coordinate di Tu.

Quindi, mentre è possibile, con una equazione di secondo grado, calcolare le tangenti alla parabola uscenti da un punto esterno, perchè le tangenti sono solo due; per calcolare le normali alla parabola occorre una equazione di terzo grado, perchè le normali sono: o tre, o una sola reale. Poiché una equazione di terzo grado, quando ammette tre radici reali, (caso irriducibile) non è più riducibile neppure alla estrazione di radici cubiche, ma si avvale della trigonometria (cioè di tavole di conti fatti) per risolvere le radici; e noi sappiamo che, graficamente, usando la riga ed compasso, non è possibile risolvere le radici cubiche (poiché avremmo risolto il "problema di Delo" cioè la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo.) rinviamo la risoluzione alla trattazione delle radici cubiche. (vol V).

Altro metodo grafico per costruire la parabola per punti

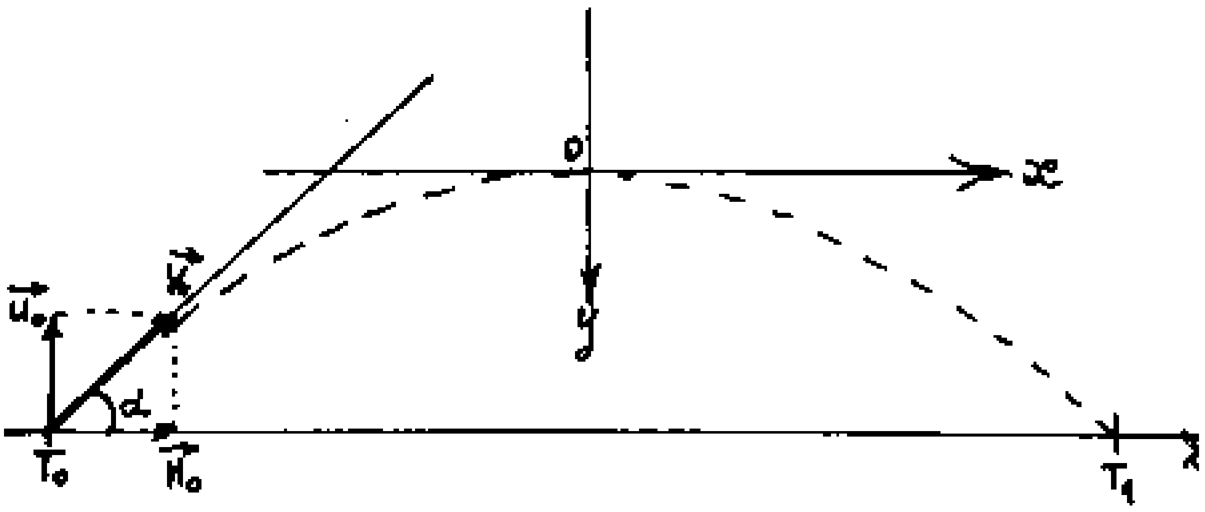
L'equazione della parabola: $y=\frac{1}{4a}x^2$ può scriversi: $y=\left(\frac{x}{4a}\right)x$ ed anche: $(4a)\cdot y=(x)(x)$ si può anche scrivere: $\boxed{y : x = x : 4a}$ e cioè "*In una parabola, le ascisse sono medie proporzionali fra le corrispondenti ordinate ed il modulo 4a*". $\left(\frac{y}{x}=\frac{x}{4a}\right)$
Consideriamo inizialmente la retta per l'origine degli assi: $\boxed{y=\left(\frac{1}{4a}\right)x}$ ove: $\left(\frac{1}{4a}\right)$ è il coefficiente angolare. Si suppone dato il modulo "$4a$".



se "$4a$" è un numero si ha subito numericamente: "$\frac{1}{4a}$". Il modulo grafico = 1 è arbitrario !!
Se il modulo $4a$ è dato come segmento, col nostro modulo grafico = 1 (che è un segmento, sappiamo costruire il segmento $\left(\frac{1}{4a}\right)$. Per $x=1$; sia la parabola, sia la retta hanno $y=\frac{1}{4a}$ e possiamo, tracciati gli assi riportare in ascisse i segmenti $x=4a$, $x=1$, l'ordinata per $x=1 \rightarrow y=\frac{1}{4a}$ e la retta: $y=\frac{x}{4a}$. Presa ora una generica ascissa x_i ed (x_i-1), unito A_i sulla retta con (x_i-1) e tracciata la parallela da 0, troviamo "i" sull'ordinata di x_i. Infatti: $\boxed{\frac{x_i}{4a} : 1 = y_i : x_i}$ (vedi figura).

La parabola come traettoria, in campo gravitazionale, di un corpo lanciato, con velocità iniziale V_0, in direzione α.

Si trascura l'attrito dell'aria. Sia α l'angolo che la direzione di lancio forma con l'orizzontale, siamo: T e T_1 i punti a terra di partenza e di arrivo, supposti alla stessa quota. Sia g l'accelerazione di gravità, e "t" la variabile tempo da t_0 a t_1.



Scomponiamo il vettore (velocità) V_0 agente in direzione α, nei componenti: orizzontale: $\vec{H_0} = \vec{V_0}\cos\alpha$, e verticale $\vec{U_0} = \vec{V_0}\,\mathrm{sen}\,\alpha$.

Se trascuriamo la resistenza dell'aria, $\vec{H_0}$ resta invariato nel tempo, mentre $\vec{U_0}$ viene via, via, attenuata dall'accelerazione di gravità $\vec{g}$ che è diretta verso terra. Dalla fisica ricordiamo che: $\boxed{\vec{u} = \vec{U_0} - \vec{g}t}$; ma la velocità in direzione verticale è nulla, $(u=0)$, nell'istante che il proietto cessa di salire ed inizia a discendere, se indichiamo con t_m il tempo impiegato da t_0 per raggiungere la massima quota $(u=0)$ si ha: $\boxed{t_m = \frac{U_0}{g}}$

Lo stesso tempo impiega nella discesa, ed arriva a terra con velocità verticale: $\vec{U_1} = -\vec{V_0}$, ed orizzontale: $\vec{H_1} = \vec{H_0}$ (invariata). Il tempo impiegato da T_0 a T_1 è $2t_m = 2U_0/g = \left(\frac{2V_0\,\mathrm{sen}\,\alpha}{g}\right)$. Che è il tempo impiegato a percorrere la traettoria.

<u>Si puó calcolare la massima altezza</u>: $h = \int_{t_0}^{t_m} u\,dt = \int_{t_0}^{t_m} (u_0 - gt)\,dt =$

$h = \left[u_0 t - \frac{1}{2} g t^2\right]_{t_0}^{t_m}$; se poniamo: $(t_0 = 0)$; $h = \left[u_0 t_m - \frac{1}{2} g t_m^2\right]$; e sostituendo $(t_m = u_0/g)$ si ha: $h = \left(\frac{u_0^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{u_0^2}{g}\right)$; $\boxed{h_{max} = u_0^2/2g}$

<u>Si puó calcolare la gittata</u>: $\overline{T_0 T_1} = H_0 (2t_m) = (\vec{V}_0 \cos\alpha)\left(2\,\frac{\vec{V}_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}\right) =$

$\boxed{\overline{T_0 T_1} = \frac{V_0^2 \operatorname{sen}(2\alpha)}{g}} = \frac{2}{g}(H_0 U_0)$

Il fatto che ad ogni punto della traettoria sia abbinato un tempo, implica la possibilitá di scriverne <u>le coordinate parametriche</u>. : $h = \int_0^t \vec{u}\,dt$; $\overline{T_0 T} = \vec{H} t$.

Data la simmetria, conviene porre gli assi con l'origine alla massima quota (ove $u=0$), l'asse x nella direzione della velocitá: $\vec{H}$ ed y diretto verso il basso; avremo: (posto zero il tempo in 0): $\boxed{y = \frac{1}{2} g t^2 \quad ; \quad x = H_0 t}$ <u>eq. parametriche</u>

eliminando t abbiamo:

$$t^2 = \left(\frac{x}{H_0}\right)^2 = \frac{2y}{g} \qquad \text{cioè:} \qquad \boxed{y = \left(\frac{g}{2 H_0^2}\right) x^2}$$

<u>classico equazione di una parabola.</u>

Se avessimo scelto l'origine degli assi: (λ, h) (con $\lambda = \overline{T_0 T}$), e del tempo in T_0 avremmo: $\quad h = \left[u_0 t - \frac{1}{2} g t^2\right]$ e $\lambda = [H_0 t]$;

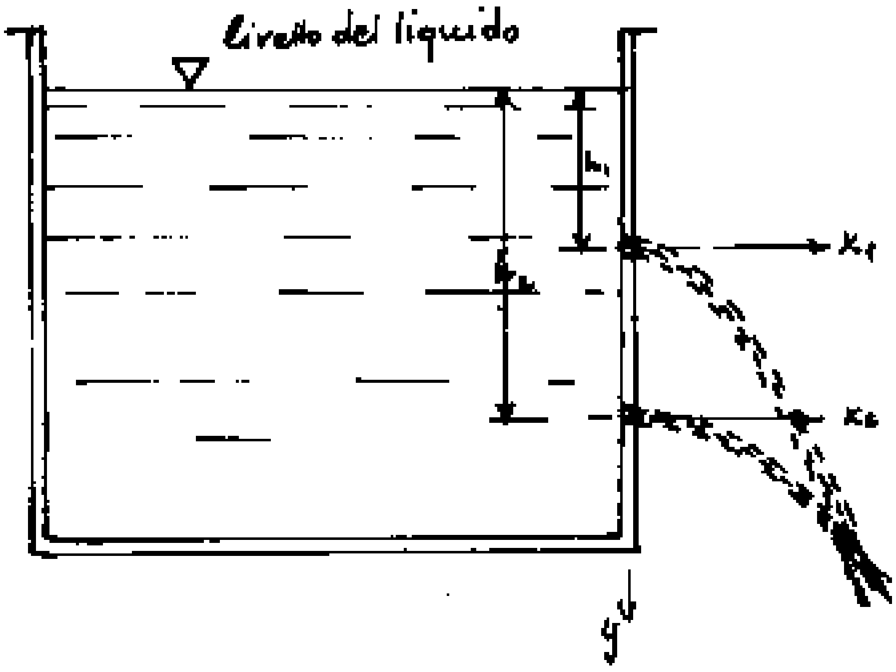
$$h = \left[\frac{u_0}{H_0}\lambda - \frac{g}{2}\frac{\lambda^2}{H_0^2}\right] = \left[tg(\alpha)\lambda - \frac{g\,\lambda^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}\right] \text{ cioè: } \boxed{h = \left(\frac{-g}{2V_0^2\cos^2\alpha}\right)\lambda^2 + (tg\alpha)\lambda}$$

che è l'equazione di una parabola verso il basso, negli assi "h", e "λ". Se scriviamo: $(h_{max} - h) = \left(\lambda - \frac{\overline{T_0 T}}{2}\right)^2 \left(\frac{g}{2H_0^2}\right) = \left(\frac{u_0^2}{2g} - h\right) = \left(\lambda - \frac{U_0 H_0}{g}\right)^2 \left(\frac{g}{2H_0^2}\right)$

$$h = -\lambda^2 \frac{g}{(2H_0^2)} + \left(2\frac{U_0 H_0}{g}\frac{g}{2H_0^2}\right)\lambda + \frac{U_0^2}{2g} - \frac{U_0^2}{g}\frac{H_0^2}{g}\frac{g}{2H_0^2} = \boxed{h = \left(\frac{-g}{2H_0^2}\right)\lambda^2 + \frac{U_0}{H_0}\lambda} \text{ (torna).}$$

L'efflusso di fluidi, a livello costante, da un orificio distante "h" dal bordo libero

Si abbia un recipiente ove il liquido contenuto è mantenuto a livello costante. (cioè istante per istante il liquido entrante uguaglia il liquido uscente). Ricordiamo che la velocità di uscita di un liquido da un orificio più basso di "h" dal livello del liquido è pari alla velocità di un corpo caduto da una stessa altezza h in campo gravitazionale. $h = \frac{1}{2} g t^2$;



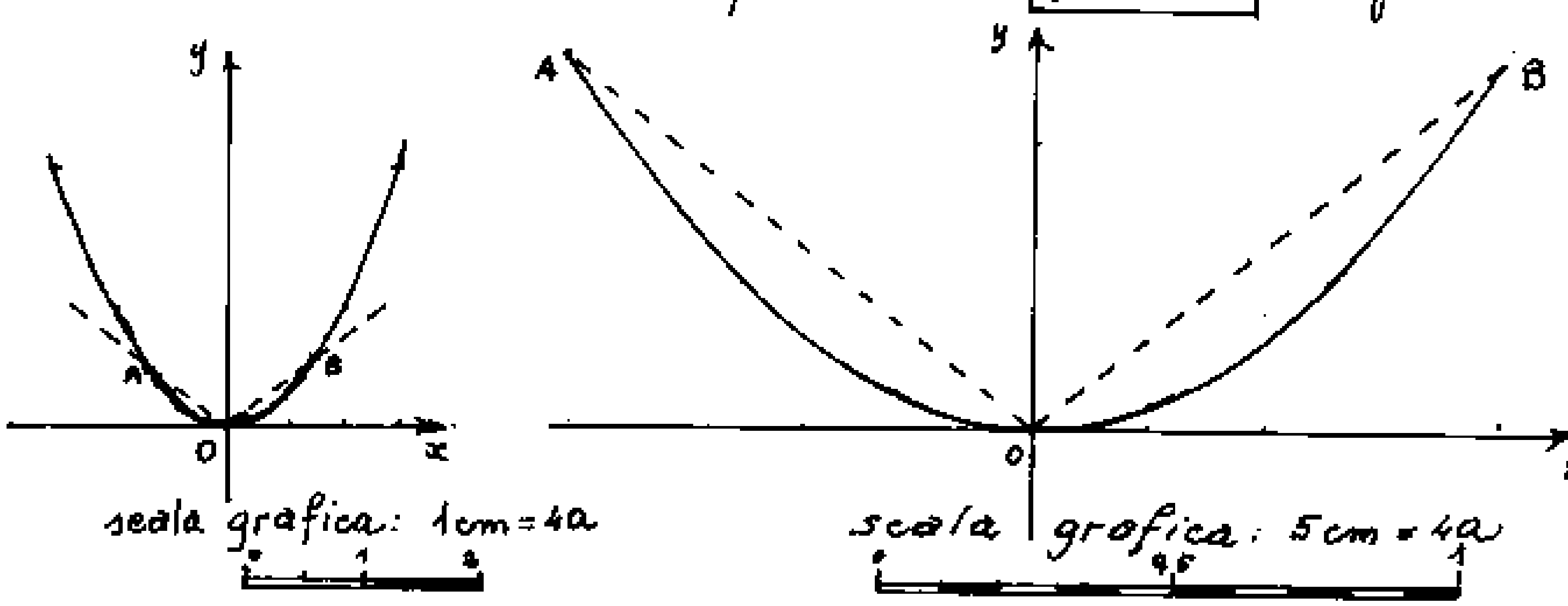
$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$; $v = gt = \sqrt{2gh}$; $\boxed{\vec{V}_0 = \sqrt{2gh}}$ = velocità di uscita diretta orizzontalmente cioè: $\vec{H}_0 = \sqrt{2gh}$; $u_0 = 0$, siamo nel caso precedente, al vertice della parabola cioè usando gli stessi simboli: (salvo h), $V_0 = \vec{H} = H_0$; $U = gt$; $y = \frac{1}{2} g t^2$; $x = (\sqrt{2gh})t$

$t^2 = \frac{x^2}{2gh} = \frac{2y}{g}$ da cui: $\boxed{y = \frac{x^2}{4h}}$ si può scrivere: $\boxed{y : \frac{x}{2} = \frac{x}{2} : h}$

cioè la <u>profondità "h" dal pelo libero</u>, <u>tiene il posto del modulo "a" della parabola</u>. E' importante rilevare che se il modulo "a" è dato con un segmento definito, la configurazione della parabola non varia se, fermo restando il segmento "a" si varia il segmento grafico = 1 cioè il modulo della scala grafica. Approfondiamo l'argomento.

Il concetto di modulo nella parabola

L'equazione al centro assi della parabola: $\boxed{y = \frac{x^2}{4a}}$
dividendo l'uguaglianza per 4a diventa: $\left(\frac{y}{4a}\right) = \left(\frac{x}{4a}\right)^2$
ove: "4a" diventa il modulo unità di misura grafica;
cioè tutte le parabole al centro possono rappresentarsi con l'unica equazione $\boxed{Y = X^2}$ $y' = 2x$



Le due parabole in figura <u>sono la stessa</u> !!! <u>parabola in scala diversa</u>. Il tratto di parabola $\widehat{AB}$ è ingrandito cinque volte nel secondo disegno. Entrambe rispondono all'unica equazione, alla quale possono ridursi tutte le parabole, cioè: $\boxed{y = x^2}$ <u>il modulo "4a" è l'unità grafica</u>. Per esempio: la parabola: $y = 25x^2$ che possiamo scrivere: $y = \frac{x^2}{4\left(\frac{1}{100}\right)}$; cioè: $a = 1/100$; ma se non viene specificato $\frac{1}{100}$ di cosa? <u>Supponiamo $\frac{1}{100}$ di metro</u> allora $4a = 4cm$. allora la prima figura è in scala <u>1:4</u>, mentre la seconda figura è in scala <u>1:0,8</u> della $y = 25x^2$ <u>in metri</u>!
Questo discorso vale ovviamente per la rappresentazione di tutte le curve, individuando opportunamente il modulo grafico.

Il modulo grafico unitario di una curva qualsiasi

Data l'equazione di una curva qualsiasi: $y = f(x)$ od anche: $f(y,x) = 0$; se riusciamo, utilizzando, i parametri della funzione a scrivere: $\frac{y}{u} = f\left(\frac{x}{u}\right)$, avremo che "$u$" è il modulo grafico unitario. facciamo qualche esempio:

$x^2 + y^2 = R^2 \rightarrow \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 \rightarrow R =$ <u>modulo grafico del cerchio</u>

$\frac{y}{a} = \rho\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ ove: $\rho = \frac{b}{a}$ <u>a = modulo dell'ellisse</u>

$\frac{y}{a} = \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ <u>a = modulo della catenaria</u>

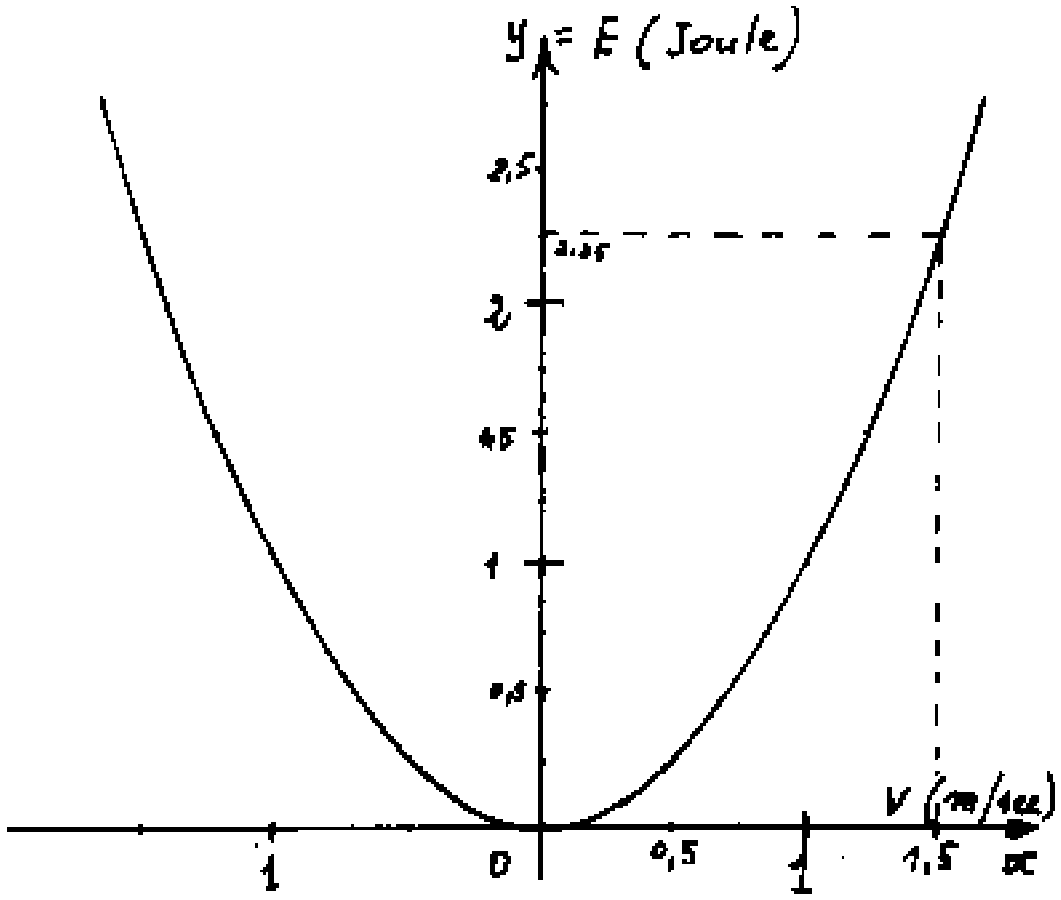
Si noti che: x ed y, nella loro rappresentazione grafica, sono lunghezze, anche se nella espressione: $y = f(x)$ possono avere qualunque dimensione fisica; mentre se "a" è il modulo, anche "a" è una lunghezza perciò: $\frac{y}{a}$ ed $\frac{x}{a}$ come rapporto di lunghezze sono <u>numeri puri</u> privi di dimensioni. Però occorre riferire le grandezze dimensionali; per esempio: l'energia cinetica: $E_c = \frac{1}{2} M V^2$ può essere scritta: $\frac{E_c}{(2/M)} = \left(\frac{V}{2/M}\right)^2$; il nostro modulo diventa: $(2/M)$: che tiene il posto di "a" nel grafico che è una parabola. La pabola è la stessa: $y = x^2$ ma le dimensioni debbono essere interpretate. Usiamo il sistema di misure: M.K.S. = (metro, Kg massa, secondo) E = Joule = (Newton)(metro) = $Kg^{*} \cdot m^{*}/sec^2$

ove $\frac{E_c}{2/M} = \frac{E_c M}{2}$ $\left(\frac{Kg^{*} m}{sec}\right)^2$; omogenea con $\left(\frac{VM}{2}\right)^2$.

Per chiarire meglio questo importantissimo concetto, facciamo

Un esempio pratico.

Assumiamo come modulo grafico della nostra parabola



un segmento lungo 2 cm. cioè: (modulo unitario) $= \left(\frac{2}{Kg^*}\right)$

Questa parabola rappresenta l'energia cinetica al variare della velocità per una massa di 2 Kg* (perché: $\frac{2}{2Kg^*} = 1$)

Consideriamo una velocità di 1,5 m/sec applicata ad una massa di 2 Kg, avrà una energia cinetica di: $E_c = \frac{1}{2}MV^2 = \left(\frac{1}{2}\right)(2)(1,5)^2 = 2,25$ Joule (come indicato nel grafico).

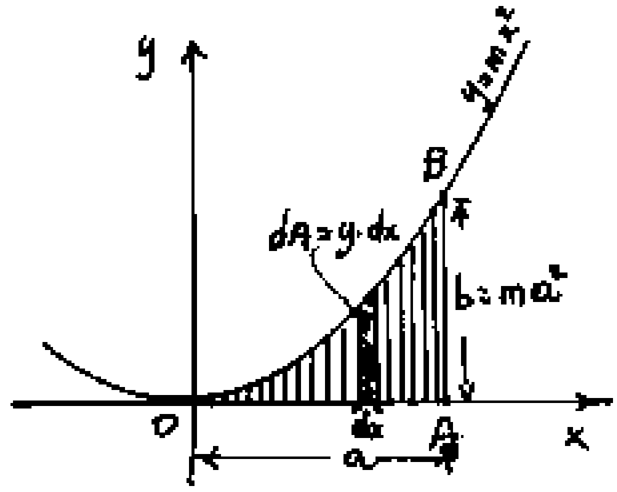
Per una massa qualsiasi, si noti che nell'espressione $E_c = \left(\frac{M}{2}\right)V^2$ abbiamo posto $\left(\frac{M}{2}\right) = 1$, quindi non volendo alterare la graduazione delle ascisse si ha che in ordinate per una massa generica M dovremo moltiplicare per la nostra unità $\left(\frac{M}{2}\right) = u$ cioè alla stessa velocità 1,5 m/sec per la massa di un Kg*: $\frac{M}{2} = \frac{1}{2}$

$E_c = \frac{1}{2}(2,25) = 1,125$ (Joule); per una massa di 10 Kg* $u = \left(\frac{10}{2}\right) = 5$

$E_c = 5(2,25) = 11,25$ (Joule). (a pari velocità). (Basta uno scalimetro)

Negli scalimetri ordinari il nostro modulo di 2cm sarebbe uguale ad 1 nella scala 1:50 m. Purtroppo, spesso, non specifichiamo "m" (metri) e se lo scalimetro fosse 1:50 ft (ft = piedi inglesi ove: 1ft = 30,481 cm) anziché leggere 1 leggeremmo: 3,28 !!! (Torneremo ancora sulle scale grafiche).

L'area della parabola (triangolo parabolico)



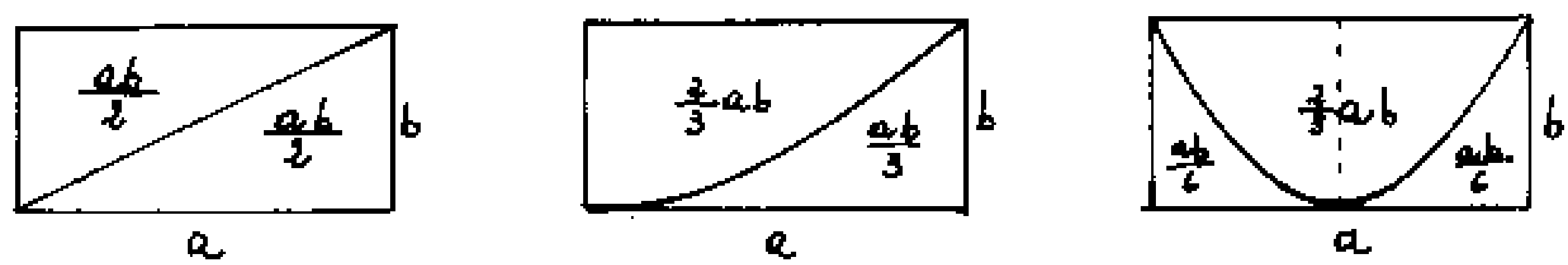
Considetiamo il triangolo parabolico: OAB,

$$dA = y\,dx = m x^2 dx \quad ; \quad A = \int_0^a m x^2 dx \quad ;$$

$$A = \left[\frac{m x^3}{3}\right]_0^a = \left(\frac{m a^2 \cdot a}{3}\right) = \boxed{A = \frac{a \cdot b}{3}}$$

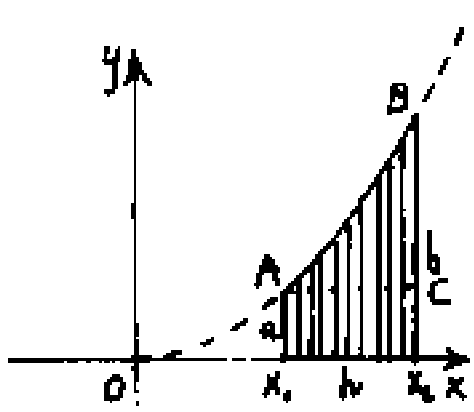
formula di uso frequente.

Consideriamo un rettangolo di lati a, b e quindi di area: $A_r = ab$; dividiamolo con una diagonale rettilinea, con una diagonale parabolica; inseriviamoci una parabola.



Le relative aree sono evidenziate in figura.

Consideriamo ora un trapezio parabolico, di basi "a; b" ed altezza: "h". Il lato obliquo è un arco di parabola



$$A = \left[\frac{m x^3}{3}\right]_{x_1}^{x_2} = \boxed{\frac{m}{3}\left(x_2^3 - x_1^3\right)} = \boxed{\frac{1}{3}\left(b x_2 - a x_1\right)} =$$

$$h = (x_2 - x_1); \quad x_2 = \left(x_m + \frac{h}{2}\right); \quad (x_1) = \left(x_m - \frac{h}{2}\right); \quad x_m = \frac{(x_1 + x_2)}{2}$$

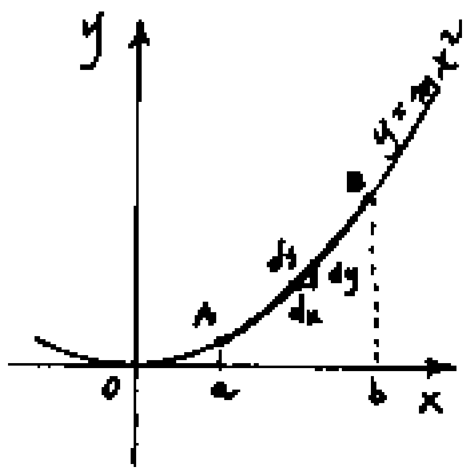
$$A = \frac{1}{3}\left(b x_m + \frac{bh}{2} - a x_m + \frac{ah}{2}\right)$$

$$\boxed{A = \left[(b-a)x_m + \frac{a+b}{2} h\right]\frac{1}{3}} \qquad \boxed{A = \frac{1}{6}\left((b-a)(x_1+x_2) + (b+a)(x_2-x_1)\right)}$$

Si può anche scrivere: $\boxed{A = \frac{(b-a)\,x_2}{3} - \frac{2}{3} a h}$ per cui l'area del triangolo parabolico: ACB è: $A_{ABC} = A - ah = \boxed{A_{ABC} = \frac{(b-a)x_2}{3} - \frac{5}{3} a h}$

$$\boxed{A = \frac{m}{3}\left(x_2^2 + x_1^2 + x_2 x_1\right) h} \qquad \boxed{A = \frac{1}{3}\left(b + a + \frac{ab}{m}\right) h} \text{ ove } \boxed{\left(\frac{ab}{m}\right) = x_g = \sqrt{x_1 x_2}}.$$

La rettificazione della parabola



$$y = mx^2 \quad ; \quad y' = 2mx \quad ; \quad dy = (2mx)\,dx$$

$$ds^2 = dy^2 + dx^2 \quad ; \quad ds = \left(\sqrt{4m^2x^2+1}\right) dx$$

quindi la lunghezza dell'arco $\widehat{AB}$ di parabola sarà:

$$\boxed{s_{\widehat{AB}} = \int_a^b \left(\sqrt{4m^2x^2+1}\right) dx}$$

che possiamo scrivere: $s_{\widehat{AB}} = \left(\frac{1}{2m}\right) \int_a^b \left(\sqrt{(2mx)^2+1}\right) d(2mx)$

È un integrale del tipo: $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \lg\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right]$

può risolversi in vari modi per es. per integrazione per parti si avrebbe: $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ aggiungendo e togliendo $\pm a^2$ al numeratore si ha: $2\int\sqrt{x^2 \pm a^2} = x\sqrt{x^2 \pm a} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ e risolvendo per sostituzione: $\left(t = \sqrt{x^2 \pm a^2} + x\right)$ vedi vol. I. Si ha la risoluzione sopraindicata.

oppure poniamo: $\boxed{(2mx) = \operatorname{senh}(t) \;;\; dx = d\operatorname{senh}(t) \;|\; t = \operatorname{argsenh}[2mx]}$

avremo: $\int \sqrt{(2mx)^2+1}\; dx = \int \sqrt{\operatorname{senh}^2(t)+1}\; d(\operatorname{senh}(t)) = \int \cosh(t)\, d\operatorname{senh}(t)$

(risolvendo per parti) $= \operatorname{senh}(t)\cosh(t) - \int \operatorname{senh}(t)\, d\cosh(t) =$

$\int \cosh(t)\, d\operatorname{senh}(t) = \operatorname{senh}(t)\cosh(t) - \int \left[\cosh^2(t) - 1\right] dt$

$\int \cosh(t)\, d\operatorname{senh}(t) = \frac{\operatorname{senh}(t)\cosh(t) + t}{2}$ da cui:

$$s_{ab} = \frac{1}{2m}\int_a^b \sqrt{(2mx)^2+1}\;\; d(2mx) = \frac{1}{2m}\left[\frac{2mx\sqrt{(2mx)^2+1} + \operatorname{argsenh}[2mx]}{2}\right]_a^b$$

$$\boxed{s_{ab} = \frac{1}{4m}\left[(2mx)\sqrt{(2mx)^2+1} + \ln\left|(2mx) + \sqrt{(2mx)^2+1}\right|\right]_a^b}$$

e limitando l'integrale fra o ed x.

$$\boxed{s = \frac{x}{2}\sqrt{(2mx)^2+1} + \frac{1}{4m}\ln\left|(2mx)+\sqrt{(2mx)^2+1}\right|}$$

sostituendo: $m = \left(\frac{1}{4a}\right)$

$$\boxed{\frac{s}{a} = \frac{x}{2a}\sqrt{\left(\frac{x}{2a}\right)^2+1} + \ln\left|\left(\frac{x}{2a}\right)+\sqrt{\left(\frac{x}{2a}\right)^2+1}\right|}$$

<u>questa espressione modulare in x</u> permette, sostituendo X in funzione di "a", di avere la lunghezza in "a" per esempio:

per $\boxed{x=4a}$; $s = 2a\sqrt{5} + a\ln\left|2+\sqrt{5}\right| = a(5{,}91577)$

Se pensiamo: $y = x^2$ estesa da $x=0$ ad $x=1$ avremo: $s = 1{,}47894$.

per $\boxed{x=2a}$; $s = a\sqrt{2} + a\ln\left|1+\sqrt{2}\right|$; $s = a(2{,}29559)$

il tratto: $\underset{2a-4a}{s} = a(5{,}91577 - 2{,}29559) = (3{,}62018)\,a$

---

ponendo: $\left(\frac{x}{2a}\right)^2 = \frac{y}{a}$; cioè $x = 2\sqrt{ay}$; avremo:

$$\boxed{\frac{s}{a} = \left[\sqrt{\frac{y}{a}}\sqrt{1+\frac{y}{a}} + \ln\left|\sqrt{\frac{y}{a}}+\sqrt{1+\frac{y}{a}}\right|\right]}$$ (dimensionalmente omogenea)

(<u>per a = 1</u>) : $$\boxed{s = \sqrt{y+y^2} + \ln\left|\sqrt{y}+\sqrt{1+y}\right|}$$ (non omogenea)

elevando a quadrato la parte sotto logaritmo:

(<u>per a = 1</u>): $$\boxed{s = \sqrt{y+y^2} + \frac{1}{2}\ln\left|1+2y+2\sqrt{y+y^2}\right|}$$

I raggi di curvatura della parabola.

$y = mx^2$; $y' = 2mx$; $y'' = 2m$. ove: $m = \frac{1}{4a}$

$$\boxed{R = \frac{\left(1 + (2mx)^2\right)^{3/2}}{2m}}$$

(in y) $$\boxed{R = \frac{(1 + 4my)^{3/2}}{2m}}$$;

modulare: $$\boxed{\frac{R}{2a} = \left(1 + \left(\frac{x}{2a}\right)^2\right)^{3/2}}$$; $$\boxed{\frac{R}{a} = 2\left(1 + \frac{y}{a}\right)^{3/2}}$$

$$\boxed{R = \frac{\left((2a)^2 + x^2\right)^{3/2}}{2a^2}}$$

per: $(x = 0) \rightarrow (R = 2a)$. = (Raggio nel vertice della parabola)

" $(y = 3a) \rightarrow (R = 16a)$; (ove $x = 2a\sqrt{3}$)

Per tracciare archi osculatori nei punti caratteristici della parabola, facciamo una tabella di conti fatti.

x	$y = \frac{x^2}{4a}$	$y' = \frac{x}{2a}$	R
0	0	0	$2a = (2)a$
a	$a/4$	$1/2$	$\frac{5}{4}\sqrt{5}\,a = (2{,}79508)a$
$2a$	a	1	$4\sqrt{2}\,a = (5{,}65685)a$
$3a$	$\frac{9}{4}a$	$3/2$	$\frac{13}{4}\sqrt{13}\,a = (11{,}71804)a$
$2a\sqrt{3}$	$3a$	$\sqrt{3}$	$16a = (16)a$
$4a$	$4a$	2	$20\sqrt{5}\,a = (44{,}72136)a$

Sapendo che il raggio di curvatura giace sulla normale alla curva, e che, quest'ultima è perpendicolare alla tangente in quel punto. Ricordando che la tangente, in un punto, alla parabola, taglia le ascisse in $x/2$ di quel punto, è facile tracciare una serie di archetti osculatori.

I centri di curvatura della parabola.
L'evoluta della parabola

Abbiamo già ricavato, in forma parametrica le coordinate dei centri di curvatura, per una qualsiasi: $y = f(x)$. esse rappresentano l'equazione parametrica dell'evoluta

$$\begin{cases} X_c = x - f'_{(x)} \dfrac{1 + f'^2_{(x)}}{f''_{(x)}} \\ Y_c = f(x) + \dfrac{1 + f'^2_{(x)}}{f''_x} \end{cases}$$

per la parabola diventano:

$$x_c = X - 2mX \frac{1+(2mX)^2}{2m} = X\left(1 - 1 - (2mX)^2\right) = -X(4mX)^2$$

$$y_c = mX^2 + \frac{1+(2mX)^2}{2m} = X^2\left(\frac{2m^2+4m^2+1}{2m}\right) = 3mX^2 + \frac{1}{2m} = 3y + \frac{1}{2m}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_c &= -4m^2X^3 \\ y_c &= 3mX^2 + \frac{1}{2m} \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} X_c &= \frac{-X^3}{4a^2} \\ y_c &= \frac{3X^2}{4a} + 2a \end{aligned} \qquad \boxed{\frac{X_c}{2a} = \left(\frac{X}{2a}\right)^3} \quad \boxed{\frac{y_c}{2a} = \frac{3}{3}\left(\frac{X}{2a}\right)^2 + 1}$$

Ricaviamo $X = (-4a^2X_c)^{\frac{1}{3}} = \left((y_c - 2a)\frac{4a}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ elevando alla 2^a.

$$(4^2a^4X_c^2)^{1/3} = y_c\frac{4a}{3} - \frac{8a^2}{3} \qquad y_c = \left(\sqrt[3]{16a^4X_c^2}\right)\left(\frac{3}{4a}\right) + 2a$$

$$y_c = \sqrt[3]{8a^3 \cdot 2a \cdot X_c^2 \cdot \frac{27}{64a^3}} + 2a = 3\sqrt[3]{\frac{aX_c^2}{4}} + 2a$$

$$\boxed{y_c = 3\left(\frac{aX_c^2}{4}\right)^{1/3} + 2a}$$ equaz. dell'evoluta in forma esplicita

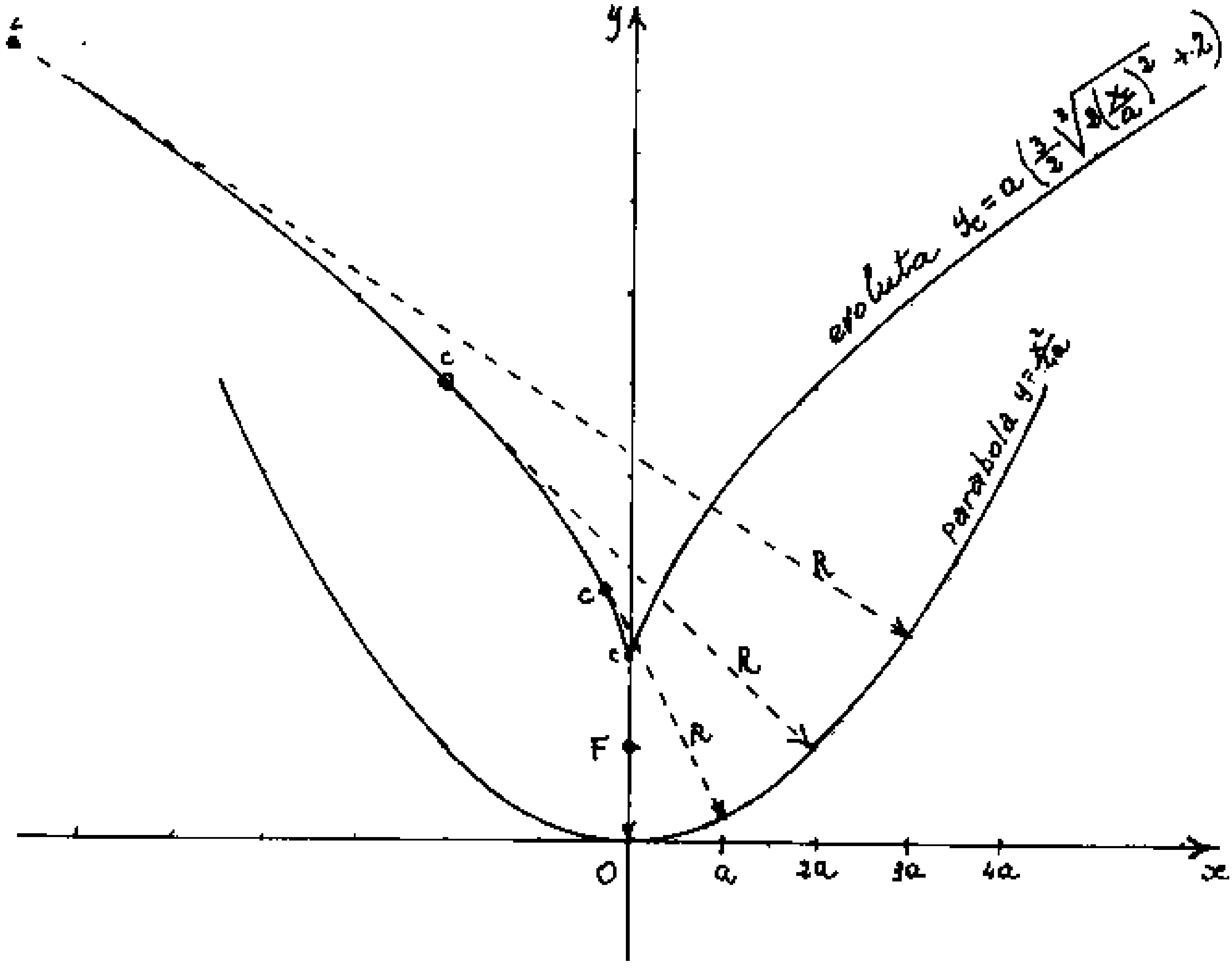
evoluta modulare:

$$\boxed{\left(\frac{y_c}{a}\right) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2\left(\frac{X_c}{a}\right)^2} + 2}$$

Grafico dell'evoluta della parabola

Dalle formule scritte, possiamo calcolare una tabella:

$x_e =$	0	$a/4$	$a/2$	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$
$y_e =$	$2a$	$2{,}75a$	$3{,}19a$	$3{,}89a$	$5a$	$5{,}93a$	$6{,}76a$	$7{,}53a$	$8{,}24a$

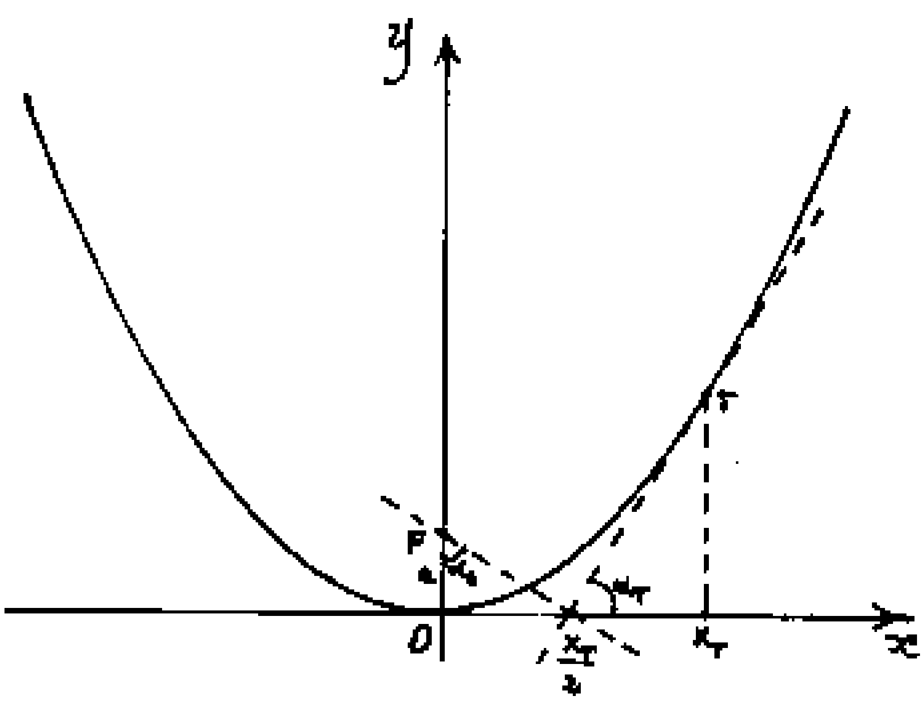


Notiamo che l'evoluta (luogo dei centri di curvatura, non possa avere ordinate $y<0$ perché: $x^2>0$.

L'evoluta della parabola presenta una cuspide per $x_c=0$; $y_c=2a$. La variabile: $x_c^{2/3}$ con esponente $2/3$ implica che per $x_c \to 0$ la cuspide abbia tangenti verticali, mentre per $x_c \to \infty$ anche $y_c \to \infty$, ma con tangente orizzontale. (Si confronti l'evoluta dall'ellisse)

Proprietá focali della parabola

1) Data una retta tangente alla parabola, la normale ad essa dal punto comune con le ascisse, incontra l'asse y nel fuoco.



Infatti: $y = x^2/4a$; $y' = x/2a$ ricordando che la retta tangente incontra l'asse x nel punto: $\frac{x_T}{2}$; dalla $y' = \frac{x}{2a} = tg(\alpha_T)$ avremo: $\boxed{a = \frac{x}{2}\frac{1}{tg\alpha_T}}$

(vedi figura)

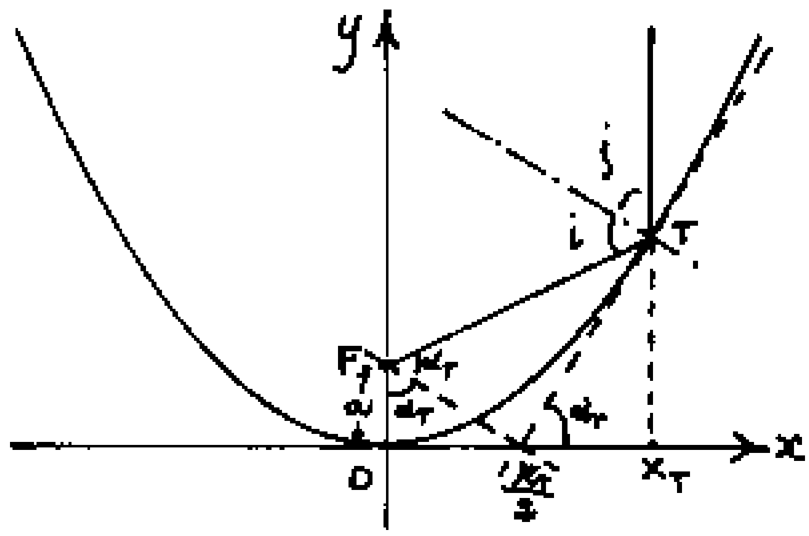
La podaria

Dicesi Podaria di una curva Γ rispetto ad un punto Q; il luogo dei "piedi" delle normali tracciate dal punto Q alle tangenti di Γ. (Per piedi si intendono i punti ove le normali incontrano le tangenti, cioé i vertici retti.)

Per la proprietá sopra dimostrata, la podaria di una parabola, rispetto al fuoco (vedi figura) ē l'asse delle ascisse. (retta tangente nel vertice)

(Cioé se da F si tira una perpendicolare ad una tangente qualsiasi della parabola, la incontrerá sull'asse x.)

2) Per ciascun punto della parabola, la normale biseca l'angolo formato dalla parallela all'asse per quel punto, e dalla congiungente il fuoco.



Dobbiamo dimostrare: $\underline{i = j}$

$(90°-j) = (90°-\alpha_T)$ (opposti al vertice in T)

perciò: $\boxed{\alpha_T = j}$

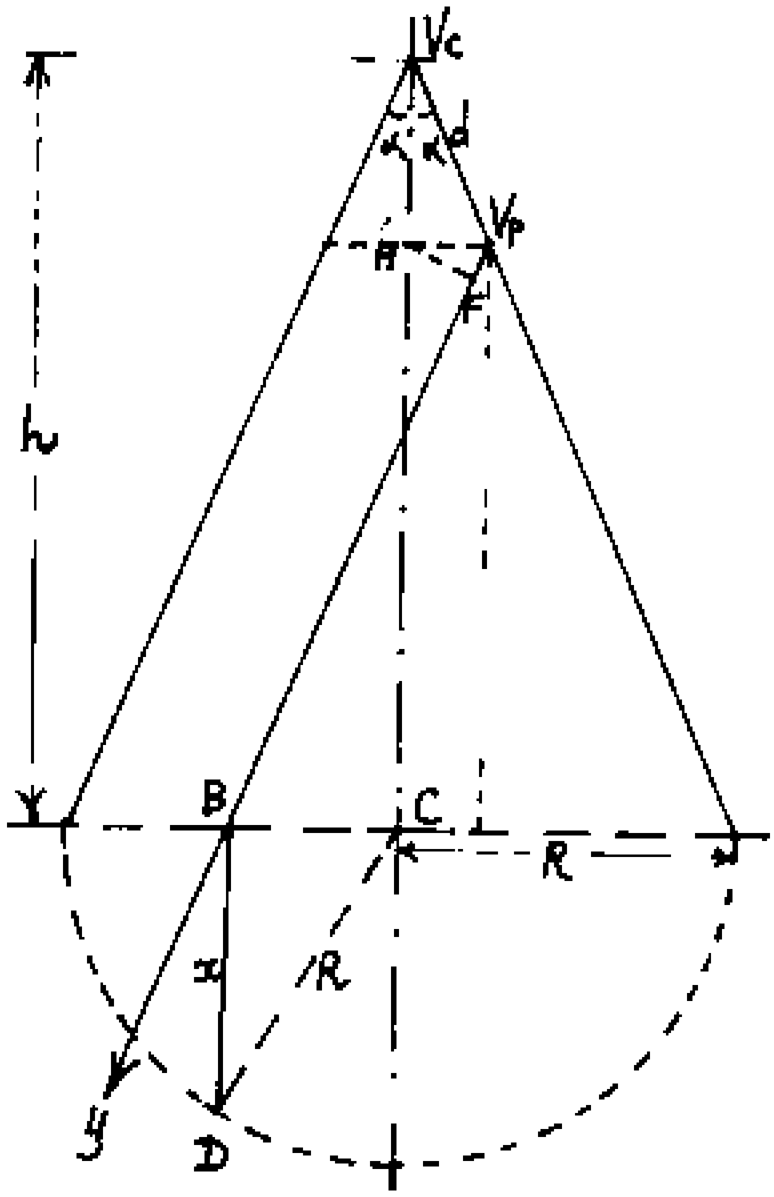
$y_T : \frac{x_T}{2} = tg(\alpha) = \frac{x_T}{2} : a$

I triangoli: $FO\frac{x_T}{2}$ e $\frac{x_T}{2}x_T T$ sono simili con rapporto di similitudine: $tg(\alpha) = \frac{x_T}{2}T : F\frac{x_T}{2}$; perciò anche il triangolo $F\frac{x_T}{2}T$ è simile e l'angolo: $T\hat{F}\frac{x_T}{2} = \alpha$ quindi $F\hat{T}\frac{x}{2} = (90°-i)$

$F\hat{T}\frac{x}{2} = (90°-\alpha)$ perciò: $\boxed{\alpha = i}$ ed è dimostrato: $\boxed{i = j}$

Questa propretà è notevole, perché se consideriamo speculare internamente il paraboloide ottenuto facendo ruotare la parabola intorno al suo asse; i raggi paralleli all'asse provenienti dall'esterno convergeranno in F. Sono stati costruiti paraboloidi a specchi per fondere i metalli utilizzando raggi solari. Inversamente una sorgente luminosa nel fuoco proietterà a fascio la sua luce (come i fari delle macchine) Paraboloidi sono anche utilizzati come antenne di onde elettromagnetiche, oppure come concentratori di suoni per individuare la posizione di un aereo in volo.

La parabola come sezione di un piano con un cono



Si abbia un cono di apertura 2α, e sia tagliato con un piano parallelo ad una generatrice, di traccia V_pB, sia V_c il vertice del cono, in V_p la prima generatrice tagliata. Sia $\overline{V_cV_p} = d$ la distanza dal vertice.

L'altezza del cono $h = (d + \overline{V_pB})\cos(\alpha)$ e considerando variabile $\overline{V_pB} = y$ avremo $h = (d+y)\cos\alpha$; ed anche $\overline{CB} = (y-d)\,\mathrm{sen}\,\alpha$; (per comodità è ribaltata in figura la semibase del cono); $R = h\,\mathrm{tang}(\alpha) = (d+y)\,\mathrm{sen}\,\alpha$; $\overline{BD} = x$; ove $x^2 = (R^2 - \overline{BC}^2) = (d+y)^2\mathrm{sen}^2\alpha - (y-d)^2\mathrm{sen}^2\alpha = 4dy\,\mathrm{sen}^2\alpha$.

$\overline{HV_p} = d\,\mathrm{sen}\,\alpha$; $\overline{FV_p} = a = \overline{HV_p}\,\mathrm{sen}\,\alpha = d\,\mathrm{sen}^2\alpha$; $4ay = x^2$

$$\boxed{y = \frac{x^2}{4a}}$$

che è l'equazione di una parabola di vertice V_p ; fuoco F e modulo $4a$. Si noti che $\boxed{d = a/\mathrm{sen}^2\alpha}$

Pensiamo di far ruotare la traccia del piano intorno a V_p, iniziando dalla posizione $\overline{V_pH}$ la cui sezione è un cerchio, lasciato il cerchio si hanno ellissi (ἐλλείπειν = lasciare) finché uguaglia la pendenza della generatrice e si ha una parabola (παραβάλλειν = uguagliare) poi l'iperbole (ὑπερβάλλειν = sorpassare).

La parabola in coordinate polari

Sostituendo, nell'equazione della parabola: $y = \frac{x^2}{4a}$
$y = \rho \operatorname{sen}\theta$; $x = \rho \cos\theta$; si ha: $\frac{\rho^2 \cos^2\theta}{4a} = \rho \operatorname{sen}\theta$
esplicitando ρ si ha:

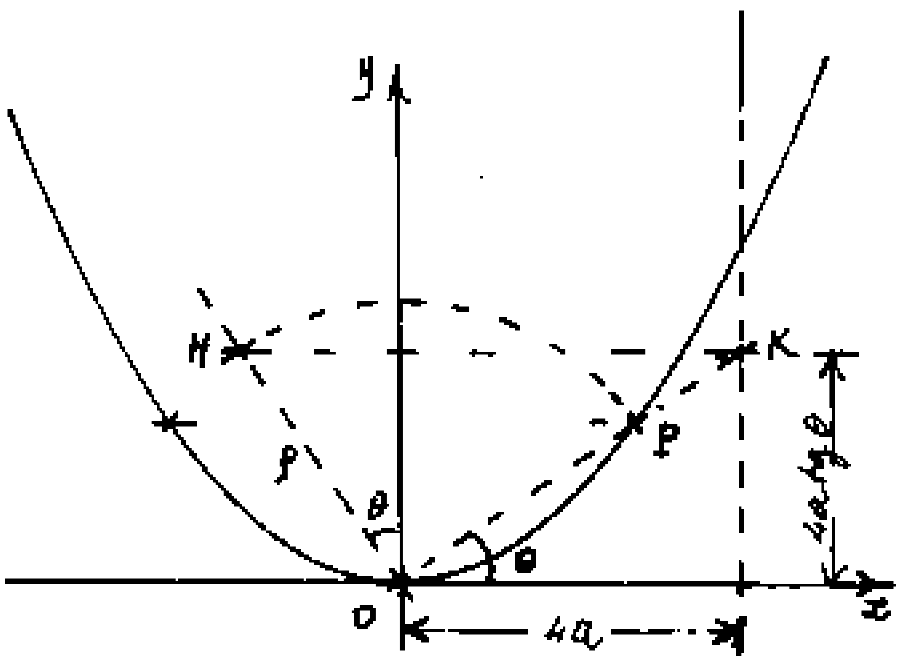
$$\boxed{\rho = \frac{4a \operatorname{tg}(\theta)}{\cos(\theta)}}$$

equaz. della parabola in polari.

$$\begin{cases} x = 4a \operatorname{tg}(\theta) \\ y = 4a \operatorname{tg}^2(\theta) \end{cases}$$

coordinate parametriche

Una costruzione grafica della parabola per coordinate polari.

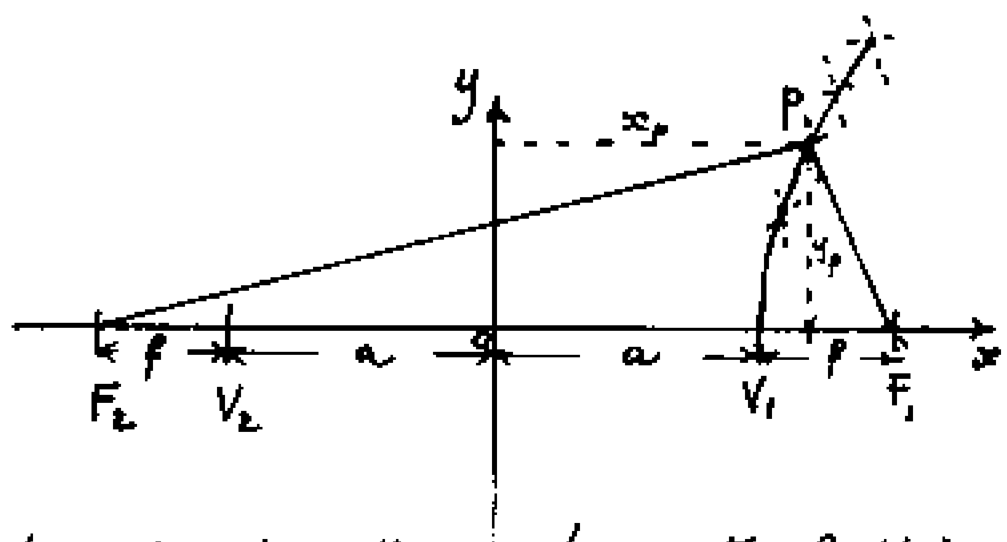


Tracciati gli assi, si disegni la retta $y=4a$ (parallela alle ordinate), quindi dall'origine "o" si tracci un qualsiasi raggio inclinato di θ sulle ascisse e la sua perpendicolare. Il raggio inclinato di θ incontrerà in K la retta: $y=4a$, e l'ordinata di K sarà: $(4a)\operatorname{tg}(\theta)$; da K si tiri una parallela alle ascisse, fino ad incontrare in H la perpendicolare al raggio, avremo: $\overline{OH} = \frac{4a \operatorname{tg}\theta}{\cos\theta} = \rho$ è il modulo in polari che riportato sul raggio inclinato di θ, dà in P un punto della parabola. $(\overline{OP} = \overline{OH} = \rho)$.

L'Iperbole

"*L'iperbole è il luogo geometrico dei punti per i quali la differenza delle distanze da due punti detti fuochi è costante.*"

Siano F_1 ed F_2 i fuochi che prenderemo sull'asse x, simmetrici rispetto ad y. Vi saranno due punti, pure sull'asse x, che appartengono all'iperbole, indichiamoli con V_1 e V_2, necessariamente simmetrici rispetto ad y.



Infatti, applicando la definizione dell'iperbole come luogo geometrico si ha:

$$\overline{F_2V_1} - \overline{F_1V_1} = cost = \overline{F_1V_2} - \overline{F_2V_2}$$

Indichiamo con $2a = \overline{V_1V_2}$; e con $f = \overline{F_1V_1} = \overline{F_2V_2}$ avremo:

$$\overline{F_2V_1} = \overline{F_2V_2} + \overline{V_2V_1} = (f+2a) = \overline{F_1V_2} \qquad \text{cioè: } \overline{F_2V_1} - \overline{F_1V_1} = \overline{F_1V_2} - \overline{F_2V_2} = (\cancel{f}+2a) - \cancel{f}$$

cioè la costante è $2a = cost.$

Individuata la costante $= 2a$, cioè dati F_1 ed F_2 e quindi V_1 e V_1, si può costruire l'iperbole per punti, prendendo un arco di cerchio di centro F_2 e raggio: $r_2 > (2a+f)$, quindi con centro in F_1 e raggio: $(r_1 = r_2 - 2a)$ si trova un punto della iperbole come punto comune ai due archi.

Consideriamo un generico punto P, ove: $\overline{F_2P} - \overline{F_1P} = 2a$;

$\overline{F_2P} = \sqrt{((a+f)+x_p)^2+y_p^2}$; $\overline{F_1P} = \sqrt{(-x_p+(a+f))^2+y_p^2}$ sostituendo, isolando una radice ed elevando a quadrato si ha:

$$\cancel{(a+f)^2}+\cancel{x_p^2}+2x_p(a+f)+\cancel{y_p^2} = \cancel{x_p^2}+\cancel{(a+f)^2}-2x_p(a+f)+\cancel{y_p^2}+(2a)^2+4a\sqrt{(x_p+(a+f))^2+y_p^2}$$

$$\cancel{4}x_p(a+f)-\cancel{4}a^2 = \cancel{4}a\sqrt{(x_p+(a+f))^2+y_p^2}$$

elevando, di nuovo, a quadrato:

$$x_p^2(a+f)^2+a^4-\cancel{2a^2x_p(a+f)} = a^2x_p^2+(a+f)^2a^2-\cancel{2a^2x_p(a+f)}+a^2y_p^2$$

$$\cancel{x_p^2a^2}+x_p^2f^2+2x_p^2af+\cancel{a^4} = \cancel{x_p^2a^2}+\cancel{a^4}+a^2f^2+2a^3f+a^2y_p^2$$

$$x_p^2(f+2a)f = a^2(f+2a)f+a^2y_p^2$$

dividendo per: $a^2(f+2a)f$ e portando.

$$\frac{x_p^2}{a^2}-\frac{y_p^2}{(2a+f)f}=1$$

poniamo: $b^2=2af+f^2$

$$\boxed{\frac{x_p^2}{a^2}-\frac{y_p^2}{b^2}=1}$$

abbiamo l'equazione dell'iperbole.

Vogliamo ora risolvere f dalla: $f^2+2af-b^2$ abbiamo:

$$f=-a+\sqrt{a^2+b^2}$$

ma: $\sqrt{a^2+b^2}=d$ è la diagonale di un rettangolo $f=(d-a)$. Data l'analogia con la formula dell'ellisse, si può costruire l'ellisse e l'iperbole sugli stessi parametri "a" e "b". Si noti che: $d=(a+f)$.

Quindi disegnato il rettangolo in centro assi simmetrico di lati $2a$ e $2b$, resta da dimostrare che le rette sulle diagonali sono asintoti dell'iperbole.

Gli asintoti dell'iperbole

Esplicitando y si ha: $\boxed{y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}}$

derivando:

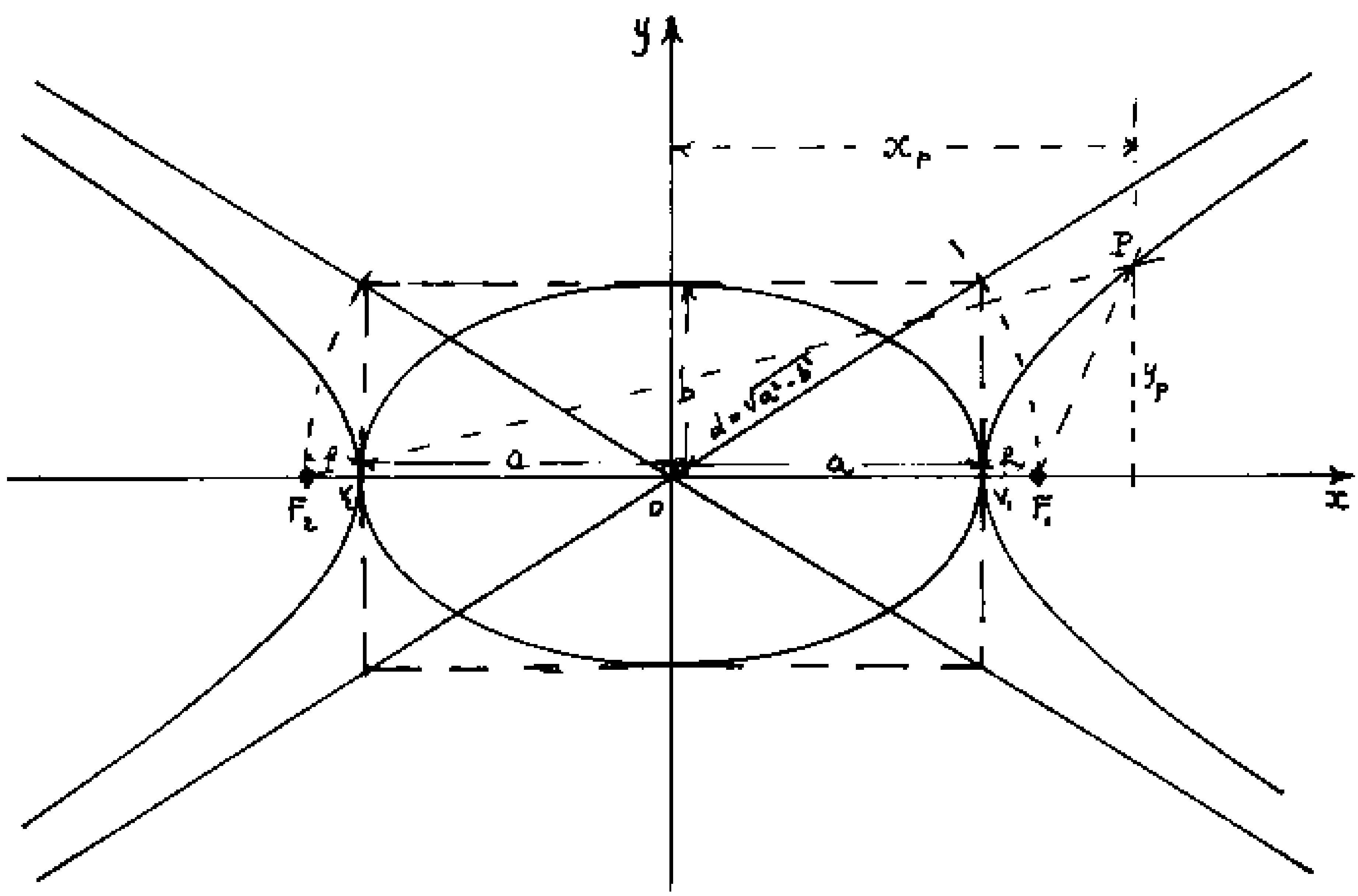
$$\boxed{y' = \frac{b}{a}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right)}$$

puó scriversi: $\boxed{y' = \frac{b}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}}\right)}$

$\boxed{\lim_{x \to \infty} (y') = \pm\left(\frac{b}{a}\right) =}$ e poiché: $q = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x\right)$

risulta $q = 0$, avremo che l'equazione degli asintoti è: $\boxed{y = \pm\frac{b}{a}x}$

che è l'equazione delle rette passanti per le diagonali del nostro rettangolo.



L'equazione dell'iperbole in coordinate polari

Dalla: $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$b^2\rho^2\cos^2\theta - \rho^2 sen^2\theta \cdot a^2 = a^2 b^2$$

$$\boxed{\rho = \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta - a^2 sen^2\theta}}}$$

equazione dell'iperbole in coordinate polari esplicitata in ρ.

$$\boxed{\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} - \frac{sen^2\theta}{b^2}}$$

Le forme di equazione, salvo il segno, sono analoghe a quelle dell'ellisse.

$$b^2(1 - sen^2\theta) - a^2 sen^2\theta = \frac{a^2b^2}{\rho^2} \Rightarrow (b^2 + a^2) sen^2\theta = \left(b^2 - \frac{a^2b^2}{\rho^2}\right)$$

posto: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ si ha:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{sen(\theta) = \frac{b}{\rho d}\sqrt{\rho^2 - a^2}} \\ \boxed{\cos(\theta) = \frac{a}{\rho d}\sqrt{\rho^2 + b^2}} \\ \boxed{tang(\theta) = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 + b^2}}} \end{array}\right\}$$

equazioni in coordinate polari dell'iperbole risolte rispetto a funzioni dell'argomento θ

Qualora $a = b = R$ si ha l'iperbole equilatera:

$$\boxed{x^2 - y^2 = R^2} \qquad \boxed{\rho = \frac{R}{\sqrt{\cos(2\theta)}}}$$

$$\boxed{\cos(2\theta) = \frac{R^2}{\rho^2}} \qquad \boxed{sen\,\theta = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{\rho^2 - R^2}{2}}} \qquad \boxed{\cos\theta = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{\rho^2 + R^2}{2}}}$$

Le derivate nell'iperbole

Supponiamo di volere che sia definito il punto in cui deriviamo. La: $y' = \frac{b x}{a\sqrt{x^2-a^2}}$, per il doppio segno della radice, fornisce due valori; quindi la derivata occorre scriverla nella forma:

$$\boxed{y' = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y}}$$

ove il segno della derivata dipende dai segni di x e di y; cioè dalle coordinate che definiscono il punto in cui si deriva.

Si noti la forma: $\boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}}}$ essa è valida per 4 punti: $(\pm x);(\pm y)$, però è impossibile distinguerli.

E' opportuno che le espressioni algebriche siano poste in forme non equivocabili

Calcoliamo la derivata seconda

$$y'' = \frac{b}{a}\,\frac{\sqrt{x^2-a^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{(x^2-a^2)} = \frac{b}{a}\,\frac{x^2-a^2-x^2}{(x^2-a^2)^{3/2}} = \boxed{y'' = \frac{-ab}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}}}$$

poiché: $\left(\sqrt{x^2-a^2} = \frac{ay}{b}\right)$; $\quad y'' = \frac{-ab}{\left(\frac{ay}{b}\right)^3}$

$$\boxed{y'' = \frac{-b^4}{a^2 y^3}}$$

Il segno della derivata seconda dipende solo dal segno della y. (si ha concavità verso il basso per $y>0$, viceversa per $y<0$) Però è valida per due valori di x di segno opposto. $\boxed{y'' = \frac{-b^2}{y(x^2-a^2)}}$ non risolve l'indeterminazione del segno della x.

Equazioni delle tangenti all'iperbole

1) Se è noto il punto di tangenza $T \equiv (x_T, y_T)$

si ha:

$$\boxed{\frac{(y - y_T)}{(x - x_T)} = y'_T = \frac{b}{a}\,\frac{x_T}{\sqrt{x_T^2 - a^2}}}$$

allo scopo di evitare la radice poniamo:

$$\boxed{y'_T = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x_T}{y_T}}$$ (vedi pag prec)

avremo:

$$\boxed{y = \left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x_T}{y_T}\right] x + \left[y_T - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x_T^2}{y_T}\right]}$$

equazione in forma esplicita della tangente in T all'iperbole.

$$\boxed{\frac{\left(\frac{x_T}{a}\right)\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x_T^2}{a^2} - \frac{y_T^2}{b^2}\right)} + \frac{\left(\frac{y_T}{b}\right)\left(\frac{y}{b}\right)}{\frac{y_T^2}{b^2} - \frac{x_T^2}{a^2}} = 1}$$

$$\boxed{\left(\frac{x_T}{a}\right)\left(\frac{x}{a}\right) - \left(\frac{y_T}{b}\right)\left(\frac{y}{b}\right) = \left(\frac{x_T}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_T}{b}\right)^2}$$ (modulare)

In quanto il secondo membro è la verifica che: $\left(\frac{x_T^2}{a^2} - \frac{y_T^2}{b^2}\right) = 1$
ed essendo T sull'iperbole, l'equazione diventa:

$$\boxed{\frac{x}{a^2/x_T} + \frac{y}{-b^2/y_T} = 1}$$ forma segmentaria

$$\boxed{y = \left(\frac{x_T}{a^2}\right)\left(\frac{b^2}{y_T}\right)x - \frac{b^2}{y_T}}$$ forma esplicita

$$\boxed{y = \left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{x_T}{\sqrt{x_T^2 - a^2}}\right)x - \frac{a\,b}{\sqrt{x_T^2 - a^2}}}$$ (espressione in x_T) che, dato il doppio segno della radice rende ambiguo decidere quale retta è quella che ci interessa come tangente.

2) Se il punto noto $Q \equiv (x_Q ; y_Q)$, per il quale si tracciano le tangenti all'iperbole, è esterno alla curva, detta x_T l'ascissa del punto di tangenza si ha:

$$\frac{y_T - y_Q}{x_T - x_Q} = y'_T = \frac{b}{a} \frac{x_T}{\sqrt{x_T^2 - a^2}}$$

$$\frac{a}{b}\left(\sqrt{x_T^2 - a^2}\right)\left(\frac{b}{a}\sqrt{x_T^2 - a^2} - y_Q\right) = x_T^2 - x_Q x_T$$

$$\cancel{x_T^2} - a^2 - \left(\frac{a}{b}\sqrt{x_T^2 - a^2}\right) y_Q = \cancel{x_T^2} - x_Q x_T$$

$$x_Q^2 x_T^2 + a^4 - 2a^2 x_Q x_T = \frac{b^2}{a^2}(x_T^2 - a^2) y_Q^2$$

$$\left(\frac{x_Q^2}{a^2} - \frac{y_Q^2}{b^2}\right) x_T^2 - 2x_Q x_T + a^2\left(\frac{y_Q^2}{b^2} + 1\right) = 0$$

$$x_T = \frac{x_Q \pm \sqrt{x_Q^2 - a^2\left(1 + \frac{y_Q^2}{b^2}\right)\left(\frac{x_Q^2}{a^2} - \frac{y_Q^2}{b^2}\right)}}{\left(\frac{x_Q^2}{a^2} - \frac{y_Q^2}{b^2}\right)}$$

$$\boxed{\frac{x_T}{a} = \frac{\frac{x_Q}{a} \pm \frac{y_Q}{b}\sqrt{1 - \left(\frac{x_Q^2}{a^2} - \frac{y_Q^2}{b^2}\right)}}{\left(\frac{x_Q^2}{a^2} - \frac{y_Q^2}{b^2}\right)}}$$ (modulare)

Per la realtà di x_T deve essere: $\left(\frac{x_Q}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_Q}{b}\right)^2 < 1$.

Se fosse $\left(\frac{x_Q}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_Q}{b}\right)^2 = 1$, si avrebbe $x_T = x_Q$, cioè il punto esterno Q si è avvicinato all'iperbole tanto da sovrapporvisi.

Se $\left(\frac{x_Q}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_Q}{b}\right)^2 > 1$ il punto Q sarebbe nello spazio delimitato da un ramo dell'iperbole e di lì è impossibile far passare tangenti all'iperbole.

Noto x_T si sostituisce e l'equazione della tangente diventa:

$$\boxed{y = \left(\frac{b}{a}\frac{x_T}{\sqrt{x_T^2 - a^2}}\right) x - \left(\frac{ab}{\sqrt{x_T^2 - a^2}}\right)}$$

ed in forma segmentaria: $\boxed{\dfrac{x}{a^2/x_T} - \dfrac{y}{b^2/y_T} = 1}$

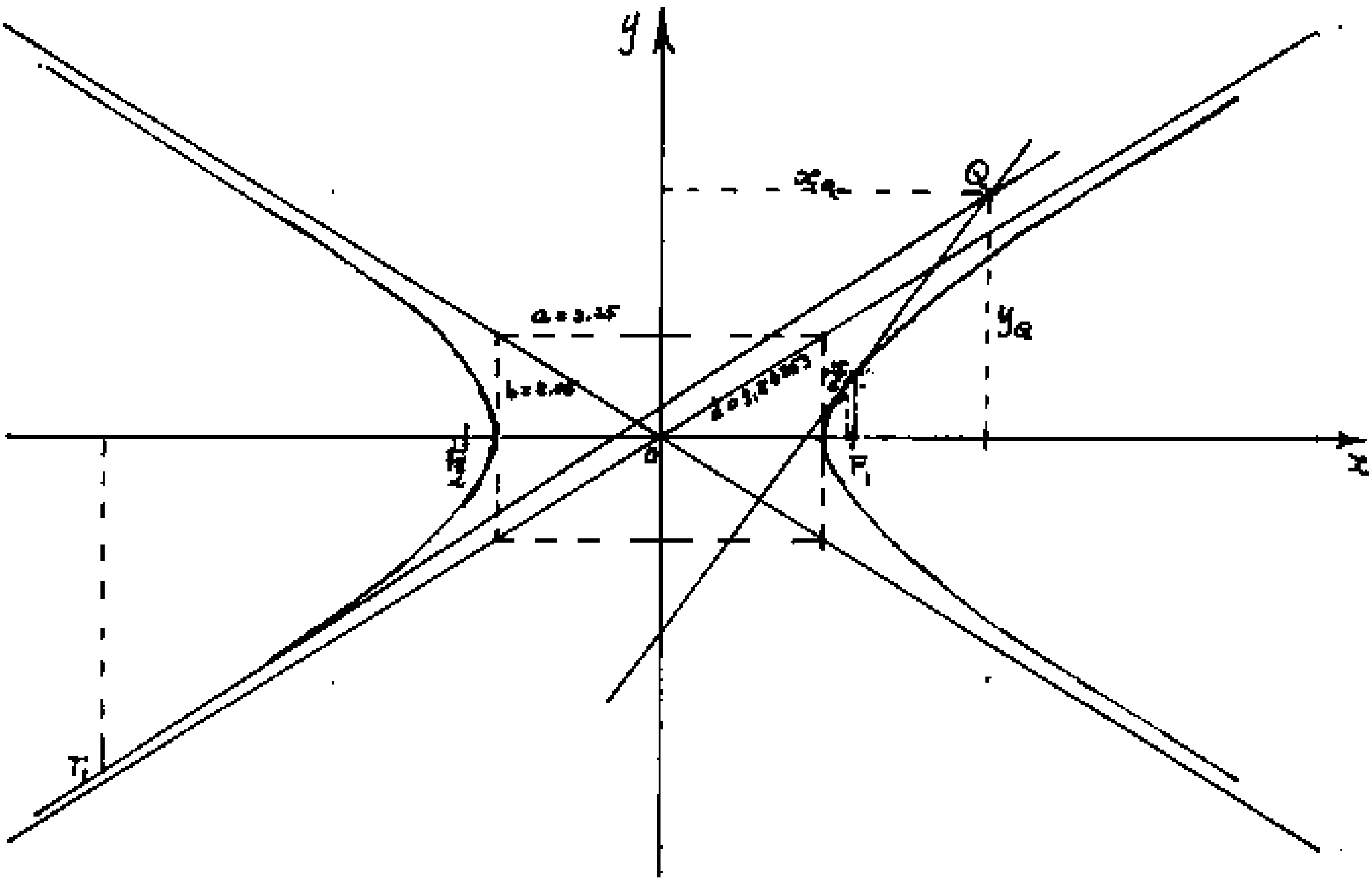
formule giá note nel caso 1).

Esempio numerico

siano: $a = 3{,}25$; $b = 2{,}05$; per cui $d = \sqrt{a^2+b^2} = 3{,}84253$.

$x_Q = 6{,}50$; $y_Q = 4{,}92$; $\left(\dfrac{x_Q}{a}\right) = 2$; $\left(\dfrac{y_Q}{b}\right) = 2{,}4$;

$$\left(\frac{x_Q}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_Q}{b}\right)^2 = 4 - 5{,}76 = -1{,}76$$



$$\left(\frac{x_T}{a}\right) = \frac{2 \pm \left(\sqrt{3{,}76}\right)2{,}4}{-1{,}76} = \begin{cases} = -3{,}40181 \; > \; x_{T_1} = -11{,}05587 \\ = 1{,}12908 \; > \; x_{T_2} = 3{,}66951 \end{cases}$$

equazione della retta tangente in T_1 : $\boxed{y = (0{,}65993)x + 0{,}63048}$

" " " " in T_2 : $\boxed{y = (1{,}35853)x - 3{,}91046}$

L'equazione della normale all'iperbole.

Nel punto T, l'equazione della normale:

$$\boxed{\left(\frac{y-y_T}{x-x_T}\right)=\left(\frac{-1}{y'_T}\right)}$$

che per l'iperbole, in funzione della sola (x_T) diventa:

$$\frac{y-\frac{b}{a}\sqrt{x_T^2-a^2}}{(x-x_T)}=-\frac{a}{b}\frac{\sqrt{x_T^2-a^2}}{x_T}$$

però volendo eliminare le radici:

$$\boxed{\frac{y-y_T}{x-x_T}=-\frac{y_T}{x_T}\left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

che in <u>forma esplicita</u> diventa:

$$\boxed{y=-\left(\frac{a^2}{b^2}\right)\left(\frac{y_T}{x_T}\right)x+y_T\left(\frac{b^2+a^2}{b^2}\right)}$$

si può scrivere:

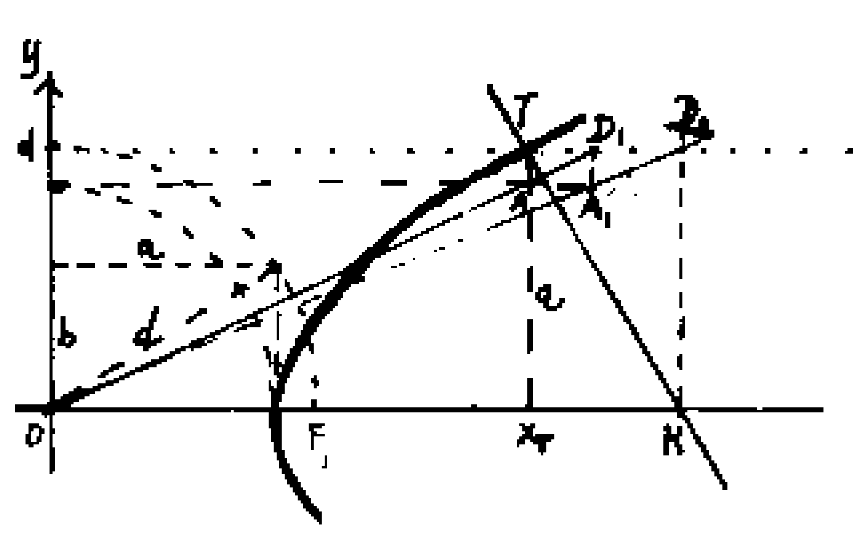
$$\frac{y}{y_T}\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)=\left(\frac{-a^2}{a^2+b^2}\right)\frac{x}{x_T}+1$$

cioè in <u>forma segmentaria</u> : (posto $(a^2+b^2)=d^2$)

$$\boxed{\frac{x}{(x_T\,d^2/a^2)}+\frac{y}{(y_T\,d^2/b^2)}=1}$$

= equazione della normale in forma segmentaria

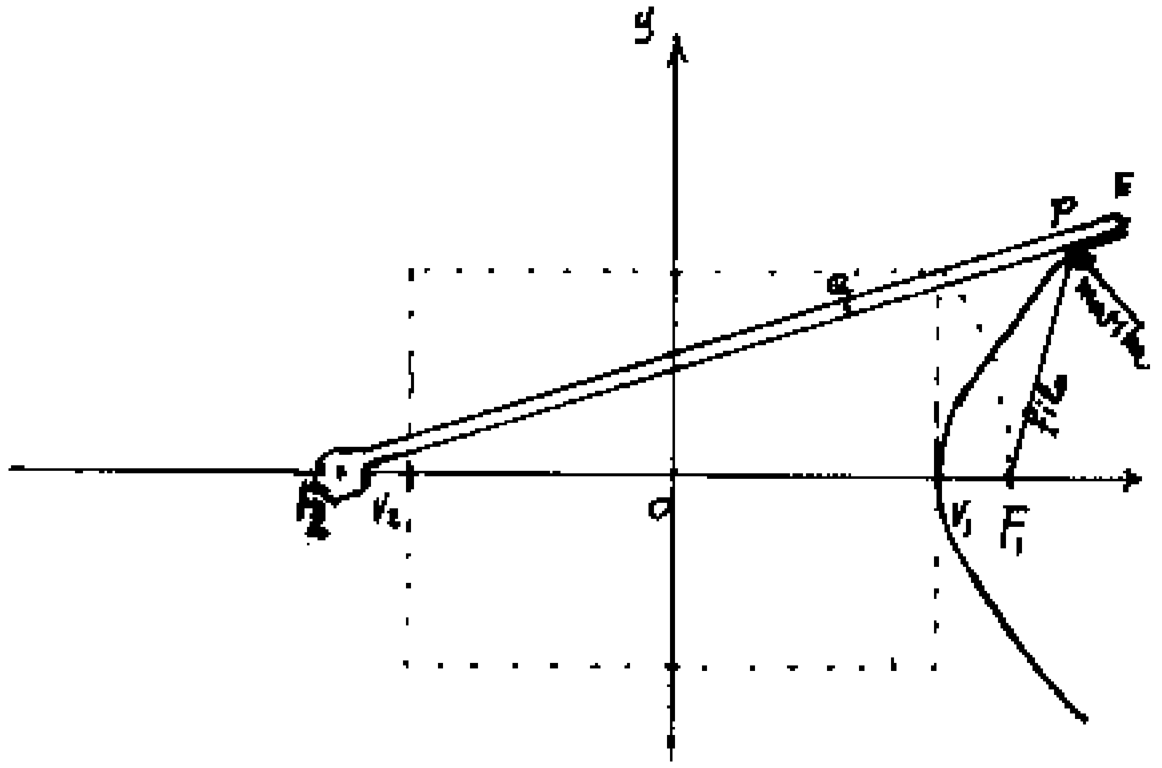
<u>costruzione grafica</u>



Si traccia $y=d$; su y_T; $\overline{x_TA}=a$, unito $\overline{OA}$ si trova D_1 da D_1 la parallela ad y fino ad A_1; $\overline{OA_1}$ trova D_2 ed N ove $\overline{NT}$ è la normale in T.

L'iperbole tracciata con segno continuo.

Siano F_1 ed F_2 i fuochi dell'iperbole da disegnare e sia $2a$ la distanza fra i due vertici, (avremo: $f = \frac{1}{2}(\overline{F_1F_2} - 2a)$; $b = \sqrt{(f+a)^2 - a^2}$), sia O il centro assi. Si prenda un regolo abbastanza lungo e se ne fissi l'estremo in F_2, in modo che possa ruotare intorno ad F_2. Si segni sul regolo il punto "Q", tale che,



la distanza $\overline{F_2Q} = 2a$. Si prenda un filo lungo quanto è il regolo da Q all'altro estremo "E", si fissa un capo in tale estremo; e l'altro capo in F_1 con la matita si tiene il filo aderente al regolo, che si fa ruotare intorno ad F_2 la matita traccerà un ramo di iperbole. Se invece fissiamo il regolo in F_1 tracceremo il ramo d'iperbole da banda opposta.

Il funzionamento è ovvio: se P è il punto in cui in un certo istante si trova la matita, dovrà essere: $\overline{F_2P} - F_1P = 2a$. Ma $\overline{F_2P} = \overline{F_2Q} + \overline{QP} = 2a + \overline{F_1P}$, essendo $F_1P = \overline{QP}$ perché a $\overline{QE}$ = lunghezza del filo è stato tolto $\overline{EP}$.
(Si noti che il bordo del regolo taglia F_2).

I raggi di curvatura dell'iperbole

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{\left(1+\frac{b^2x^2}{a^2(x^2-a^2)}\right)^{3/2}}{\frac{-ab}{(x^2-a^2)^{3/2}}} = \frac{-\left((x^2-a^2)+\frac{b^2x^2}{a^2}\right)^{3/2}}{(ab)} =$$

$$R = \frac{-(a^2x^2-a^4+b^2x^2)^{3/2}}{a^4b} = \qquad \boxed{R = \frac{(a^4-x^2d^2)^{3/2}}{a^4b}}$$

$$R = \frac{-\left(y^2\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2x^2}{a^2}\right)^{3/2}}{ab} = \qquad \boxed{R = -\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{3/2}}{a^4b^4}}$$

per: $(x=a) \rightarrow$ raggio nel vertice $= R_v = \frac{a^3b^3}{a^4b} = \boxed{R_v = \frac{b^2}{a}}$

<u>Il modulo b è medio proporzionale fra il modulo "a" ed il raggio di curvatura nel vertice:</u>

Il risultato algebrico implica la costruzione grafica a fianco.

<u>Anche per l'iperbole l'ordinata del fuoco è il raggio di curvatura nel vertice</u>. Infatti: $y_f = \frac{b}{a}\sqrt{x_f^2-a^2}$ cioè, essendo: $x_f^2 = (a^2+b^2)$ avremo: $y_f = \frac{b^2}{a}$ C.V.D.

È assai rapida la variazione di R al variare di x, infatti: $\frac{dR}{dx} = \frac{-1}{a^4b}\left(\frac{3}{\cancel{2}}\sqrt{x^2d^2-a^4}\right)\cancel{2}xd^2 =$

$$\frac{dR}{dx} = -3\,\frac{a^2+b^2}{a^4b}\,x\sqrt{x^2(a^2+b^2)-a^4}$$ ove per $x=a$ si ha

$$\left(\frac{dR}{dX}\right)_a = -3\,\frac{a^2+b^2}{a^{4}b}\,a\sqrt{a^4-a^2b^2-a^4} = -3\,\frac{(a^2+b^2)}{a^2} = \boxed{-3\,\frac{d^2}{a^2}}$$

$\left(\frac{dR}{dx}\right)_a = -3\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)$. Per l'iperbole equilatera $\left(\frac{dR}{dx}\right)_R = -6$; $(b=a)$.

I centri di curvatura dell'iperbole.

Ricordiamo che le coordinate dei centri di curvatura del grafico di una funzione $y = f(x)$ sono:

$$\boxed{\begin{aligned} y_c &= y + \frac{1+y'^2}{y''} \\ x_c &= x + \left(-y' \frac{1+y'^2}{y''}\right) \end{aligned}}$$

calcoliamo: $\frac{1+y'^2}{y''}$ per l'iperbole:

$$y' = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad ; \quad y'' = \frac{-ab}{(x^2-a^2)^{3/2}}$$

conviene la forma:

$$y' = \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} \quad ; \quad y'' = \frac{-b^4}{a^2y^3}$$

$$\frac{1+y'^2}{y''} = \left(1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)\left(\frac{a^2y^3}{-b^4}\right) = \left(\frac{a^4y^2 + b^4x^2}{-a^2b^4}\right)y =$$

$$\boxed{\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right) = -\left(\frac{a^2y^3}{b^4} + \frac{yx^2}{a^2}\right)}$$

da cui:

$$y_c = \left(y - \frac{yx^2}{a^2} - \frac{a^2y^3}{b^4}\right) = \left(y\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right) - \frac{a^2y^3}{b^4}\right) = \left(-\frac{y^3}{b^2} - \frac{a^2}{b^4}y^3\right)$$

$$y_c = -y^3\left(\frac{a^2+b^2}{b^4}\right); \quad \boxed{y_c = -\frac{y^3d^2}{b^4}} \qquad \boxed{y = -\sqrt[3]{y_c\frac{b^4}{d^2}}}$$

$$x_c = x + \left(\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}\right)\left(\frac{a^2y^3}{b^4} + \frac{yx^2}{a^2}\right) = x + \left(\frac{xy^2}{b^2} + \frac{b^2x^3}{a^4}\right) = x + x\left(\frac{x^2-a^2}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^4}\right)$$

$$x_c = x\left(1 + \frac{a^2x^2 - a^4 + b^2x^2}{a^4}\right) = x\left(\cancel{1} + \frac{d^2x^2}{a^4} - \cancel{1}\right) \quad ; \quad \boxed{x_c = \frac{d^2}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^3}$$

cioè: $\boxed{\begin{aligned} (x_c/a) &= (d/a)(x/a)^3 \\ (y_c/b) &= (d^2/b)(y/b)^3 \end{aligned}}$ da cui: $\boxed{\begin{aligned} (x/a)^2 &= \left[a^3/d^2\left(\frac{x_c}{a}\right)\right]^{2/3} \\ (y/b)^2 &= \left[b^2/d^2(y_c/b)\right]^{2/3} \end{aligned}}$

Evoluta dell'iperbole

(luogo dei centri di curvatura)

Sostituendo nell'equazione dell'iperbole i valori di $\left(\frac{x}{a}\right)^2$ e $\left(\frac{y}{b}\right)^2$ in funzione di x_c ed y_c, si ha:

$$\left[\frac{a^2}{d^2}\left(\frac{x_c}{a}\right)\right]^{2/3} - \left[\frac{b^2}{d^2}\left(\frac{y_c}{b}\right)\right]^{2/3} = 1$$

$$\boxed{(a x_c)^{2/3} - (b y_c)^{2/3} = d^{4/3}}$$ <u>in forma implicita</u>

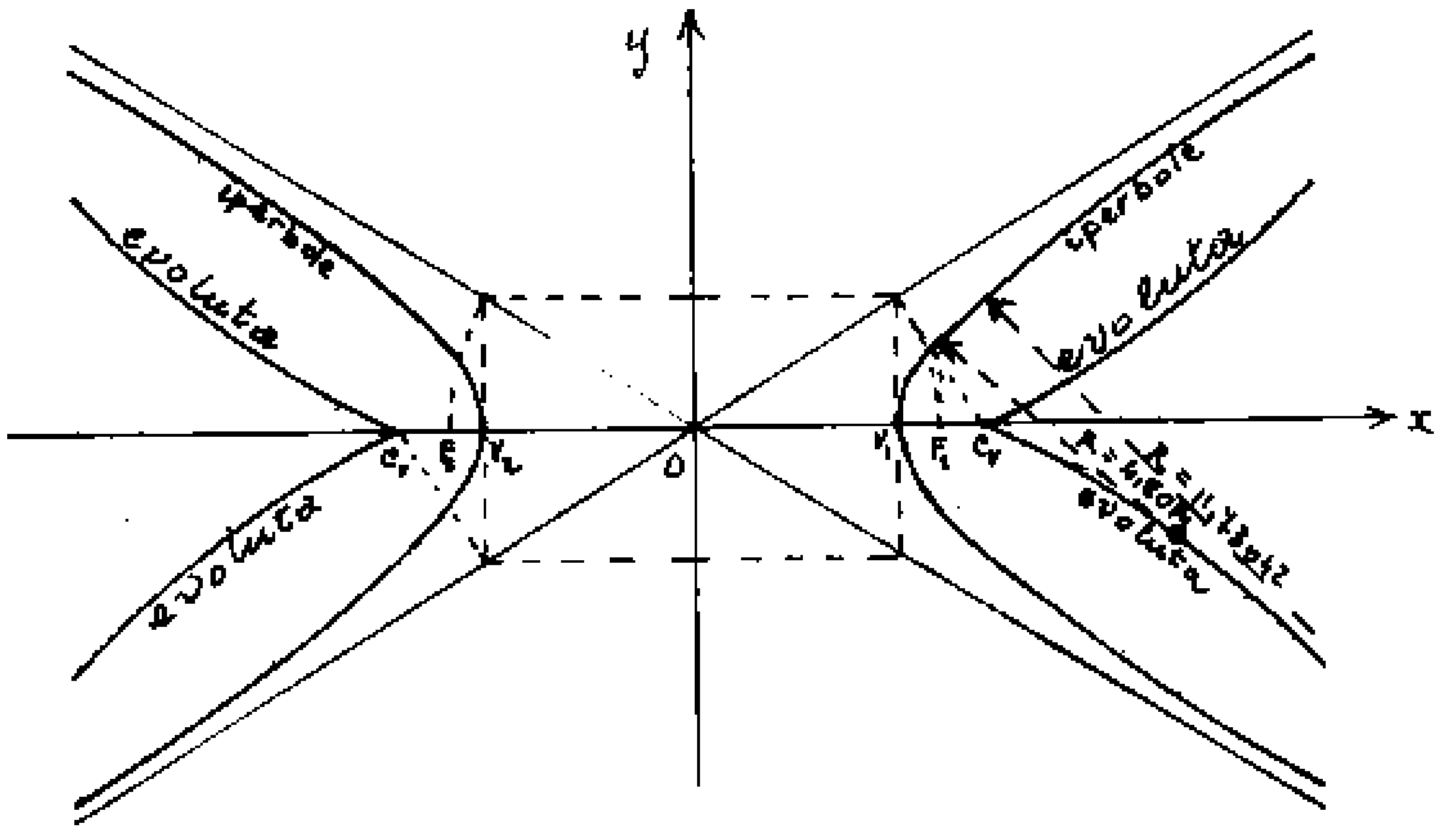
<u>è l'equazione dell'evoluta dell'iperbole</u>

esplicitando la y:

$$\boxed{y_c = \frac{1}{b}\left((a x_c)^{2/3} - d^{4/3}\right)^{3/2}}$$ <u>in forma esplicita</u>

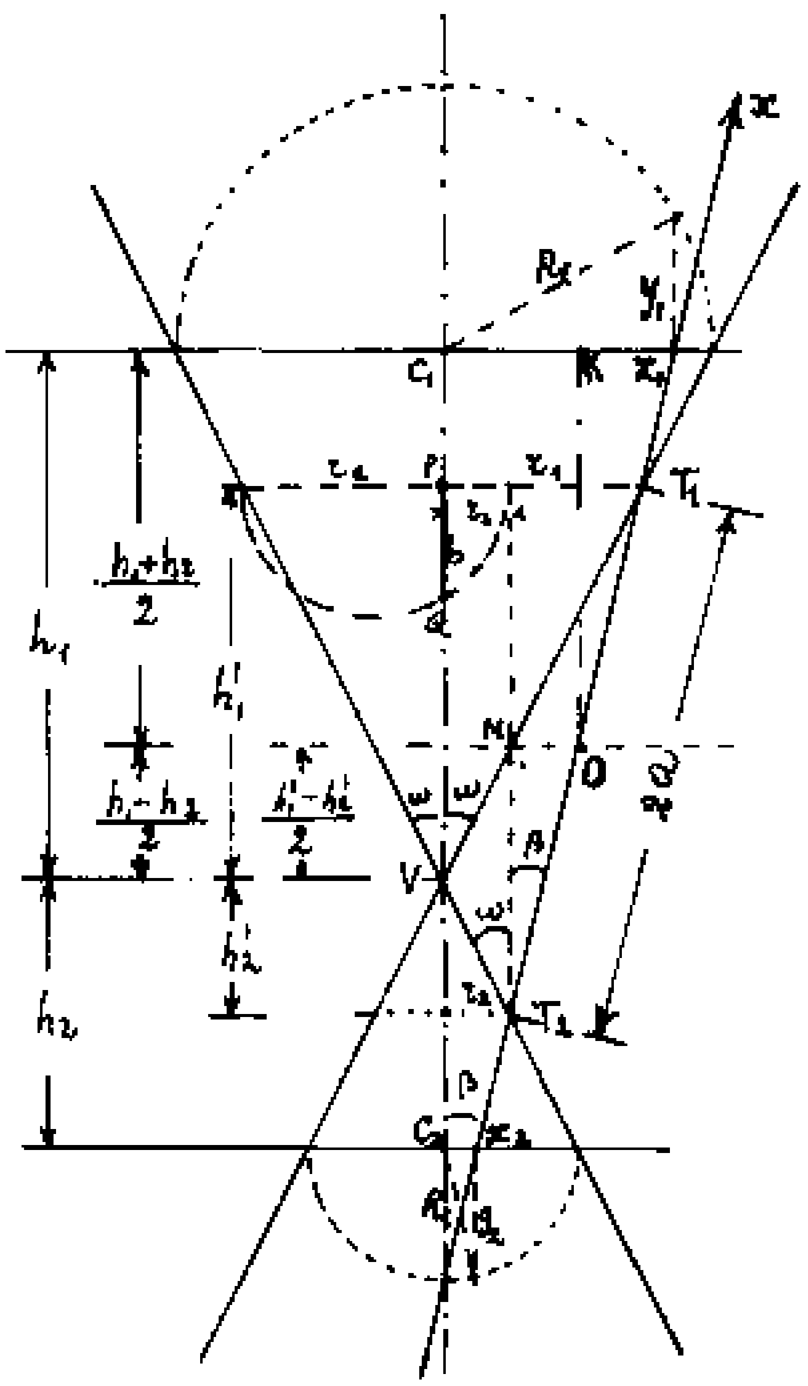
od anche:

$$\boxed{y_c = \left[\left(\frac{a}{b}x_c\right)^{2/3} - \left(\frac{d^2}{b}\right)^{2/3}\right]^{3/2}}$$



Notare che il raggio di curvatura dell'iperbole è normale all'iperbole e tangente all'evoluta.

L'Iperbole come intersezione di un piano con un cono



Sia 2ω l'angolo di apertura del cono, sia $\overline{T_1T_2} = 2a$ il segmento di traccia del piano di sezione, che rimane esterno al cono, sia β l'angolo di inclinazione dell'asse del cono sul piano di sezione.

Si assume la traccia del piano di sezione come asse x, con origine in O, punto medio fra T_1 e T_2. Sia "y" normale ad x, nel piano di sezione (Nel disegno l'asse y si proietta in O). Assunta una ascissa generica: $+x = \overline{Ox_1}$; $-x = Ox_2$, con $|\overline{Ox_1}| = |\overline{Ox_2}|$; ribaltando le sezioni rette del cono (cerchi di raggio R_1, R_2), individuiamo y_1 e y_2 (che dimostreremo essere uguali fra loro).

Possiamo scrivere: (vedi figura)

$$\begin{cases} 2a \cdot \cos(\beta) \cdot \tan(\omega) = (r_1 + r_2) \\ 2a \ \text{sen}(\beta) = (r_1 - r_2) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a \cos\beta \, tg\omega &= \frac{r_1 + r_2}{2} \\ a \,\text{sen}\beta &= \frac{r_1 - r_2}{2} \end{aligned}}$$

Perciò si noti che qualunque siano h_1 ed h_2, purché indicanti distanze dal vertice V, di sezioni equidistanti da "O", avremo che il punto medio è determinato da $\frac{h_1+h_2}{2}$, e se da questa sottraiamo h_2, avremo: $\frac{h_1+h_2}{2} - h_2 = \frac{h_1-h_2}{2}$,

ma: $\frac{h_1-h_2}{2} = \frac{h_1'-h_2'}{2}$, e poiché: $R_1 = h_1 \tan(\omega)$; $r_1 = h_1' \, tg(\omega)$,

avremo che: $\boxed{\frac{r_1-r_2}{2} = \frac{R_1-R_2}{2} = a \operatorname{sen}(\beta)}$.

$$\boxed{\frac{R_1+R_2}{2}} = \left(\frac{h_1+h_2}{2}\right)\tan(\omega) = (OK)\tan(\omega) = \boxed{x \cdot \cos(\beta)\, tg(\omega)}$$

Sommando e sottraendo le due equazioni abbiamo:

$$\begin{cases} R_1 = x\cos\beta\, tg(\omega) + a \operatorname{sen}\beta \\ R_2 = x\cos\beta\, tg\,\omega - a\operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 = a\cos\beta\, tg\,\omega + a\operatorname{sen}\beta \\ r_2 = a\cos\beta\, tg\,\omega - a\operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

avremo anche:

$$\begin{cases} \overline{C_1X_1}^2 = R_1^2 - y_1^2 \\ \overline{C_2X_2}^2 = R_2^2 - y_2^2 \end{cases}$$

sostituendo: $\overline{C_1X_1} = \frac{r_1+r_2}{2} + x\operatorname{sen}\beta$

$\overline{C_2X_2} = \frac{r_1+r_2}{2} - x\operatorname{sen}\beta$

$$\begin{cases} (a\cos\beta \cdot tg\,\omega + x\operatorname{sen}\beta)^2 = (x\cos\beta\, tg\,\omega + a\operatorname{sen}\beta)^2 - y_1^2 \\ (a\cos\beta\, tg\,\omega - x\operatorname{sen}\beta)^2 = (x\cos\beta\, tg\,\omega - a\operatorname{sen}\beta)^2 - y_2^2 \end{cases}$$

ove sviluppando i quadrati e semplificando i doppi prodotti uguali

$$\begin{cases} a^2\cos^2\beta\, tg^2\omega + x^2\operatorname{sen}^2\beta = a^2\operatorname{sen}^2\beta + x^2\cos^2\beta\, tg^2\omega - y_1^2 \\ a^2\cos^2\beta\, tg^2\omega + x^2\operatorname{sen}^2\beta = a^2\operatorname{sen}^2\beta + x^2\cos^2\beta\, tg^2\omega - y_2^2 \end{cases}$$

l'uguaglianza delle due espressioni dimostra: $\boxed{y_1^2 = y_2^2 = y^2}$

perciò:

$$x^2(\cos^2\beta\, tg^2\omega - \operatorname{sen}^2\beta) - y^2 = a^2(\cos^2\beta\, tg^2\omega - \operatorname{sen}^2\beta)$$

dividendo per $a^2(\cos^2\beta \cdot tg^2\omega - sen^2\beta)$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(\cos^2\beta\, tg^2\omega - sen^2\beta)} = 1$$

possiamo scrivere:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2\left(\frac{sen^2\omega - sen^2\beta}{\cos^2\omega}\right)} = 1$$

posto: $$b^2 = a^2\left(\frac{sen^2\omega - sen^2\beta}{\cos^2\omega}\right)$$

abbiamo: $$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

<u>Equazione dell'iperbole al centro.</u>

Cerchiamo ora di individuare il segmento "b"

$$a^2\cos^2\beta \cdot tg^2\omega = \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2$$

$$a^2 sen^2\beta = \left(\frac{r_1 - r_2}{2}\right)^2$$

$$\left(a^2\cos^2\beta\, tg^2\omega - a^2 sen^2\beta\right) = \underline{b^2 = r_1 r_2}$$

cioè: $$\boxed{b = \sqrt{r_1 r_2}}$$

<u>b è medio proporzionale fra r_1 ed r_2</u>: $\boxed{r_1 : b = b : r_2}$

<u>$b = \overline{PQ}$ (in figura)</u>

Poiché: $b/a = tg(\alpha)$ = coeff. angolare degli asintoti,

avremo che: $\boxed{tg^2(\alpha) = \cos^2\beta\, tg^2\omega - sen^2\beta}$

$$\boxed{\frac{b}{a} = \operatorname{tang}(\alpha) = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\omega - \operatorname{sen}^2\beta}{\cos^2\omega}}}$$

Si noti che β non può essere maggiore di ω perchè avremmo radici immaginarie.

per: $\beta = \omega$ si ha una parabola

$\beta > \omega$ " hanno ellissi.

Quando: $a = b$; $\operatorname{tang}(\alpha) = 1$; $(\alpha = 45°)$

gli asintoti sono ortogonali fra loro, e

$$\cos^2\omega = \operatorname{sen}^2\omega - \operatorname{sen}^2\beta$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\beta = \sqrt{\operatorname{sen}^2\omega - \cos^2\omega}}$$

Per: $\omega \geq 45°$ si hanno radici reali;

<u>e l'iperbole si dice equilatera</u>

per:

$\omega = 45° \longrightarrow \beta = 0$

$\omega = 60° \longrightarrow \beta = 45°$

$\omega = 90° \longrightarrow \beta = 90°$ (Il cono degenera in un piano)

L'equazione dell'iperbole ad assi traslati

Se x_0 ed y_0 sono le coordinate del centro assi cui si riferisce l'equazione canonica; avremo:

$$\boxed{b^2(x-x_0)^2 - a^2(y-y_0) = a^2b^2}$$

sviluppando:

$$\boxed{b^2x^2 - a^2y^2 - 2(b^2x_0)x + 2(a^2y_0)y + b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0}$$

dividendo per b^2:

$$\boxed{x^2 - (a/b)^2y^2 - 2(x_0)x + 2[(a/b)^2y_0]y + [x_0^2 - (a/b)^2y_0^2 - a^2] = 0}$$

$a_{11} = 1$; a_{22} $2a_{13}$ $2a_{23}$ a_{33}

manca il termine in xy, cioè: $2 \cdot a_{12} = 0$

Si noti che mentre nell'ellisse a_{11} ed a_{22} hanno lo stesso segno nell'iperbole hanno segni opposti.

Equazione dell'iperbole equilatera ad assi traslati

$$\boxed{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 = a^2}$$

$$\boxed{x^2 - y^2 - 2(x_0)x - 2(y_0)y + x_0^2 - y_0^2 - a^2 = 0}$$

Equazione che differisce da quella del cerchio perché i coefficienti di x^2 ed y^2 pur essendo uguali, hanno segno opposto.

Equazione dell'iperbole ad assi ruotati.

$$\boxed{b^2 X_1^2 - a^2 Y_1^2 = a^2 b^2}$$

$$\begin{cases} x_1 = y\,\mathrm{sen}\,\alpha + X\cos\alpha \\ y_1 = y\cos\alpha - X\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$$

sostituendo

$$b^2\left(y^2\mathrm{sen}^2\alpha + X^2\cos^2\alpha + 2Xy\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha\right) -$$
$$-a^2\left(y^2\cos^2\alpha + X^2\mathrm{sen}^2\alpha - 2Xy\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha\right) = a^2b^2$$

da cui:

$$\boxed{\left(b^2\cos^2\alpha - a^2\mathrm{sen}^2\alpha\right)X^2 + \left(b^2\mathrm{sen}^2\alpha - a^2\cos^2\alpha\right)y^2 + \left[\left(a^2+b^2\right)\mathrm{sen}\,2\alpha\right]Xy = a^2b^2}$$

I coefficienti possono essere moltiplicati per un K arbitrario, o possono assumere aspetti diversi, per esempio:

$$\boxed{K\left(1-\left(\frac{a\,tg\alpha}{b}\right)^2\right)X^2 + K\left(tg^2\alpha-\left(\frac{a}{b}\right)^2\right)y^2 + K\left[\frac{(a^2+b^2)\,\mathrm{sen}(2\alpha)}{b^2\cos^2\alpha}\right]Xy - \left(K\frac{a}{\cos^2\alpha}\right) = 0}$$

a_{11} $\qquad$ a_{22} $\qquad$ $2a_{12}$ $\qquad$ a_{33}

mancano i coefficienti a_{13} ed a_{23}.

Si notino i segni diversi nell'equazione dell'ellisse.

Equazione dell'iperbole equilatera ad assi ruotati

$$\boxed{K(\cos 2\alpha)X^2 - K(\cos 2\alpha)y^2 + K(2\,\mathrm{sen}\,2\alpha)Xy - Ka^2 = 0}$$

può scriversi:

$$\boxed{X^2 - y^2 + 2\,\mathrm{tang}(2\alpha)Xy - \frac{a^2}{\cos(2\alpha)} = 0}$$

a_{11} $\qquad$ a_{22} $\qquad$ $2a_{12}$ $\qquad$ a_{33}

Può sempre ridursi a questa forma, ove: $(2\alpha) = \mathrm{arctg}(a_{12})$.

Equazione dell'iperbole ad assi ruotati e traslati

Dette x_0, y_0 le coordinate del centro assi dell'equazione canonica, considerato che: $(x-x_0)(y-y_0) = xy - y_0x - x_0y + x_0y_0$, sostituendo gli assi traslati nella formula degli assi ruotati si ha:

$$\underbrace{(b^2\cos^2\alpha - a^2\operatorname{sen}^2\alpha)}_{a_{11}}x^2 + \underbrace{(b^2\operatorname{sen}^2\alpha - a^2\cos^2\alpha)}_{a_{22}}y^2 + \underbrace{((a^2+b^2)\operatorname{sen}(2\alpha))}_{2a_{12}}xy + \cdots$$

$$\cdots - (b^2\cos^2\alpha - a^2\operatorname{sen}^2\alpha)(2x_0)x - (b^2\operatorname{sen}^2\alpha - a^2\cos^2\alpha)(2y_0)y + \cdots$$

$$\cdots - ((a^2+b^2)\operatorname{sen}(2\alpha))(y_0)x - ((a^2+b^2)\operatorname{sen}(2\alpha))(x_0)y + \cdots$$

$$\cdots + \underbrace{\left[(b^2\cos^2\alpha - a^2\operatorname{sen}^2\alpha)x_0^2 + (b^2\operatorname{sen}^2\alpha - a^2\cos^2\alpha)y_0^2 + (a^2+b^2)\operatorname{sen}(2\alpha)x_0y_0 - a^2b^2\right]}_{a_{33}} = 0$$

Consideriamo i coefficienti dell'equazione completa.

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= (b^2\cos^2\alpha - a^2\operatorname{sen}^2\alpha)K \\ a_{22} &= (b^2\operatorname{sen}^2\alpha - a^2\cos^2\alpha)K \end{aligned}\right\} (a_{11}+a_{22}) = (b^2-a^2)K \; ; \quad (a_{11}-a_{22}) = (a^2+b^2)\cos(2\alpha)(K)$$

$$2a_{12} = ((a^2+b^2)\operatorname{sen}(2\alpha))K \longrightarrow \boxed{\frac{a_{12}}{(a_{11}-a_{22})} = tg(2\alpha)} \text{ (si trova l'angolo)}$$

$$2a_{13} = -\left[(b^2\cos^2\alpha - a^2\operatorname{sen}^2\alpha)(2x_0) + ((a^2+b^2)\operatorname{sen}(2\alpha))(y_0)\right]K$$

$$2a_{23} = -\left[(b^2\operatorname{sen}^2\alpha - a^2\cos^2\alpha)(2y_0) + ((a^2+b^2)\operatorname{sen}(2\alpha))(x_0)\right]K$$

$$a_{33} = \left[(b^2\cos^2\alpha - a^2\operatorname{sen}^2\alpha)x_0^2 + (b^2\operatorname{sen}^2\alpha - a^2\cos^2\alpha)y_0^2 + (a^2+b^2)\operatorname{sen}(2\alpha)x_0y_0 - a^2b^2\right]$$

Dal sistema:

$$\left\{\begin{aligned} (-2a_{13}) &= a_{11}(2x_0) + 2a_{12}(y_0) \\ (-2a_{23}) &= 2a_{12}(x_0) + a_{22}(2y_0) \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{x_0 = \frac{-2a_{22}2a_{13} + 2a_{12}2a_{23}}{4a_{11}a_{22} - (2a_{12})^2}} \quad \boxed{y_0 = \frac{-2a_{11}2a_{23} + 2a_{12}2a_{13}}{4a_{11}a_{22} - (2a_{12})^2}}$$

posto: $(-Ka^2b^2) = a'_{33}$; $a_{11} = a'_{11}$; $a_{22} = a'_{22}$; $2a_{12} = 2a'_{12}$; l'equazione è ridotta a solo ruotata. (che sappiamo risolvere).

Equazione dell'iperbole equilatera ad assi ruotati e traslati

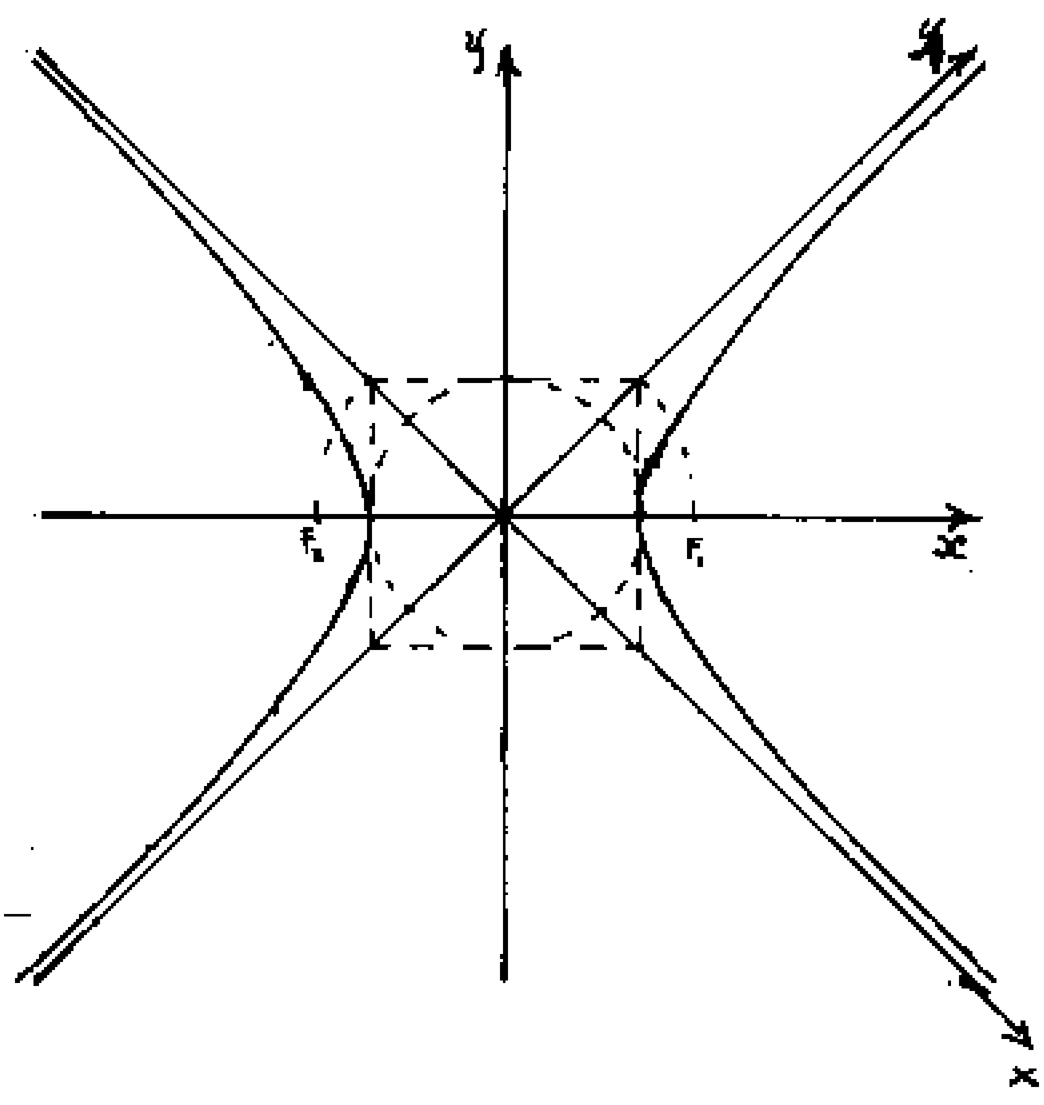
$$\boxed{x^2-y^2+2tg(2\alpha)xy-\left(2x_0+2tg(2\alpha)y_0\right)x-\left(2y_0+2tg(2\alpha)x_0\right)y+\left(x_0^2-y_0^2+2tg(2\alpha)x_0y_0-a^2\right)=0}$$

L'Iperbole equilatera

L'iperbole equilatera riveste particolare importanza in analisi matematica; è l'analoga del cerchio, infatti accanto alla trigonometria circolare, v'è, (come vedremo) la trigonometria iperbolica.

L'equazione al centro è:

$$\boxed{x^2-y^2=a^2}$$



Dall'equazione ad assi solo ruotati:

$$\cos(2\alpha)(x_1^2-y_1^2)+2\,\mathrm{sen}(2\alpha)\,x_1y_1=a^2$$

per $\alpha=45°$; $2\alpha=90°$

si ha: $2x_1y_1=a^2$

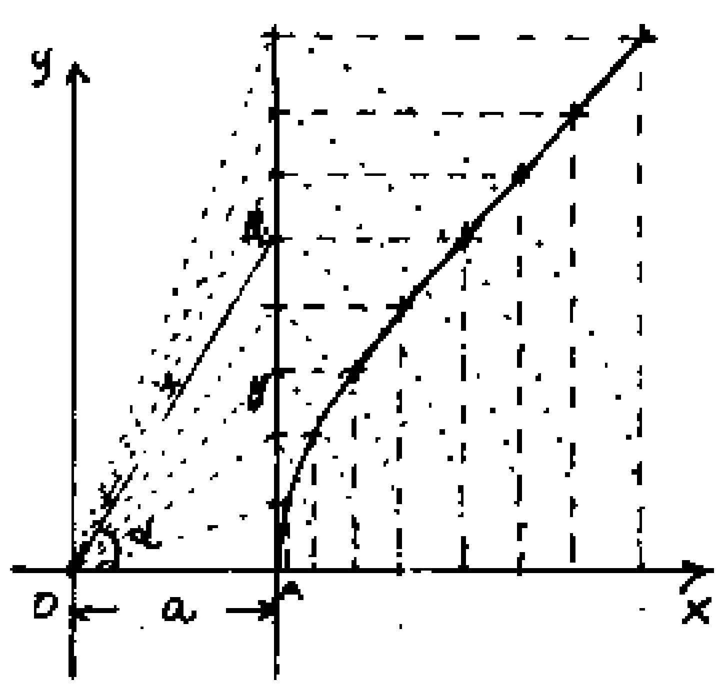
$$\boxed{x_1y_1=a^2/2}$$

che è l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti

Ricordiamo anche l'equazione in coordinate polari: $\boxed{\rho^2\cos(2\theta)=a^2}$

Costruzione grafica dell'iperbole equilatera

Consideriamo l'equazione dell'iperbole equilatera nella forma: $\boxed{x^2 - y^2 = a^2}$; oppure: $\boxed{x^2 = a^2 + y^2}$ si ha la visione di un triangolo rettangolo di cui è fisso un cateto. (nell'equazione della circonferenza era fissa l'ipotenusa) Il cateto fisso è "a"; ciò implica una facile determinazione dei punti dell'iperbole equilatera. Tracciamo una



retta: $x = a$; tutte le rette uscenti da "O", avranno "ipotenuse" $\overline{OB_i} = x$ (ascisse dell'iperbole equilatera) e staccheramo l'altro cateto $\overline{AB_i} = y$, (ordinate dell'iperbole equilatera) Se indichiamo con α l'angolo che le rette uscenti da "O" formano con le ascisse, avremo:

$$\boxed{\begin{cases} x = a/\cos(\alpha) \\ y = a\,tg(\alpha) \end{cases}}$$

(<u>coordinate parametriche dell'iperbole equilatera</u>)

elidendo "a" $= x\cos\alpha = y\dfrac{\cos\alpha}{sen\alpha} \longrightarrow \boxed{y = x\,sen\alpha}$

"Correlazione fra le coordinate dell'iperbole equilatera"

e siccome: $tg\,\theta = \dfrac{y}{x}$ avremo: $\boxed{tg(\theta) = sen(\alpha)}$

ove θ è l'argomento delle coordinate polari.

Si noti che $tg\,\theta$ non può essere maggiore di 1 cioè $\theta \leq 45°$ (angolo degli asintoti).

La derivata dell'iperbole equilatera

$$y = \sqrt{x^2 - a^2} \qquad y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} \qquad \boxed{y' = \frac{x}{y}}$$

Ció implica che la normale in un punto dell'iperbole equilatera incontri l'asse delle ascisse nel punto $2x$. (ascissa doppia). Derivando ancora:

$$y'' = \frac{\sqrt{x^2-a^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}}{(x^2-a^2)}$$

$$y'' = \frac{\cancel{x^2} - a^2 \cancel{-x^2}}{(x^2-a^2)^{3/2}} \qquad \boxed{y'' = \frac{-a^2}{(x^2-a^2)^{3/2}}}$$

Il raggio di curvatura

$$R = \left(1 + \frac{x^2}{x^2-a^2}\right)^{3/2} \Bigg/ \frac{a^2}{(x^2-a^2)^{3/2}}$$

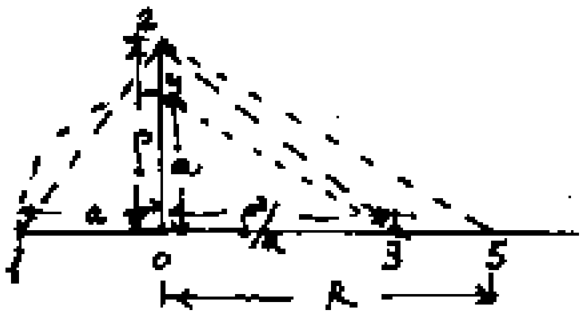
$$R = \frac{(2x^2-a^2)^{3/2}}{-a^2} = \frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{-a^2}$$

ma: $(x^2+y^2) = \rho^2$ perciò:

$$\boxed{R = \rho \cdot \frac{\rho^2}{a^2}}$$

nel vertice: $\boxed{R_v = a}$; nell'ordinata di F $\boxed{R = 3a\sqrt{3}}$

Per la costruzione grafica di $R = \rho \cdot \frac{\rho}{a} \cdot \frac{\rho}{a}$ basta costruire il triangolo 0 1 2 ove: $\overline{01} = a$; $\overline{02} = \rho$



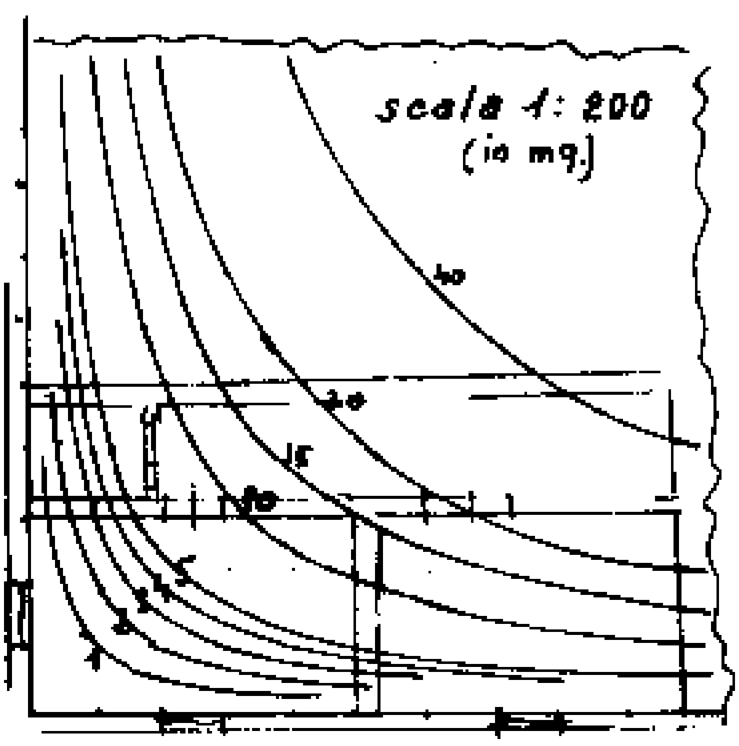
unito $\overline{12}$ e da 2 la normale 23 ove $\overline{03} = \rho^2/a$

$\overline{04} = a$ unito $\overline{43}$ da 2 la parallela $\overline{25}$ ove $\overline{05} = R$.

L'Iperbole equilatera riferita agli asintoti

Abbiamo giá ricavata la formula, riferendo l'iperbole equilatera ad assi ruotati di 45°. Consideriamo ora la formula generica: $\boxed{X \cdot Y = K}$ ove K è una costante. Questa espressione è importantissima in molte applicazioni scientifiche; per esempio la legge di Boyle: $\boxed{p \cdot v = cost.}$ che rappresenta le isoterme alle variabili: "pressione"; "volume". La legge di Ohm: $\boxed{i \cdot r = V}$ ove ogni iperbole equilatera si riferisce ad una certa tensione costante, nelle variabili "resistenza" e "intensitá di corrente". ecc.

Una particolare applicazione dell'iperbole equilatera è quella di misurare aree rettangolari.



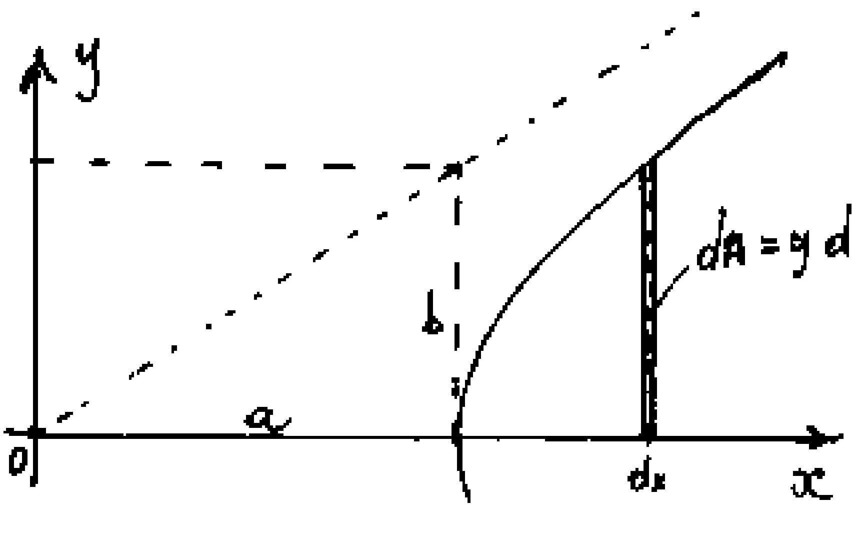
Disegnate in una certa scala, su carta trasparente, una serie di iperboli equilatere, sovrapponendo queste iperboli, per esempio ad una planimetria, è possibile vedere le area dei vani.

(Nel disegno si misura il vano d'angolo che risulta di 15 mq.)

Serve in particolare per individuare vani eccedenti o carenti misure assegnate. (per es. il "vano utile" del N.C.E.U a seconda le categorie era (7÷21) oppure (8÷24) mq).

L'Area dell'iperbole

Consideriamo l'iperbole al centro assi: $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$



$$A = b\int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right) dx$$

$$A = ab\int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\; d\left(\frac{x}{a}\right)$$

posto $\left(\frac{x}{a}\right) = \cosh(t)$; $\quad t = \operatorname{argcosh}\left(\frac{x}{a}\right) = \ln\left|\left(\frac{x}{a}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right|$

$$d\left(\frac{x}{a}\right) = d\cosh(t) = \operatorname{senh}(t)\,dt$$

$$A = ab\int \operatorname{senh}^2(t)\,dt$$

$$A = ab\left(\frac{\operatorname{senh}(t)\cosh(t) - t}{2}\right)$$

$$\boxed{A = \frac{ab}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1} - \ln\left|\left(\frac{x}{a}\right)+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right|\right]_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2}}$$

$$\boxed{A = \frac{ab}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b}\right) - \ln\left|\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right|\right]_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2}}$$

A, non è reale per $x_1 < a$

Per $x_1 = a \qquad A = 0$

Per $x = a\sqrt{2}$; $\quad A = \frac{ab}{2}\left[\sqrt{2} - \ln\left|\sqrt{2}+1\right|\right] = 0{,}26642\; ab$

$\ln\left|\left(\frac{x}{a}\right)+\left(\frac{y}{b}\right)\right| = \frac{xy-2A}{ab}$; $\quad \frac{e^{xy/ab}}{e^{2A/ab}} = \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$ poiché:

$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) = \frac{e^{2A/ab}}{e^{xy/ab}}$; $\quad e^{2A/ab} = e^{xy/ab}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$; $\quad \boxed{e^{2A} = e^{xy}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^{ab}}$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\ln\left|e^{xy}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^{(ab)}\right|}$$

Qualora l'iperbole sia equilatera:

$$A = \frac{a^2}{2}\left[\frac{x}{a}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1} - \ln\left|\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right|\right]$$

$$\boxed{A = \frac{xy}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x+y}{a}\right|}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\ln\left|e^{xy}\left(\frac{x-y}{a^2}\right)^{a^2}\right|}$$

Qualora l'iperbole equilatera sia riferita agli asintoti:

$$\boxed{y = K/x}$$

$$A = K\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x}$$

$$A = \Big[K \ln|x|\Big]_{x_1}^{x_2}$$

$$\boxed{A = K\cdot\ln\left|\frac{x_2}{x_1}\right|}$$

ma $K = a^2/2$

$$\boxed{A = \frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x_2}{x_1}\right|}$$

Se poniamo $x_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ed $x_2 = x$; $A = \frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}}{a}\right|$ che è l'area fra l'asintoto e l'arco di iperbole a partire dal vertice, per segmenti perpendicolari all'asintoto.

I diametri coniugati dell'iperbole

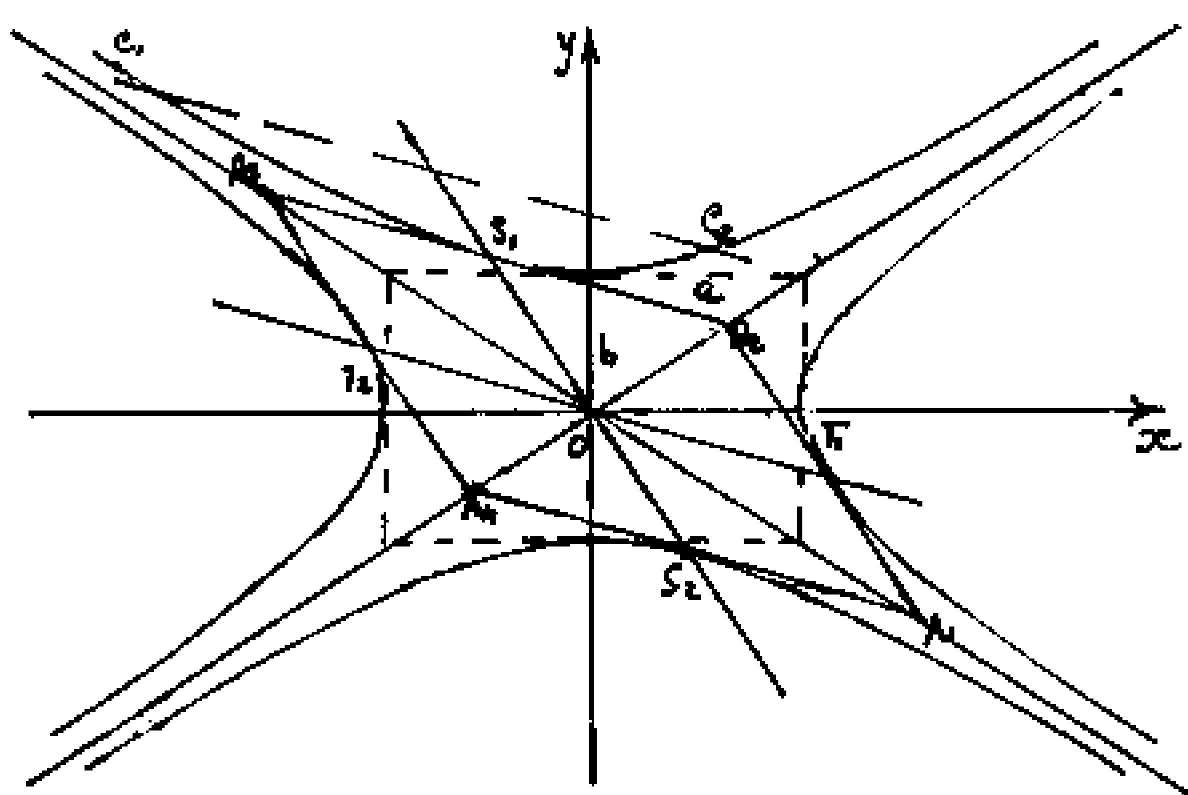
Abbiamo visto i diametri coniugati dell'ellisse. Premesso che l'ellisse e l'iperbole sono dette coniche centrali (ammettono un centro di simmetria), la parabola è una conica non centrale.

1). La retta che biseca le corde di una conica è detta diametro coniugato alla retta parallela alle corde bisecate e passante per il centro.

2) Tutti i diametri coniugati di una conica centrale passano per il centro

3) Tutti i diametri di una parabola sono paralleli all'asse.

Consideriamo la sezione conica che dá luogo all'iperbole; Si possono tracciare infiniti piani paralleli che sezionano il cono; peró, ve ne sará uno solo che "parallelo" passa anche per il vertice del cono. Questo piano taglia il cono secondo due rette che sono gli asintoti comuni a tutte le iperboli ottenute dalle sezioni, dello stesso cono, con piani ad esso paralleli. Le equazioni degli asintoti : $y = \pm \frac{b}{a} x$, sono condizionate dal rapporto: $\frac{b}{a}$. Al variare del rapporto: $\frac{b}{a} \lesseqgtr 1$ si hanno iperboli acutangole, equilatere, ottusangole; a seconda che gli asintoti formino un angolo acuto, retto, od ottuso nel campo delle linee iperboli. Cioè gli asintoti dividono lo spazio piano in quattro parti; in due opposti vi sono le curve iperboli che tagliano i semiassi "a" e non tagliano i semiassi "b", quando la formula è: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Se scrivessimo la formula: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; I rami di iperbole occuperebbero le altre due parti di spazio, se una è acutangola, l'altra è ottusangola, e queste due iperboli sono dette coniugate.

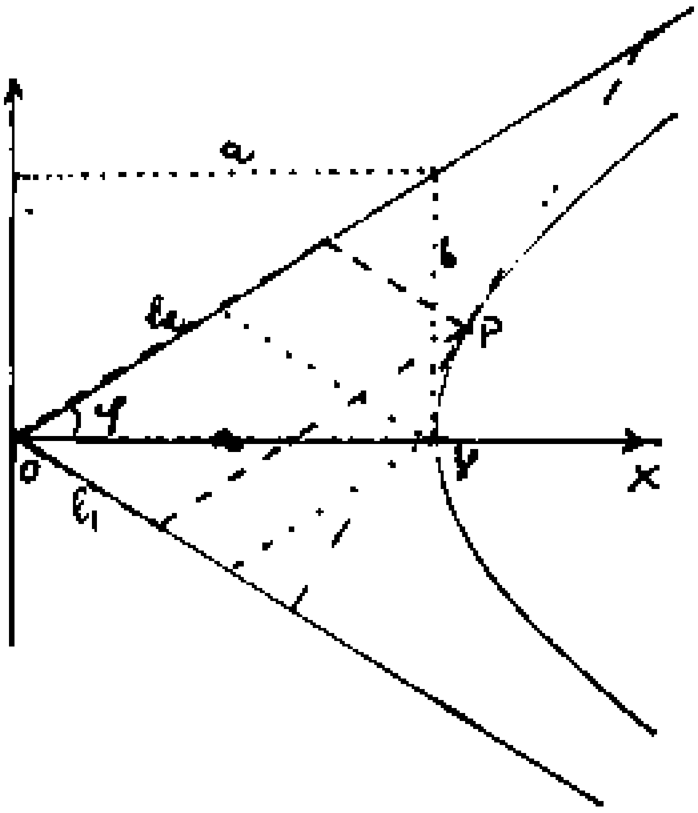


Consideriamo i punti T_1 e T_2 dell'iperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ed i punti S_1 ed S_2 della sua coniugata: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$. I segmenti di tangente in questi punti, intercettati fra gli asintoti, formano il parallelogramma: $A_1A_2A_3A_4$

Le rette: $\overline{T_2T_1}$ ed $\overline{S_2S_1}$ sono diametri coniugati

Quindi se consideriamo una sola iperbole, un diametro che tagli l'iperbole, il suo coniugato non la taglia

1) Il parallelogrammo che ha i lati sui due asintoti e sulle parallele ad essi condotte da un punto qualunque dell'iperbole, ha area costante.



Se indichiamo con l_1 ed l_2 i lati del parallelogrammo avremo:

$$y_p = (l_2 - l_1)\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad ; \quad x_p = (l_2 + l_1)\cos\varphi$$

$$(l_2 - l_1)^2\,\mathrm{sen}^2\varphi = \frac{b^2}{a^2}\left((l_2 + l_1)^2\cos^2\varphi - a^2\right)$$

ed essendo $b^2/a^2 = tg^2\varphi = \mathrm{sen}^2\varphi/\cos^2\varphi$

semplificando:

$$-2l_1l_2 = 2l_1l_2 - a^2/\cos^2\varphi$$

da cui: $l_1l_2 = a^2/4\cos^2\varphi$; $\boxed{l_1l_2 = \left(\frac{a}{2\cos\varphi}\right)^2}$ è l'equazione riferita ad assi obliqui (agli asintoti) che è del tipo: $\boxed{l_1l_2 = \text{cost.}}$

moltiplicando per $(\mathrm{sen}\,2\varphi)$ si ha: $A = 2l_1l_2\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi =$

$$\frac{a^2}{4}\frac{2\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi} = \frac{a}{2}a\,tg\,\varphi = \frac{a}{2}\cdot\frac{a\,b}{a}$$ cioè l'area costante: $\boxed{A = l_1l_2\,\mathrm{sen}\,2\varphi = \frac{ab}{2}}$

2) È costante l'area del triangolo che ha per lati i segmenti staccati sugli asintoti da una tangente qualsiasi all'iperbole, ed il segmento di tangente stessa.

Essendo la tangente parallela alla diagonale del parallelogrammo: $\boxed{A = (ab)}$

I teoremi di Apollonio Pergeo.

I due teoremi ora dimostrati sono la base per la dimostrazione dei seguenti teoremi detti di Apollonio.

1) L'area del parallelogrammo che ha per diagonali due diametri coniugati di due iperboli coniugate è costante.

2) L'area del parallelogrammo che ha per mediane due diametri coniugati di due iperboli coniugate è costante.

3) La differenza dei quadrati delle lunghezze di due diametri coniugati di due iperboli coniugate è costante.

Se ρ_1 e ρ_2 sono due semidiametri coniugati avremo:

$$\boxed{\rho_1^2 - \rho_2^2 = (a^2 - b^2)}$$

Se ρ_1 taglia l'iperbole, in coordinate polari si ha

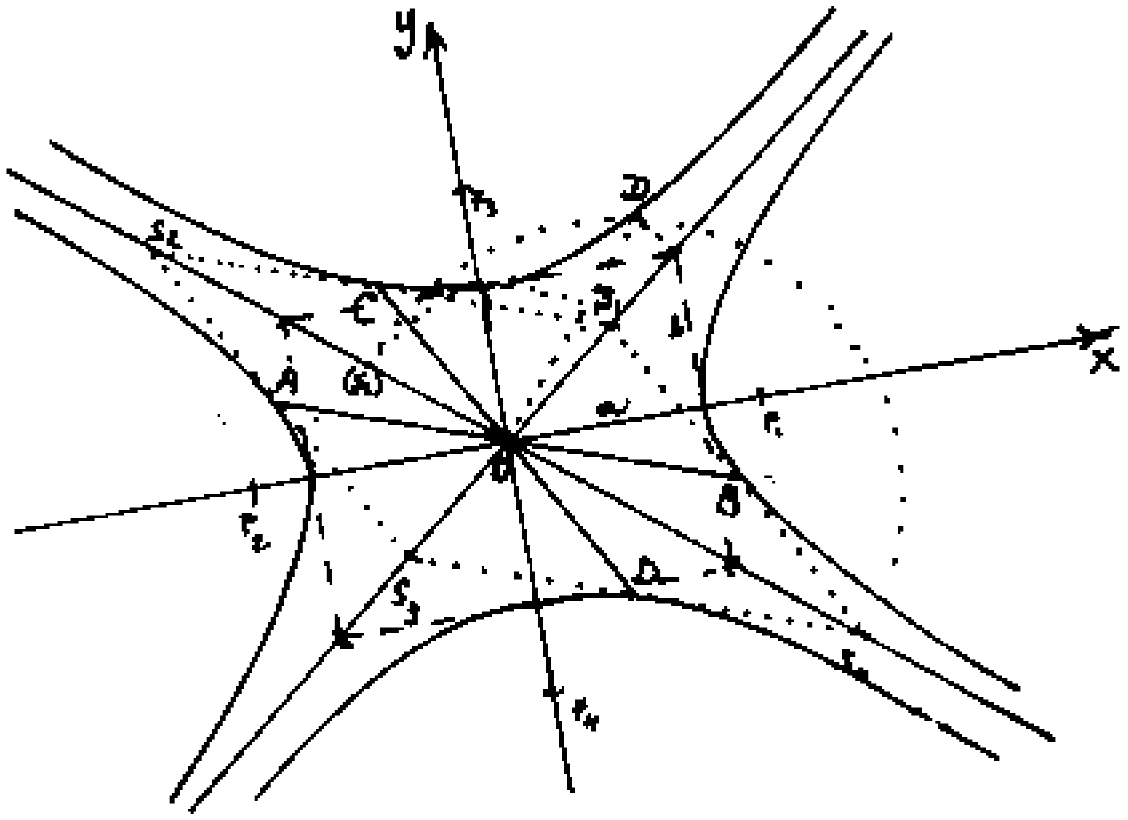
$$\rho_1^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta} = a^2 - b^2 + \rho_2^2$$

avremo:

$$\rho_2^2 = \frac{\cancel{a^2b^2} - \cancel{a^2b^2\cos^2\theta} \quad \cancel{a^2b^2\sin^2\theta} + a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta}{b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta}$$

$$\boxed{\rho_2^2 = \frac{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta}{b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta}}$$

Dati due diametri coniugati di due iperbole coniugate, trovare gli assi, gli asintoti e disegnare le due iperboli.



Siano $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ i due diametri coniugati che si incontrano nel punto medio "O". Per A e per B tracciamo le parallele a $\overline{CD}$; per C e per D tracciamo le parallele ad AB. Queste parallele (tangenti alle iperboli in A, B, C, D) formano un parallelogrammo: $S_1 S_2 S_3 S_4$; le diagonali di questo parallelogrammo sono gli asintoti $\overline{OS_1}$, $\overline{OS_2}$, $\overline{OS_3}$, $\overline{OS_4}$. Le bisettrici degli asintoti sono le direzioni degli assi. Poiché è costante l'area dei triangoli fra due asintoti ed una qualsiasi tangente all'iperbole, (per es. S_1OS_4 : $A = \overline{OS_1} \cdot \overline{OS_4} \cdot sen(2\varphi)$); poiché rimane costante l'angolo fra gli asintoti (2φ) avremo che $A = d^2 sen(2\varphi)$, cioè d è medio geometrico fra $\overline{OS_1}$ ed $\overline{OS_4}$. Riportato S_1 su $\overline{S_1S_4}$ in (S_1); semicerchio di diametro: $\overline{(S_1)S_4}$, da "O" la normale $\overline{OD}$; ove $\overline{OD} = d$, e; $d^2 = (a^2+b^2)$

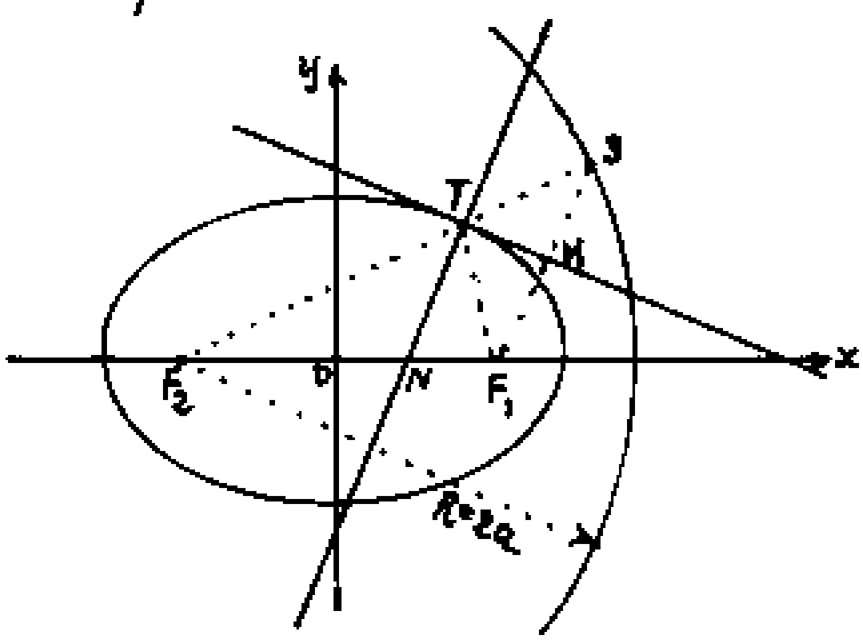
Riportato $\overline{OD} = d$ sugli asintoti si ha il rettangolo: $2a$, $2b$.

I circoli direttori dell'iperbole (ed ellisse)

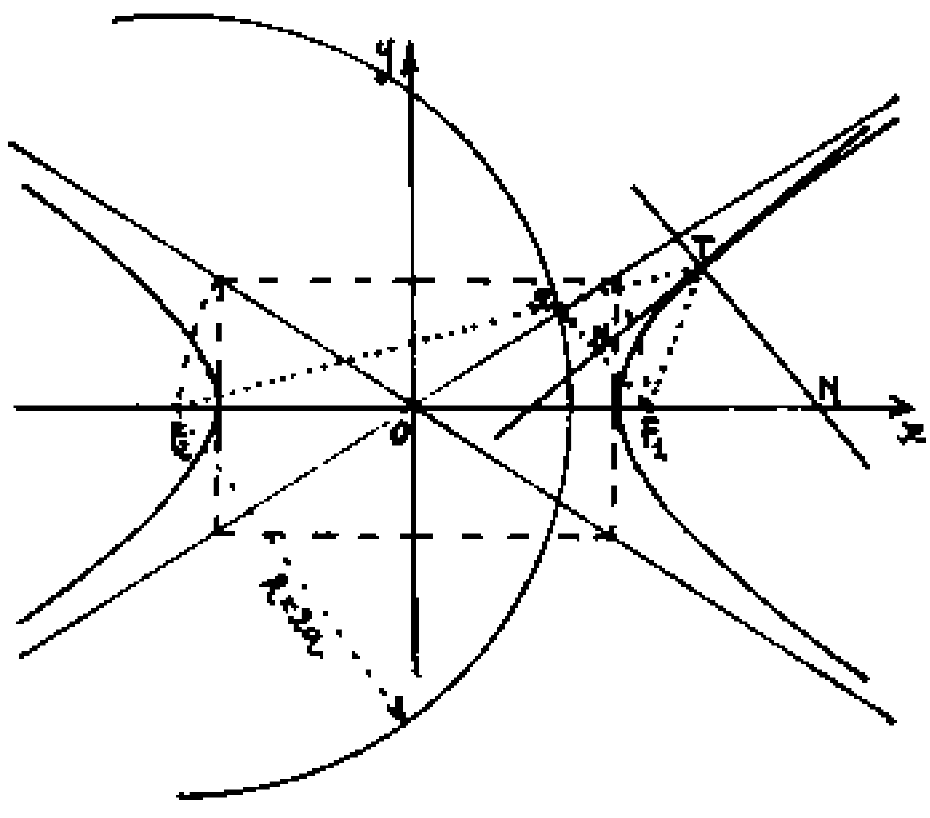
Sono detti circoli direttori (per l'ellisse e l'iperbole) i cerchi aventi il raggio pari all'asse principale: "$2a$" e per centro uno dei fuochi.

L'asse: "$2a$" è anche detto asse trasverso, mentre "$2b$" è detto asse non trasverso; "$2a$" talvolta è detto asse focale, nel senso che contiene i fuochi.

1) Il luogo dei punti simmetrici (equidistanti) di un fuoco (di una ellisse o di una iperbole) rispetto alle tangenti è il circolo direttore che ha per centro l'altro fuoco.



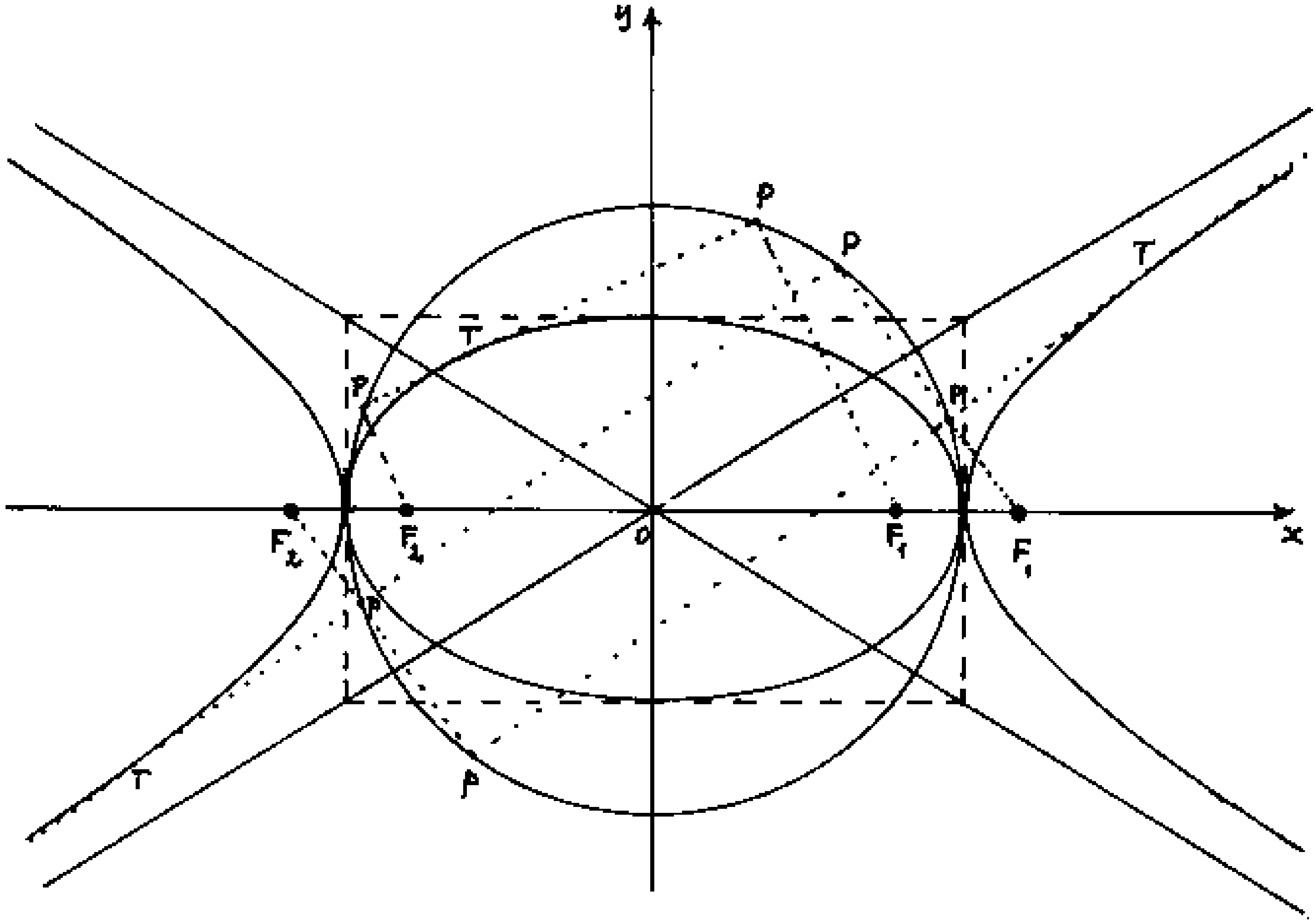
1) Per l'ellisse: essendo: $\overline{F_2S}=2a$, $\overline{TF_1}=\overline{TS}$, essendo $\overline{TN}$ parallelo ad $\overline{F_2S}$; "S" ed F_1 sono simmetrici rispetto ad M (cioè alla tangente).



2) Per l'iperbole: la dimostrazione è analoga; essendo: $\overline{F_2S}=2a$; $\overline{ST}=\overline{F_1T}$ e poiché: $\widehat{STM}=\widehat{F_1TM}$; "$S$" ed "$F_1$" sono simmetrici rispetto ad M (cioè rispetto alla tangente). ($\overline{SF_1}$ parallelo a $\overline{TN}$)

La podaria dell'iperbole (e dell'ellisse)

La podaria di un fuoco di una conica centrale (ellisse o iperbole) è il circolo che ha per diametro l'asse principale, e per centro il centro assi.



In figura: T = punti di tangenza; F = fuochi; P = piedi delle normali alle tangenti, dai fuochi.

La dimostrazione può farsi cercando il luogo geometrico dei punti M del precedente teorema. Unito O con M, essendo $\overline{F_2O} = \overline{OF_1}$ (vedi precedente figura) $\overline{OM}$ risulta parallelo ad $\overline{F_2S}$ ed $\overline{OM} = \frac{1}{2} F_2S$, ma $\overline{F_2S} = 2a$ per cui $\overline{OM} = a$ = raggio del cerchio di centro O, podaria dell'iperbole e dell'ellisse.

Proprietá focali dell'iperbole

Come per l'ellisse, le principali proprietá focali dell'iperbole sono giá state trattate.

1) La differenza delle distanze dei fuochi da un generico punto "T" dell'iperbole, è pari alla distanza dei vertici dei due rami dell'iperbole stessa. ($= 2a$).

(definizione di iperbole come luogo geometrico)

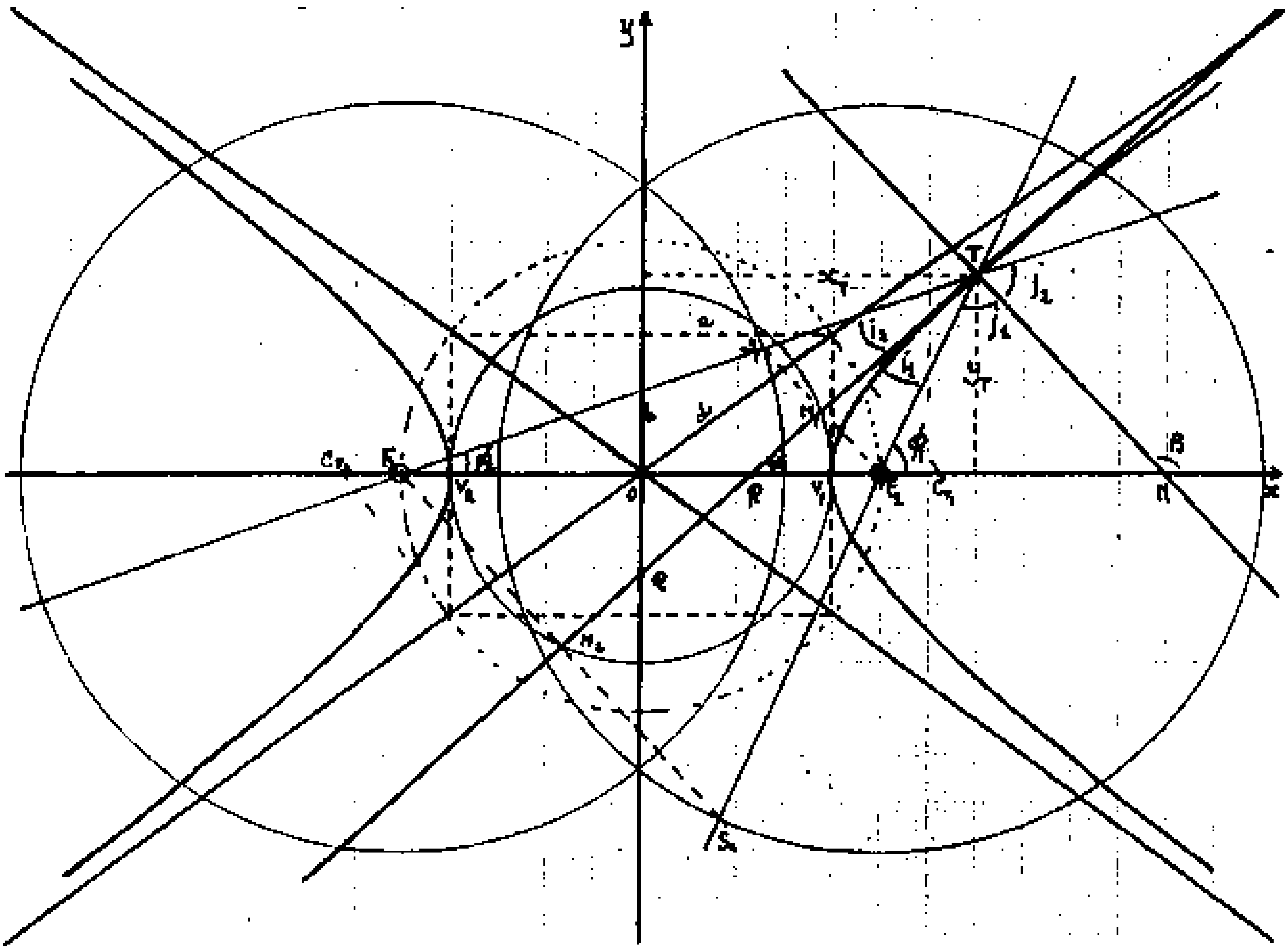
2) La normale e la tangente in un punto "T" dell'iperbole sono le bisettrici degli angoli formati dai raggi focali: F_1T ed F_2T.

3) L'iperbole (o l'ellisse) è il luogo dei punti equidistanti da un fuoco e dal corrispondente circolo direttore.

4) Il prodotto delle distanze dei fuochi di una conica centrale è costante e vale b^2.

(questa proprietá è stata dimostrata per l'ellisse).

Al fine di una visione completa delle caratteristiche dell'iperbole si fa una figura completa dei circoli direttori, del circolo podaria dei fuochi, e si mostra, tracciando una tangente e le normali ad essa dai fuochi, ed i raggi focali, le caratteristiche di tali circoli.



Calcoliamo utilizzando il simbolismo in figura.

$\overline{F_2T} = \rho_2 = \overline{F_2S_1} + \overline{S_1T} = 2a + \overline{S_1T} = (2a + \rho_1)$

$\overline{F_1T} = \rho_1 = \overline{S_1T} = \overline{F_2T} - \overline{S_1F_2} = (\rho_2 - 2a)$ (raggi focali)

$\phi_2 = x\widehat{F_2}T$; $\phi_1 = x\widehat{F_1}T$; (argomenti focali)

$(\rho ; \theta)$ (coordinate polari)

$(x_T ; y_T)$ (coordinate cartesiane)

$\overline{V_1V_2} = 2a$ = (distanza fra i vertici = asse principale)

$\overline{OF_1} = \overline{OF_2} = d = \sqrt{a^2+b^2}$ = (distanza focale) = "f"

C_{V_1} ; C_{V_2} = (centri di curvatura nei vertici)

M_1 ; M_2 = (piedi delle normali dai fuochi alla tangente)

(giacciono sulla podaria rispetto ai fuochi = cerchio di raggio "a")

In figura sono anche disegnati i circoli direttori di centri F_1 ; F_2 e raggio $2a$.

$\boxed{\rho_1 + \rho_2 = 2a}$ (per definizione di iperbole come luogo geometrico)

perciò: $\overline{S_1T} = \overline{F_1T}$ ove: $\overline{F_2S_1} = 2a$; ciò implica che il triangolo: S_1TF_1 sia isoscele; ma essendo $\overline{F_1S_2} = 2a$ = raggio del circolo direttore, anche il triangolo: F_2TS_2 è isoscele.

Calcoliamo gli angoli:

$\mathrm{sen}(\phi_2) = y_T/\rho_2 = \dfrac{y_T}{\sqrt{(x_T+f)^2 + y_T^2}}$; $\mathrm{sen}(\phi_1) = y_T/\rho_1 = \dfrac{y_T}{\sqrt{(f-x_T)^2 + y_T^2}}$;

$\cos(\phi_2) = \dfrac{(x_T+f)}{\rho_2} = \dfrac{(f+x_T)}{\sqrt{(x_T+f)^2 + y_T^2}}$; $\cos(\phi_1) = \dfrac{(f-x_T)}{\rho_1} = \dfrac{(f-x_T)}{\sqrt{(f-x_T)^2 + y_T^2}}$;

$\mathrm{tang}(\phi_2) = \dfrac{y_T}{(f+x_T)}$; $\mathrm{tang}(\phi_1) = \dfrac{y_T}{(f-x_T)}$;

Dall'equazione della tangente sappiamo: $(\alpha = x\hat{P}T)$;

$\boxed{\overline{OP} = a^2/x_T}$; $\boxed{\overline{OQ} = -b^2/y_T}$; $\boxed{\mathrm{tang}(\alpha) = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x_T}{y_T}}$

dall'equazione della normale sappiamo: $(\beta = x\hat{N}T)$

$\boxed{\overline{ON} = x_T f^2/a^2}$; $\boxed{\overline{OI} = y_T f^2/b^2}$; $\boxed{\mathrm{tang}(\beta) = -\left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{y_T}{x_T}}$

per il teorema dei seni: $\dfrac{\mathrm{sen}\,\phi_1}{\rho_2} = \dfrac{\mathrm{sen}\,\phi_2}{\rho_1} = \dfrac{\mathrm{sen}(i_1+i_2)}{2f}$

$\mathrm{sen}(i_2) = (f+\overline{OP})\dfrac{\mathrm{sen}\alpha}{\rho_2}$; $\mathrm{sen}(i_1) = (f-\overline{OP})\dfrac{\mathrm{sen}\alpha}{\rho_1}$;

$(f+\overline{OP}) = \left(\dfrac{f x_T + a^2}{x_T}\right)$; $(f-\overline{OP}) = \dfrac{f x_T - a^2}{x_T}$

$\rho_2 = \sqrt{(x_T+f)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x_T^2 - a^2)} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2x_T^2 + a^2f^2 + a^2(2fx_T) + b^2x_T^2 - b^2a^2} =$

$$\rho_2 = \frac{1}{a}\sqrt{(a^2+b^2)x_T^2 + a^2(a^2+b^2) + a^2(2fx_T) - a^2b^2} = \frac{1}{a}\sqrt{f^2x_T^2 + a^4 + 2(a^2fx_T)}$$

$$\boxed{\rho_2 = \frac{1}{a}(fx_T + a^2)}$$

$$\rho_1 = \sqrt{(x-f)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x_T^2 - a^2)} = \frac{1}{a}\sqrt{f^2x_T^2 + a^4 - 2a^2fx_T} \; ; \; \boxed{\rho_1 = \frac{1}{a}(fx_T - a^2)}$$

quindi:

$$\frac{f + \overline{OP}}{\rho_2} = \frac{\cancel{(fx_T + a^2)}}{x_T} \cdot \frac{a}{\cancel{(fx_T + a^2)}} = \frac{a}{x_T}$$

$$\frac{f - \overline{OP}}{\rho_1} = \frac{\cancel{(fx_T - a^2)}}{x_T} \cdot \frac{a}{\cancel{(fx_T - a^2)}} = \frac{a}{x_T}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(i_2) = \left(\frac{a \operatorname{sen}\alpha}{x_T}\right)} \; ; \; \boxed{\operatorname{sen} i_1 = \left(\frac{a \operatorname{sen}\alpha}{x_T}\right)}$$

Con ciò resta dimostrato che: $(i_1 = i_2)$ e quindi: $(\rho_1 = \rho_2)$. Il triangolo isoscele: S_1TF_1 ha la tangente $\overline{TM_1}$ come mediana, altezza, e bisettrice; $\boxed{\overline{F_1M_1} = \overline{M_1S_1} = \rho_1 \operatorname{sen}(i)}$; $\boxed{\overline{TM_1} = \rho_1 \cos(i)}$

$\boxed{\overline{F_2M_2} = \overline{M_2S_2} = \rho_2 \operatorname{sen}(i)}$; $\boxed{\overline{TM_2} = \rho_2 \cos(i)}$

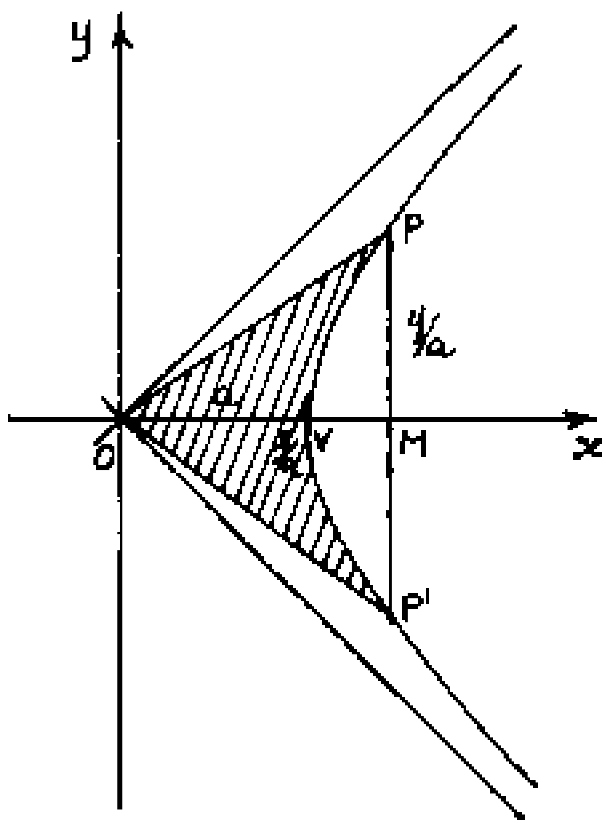
si ha anche: $\boxed{(\alpha + i) = \varphi_1 \quad ; \quad (\alpha - i) = \varphi_2}$

$$\boxed{\alpha = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}$$

L'angolo che la retta tangente in un punto T dell'iperbole forma con le ascisse, è la media degli angoli che i raggi focali di quel punto, formano con le stesse ascisse.

La trigonometria iperbolica

Sia : $\boxed{x^2 - y^2 = a^2}$ l'iperbole equilatera riferita agli assi oxy, e sia il vertice "V" ove $x_V = a$; $y_V = 0.$; cioè: $\overline{OV} = a$. L'ascissa generica $\overline{OM} = x$ corrisponda alle ordinate: $y = \overline{MP}$; $-y = \overline{MP'}$.



Consideriamo il triangolo iperbolico: OPVP'O, e poniamo l'area:

$$\boxed{A_{OPVP'O} = u a^2}$$

(area tratteggiata in figura), avremo:

$$\boxed{u = \frac{A_{OPVP'O}}{a^2}}$$

ove "u" è indipendente dal modulo grafico. L'area del triangolo isoscele OPP' sarà

$$\boxed{A_{OPP'} = \frac{x \cdot y}{a^2}}$$

L'area del segmento iperbolico : $A_s = \frac{xy}{a^2} - \ln\left|\frac{x+y}{a}\right|$ (era già calcolato nel paragrafo "area dell'iperbole).

per cui : $u = A_{OPP'} - A_s$; $u = \frac{xy}{a^2} - \frac{xy}{a^2} + \ln\left|\frac{x+y}{a}\right|$

$$\boxed{u = \ln\left|\frac{x+y}{a}\right|}$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = e^u}$$

posto: $\left(\frac{x}{a}\right) = \cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$

$\left(\frac{y}{a}\right) = \operatorname{senh}(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$

} vedi trigonometria complessa di Eulero

$$\boxed{\operatorname{senh}(u) + \cosh(u) = e^u}$$

Relazioni di Trigonometria Iperbolica

Dalla formula dell'iperbole abbiamo:

$$\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1}$$

per cui:

$$\boxed{\cosh^2(u) - \operatorname{senh}^2(u) = 1}$$

Questa relazione pitagorica fondamentale è l'analoga di $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ della trigonometria circolare.

$$\boxed{\frac{\operatorname{senh}(u)}{\cosh(u)} = \tanh(u) = \left(\frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}\right)}$$

dalla relazione pitagorica:

$$\left(\cosh^2(u) - 1\right) = \cosh^2(u) \cdot \tanh^2(u)$$

$$\boxed{\cosh(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2(u)}}}$$

$$\boxed{\operatorname{senh}(u) = \frac{\tanh(u)}{\sqrt{1 - \tanh^2(u)}}}$$

$$\operatorname{senh}(u)\cosh(u) = \frac{\tanh(u)}{1 - \tanh^2(u)} = \frac{1}{\coth(u) - \tanh(u)}$$

$$\operatorname{senh}(u)\cosh(u) = \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)\left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right) = \left(\frac{e^{2u} - e^{-2u}}{4}\right)$$

$$\boxed{\operatorname{senh}(2u) = 2\operatorname{senh}(u)\cosh(u)} \quad \text{(duplicazione)}$$

$$\cosh^2(u) + \operatorname{senh}^2(u) = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^2 = \left(\frac{2e^{2u} + 2e^{-2u}}{4}\right) = \left(\frac{e^{2u} + e^{-2u}}{2}\right)$$

$$\boxed{\cosh(2u) = \cosh^2(u) + \operatorname{senh}^2(u)} \quad \text{(duplicazione)}$$

$$\frac{\operatorname{senh}(2u)}{\cosh(2u)} = \frac{2\operatorname{senh}(u)\cosh(u)}{\cosh^2(u)+\operatorname{senh}^2(u)} = \frac{2\operatorname{senh}(u)\cosh(u)/\operatorname{senh}^2(u)}{(\cosh^2(u)+\operatorname{senh}^2(u))/\operatorname{senh}^2(u)}$$

$$\boxed{\tanh(2u) = \frac{2\tanh(u)}{1+\tanh^2(u)}}$$ (duplicazione)

<u>Formule di bisezione:</u>

$$\cosh(2u) = \begin{cases} (1+2\operatorname{senh}^2(u)) \rightarrow \operatorname{senh}(u) = \sqrt{\dfrac{\cosh(2u)-1}{2}} \\ (2\cosh^2(u)-1) \rightarrow \cosh(u) = \sqrt{\dfrac{\cosh(2u)+1}{2}} \end{cases}$$

per cui:

$$\boxed{\operatorname{senh}\left(\frac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(u)-1}{2}}}$$

$$\boxed{\cosh\left(\frac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(u)+1}{2}}}$$

$$\boxed{\tanh\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{\operatorname{senh}(u)}{\cosh(u)+1} = \frac{\cosh(u)-1}{\operatorname{senh}(u)}}$$

$$\boxed{\tanh\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{1-\tanh^2(u)}}{\tanh(u)}}$$

$$\boxed{\tanh\left(\frac{u}{2}\right) = \coth(u) - \sqrt{\coth^2(u)-1}}$$

<u>Formule di somma e sottrazione:</u>

$$\operatorname{senh}(u+v) = \frac{e^{u+v}-e^{-u-v}}{2} = \frac{2e^{u}\cdot e^{v} - 2e^{-u}\cdot e^{-v} - e^{-u+v} + e^{+u-v} + e^{-u+v} - e^{+u-v}}{4}$$

$$= \left(\frac{e^{u}-e^{-u}}{2}\right)\left(\frac{e^{v}+e^{-v}}{2}\right) + \left(\frac{e^{u}+e^{-u}}{2}\right)\left(\frac{e^{v}-e^{-v}}{2}\right)$$

infatti eseguendo i prodotti:

$$\frac{e^{u+v} - e^{-u+v} + e^{u-v} - e^{-u-v} + e^{u+v} + e^{-u+v} - e^{u-v} - e^{-u-v}}{4}$$

analogamente le altre.

Mentre in trigonometria circolare i segni di $\cos(\alpha \pm \beta)$ sono discordi, in trigonometria iperbolica sono tutti concordi

$$\boxed{\operatorname{senh}(u \pm v) = \operatorname{senh}(u)\cosh(v) \pm \cosh(u)\operatorname{senh}(v)}$$

$$\boxed{\cosh(u \pm v) = \cosh(u)\cosh(v) \pm \operatorname{senh}(u)\operatorname{senh}(v)}$$

$$\boxed{\tanh(u \pm v) = \frac{\tanh(u) \pm \tanh(v)}{1 \pm \tanh(u)\cdot\tanh(v)}}$$

$$\operatorname{senh}(u+v)\operatorname{senh}(u-v) = \operatorname{senh}^2(u)\cosh^2(v) - \cosh^2(u)\operatorname{senh}^2(v)$$

$$= \operatorname{senh}^2(u) + \cancel{\operatorname{senh}^2(u)\operatorname{senh}^2(v)} - \operatorname{senh}^2(v) - \cancel{\operatorname{senh}^2(u)\operatorname{senh}^2(v)}$$

$$\boxed{\operatorname{senh}(u+v)\operatorname{senh}(u-v) = \operatorname{senh}^2(u) - \operatorname{senh}^2(v) = \cosh^2(u) - \cosh^2(v)}$$

$$\boxed{\cosh(u+v)\cosh(u-v) = \operatorname{senh}^2(u) + \operatorname{senh}^2(v) = \cosh^2(u) + \cosh^2(v)}$$

<u>formule analoghe a quelle del Werner:</u>

$$\boxed{\begin{aligned}
2\operatorname{senh}(u)\cosh(v) &= \operatorname{senh}(u+v) + \operatorname{senh}(u-v) \\
2\cosh(u)\operatorname{senh}(v) &= \operatorname{senh}(u+v) - \operatorname{senh}(u-v) \\
2\cosh(u)\cosh(v) &= \cosh(u+v) + \cosh(u-v) \\
2\operatorname{senh}(u)\operatorname{senh}(v) &= \cosh(u+v) - \cosh(u-v)
\end{aligned}}$$

- Da queste analogamente alla trigonometria circolare si ha:

formule analoghe di prostaferesi

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{senh}(u) + \operatorname{senh}(v) &= 2\operatorname{senh}\left(\frac{u+v}{2}\right)\cosh\left(\frac{u-v}{2}\right)\\ \operatorname{senh}(u) - \operatorname{senh}(v) &= 2\cosh\left(\frac{u+v}{2}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{u-v}{2}\right)\\ \cosh(u) + \cosh(v) &= 2\cosh\left(\frac{u+v}{2}\right)\cosh\left(\frac{u-v}{2}\right)\\ \cosh(u) - \cosh(v) &= 2\operatorname{senh}\left(\frac{u+v}{2}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{u-v}{2}\right)\end{aligned}}$$

Le funzioni iperboliche inverse

Mentre nelle funzioni circolari l'inverso di: $\operatorname{sen}\alpha = K$ si scrive: $\alpha = \operatorname{arcsen}(K)$ e si legge: "l'arco il cui seno è K" intendendo per "arco" l'arco di raggio unitario che sottende l'angolo α cioè: α radianti; Invece la trigonometria iperbolica usa impropriamente il termine "trigonometria" perciò l'inverso di: $\operatorname{senh}(u) = K$ si scrive: $u = \operatorname{argsenh}(K)$ e si legge "l'argomento il cui seno iperbolico è K". Così per le altre funzioni.

$$\operatorname{senh}(u) = x = \frac{e^u - e^{-u}}{2} = \frac{e^{2u}-1}{2e^u} \;, \quad \boxed{e^{2u} - 2x e^u - 1} = 0$$

equazione di 2° grado:

$$\boxed{e^u = x \pm \sqrt{x^2+1}}$$

$$\boxed{u = \operatorname{argsenh}(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|}$$

si usa solo il segno(+) al radicale perché essendo: $\sqrt{x^2+1} > x$ col segno(−) avremmo il logaritmo di un numero negativo che non esiste.

Il valore di x può assumere tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$ cioè: senh(u) varia da $-\infty$ a $+\infty$.

consideriamo ora:

$\underline{\cosh(u) = x}$ da cui:

$$\boxed{u = \operatorname{argcosh}(x) = \ln\left|x \pm \sqrt{x^2-1}\right|}$$

questa volta: $\sqrt{x^2-1} < x$ per cui davanti al radicale è possibile il doppio segno ($\pm$), però x non può assumere valori negativi, né può assumere valori minori di 1, per cui $\cosh(u)$ varia da $+1$ a $+\infty$.

per $\underline{\tanh(u) = x}$ ove: $x = \dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$ da cui:

$x = \dfrac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1}$; $e^{2u}(x-1) + (x+1)$; $e^{2u} = \dfrac{(x+1)}{(1-x)}$

$$\boxed{u = \operatorname{argtanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right|}$$

in questo caso la variazione $-1 < x < +1$, cioè i valori di $\tanh(u)$ sono compresi fra -1 e $+1$.

per $\underline{\coth(u) = x}$ $x = \dfrac{e^{2u}+1}{e^{2u}-1}$; $e^{2u}(x-1) - (x+1)$

$$\boxed{u = \operatorname{argcoth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+1)}{(x-1)}\right|}$$

In questo caso i valori di $\coth(u)$ vanno da $-\infty$ a -1 poi saltano a $+1$ e vanno a $+\infty$.

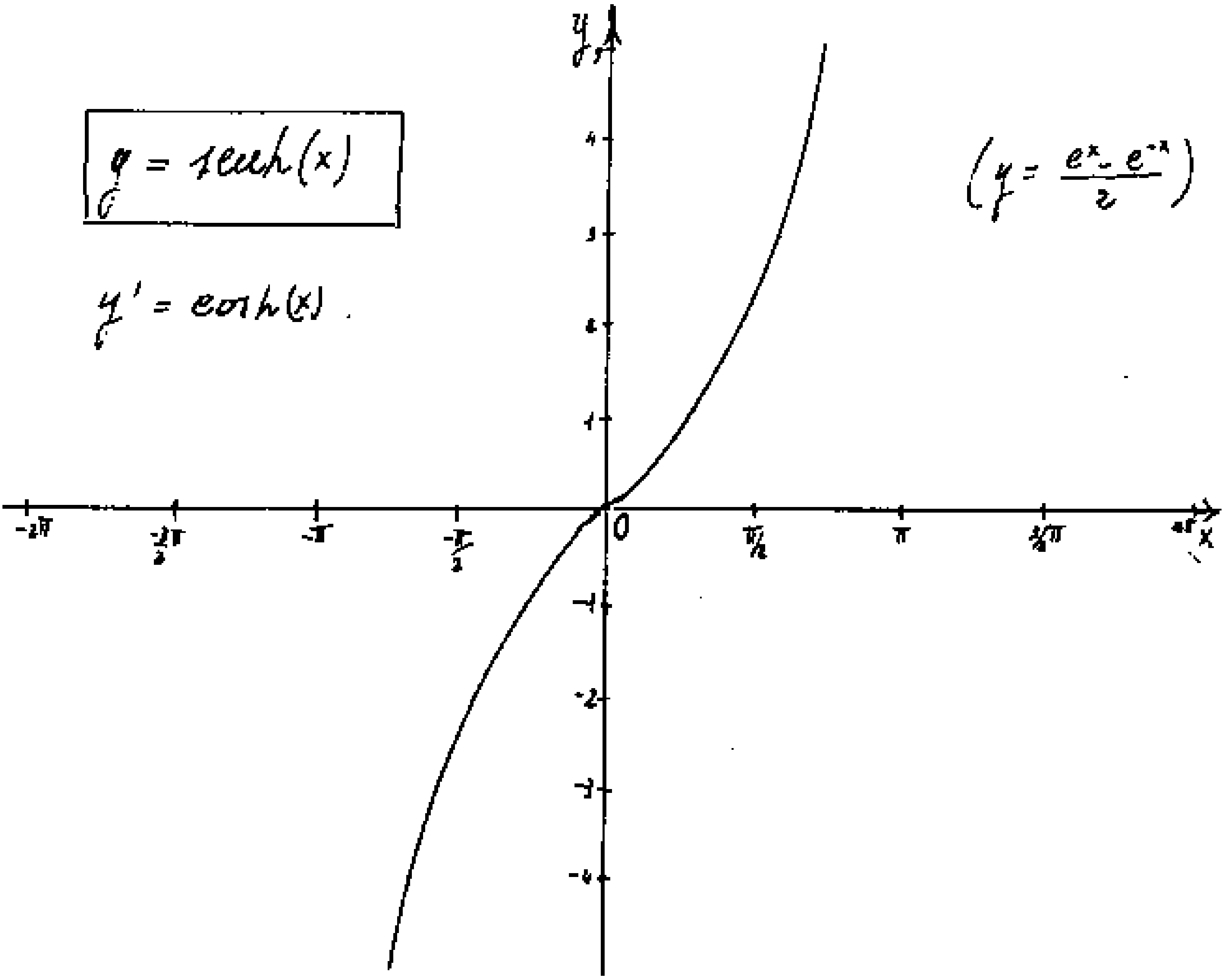
— —

Riportiamo i grafici delle funzioni iperboliche:

$$\boxed{y = \sinh(x)}$$

$$y' = \cosh(x)$$

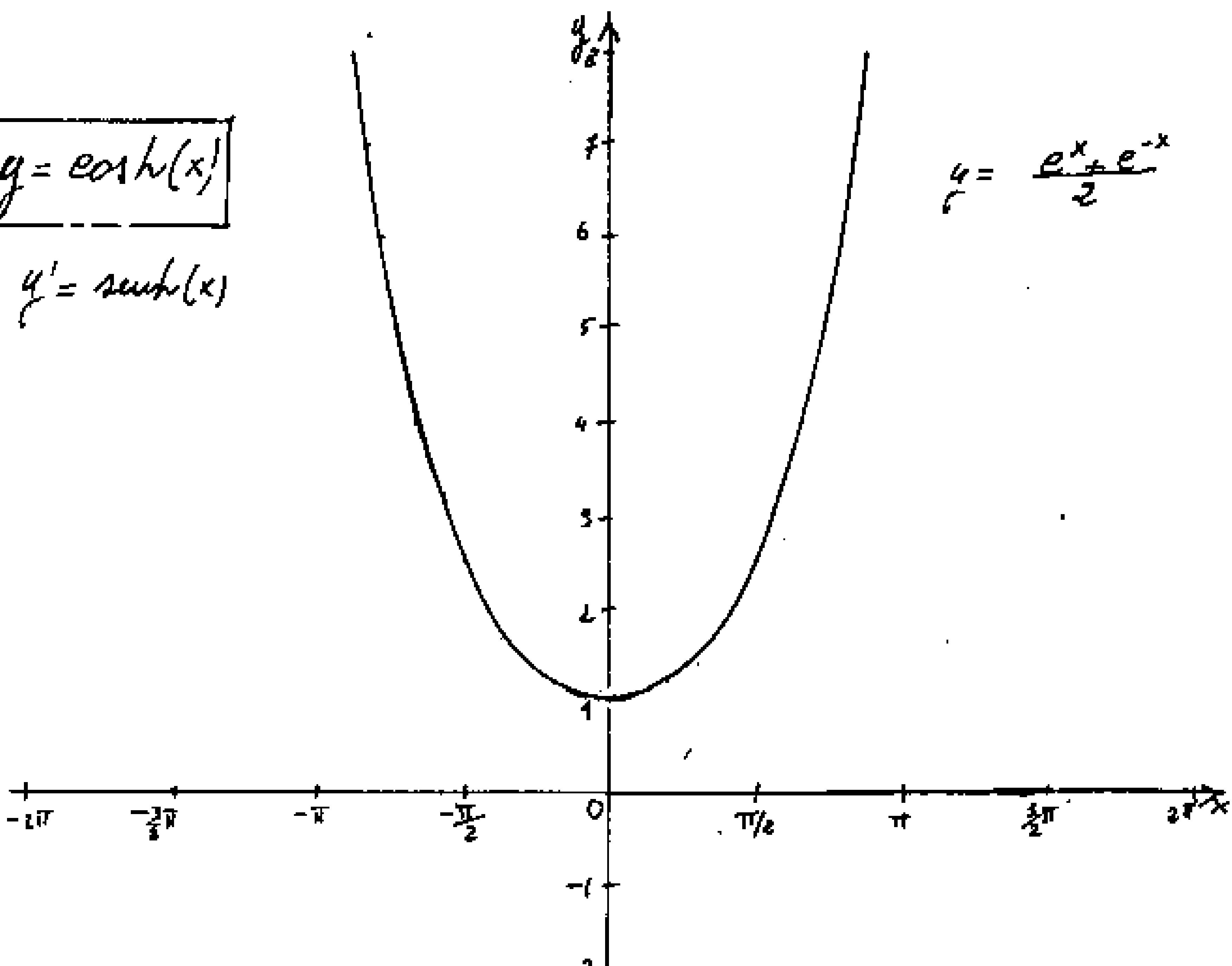
$$\left(y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

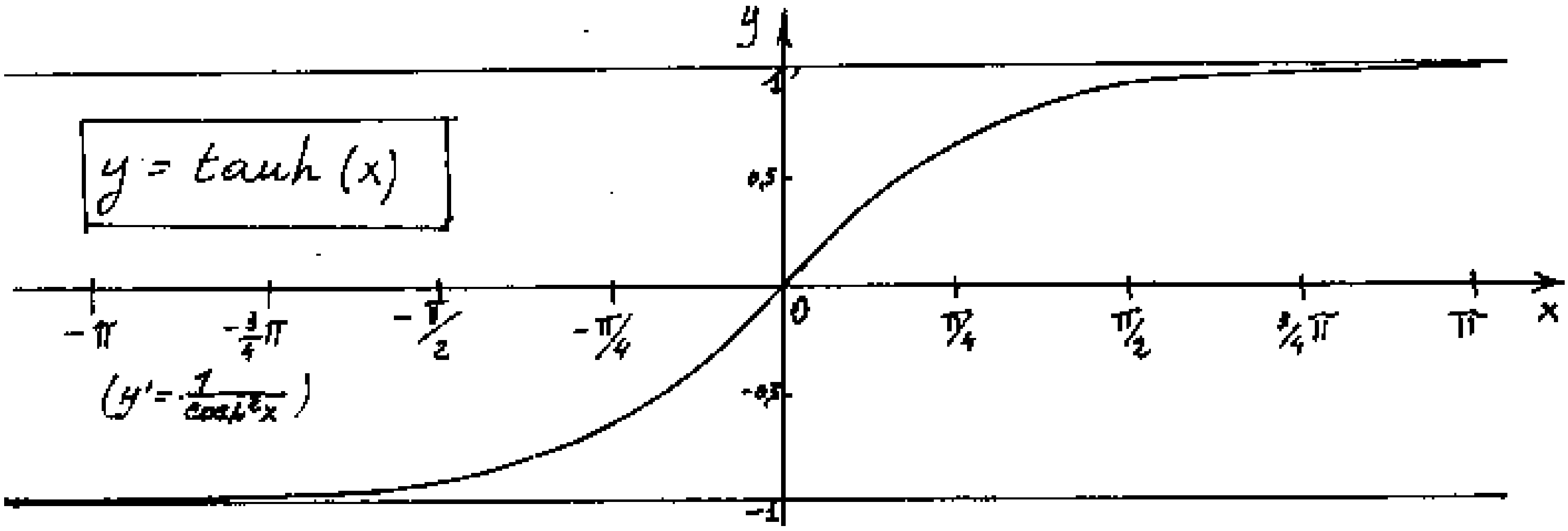


$$\boxed{y = \cosh(x)}$$

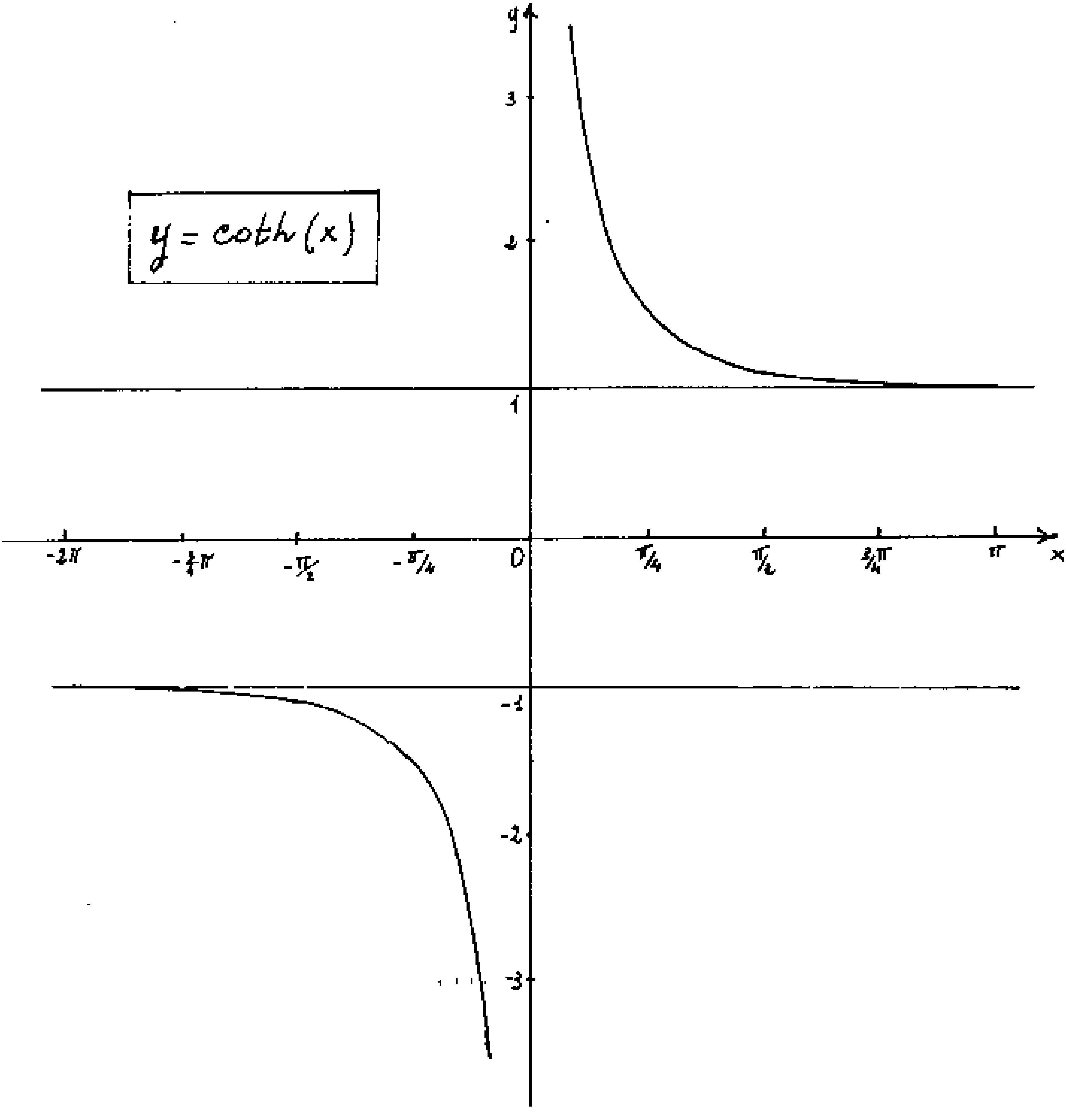
$$y' = \sinh(x)$$

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$





y
x
$y = \tanh(x)$
$(y' = \frac{1}{\cosh^2 x})$



y
x
$y = \coth(x)$

Relazioni fra le funzioni circolari e le iperboliche

Dalle formule di Eulero:

$$sen(u) = \left(\frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}\right) \quad ; \quad senh(u) = \left(\frac{e^{u} - e^{-u}}{2}\right)$$

$$\cos(u) = \left(\frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2}\right) \quad ; \quad \cosh(u) = \left(\frac{e^{u} + e^{-u}}{2}\right)$$

abbiamo:

$$\boxed{\cos(u) + i\,sen(u) = e^{iu}} \; ; \; \boxed{\cosh(u) + senh(u) = e^{u}}$$

$$\boxed{\cos(u) - i\,sen(u) = e^{-iu}} \; ; \; \boxed{\cosh(u) - senh(u) = e^{-u}}$$

$$\boxed{senh(iu) = i\,sen(u)} \quad ; \quad \boxed{senh(u) = -i\,sen(iu)}$$

$$\boxed{\cosh(iu) = \cos(u)} \quad ; \quad \boxed{\cosh(u) = \cos(iu)}$$

$$tang(u) = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{i(e^{iu} + e^{-iu})} \quad ; \quad tanh(u) = \frac{e^{u} - e^{-u}}{e^{u} + e^{-u}}$$

$$\boxed{tanh(iu) = i\,tang(u)} \quad ; \quad \boxed{tanh(u) = -i\,tang(iu)}$$

$$\boxed{\left[e^{(iu)} \cdot e^{-(iu)}\right] = (\cos(u) + i\,sen(u))(\cos(u) - i\,sen(u)) = 1}$$

$$\boxed{\left[e^{u} \cdot e^{-u}\right] = (\cosh(u) + senh(u))(\cosh(u) - senh(u)) = 1}$$

Si noti che l'argomento in trigonometria circolare è un angolo (che figura essere l'immaginario dell'argomento della trigonometria iperbolica, se ci riferiamo solo alle formule di Eulero.). Ma, (e^{iu}) è un ope=

rotore capace di ruotare dell'angolo "u" rispetto alla direzione fondamentale (che tal volta abbiamo chiamato, poco propriamente, asse reale), cioè la "variazione di direzione" è operata da: (e^{iu})
Quí occorre introdurre una estensione al "concetto direzione". Mentre nelle quantità strettamente numeriche si ha una sola direzione positiva o negativa a seconda che la sequenza numerica sia crescente o decrescente; nel piano geometrico si hanno infinite direzioni che, rispetto ad una direzione fondamentale possono essere definite (o quantificate) dall'operatore: "e^{iu}". Come si vede al concetto di quantità numerica esprimibile con un segmento (rispetto ad un arbitrario segmento unitario) o con un numero, si aggiunge il concetto di quantità angolare piana esprimibile, in un piano arbitrario rispetto ad una direzione arbitraria con un angolo geometrico (inferiore dell'angolo giro), con l'operatore: e^{iu} essendo "u" qualsiasi, pur limitandosi ad un angolo nel piano, si può esprimere anche il numero intero di giri e frazioni. (u è un numero reale).
Se estendiamo il campo al "tridimensionale" si ha ancora una direzione fondamentale an

comune di infiniti piani dello spazio tridimensionale, uno dei quali può essere assunto come fondamentale. La ruotazione dei piani intorno alla direzione principale è ancora un angolo piano misurabile sui piani di cui tale direzione principale è la retta di giacitura.
Poiché l'azione del ruotare implica un asse di rotazione, poiché nello spazio geometrico tridimensionale le rette angolarmente indipendenti, (cioè che hanno l'una sull'altra proiezione nulla) sono tre, fra loro ortogonali, assumeremo tali rette (x, y, z) (assi cartesiani ortogonali) anche come assi di rotazione. Avremo che tali assi si autogenerano: $y = x \cdot e^{i}$; $z = y \cdot e^{j}$ $x = z e^{k}$. Sostituendo: $x = e^{i} \cdot e^{j} \cdot e^{k} x$, perciò: $i + j + k = 0$ da cui: $i + j = -k$; ecc. Questa relazione ci dice che i tre operatori di rotazione non sono indipendenti, ma nello spazio tridimensionale geometrico bastano due angoli per definire una direzione rispetto a due direzioni arbitrarie fra loro ortogonali ed assi di ruotazione.
(Banalmente pensiamo ai rilievi topografici col teodolite. (angolo azimutale col nord, zenitale con la verticale)

Come si vede, da queste brevi osservazioni, "i" (coefficiente immaginario), introdotto per risolvere una radice ($\sqrt{-1}$), inesistente nel campo dei numeri reali, assume l'aspetto (molto reale) di "operatore" nel campo delle quantità angolari, ed è quindi: "molto meno "immaginario" di quanto si possa immaginare". Mentre un numero reale "n" implica una quantità numerica rispetto ad una unità qualificata e la qualificazione numerica non necessita di ulteriori precisazioni è quella che si dice: "quantità scalare", l'operatore i, ed i suoi analoghi, "j", "K", implicano quantità ed operazioni sulla "direzione" e sulle variazioni angolari, attenzione! è un pò di più di quelle che si dicono "grandezze vettoriali", infatti la variazione angolare può essere riferita all'unità di tempo, ed in tal senso si hanno le "frequenze" ed il concetto di "periodo" come il tempo di un ciclo. Nel VI volume vedremo come "la densità" definita come la "massa" dell'unità di "volume" equivalga al prodotto di due frequenze. Vedremo anche una più precisa correlazione fra le funzioni circolari e le funzioni iperboliche, ove qui abbiamo appena accennato all'apertura del problema.

La Gudermanniana

Considieriamo l'espressione: $\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$

e le forme equivalenti: $\boxed{\dfrac{1+tg(\theta/2)}{1-tg(\theta/2)}}$

od anche: $\boxed{\dfrac{(\cos(\theta/2)+\operatorname{sen}(\theta/2))}{(\cos(\theta/2)-\operatorname{sen}(\theta/2))}}$

moltiplicando numeratore e denominatore per $\left(\cos\frac{\theta}{2}-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)$ si ha: $\boxed{\dfrac{\cos(\theta)}{1-\operatorname{sen}(\theta)}}$ se moltiplichiamo per $\left(\cos\frac{\theta}{2}+\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)$: $\boxed{\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}$

cioè: $\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=\dfrac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}=\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\sec\theta+tg\,\theta}$

poiché: $tg(\theta/2)=\left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}\right)=\left(\dfrac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)$ sostituendo:

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=\frac{(1+\operatorname{sen}\theta)-\cos\theta}{\cos\theta-(1-\operatorname{sen}\theta)}=\frac{\cos\theta+(1+\operatorname{sen}\theta)}{(1-\operatorname{sen}\theta)+\cos\theta}}$$

che potevano ottenersi dalle $\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}$ per somma o differenza di numeratori e denominatori (vedi vol I - l'equivalenza di due frazioni)

poniamo:

$$\boxed{X=\ln\left|tg(\pi/4+\theta/2)\right|=\ln\left|\sec(\theta)+tg(\theta)\right|}$$

e possiamo sostituire in questa espressione tutte le forme equivalenti di $\left(tg(\pi/4+\theta/2)\right)$.

Scriviamola nella forma:

$$\boxed{e^{x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = (\sec(\theta) + tg(\theta))}$$

si dice: "<u>θ è la gudermanniana di x</u>"

e si simboleggia: $\boxed{\theta = gd(x)}$

$$gd(x) = 2\left(\operatorname{arctg}(e^{x}) - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{gd(x) = 2\operatorname{arctg}(e^{x}) - \frac{\pi}{2}}$$

<u>vediamo ora come la gudermanniana correlaziona le funzioni iperboliche e le funzioni circolari:</u> dalla $e^{x} = \frac{1}{\cos\theta} + tg\,\theta = \sqrt{1+tg^2\theta} + tg(\theta)$

si ha:

$$(\cancel{1} + \cancel{tg^2\theta}) = e^{2x} + \cancel{tg^2} - 2\,tg\theta \cdot e^{x}$$

$$tg\,\theta = \frac{e^{2x}-1}{2e^{x}} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

cioè:

$$tg(\theta) = \operatorname{senh}(x)$$

analogamente otteniamo:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{senh}(x) &= tg(\theta) \\ \tanh(x) &= \operatorname{sen}(\theta) \\ \cosh(x) &= \frac{1}{\cos(\theta)} = \sec(\theta) \\ \tanh\left(\frac{x}{2}\right) &= tg\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}}$$

$\left(\operatorname{sen}\theta = tg\,\theta/\sqrt{1+tg^2\theta} = \operatorname{senh}(x)/\cosh(x) = \tanh(x)\right)$.

abbiamo visto: $\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)+1} = \frac{\tanh(x)}{1+\frac{1}{\cosh(x)}}$

perciò:

$$\boxed{\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{1+\cos\theta} = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\frac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{e^{x/2}+e^{-x/2}} = \frac{(e^x-1)}{(e^x+1)} = \frac{(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})}{i(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})} = \frac{(e^{i\theta}-1)}{i(e^{i\theta}+1)}$$

$$\boxed{\left(\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}\right) = i\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}$$

se $(\theta = gd(x))$: $\boxed{\tanh\left(\frac{i\,gd(x)}{2}\right) = i\tanh\left(\frac{x}{2}\right)}$

Si noti come "i" operi sull'argomento e sulla funzione.

La derivata della gudermanniana

$$d\theta = d\left(gd(x)\right)dx = d\left(2\operatorname{arctg}(e^x) - \frac{\pi}{2}\right)dx$$

$$= \left(\frac{2e^x\,dx}{1+e^{2x}}\right) =$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}}$$

Si noti come la: $\theta = gd(x)$ riesca a correlare le grandezze angolari delle funzioni circolari con gli argomenti delle funzioni iperboliche senza avvalersi dell'immaginario.

Ch. Gudermann chiama l'angolo θ: "Longitudinalzahl di X"

Le coordinate parametriche dell'iperbole

Avvalendosi delle funzioni iperboliche si ha:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a\cosh(u) \\ y &= b\,\mathrm{senh}(u) \end{aligned}}$$ coordinate parametriche dell'iperbole.

Infatti: $\frac{x^2}{a^2} = \cosh^2(u)$; $\frac{y^2}{b^2} = \mathrm{senh}^2(u)$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 = \cosh^2(u) - \mathrm{senh}^2(u)$$

Le equazioni parametriche, avvalendosi della gudermanniana possono scriversi:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a/\cos(\theta) \\ y &= b\cdot tg(\theta) \end{aligned}}$$

ed essendo: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + tg^2$;

$\left(\frac{y}{b}\right)^2 = \tan^2(\theta) = tg^2\theta$;

sottraendo: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

ove: $\boxed{\text{l'angolo } \theta = gd(u)}$

Le coordinate polari e parametriche della parabola avvalendosi delle funzioni iperboliche.

dalla: $\rho = \frac{4a\,tg\theta}{\cos\theta} = \rho = 4a\,\mathrm{senh}(u)\cosh(u)$

cioè: $\boxed{\rho = 2a\,\mathrm{senh}(2u)}$ equazione in polari della parabola

dalla $x = 4a\,tg(\theta)$; $y = 4a\,tg^2\theta$ si ha: $\boxed{\begin{aligned} x &= 4a\,\mathrm{senh}(u) \\ y &= 4a\,\mathrm{senh}^2(u) \end{aligned}}$ parametriche

Problema inverso sulle coniche

"Dato un qualsiasi polinomio di secondo grado, in due variabili, determinare l'equazione canonica della conica e la posizione degli assi a cui si riferisce."

Un polinomio completo di 2° grado può sriversi:

$$\boxed{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0}$$

e rappresenta l'equazione generale delle coniche.

I coefficienti: a_{11}; $2a_{12}$; a_{22}; $2a_{13}$; $2a_{23}$; a_{33} (non tutti nulli) rappresentano i valori numerici noti dell'equazione da esaminare.

Per il principio di inversione degli indici: $a_{ij} = a_{ji}$; abbiamo:

a_{11} = (coefficiente di x^2)

$a_{12} = a_{21}$ = ($\frac{1}{2}$ coefficiente di $x.y$); ($2a_{12}$)

a_{22} = (coefficiente di y^2)

$a_{13} = a_{31}$ = ($\frac{1}{2}$ coefficiente della x); ($2a_{13}$)

$a_{23} = a_{32}$ = ($\frac{1}{2}$ coefficiente della y); ($2a_{23}$)

a_{33} = (valore numerico noto.)

Notiamo subito che l'equazione generale delle coniche, uguagliata a zero, non muta se viene moltiplicata per un qualsiasi $\pm K$ arbitrario. Perciò i coefficienti di una data equazione possono essere stati moltiplicati per un numero $\pm K$ (a noi incognito), tale da falsare il significato dei coefficienti stessi. Tuttavia, se di una data equazione, possiamo stabilire che un certo coefficiente: (per es. a_{11}, oppure a_{22}, oppure a_{33}) è certamente maggiore o minore di zero, mentre nell'equazione figura di segno opposto, in questi casi è opportuno moltiplicare l'intera equazione per (-1), in modo che i segni dei coefficienti corrispondano al loro significato.
(con ciò abbiamo reso l'eventuale $K > 0$).

- Il confronto delle equazioni date con quelle delle rispettive coniche: al centro, ad assi solo ruotati, o solo traslati, ad assi ruotati e traslati, che abbiamo già ricavate, ci consentirà di definire la conica nella sua reale posizione ed i suoi parametri; e, volendo, si può trovare anche il valore dell'eventuale $(\pm K)$.

Nel trattare le coniche abbiamo già puntualizzato come l'assenza o la presenza di certi coefficienti può dare informazioni preziose. Comunque tratteremo: passo-passo, il problema inverso.

Le equazioni canoniche e gli assi di riferimento

L'equazione canonica è l'equazione al centro di un sistema di assi, ricavata come luogo geometrico di punti che sottostanno o soddisfano una determinata legge. ——

Per l'ellisse

"Luogo dei punti per i quali la somma delle distanze da due punti detti fuochi è costante."

si ebbe l'equazione: $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ (canonica)

Attenzione:

abbiamo assunto l'asse x come asse focale e ciò, implica che $a > b$, non solo, ma che, se i fuochi giacciono sulla y (poiché l'asse y è l'asse x ruotato di $\pi/2$ rad. $= 90°$) l'equazione canonica rimane la stessa con l'avvertenza di specificare: "assi ruotati di $\pi/2$".

Cioè una equazione del tipo: $\boxed{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1}$ (ove $b > a$) non è l'equazione canonica, ma è l'equazione dell'ellisse: $\boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1}$ ruotato di $\pi/2$. Infatti ciò, è solo un caso particolare di assi ruotati ove $\alpha = \pi/2$.

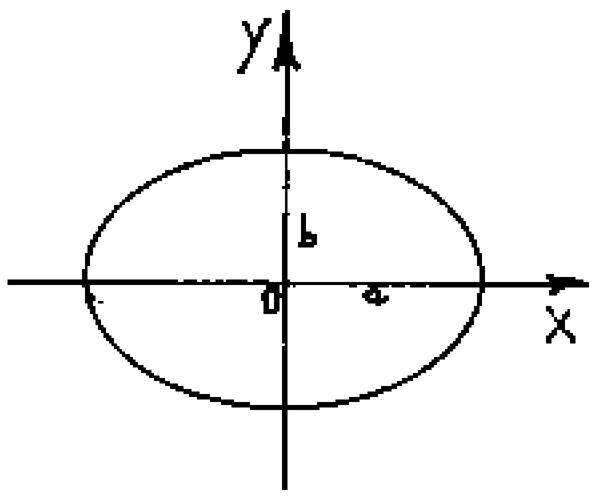
Intendiamo per "α" l'angolo che l'asse focale dell'ellisse ha formato col semiasse positivo delle ascisse x, od anche l'angolo antiorario descritto dagli assi

———

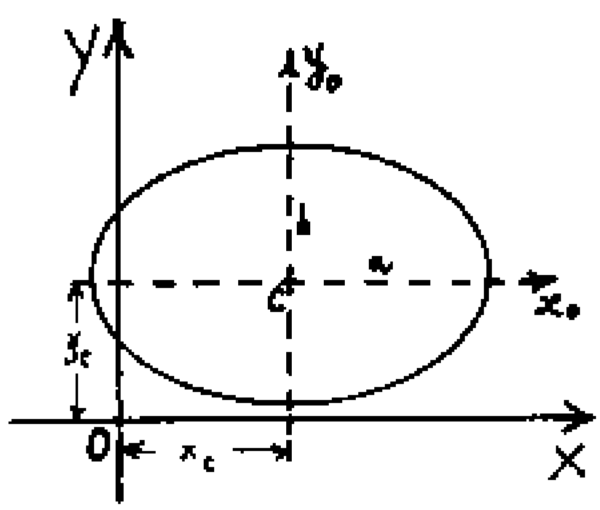
La conica può essere al centro assi (equazione canonica), può essere riferita ad assi solo traslati, o solo ruotati, o ruotati e traslati. – Riportiamo ad esempio l'ellisse e gli assi cui si riferisce l'equazione canonica. –

Gli assi di riferimento

equazioni



assi dell'equazione data con ellisse al centro $\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1\right)$ (canonica)

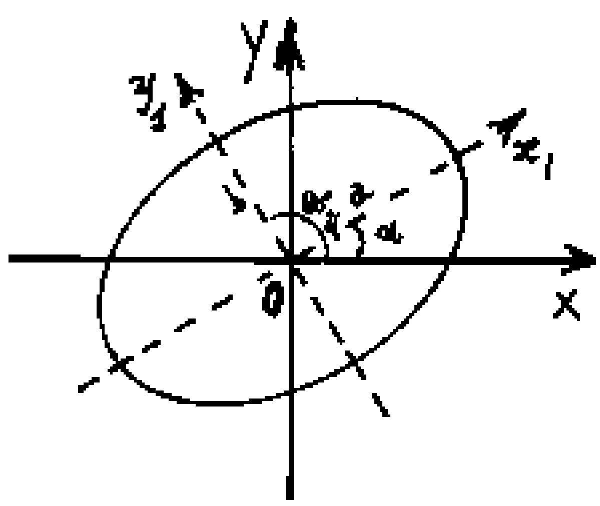


assi solo traslati: $\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1\right)$

$$\frac{(X-X_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1$$

$$b^2X^2+a^2y^2-2(x_c b^2)X-2(y_c a^2)y+(b^2x_c^2+a^2y_c^2-a^2b^2)=0$$

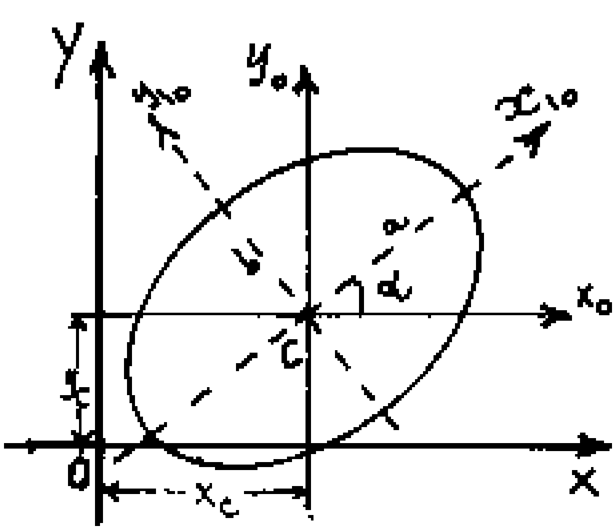
$$\boxed{a_{11}X^2+a_{22}y^2+2a_{13}X+2a_{23}y+a_{33}=0}$$



assi solo ruotati: $\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\right)$

l'equazione data può presentarsi:

$$\boxed{a_{11}X^2+a_{22}y^2+2a_{12}Xy+a_{33}=0}$$



assi ruotati e traslati: $\left(\frac{X_{1c}^2}{a^2}+\frac{y_{1c}^2}{b^2}=1\right)$

L'equazione data: $f(x,y)=0$

è in genere l'intero polinomio di 2° grado.

Avvertenza:

Per ottenere l'equazione di una conica ad assi ruotati e traslati occorre prima fare la ruotazione della conica al centro, e poi fare la traslazione. Se intendessimo di ruotare (applicando le note formule) una conica riferita ad assi traslati (cioè se facessimo prima la traslazione e poi la ruotazione) avverrebbe che la ruotazione non si verificherebbe intorno agli assi al centro della conica, ma intorno agli assi traslati, cui è riferita l'equazione; per cui, ruoterebbe anche il centro della conica e quindi risulterebbero variate le coordinate del centro C.

Chiariamo con un esempio. Ellisse: $a=3$; $b=2$; ruotato di $30°$; traslato $x_c=+5$; $y_c=+3$. equazione canonica: $\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\right)$

ad assi solo traslati: $4(x-5)^2+9(y-3)^2-36=0 \rightarrow \boxed{4x^2+9y^2+0-40x-54y+145=0}$

ad assi solo ruotati: $\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{1}{4}$; $\cos^2\alpha=\frac{3}{4}$; $a_{11}=\frac{9}{4}+\frac{12}{4}=\frac{21}{4}$; $a_{22}=\frac{4}{4}+\frac{27}{4}=\frac{31}{4}$;

$2a_{12}=\left(-5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $a_{33}=-36 \rightarrow \boxed{21x^2+31y^2-10\sqrt{3}\,xy+0+0-144=0}$

ad assi ruotati e traslati $21(x-5)^2+31(y-3)^2-10\sqrt{3}(x-5)(y-3)-144=0$

$21x^2-210x+31y^2-186y-10\sqrt{3}(xy-5y-3x+15)-144+525+279$

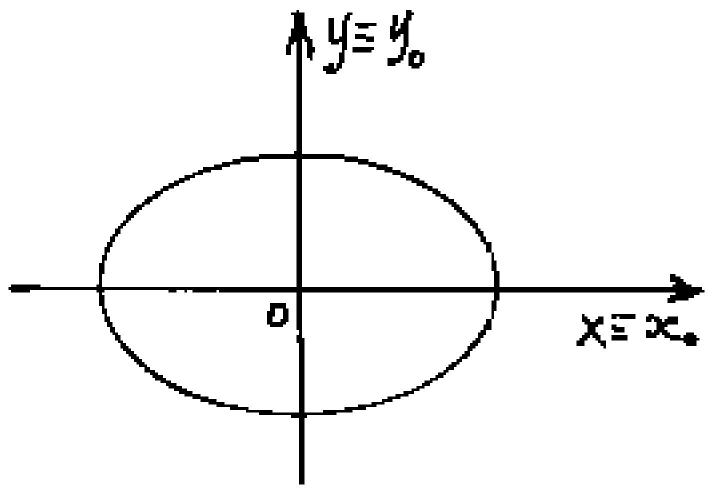
$$\boxed{0=21x^2+31y^2-10\sqrt{3}(xy)+(30\sqrt{3}-210)x+(50\sqrt{3}-186)y+(660-150\sqrt{3})}$$

Se applicassimo le formule: $\begin{cases} x_1=y\operatorname{sen}\alpha+x\cos\alpha \\ y_1=y\cos\alpha-x\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$ all'equazione ad assi traslati avremmo: $4\left(\frac{y}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{3}\right)^2+9\left(\frac{y}{2}\sqrt{3}-\frac{x}{2}\right)^2-40\left(\frac{y}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{3}\right)-54\left(\frac{y}{2}\sqrt{3}-\frac{x}{2}\right)+145=0$

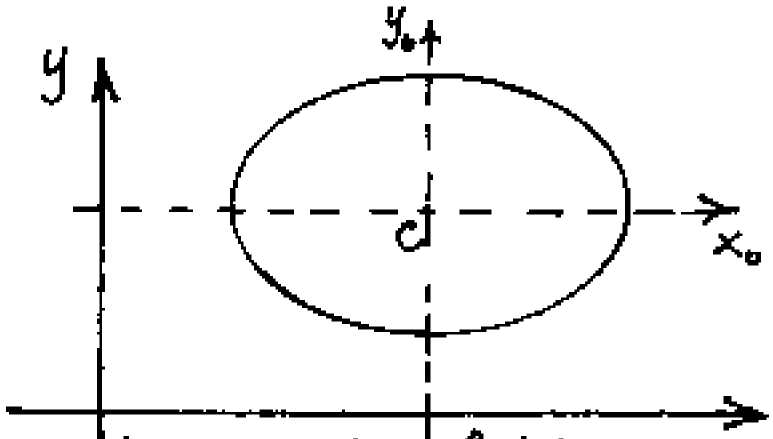
$y^2+3x^2+(2\sqrt{3})xy+\frac{27}{4}y^2+\frac{9}{4}x^2-\frac{9}{2}\sqrt{3}xy-(20)y-(20\sqrt{3})x-27\sqrt{3}\cdot y+27\cdot x+145=0$

$$\boxed{21x^2+31y^2-10\sqrt{3}\,xy+(108-80\sqrt{3})x-(80+108\sqrt{3})y+580=0}$$

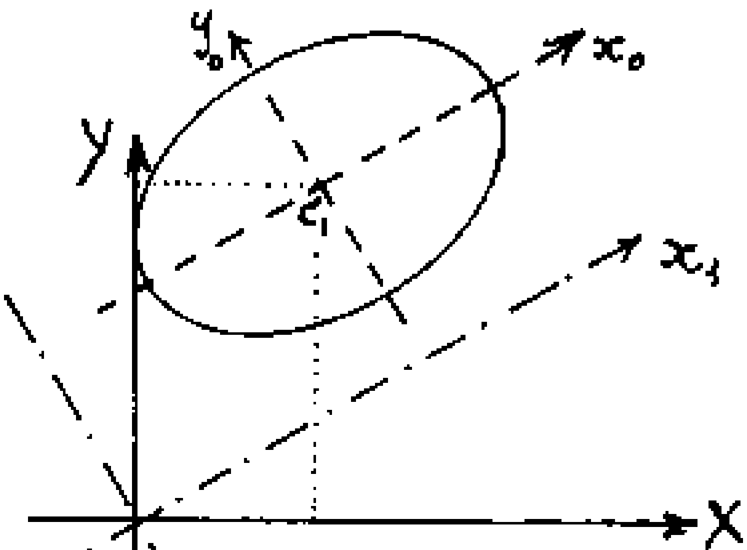
Confrontiamo ora le due formule e le rispettive rappresentazioni grafiche in scala 1:2cm. (cm 0,5 = unità)



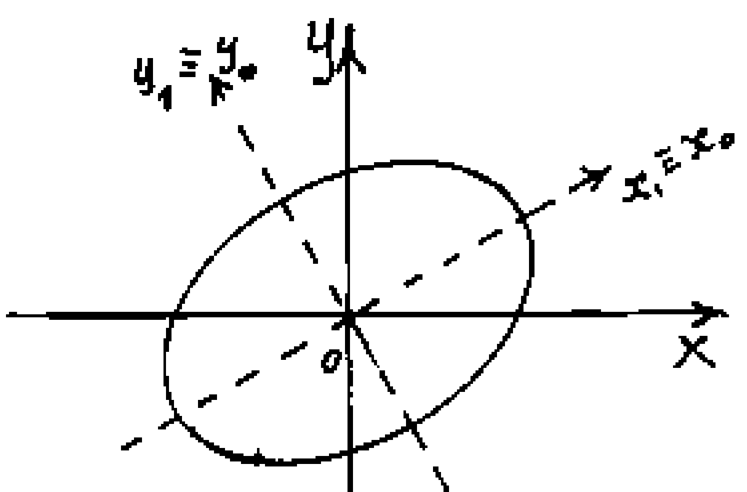
indichiamo con x_0, y_0 gli assi cui si riferisce l'equazione canonica cioè: $\boxed{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1}$



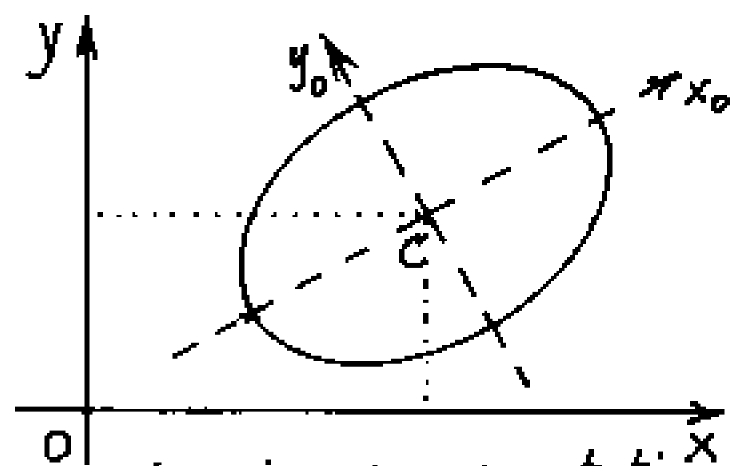
(assi solo traslati)



(assi prima traslati e poi ruotati)



(assi solo ruotati)



(assi prima ruotati e poi traslati)

Le rispettive equazioni:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \quad = \boxed{\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{4}=1}$$ equaz. canonica

$$\boxed{4X^2+9y^2-40X-54y+145=0}$$ equaz. ad assi solo traslati ($x_c=5$; $y_c=3$)

$$\boxed{21X^2+31y^2-(10\sqrt{3})Xy-144=0}$$ equaz. ad assi solo ruotati ($\alpha=30°=\frac{\pi}{6}$)

$$\boxed{21X^2+31y^2+2(-5\sqrt{3})Xy+2(15\sqrt{3}-105)X+2(25\sqrt{3}-93)Y+(660-150\sqrt{3})=0}$$ ad assi ruotati e traslati

$$\boxed{21X^2+31y^2+2(-5\sqrt{3})XY+2(54-40\sqrt{3})X-2(40+54\sqrt{3})y+580=0}$$ eq ad assi prima traslati poi ruotati

È bene aver presente che se una figura piana ruota, mantenendosi nello stesso piano, intorno ad un punto "P", tutti i punti della figura, escluso P, <u>traslano</u>; mentre tutti i segmenti della figura, ruotano <u>dello stesso angolo</u> e traslano coi punti che li compongono. Ciò implica che <u>gli assi</u> possono essere: <u>"solo ruotati"</u>, ma le figure ad essi riferite, in effetti, hanno anche traslazioni.
Una figura che trasla (assi solo traslati) non è affetta da ruotazione, e, sia prima che dopo la traslazione sia rispetto agli assi originari, sia rispetto agli assi <u>solo</u> traslati, i suoi segmenti si mantengono paralleli.
L'ellisse riferito prima ad assi traslati e poi ad assi ruotati ci aveva portato all'equazione:

$$\boxed{21x^2+31y^2+2(-5\sqrt{3})xy+2(54-40\sqrt{3})x+2(40-54\sqrt{3})y+580=0}$$

che differisce dall'equazione ad assi ruotati e traslati <u>solo nei coefficienti: $2a_{13}$; $2a_{23}$; $2a_{33}$.</u>

L'equazione generale dell'ellisse ad assi ruotati e traslati è:

$$a_{11}=(a^2\operatorname{sen}^2\alpha+b^2\cos^2\alpha) \quad = 9\tfrac{1}{4}+4\tfrac{3}{4}=\frac{21}{4}$$

$$a_{22}=(a^2\cos^2\alpha+b^2\operatorname{sen}^2\alpha) \quad = 9\tfrac{3}{4}+4\tfrac{1}{4}=\frac{31}{4}$$

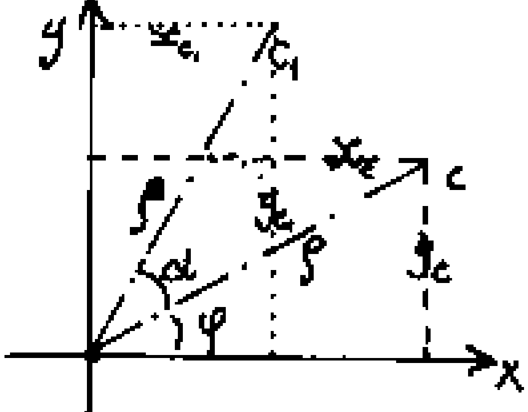
$$2a_{12}=((b^2-a^2)\operatorname{sen}2\alpha) \quad = (4-9)\tfrac{1}{2}\sqrt{3}=-\frac{5}{2}\sqrt{3}=-\frac{10}{4}\sqrt{3}$$

$$2a_{13}=-2(x_c a_{11}+y_c a_{12}) \quad =-2\left(5\tfrac{21}{4}+3\left(-\tfrac{5}{4}\sqrt{3}\right)\right)=-2\left(\frac{105-15\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$2a_{23}=-2(y_c a_{22}+x_c a_{12}) \quad =-2\left(3\tfrac{31}{4}+5\left(-\tfrac{5}{4}\sqrt{3}\right)\right)=-2\left(\frac{93-25\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$a_{33}=(x_c^2 a_{11}+y_c^2 a_{22}+x_c y_c 2a_{12}-a^2b^2)=\left(25\cdot\tfrac{21}{4}+9\tfrac{31}{4}+15\left(-\tfrac{10}{4}\sqrt{3}\right)-\frac{9\cdot4\cdot4}{4}\right)=\left(\frac{660-150\sqrt{3}}{4}\right)$$

Se moltiplichiamo per 4 otteniamo i coefficienti della nostra equazione ad assi ruotati e traslati.



Calcoliamo ora le nuove coordinate del centro dell'ellisse, traslato di $x_c = 5$; $y_c = 3$ e successivamente riferito ad assi ruotati.

$\rho = \sqrt{y_c^2 + x_c^2}$; $\operatorname{sen}\varphi = \frac{y_c}{\rho}$; $\cos\varphi = \frac{x_c}{\rho}$; $y_{c_1}/\rho = \operatorname{sen}(\alpha+\varphi) = (\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\operatorname{sen}\varphi)$

$y_{c_1}/\rho = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x_c}{\rho} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\frac{y_c}{\rho}\right) \rightarrow \boxed{y_{c_1} = \frac{1}{2}(5+3\sqrt{3})}$

$x_{c_1}/\rho = \cos(\alpha+\varphi) = \cos\alpha\cos\varphi - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\frac{x_c}{\rho} - \frac{1}{2}\frac{y_c}{\rho}\right) \rightarrow \boxed{x_{c_1} = \frac{1}{2}(5\sqrt{3}-3)}$

calcoliamo i coefficienti dell'equazione

$$2a_{13} = -2(x_{c_1}a_{11} + y_{c_1}a_{12}) = -2\left[\left(\frac{1}{2}5\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)\frac{31}{4} + \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\left(-\frac{5}{4}\sqrt{3}\right)\right] \rightarrow \frac{-80\sqrt{3}+108}{4}$$

$$2a_{33} = -2(y_{c_1}a_{22} + x_c a_{12}) = -2\left[\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\frac{31}{4} + \left(\frac{5}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{4}\sqrt{3}\right)\right] \rightarrow -\left(\frac{80+108\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$a_{33} = \left(x_{c_1}^2 a_{11} + y_{c_1}^2 a_{22} + x_{c_1}y_{c_1}2a_{12} - a^2b^2\right) = \left[\left(\frac{84-30\sqrt{3}}{4}\right)\frac{31}{4} + \left(\frac{52+30\sqrt{3}}{4}\right)\frac{31}{4} + \left(\frac{16+60\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{-10\sqrt{3}}{4}\right) + 36\right]$$

$$a_{33} = \frac{1}{4}\left(441 - \frac{315}{2}\sqrt{3} + 403 + \frac{465}{2}\sqrt{3} - 120 - 75\sqrt{3} - 144\right) \rightarrow \left(\frac{580}{4}\right)$$

Ritorna l'equazione ottenuta per rotazione di assi di un ellisse non al centro, cioè già traslato.

Poiché, dato un polinomio di 2° grado in due variabili, dobbiamo trovare la posizione degli assi: x_0, y_0 aventi in c il centro e rispetto ai quali l'ellisse ha l'equazione canonica, è evidente che i dati della traslazione x_c ed y_c si riferiscono al centro dell'ellisse e non possono essere mutevoli in funzione dell'angolo di rotazione. Ciò giustifica la nostra avvertenza.

La individuazione delle coniche

Data una equazione del tipo:

$$\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0}$$

dal determinante: (che già conosciamo)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A \begin{cases} = 0 \rightarrow (\underline{\text{conica degenere}}) \\ \neq 0 \rightarrow (\underline{\text{conica non degenere}}) \end{cases}$$

e dal minore:

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \text{abbiamo:}$$

- $A = 0 \rightarrow A_{33}$
  - $> 0 \rightarrow$ (coppia di rette convergenti immaginarie coniugate)
  - $= 0 \rightarrow$ (coppia di rette parallele) $(a_{11} \neq 0)$ A_{22}
    - $< 0 \rightarrow$ (reali e distinte)
    - $= 0 \rightarrow$ (coincidenti)
    - $> 0 \rightarrow$ (immaginarie coniugate)
  - $< 0 \rightarrow$ (coppia di rette reali e distinte)
- $A \neq 0 \rightarrow A_{33}$
  - $> 0 \rightarrow$ (caso ellittico) $\rightarrow$ $(A)(a_{11})$ ed $(A)(a_{22})$
    - $> 0 \rightarrow$ ($\underline{\text{ellisse immaginario}}$)
    - $< 0 \rightarrow$ ($\underline{\text{ellisse reale}}$)
  - $= 0 \rightarrow$ (caso parabolico) $\rightarrow$ ($\underline{\text{Parabola}}$)
  - $< 0 \rightarrow$ (caso iperbolico) $\rightarrow$ ($\underline{\text{Iperbole}}$) $\rightarrow$ $(a_{11} + a_{22} = 0)$ $\rightarrow$ ($\underline{\text{iperbole equilatera}}$)

Attenzione! Poiché i coefficienti a_{ij} possono essere irrazionali o trascendenti, occorre avere attenzione al caso parabolico: $(A_{33} = 0)$ (nei computer program. $|A_{33}| < 10$[illegible]).

Occorre inoltre avvertire che, prima di passare all'analisi dei singoli casi: (<u>ellittico, parabolico, iperbolico</u>), è necessario <u>essere sicuri</u> dei calcoli; pertanto, sia che si proceda algebricamente con calcoli "a mano", sia che si programmi in computer, il determinante A deve essere calcolato in due modi distinti:

I modo (Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underset{1}{A} = (+a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{31}a_{21}a_{32}) + \\ + (-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33})$$

II modo (sviluppo di minori)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{33} = (a_{11}a_{22}) - (a_{12}a_{21}) = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = A_{32} = (a_{11}a_{23}) - (a_{13}a_{21})$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = A_{31} = (a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22})$$

cioè $\boxed{\underset{2}{A} = A_{33}a_{33} - A_{32}a_{32} + A_{31}a_{31}}$

se la differenza: $|\underset{1}{A} - \underset{2}{A}| > 10^{-n}$ cioè della precisione prefissata occorre spingere i calcoli ad un maggior numero di cifre decimali, specie se trattasi del caso parabolico, ove A_{33} può risultare piccolissimo ed in effetti è zero o viceversa può risultare = zero ed invece è un caso ellittico o un caso iperbolico.

Il caso ellittico

$(A_{33} > 0)$; $(A a_{11} < 0)$; $(A a_{22} < 0)$. → (Ellisse reale)

L'equazione può presentarsi:

$\boxed{a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} = 0}$ ellisse al centro $(a_{22} > a_{11})$
$(a_{22} < a_{11})$ (ruotato di $\pi/2$)

$\boxed{a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + a_{33} = 0}$ ellisse traslato sull'asse x

$\boxed{a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_{23} y + a_{33} = 0}$ ellisse traslato sull'asse y

$\boxed{a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0}$ ellisse ad assi traslati

$\boxed{a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_{12} xy + a_{33} = 0}$ ellisse ruotato (al centro assi)

$\boxed{a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_{12} xy + 2a_{13} x + a_{33} = 0}$ ellisse ruotato e traslato in x.

$\boxed{a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_{12} xy + 2a_{23} y + a_{33} = 0}$ ellisse ruotato e traslato in y.

$\boxed{a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_{12} xy + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0}$ ellisse ad assi ruotati e traslati

Si noti che la presenza dei coefficienti implica:

$2a_{12}$ (xy) che l'ellisse è ad assi ruotati

$2a_{13}$ (x) che l'ellisse è traslato in x

$2a_{23}$ (y) che l'ellisse è traslato in y

Ellisse al centro

L'equazione: $\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0}$ corrisponde

alla equazione: $\boxed{K s_1^2 x^2 + K s_2^2 y^2 - K s_1^2 s_2^2 = 0}$

Che sia un ellisse è già stato accertato, si noti che: $a_{33} < 0$ è di segno opposto ad a_{11} ed a_{22} (Eventualmente si può moltiplicare per (-1) per avere $a_{33} < 0$).

$$\frac{-a_{33}}{a_{11}} = \frac{\cancel{+K} \cancel{s_1^2} s_2^2}{\cancel{+K s_1^2}} = s_2^2 \Rightarrow \underline{\text{semiasse dell'ellisse}} = \sqrt{s_2^2} = s_2$$

$$\frac{-a_{33}}{a_{22}} = \frac{\cancel{+K} \cancel{s_2^2} s_1^2}{\cancel{K s_2^2}} = s_1^2 \Rightarrow \underline{\text{semiasse dell'ellisse}} = \sqrt{s_1^2} = s_1$$

$$K = a_{11}/s_1^2 = a_{22}/s_2^2 = \text{costante moltiplicativa (arbitraria)}$$

Si considera "asse focale" e si indica con la lettera "a" <u>il maggiore fra s_1 ed s_2</u>

$$s_2 \begin{cases} > s_1 \rightarrow s_2 = a\,;\ s_1 = b \quad \text{ellisse al centro: } \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ = s_1 \rightarrow \text{cerchio al centro di raggio } R = s_1 = s_2 \\ < s_1 \rightarrow s_1 = a\,;\ s_2 = b \quad \text{ellisse al centro ruotato di} \end{cases}$$

$\pi/2$, l'equazione canonica è ancora $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ cui corrisponde $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ ma l'equazione da esaminare era: $Ka^2x^2 + Kb^2y^2 - Ka^2b^2 = 0$, ove $(Ka^2 = a_{11})$ quindi se: $(a_{11} < a_{22})$ l'equazione è di un ellisse al centro con asse focale sull'asse x (come noi consideriamo l'equazione canonica). Se $(a_{11} > a_{22})$ l'asse focale è sulle y (ruotato di $\pi/2$).

Ellisse ad assi solo traslati (in x)

l'equazione: $\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0}$ corrisponde alla equazione:

$$\boxed{K s_1^2 x^2 + K s_2^2 y^2 + (-K 2 s_1^2 x_c)x + (K(s_1^2 x_c^2 - s_2^2 s_1^2)) = 0}$$

ed è ad assi solo tralati in x se: $\boxed{s_2 > s_1}$, se invece $s_1 > s_2$ che implica $a_{11} > a_{22}$ l'asse focale è in direzione y, cioè l'ellisse è ruotato di π. Noi consideriamo i semiassi $a > b$; con a = asse focale, sull'asse delle x. Se $a_{11} > a_{22}$ l'asse focale è ruotato di $\pi/2$ sovrapponendosi alla y, e poiché la traslazione dovrà avvenire dopo la rotazione, il centro dell'ellisse sarà sull'asse x, ma l'asse focale sarà perpendicolare alle x.

$$\frac{-a_{13}}{a_{11}} = \frac{\cancel{K s_1^2} x_c}{\cancel{K s_1^2}} = x_c = \underline{\text{ascissa del centro ellisse.}}$$

dalla $K s_1^2 x_c^2 - K s_2^2 s_1^2 = a_{33} \Rightarrow a_{11}\left(\frac{-a_{13}}{a_{11}}\right)^2 - a_{33} = \boxed{K s_2^2 s_1^2 = \left(\frac{a_{13}^2}{a_{11}} - a_{33}\right)}$

si ha:

$$\frac{(a_{13}^2/a_{11}) - a_{33}}{a_{11}} = \left(\frac{a_{13}^2 - a_{33} \cdot a_{11}}{a_{11}^2}\right) = \frac{\cancel{K} s_2^2 \cancel{s_1^2}}{\cancel{K s_1^2}} = s_2^2 \rightarrow \sqrt{s_2^2} = s_2 = \left(\underline{\text{semiasse dell'ellisse}}\right)$$

$$\frac{\left((a_{13}^2/a_{11}) - a_{33}\right)}{a_{22}} = \frac{\cancel{K s_2^2} s_1^2}{\cancel{K s_2^2}} = s_1^2 \rightarrow \sqrt{s_1^2} = s_1 = \left(\underline{\text{semiasse dell'ellisse}}\right)$$

detto "a" = asse focale il maggiore fra s_1 ed s_2; e "b" l'altro asse avremo l'equazione canonica: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

se: $(s_2 > s_1) \rightarrow \boxed{b^2x^2 + a^2y^2 - 2(b^2x_c)x + (b^2x_c^2 - a^2b^2) = 0}$; $\left(\underline{\text{asse focale sulle x}}\right)$

se: $(s_1 > s_2) \rightarrow \boxed{a^2x^2 + b^2y^2 - 2(a^2x_c)x + ((a^2x_c^2) - a^2b^2) = 0}$ $\left(\underline{\text{asse focale: } (x = x_c)}\right)$.

Ellisse ad assi solo traslati (in y)

L'equazione data: $\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0}$

corrisponde alla: $\boxed{Ks_1^2x^2 + Ks_2^2y^2 - 2(Ks_2^2y_c)\,y + (Ks_2^2y_c^2 - Ks_1^2s_2^2) = 0}$

analogamente al caso precedente:

$$\frac{-a_{23}}{a_{22}} = \frac{\cancel{K}s_2^2y_c}{\cancel{Ks_2^2}} = y_c = \text{ordinata del centro ellisse}$$

$$Ks_2^2s_1^2 = Ks_2^2y_c^2 - a_{33} = a_{22}\left(\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 - a_{33} \rightarrow \boxed{Ks_2^2s_1^2 = (a_{23}^2/a_{22} - a_{33})}$$

$$\frac{(a_{23}^2/a_{22}) - a_{33}}{a_{11}} = \frac{Ks_2^2\cancel{s_1^2}}{\cancel{Ks_1^2}} = s_2^2 \rightarrow \sqrt{s_2^2} = \text{semidiametro dell'ellisse}$$

$$\frac{(a_{23}^2/a_{22}) - a_{33}}{a_{22}} = \frac{\cancel{K}s_2^2s_1^2}{\cancel{Ks_2^2}} = s_1^2 \rightarrow \sqrt{s_1^2} = \text{semidiametro dell'ellisse}$$

posto: "a" = (asse focale) il maggiore fra "s_1" ed "s_2", l'equazione canonica dell'ellisse è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; (b = altro asse)

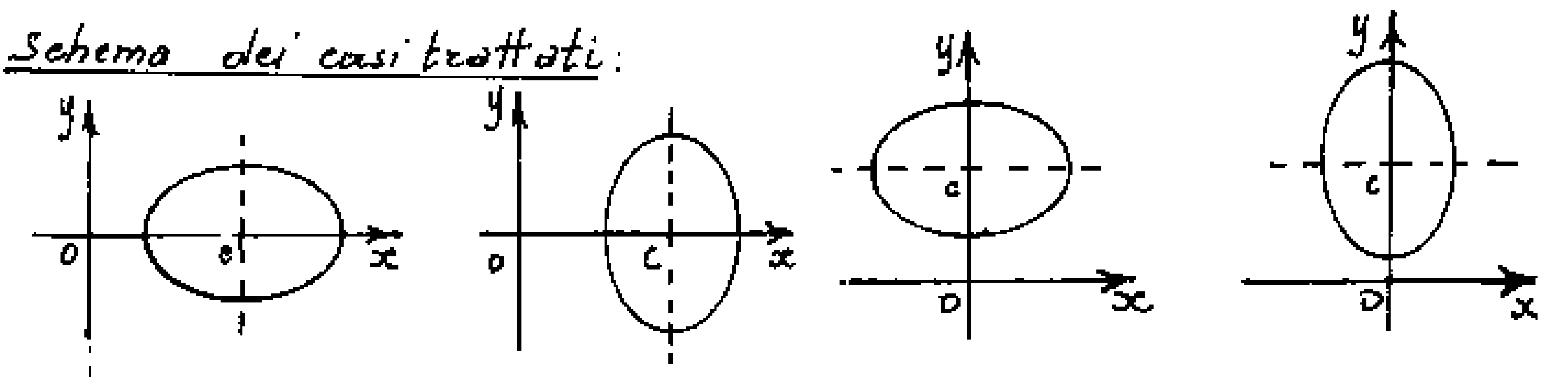
se: $\boxed{s_2 > s_1}$ l'equazione sarà: $\boxed{b^2x^2 + a^2y^2 - 2(a^2y_c)\,y + a^2y_c^2 - a^2b^2 = 0}$

e l'asse focale sarà la retta: $\boxed{y = y_c}$ ellisse non ruotato.

se: $\boxed{s_1 > s_2}$ l'equazione sarà: $\boxed{a^2x^2 + b^2y^2 - 2(b^2y_c)\,y + (b^2y_c^2 - a^2b^2) = 0}$

L'asse focale sarà sulle y e l'ellisse è ruotato di $\pi/2$ rad.

Schema dei casi trattati:



Ellisse ad assi traslati (in x ed in y)

L'equazione data: $\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0}$

corrisponde alla: $\boxed{K s_1^2 x^2 + K s_2^2 y^2 - 2(K s_1^2 x_c)x - 2(K s_2^2 y_c)y + K(s_1^2 x_c^2 + s_2^2 y_c^2 - s_1^2 s_2^2) = 0}$

$\boxed{\dfrac{-a_{13}}{a_{11}} = x_c}$; $\boxed{\dfrac{-a_{23}}{a_{22}} = y_c}$ coordinate del centro ellisse

$$K s_1^2 s_2^2 = \left(a_{11}\left(\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}\left(\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 - a_{33}\right) = \left((a_{13}^2/a_{11}) + (a_{23}^2/a_{22}) - a_{33}\right)$$

$$\boxed{\frac{(a_{13}^2/a_{11}) + (a_{23}^2/a_{22}) - a_{33}}{a_{11}} = s_2^2} \to \sqrt{s_2^2} = \text{semiasse dell'ellisse.}$$

$$\boxed{\frac{((a_{13}^2/a_{11}) + (a_{23}^2/a_{22}) - a_{33})}{a_{22}} = s_1^2} \to \sqrt{s_1^2} = \text{semiasse dell'ellisse}$$

posto "a" (asse focale) il maggiore fra "s_1" ed "s_2", l'equazione canonica dell'ellisse è: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; (b = altro asse)

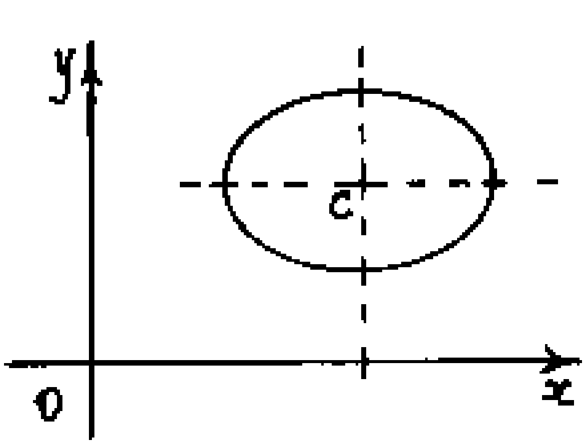
se $\boxed{s_2 > s_1}$ l'equazione è: $\boxed{b^2x^2 + a^2y^2 - 2(b^2x_c)x - 2(a^2y_c)y + (b^2x_c^2 + a^2y_c^2 - a^2b^2) = 0}$

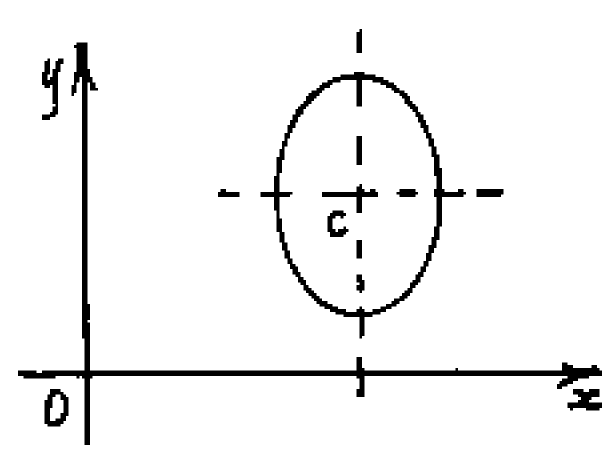
l'asse focale è sulla retta: $y = y_c$. (l'ellisse non è ruotato)

se $\boxed{s_1 > s_2}$ l'equazione è: $\boxed{a^2x^2 + b^2y^2 - 2(a^2x_c)x - 2(b^2y_c)y + (a^2x_c^2 + b^2y_c^2 - a^2b^2) = 0}$

l'asse focale è sulla retta $x = x_c$ (l'ellisse è ruotato di $\frac{\pi}{2}$ rad)

Gli schemi dei due casi:





Ellisse al centro ad assi solo ruotati

L'equazione data: $\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{33} = 0}$

corrisponde alla: (ridurre $a_{33}<0$)

$$\boxed{K(a^2 sen^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)x^2 + K(a^2\cos^2\alpha + b^2 sen^2\alpha)y^2 + K((b^2-a^2)sen(2\alpha))xy - Ka^2b^2 = 0}$$

$$(a_{11}+a_{22}) = K(a^2+b^2) \qquad (\text{essendo } sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1)$$

$$(a_{11}-a_{22}) = K(-a^2+b^2)\cos(2\alpha) \qquad (\text{essendo } \cos^2\alpha - sen^2\alpha = \cos(2\alpha))$$

$$\frac{2a_{12}}{(a_{11}-a_{22})} = \frac{K(b^2-a^2)\,sen(2\alpha)}{K(b^2-a^2)\cos(2\alpha)} = \boxed{tang(2\alpha) = \left(\frac{2a_{12}}{(a_{11}-a_{22})}\right)}$$

$$\frac{1}{\cos(2\alpha)}(a_{11}-a_{22}) = (a_{11}-a_{22})\sqrt{1+tg^2(2\alpha)} = (a_{11}-a_{22})\sqrt{1+\frac{(2a_{12})^2}{(a_{11}-a_{22})^2}} =$$

$$\boxed{K(-a^2+b^2) = -\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + (2a_{12})^2}}$$

sommando e sottraendo alla: $(a_{11}+a_{22}) = K(a^2+b^2)$ si ha:

$$\boxed{2Kb^2 = (a_{11}+a_{22}) - \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}} \quad ; \quad \boxed{2Ka^2 = (a_{11}+a_{22}) + \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}}$$

$$a^2 = \frac{2Ka^2b^2}{-2Kb^2} \qquad b^2 = \frac{-2Ka^2b^2}{-2Ka^2}$$

$$\boxed{\begin{matrix} a^2 \\ b^2 \end{matrix} = \frac{-2a_{33}}{(a_{11}+a_{22}) \mp \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}}}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{12}}{(a_{11}-a_{22})}\right) = \begin{cases} (\alpha) \rightarrow (se: 2a_{12}<0) \\ (90^\circ+\alpha) \rightarrow (se: 2a_{12}>0) \end{cases}}$$

Per comprendere come é possibile superare l'ambiguitá dei segni della radice, o la scelta dell'angolo da arctg, .

riportiamo una tavola di conti fatti per un ellisse: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

che per $\alpha=0$ ha l'asse focale sull'asse X e ruota antiorario.

avremo: $\boxed{(b^2-a^2)=-16}$; $\boxed{a_{33}=-225}$; $\boxed{K=+1}$

per simmetria dell'ellisse.	funzioni angolari				$25\,sen^2\alpha+9\cos^2\alpha$	$25\cos^2\alpha+9\,sen^2\alpha$	$(-16)\,sen(2\alpha)$	$(a_{11}-a_{22})$	$\frac{-2a_{12}}{(a_{11}-a_{22})}$	NOTE
	α	$sen^2\alpha$	$\cos^2\alpha$	$sen(2\alpha)$	a_{11}	a_{22}	$2a_{12}$	$(-16)\cos(2\alpha)$	$tg(2\alpha)$	
180°	0	0	1	0	9	25	0	−16	0	asse focale nel I e III quadrante; $\cos(2\alpha)>0$
210°	30°	1/4	3/4	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	13	21	$-8\sqrt{3}$	−8	$+\sqrt{3}$	
225°	45°	1/2	1/2	1	17	17	−16	0	±∞	
240°	60°	3/4	1/4	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	21	13	$-8\sqrt{3}$	+8	$-\sqrt{3}$	$\cos(2\alpha)<0$
270°	90°	1	0	0	25	9	0	+16	0	
300°	120°	3/4	1/4	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	21	13	$+8\sqrt{3}$	+8	$+\sqrt{3}$	asse focale nel II e IV quadrante
315°	135°	1/2	1/2	−1	17	17	+16	0	±∞	
330°	150°	1/4	3/4	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	13	21	$+8\sqrt{3}$	−8	$-\sqrt{3}$	$\cos(2\alpha)>0$
360°	180°	0	1	0	9	25	0	−16	0	

poiche': $(a_{11}-a_{22})$ e $\cos(2\alpha)$ sono di segno opposto, il loro prodotto $=K(-a^2+b^2)\cos(2\alpha)=-\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}<0$ (per $K>0$) cioé: $(a^2>b^2)$.

$$tang(2\alpha)\begin{cases} >0 \rightarrow 2a_{12}\begin{cases} <0 \rightarrow 0\leq\alpha\leq 45° \\ >0 \rightarrow 90<\alpha<135° \rightarrow (\text{vale } 90+\alpha) \end{cases} \\ <0 \rightarrow 2a_{12}\begin{cases} <0 \rightarrow 45°<\alpha<90 \\ >0 \rightarrow 135<\alpha<180 \rightarrow (\text{vale } 90+\alpha) \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{cioé: } \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{-2a_{12}}{(a_{11}-a_{22})}\right)=\begin{cases}(\alpha°) \rightarrow 2a_{12}<0 \\ (90°+\alpha) \rightarrow 2a_{12}>0\end{cases}$$

Ellisse ad assi ruotati e traslati

L'equazione data sia completa:

$$\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0}$$

siano x_c ed y_c le coordinate del centro dell'ellisse rappresentato dall'equazione data, essa corrisponde:

$$\begin{cases} \overset{a_{11}}{K\left(s_2^2 sen^2\alpha + s_1^2\cos^2\alpha\right)}x^2 + \overset{a_{22}}{K\left(s_2^2\cos^2\alpha + s_1^2 sen^2\alpha\right)}y^2 + \overset{2a_{12}}{K\left[\left(s_1^2 - s_2^2\right) sen\, 2\alpha\right]}xy + \\ -\overset{2a_{13}}{\left[2a_{11}x_c + 2a_{12}y_c\right]}x - \overset{2a_{23}}{\left[2a_{22}y_c + 2a_{12}x_c\right]}y + \\ + \overset{a_{33}}{\left[a_{11}x_c^2 + a_{22}y_c^2 + 2a_{12}x_c y_c - K s_1^2 s_2^2\right]} = 0 \end{cases}$$

I primi tre termini sono uguali a quelli dell'eq. ad assi ruotati

Il quarto e quinto termine (corrispondenti ad $2a_{13}x$ e $2a_{23}y$,) permettono il calcolo delle coordinate: x_c; y_c.

Il sesto termine (termine noto a_{33}) il K figura solo ove non vi sono fattori come a_{11}, a_{22}, $2a_{12}$ che hanno in se il K.

Considieriamo il sistema:

$$\begin{cases} 2a_{11}x_c + 2a_{12}y_c = -2a_{13} \\ 2a_{21}x_c + 2a_{22}y_c = -2a_{23} \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{33}$$

$$A_{33} = \left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right) \qquad \begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} = \underbrace{\left(-a_{13}a_{22} + a_{12}a_{23}\right)}_{=A_{31}}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{23} \end{vmatrix} = \underbrace{\left(-a_{11}a_{23} + a_{13}a_{12}\right)}_{=-A_{32}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_c &= \frac{(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} = \frac{A_{31}}{A_{33}} \\ y_c &= \frac{(a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} = \frac{-A_{32}}{A_{33}} \end{aligned}}$$

coordinate del centro dell'ellisse

(centro assi traslati dopo la ruotazione)

Sostituendo i valori di x_c ed y_c nell'espressione del coefficiente a_{33}, possiamo calcolare:

$$\boxed{K s_1^2 s_2^2 = a_{11} x_c^2 + a_{22} y_c^2 + 2a_{12} x_c y_c - a_{33}}$$

Rilevato che i primi tre coefficienti dell'equazione data, cioè: a_{11}, a_{22}, $2a_{12}$; corrispondono ai primi tre coefficienti dell'equazione dell'ellisse ad assi solo ruotati; e che il coefficiente a_{33} per assi solo ruotati è: $K s_1^2 s_2^2$ che abbiamo sopra calcolato, abbiamo l'equazione dell'ellisse prima che avvenisse la traslazione e cioè:

$$\boxed{a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_{12} xy - K s_1^2 s_2^2 = 0}$$

avremo: $$\boxed{\left.\begin{array}{l}\alpha \\ \alpha + 90^\circ\end{array}\right\rangle = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{12}}{(a_{11} - a_{22})}\right)}$$ (angoli degli assi dell'ellisse)

$$\boxed{\frac{2 K s_1^2 s_2^2}{(a_{11} + a_{22}) \mp \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 2a_{12}^2}} = \left\langle\begin{array}{l} s_2^2 \\ s_1^2 \end{array}\right.} \quad s_2^2 = a^2 > b^2 = s_1^2$$

che fornisce i parametri dell'ellisse $\frac{(x-x_c)^2}{a^2} + \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1$

se: $\boxed{2a_{12} < 0} \rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{12}}{(a_{11} - a_{22})}\right) = (\alpha) \rightarrow$ l'asse focale è nel I e III quadr. degli assi traslati

se: $\boxed{2a_{12} > 0} \rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{12}}{(a_{11} - a_{22})}\right) = (90^\circ + \alpha) \rightarrow$ l'asse focale è nel II e IV quadr. degli assi traslati

Esempio numerico

equazione data: $\boxed{36x^2+29y^2+24xy+624x+458y+3149=0}$

$$A=\begin{vmatrix} 36 & 12 & 312 \\ 12 & 29 & 229 \\ 312 & 229 & 3149 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{33}\cdot 3149 - A_{32}\cdot 229 + A_{31}\cdot 312 =$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} 36 & 12 \\ 12 & 29 \end{vmatrix} = 36\cdot 29 - 12^2 = 900 \rightarrow A_{33}\cdot 3149 = 2.834.100$$

$$-A_{32}=\begin{vmatrix} 36 & 312 \\ 12 & 229 \end{vmatrix} = 36\cdot 229 - 12\cdot 312 = +4500 \rightarrow -A_{32}\cdot 229 = -1.030.500$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 12 & 312 \\ 29 & 229 \end{vmatrix} = 12\cdot 229 - 29\cdot 312 = -6300 \rightarrow A_{31}\cdot 312 = -1.965.600$$

$$\underline{\underline{A = -162.000}}$$

si controlla

$$\left|\begin{matrix} 36 & 12 & 312 \\ 12 & 29 & 229 \\ 312 & 229 & 3149 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 36 & 12 \\ 12 & 29 \\ 312 & 229 \end{matrix} \quad + 36\cdot 29\cdot 3149 + 12\cdot 229\cdot 312 + 312\cdot 12\cdot 229 =$$

$$= (5002308 - 5164308) = \underline{\underline{-162000}}$$

$A \neq 0$ quindi: <u>conica non degenere</u>

$A_{33} > 0$ quindi: <u>ellisse</u> $\qquad \left(K = \dfrac{A_{33}^2}{-A}\right) = 5$

$A\cdot a_{11} < 0$; $A\cdot a_{22} < 0$ quindi: <u>ellisse reale</u>

equazione completa → quindi: ellisse <u>ruotato e traslato</u>

$$\left\{\begin{aligned} x_c &= \frac{A_{31}}{A_{33}} = \frac{-6300}{900} = -7 \;; \\ y_c &= \frac{-A_{32}}{A_{33}} = \frac{-4500}{900} = -5 \;; \end{aligned}\right\} \text{ \underline{coordinate del centro dell'ellisse}}$$

$(2a_{12} > 0)$ perciò l'asse focale è inclinato di $(90+\alpha)$

$$\left.\begin{matrix} \alpha \\ 90^\circ+\alpha \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{24}{7}\right) = \begin{cases} 36^\circ 52' 12'' \\ 126^\circ 52' 12'' \end{cases}$$

$\underline{\alpha = 36° 52' 12''}$; (inclinazione dell'asse minore)

$\underline{(90° + \alpha) = 126° 52' 12''}$; (inclinazione dell'asse focale)

calcoliamo: $K s_1^2 s_2^2 = (a_{11} x_c^2 + a_{22} y_c^2 + 2 a_{12} x_c y_c - a_{33}) =$

$$\underline{K s_1^2 s_2^2} = (36 \cdot 49 + 29 \cdot 25 + 24 \cdot 35 - 3149) = \underline{180{,}00}$$

$$\left.\begin{matrix} s_2^2 \\ s_1^2 \end{matrix}\right\} = \frac{2 K s_1^2 s_2^2}{\left((a_{11} + a_{22}) \mp \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 2 a_{12}^2}\right)} = \frac{360}{(65 \pm 25)} \begin{cases} s_2^2 = 9 \rightarrow s_2 = 3 \\ s_1^2 = 4 \rightarrow s_1 = 2 \end{cases}$$

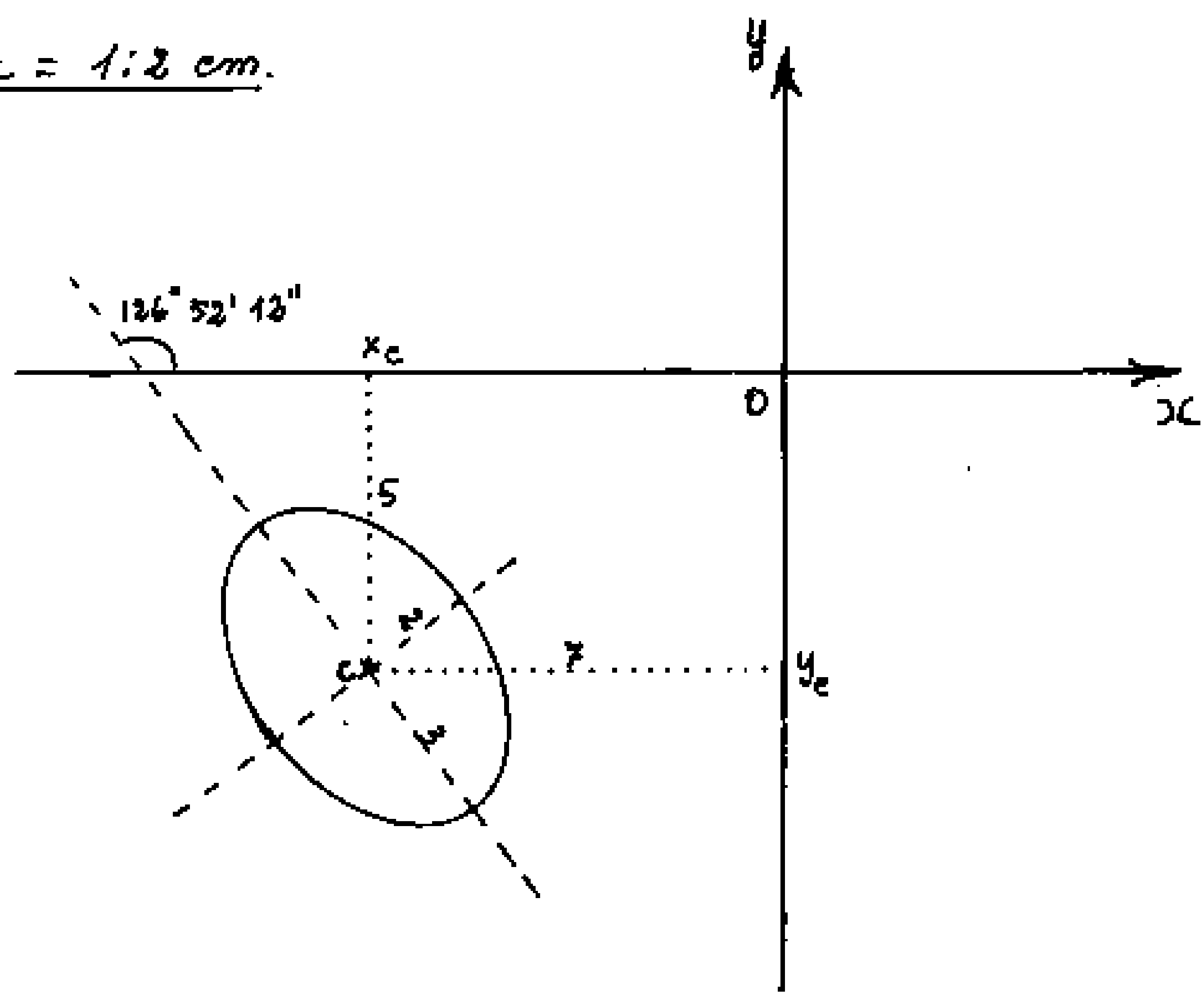
perciò: $\boxed{a = 3}$; $\boxed{b = 2}$ (parametri dell'ellisse)

equazione canonica al centro: $\boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1}$ ellisse

ellisse ruotato di 126° 52' 12'' e traslato: $C \equiv (-7; -5)$

<u>schema grafico</u>

<u>scala = 1:2 cm.</u>



Caso Iperbolico

$(A_{33} < 0)$ se: $(a_{11} + a_{22}) = 0 \rightarrow$ iperbole equilatera

L'equazione può presentarsi

$\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0}$ iperbole al centro $(a_{22} > a_{11})$
$(a_{22} < a_{11})$ (ruotata di $\pi/2$)

$\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{33}}$ iperbole traslata in x

$\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33}}$ iperbole traslata in y

$\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}}$ iperbole ad assi traslati

$\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{33}}$ iperbole su assi ruotati

$\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}}$ Iperbole ad assi ruotati e traslati

---

Come per l'ellisse, l'iperbole che manca del termine: "$2a_{12}xy$", e quindi apparirebbe solo traslata o no, poiché: $(2a_{12})$ corrisponde a: $[K(s_1^2+s_2^2)\,\mathrm{sen}(2\alpha)]$ e quando $\alpha = 90° \rightarrow (2\alpha) = (180°) \rightarrow \mathrm{sen}(2\alpha) = \mathrm{sen}(180°) = 0$, quindi se manca il termine $(2a_{12})$ l'iperbole può non essere ruotata, od anche essere ruotata di $\frac{\pi}{2}$ rad $= 90°$. Però mentre nell'ellise il diametro (asse) focale "a" era sempre il maggiore fra s_1 ed s_2;

nell'iperbole l'asse focale può essere sul maggiore o sul minore dei due diametri: $2a$ e $2b$; ed occorre attenzione per non confondere l'iperbole ruotata di $\frac{\pi}{2}$, con l'iperbole coniugata.

Noi consideriamo (nell'equazione canonica) che l'iperbole al centro abbia l'asse focale sulle ascisse, ed indichiamo con "a" il semiasse focale e "b" l'altro semiasse.

L'equazione canonica risulta: $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)=(1)$

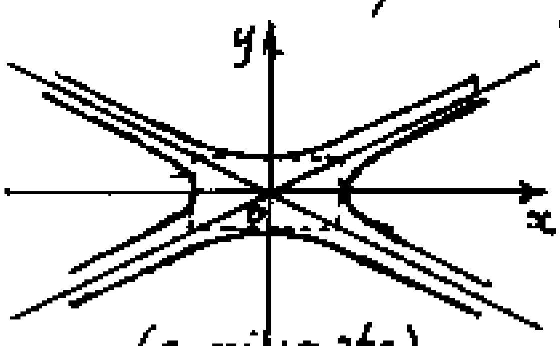
L'equazione dell'iperbole coniugata: $\left(\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}\right)=(1)$

L'equazione dell'iperbole ruotata di $\frac{\pi}{2}$: $\left(\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}\right)=(1)$

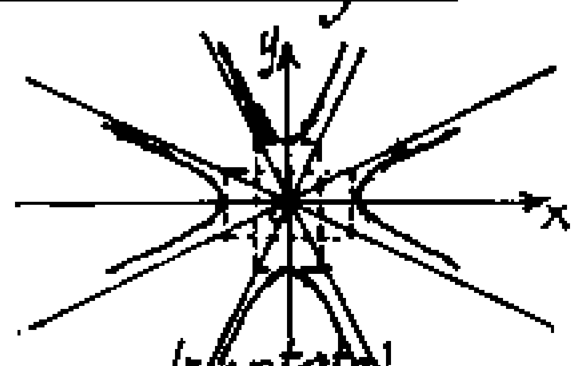
Quindi nell'equazione dell'iperbole coniugata rispetto all'equazione canonica si ha uno scambio dei segni dei parametri. (fermo restante il segno di uno (+1).

Mentre nell'equazione dell'iperbole ruotata, rispetto all'equazione originaria canonica, si ha uno scambio dei quadrati delle coordinate variabili; (si ha uno scambio di assi)

Così che le iperboli coniugate hanno gli stessi asintoti con angoli supplementari. Le iperboli ruotate hanno asintoti diversi però formanti lo stesso angolo.



(coniugate)



(ruotate)

Iperbole al centro

L'equazione data: $\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0}$

corrispondente alla: $\boxed{\pm K s_1^2 x^2 \mp K s_2^2 y^2 \mp K s_1^2 s_2^2 = 0}$

dal confronto si nota che a_{11} ed a_{22} hanno segni opposti, e che: $\boxed{a_{33}/K < 0}$ Perciò la prima cosa da fare è rendere $a_{33} < 0$. L'equazione è canonica se con $a_{33} < 0$ si ha: $\boxed{a_{11} > 0}$; $\boxed{a_{22} < 0}$ ed avremo: $\boxed{s_2 = a}$; $\boxed{s_1 = b}$; $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

Se invece con $a_{33} < 0$ si ha: $a_{11} < 0$ ed $a_{22} > 0$: $\boxed{s_2 = b}$; $\boxed{s_1 = a}$; l'eq. è: $\boxed{\frac{-x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$ possiamo anche dire: $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ ruotata di $90° = \frac{\pi}{2}$ rad.

l'equazione dell'iperbole coniugata sarebbe: $\left(\frac{-x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$

si ha:

$$\frac{-a_{33}}{a_{11}} = \frac{\cancel{K s_1^2} s_2^2}{\cancel{K s_1^2}} = s_2^2 \Rightarrow \sqrt{s_2^2} = a = \underline{\text{semiasse focale}}$$

$$\frac{-a_{33}}{a_{22}} = \frac{\cancel{K} s_1^2 \cancel{s_2^2}}{\cancel{K s_2^2}} = s_1^2 \Rightarrow \sqrt{s_1^2} = b = \underline{\text{semiasse secondario}}$$

volendo conoscere K

$$\boxed{\left(\frac{a_{11} \cdot a_{22}}{-a_{33}}\right) = \frac{K^{\cancel{2}} \cancel{s_1^2 s_2^2}}{\cancel{K s_1^2 s_2^2}} = K}$$

<u>Si noti che l'asse focale è sull'asse cartesiano che ha il coefficiente positivo</u>; ed è quindi della massima importanza stabilire i segni giusti dell'equazione, ed eventualmente mutarli moltiplicando l'intera equazione per (-1).

Iperbole ad assi solo traslati (in x)

L'equazione data: $\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0}$

corrispondente alla:

$$\boxed{\pm K s_1^2 x^2 \mp K s_2^2 y^2 \mp 2(K s_1^2 x_c)x + K(\pm s_1^2 x_c^2 - s_1^2 s_2^2) = 0}$$

Si noti che la specificazione di a_{33} <u>presenta un termine che non ha doppio segno</u>; sappiamo che: $s_1^2 s_2^2 > 0$ (sono il prodotto di due quadrati), perciò volendo rendere: $K>0$, e quindi attribuire il vero segno ai coefficienti, si confrontano i termini noti delle due espressioni:

$$\boxed{a_{33} = \pm K s_1^2 x_c^2 - K s_1^2 s_2^2}$$

cioè:

$$K s_1^2 s_2^2 = \pm K s_1^2 x_c^2 - a_{33}$$

ma: $\dfrac{a_{13}}{a_{11}} = \dfrac{\mp K s_1^2 x_c}{\pm K s_1^2} = -x_c$; perciò sostituendo:

$$\boxed{K s_1^2 s_2^2 = \pm \frac{(a_{13})^2}{a_{11}} - a_{33}} \quad \begin{cases} > 0 \rightarrow K>0 \\ < 0 \rightarrow K<0 \end{cases}$$

(se $K<0$: moltiplichiamo per (-1) l'eq. data)

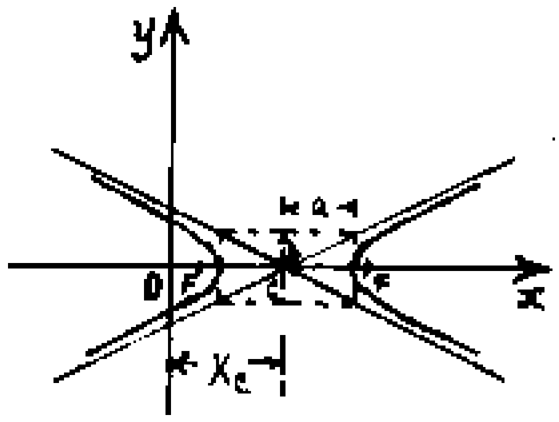
Si hanno quindi due casi:

I) $$\boxed{+(K s_1^2)x^2 - (K s_2^2)y^2 - 2(K s_1^2 x_c)x + \left(K(s_1^2 x_c^2 - s_1^2 s_2^2)\right) = 0}$$

II) $$\boxed{-(K s_1^2)x^2 + (K s_2^2)y^2 + 2(K s_1^2 x_c)x + \left(K(-s_1^2 x_c^2 - s_1^2 s_2^2)\right) = 0}$$

Nel I caso : $\boxed{a_{11}>0}$

L'iperbole ha il semiasse "a" sull'asse focale coinci= dente con l'asse x; ed è traslata in x di $x_c = \left(-a_{13}/a_{11}\right)$



L'equazione:

$$\boxed{\frac{(x-x_c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Sviluppata:

$$\boxed{b^2x^2 - a^2y^2 - 2(b^2x_c)x + (+b^2x_c^2 - a^2b^2) = 0}$$

confrontata con: $(Ks_1^4)x^2 - (Ks_2^4)y^2 - 2(Ks_1^2x_c)x + K(s_1^2x_c^2 - s_1^2s_2^2) = 0$

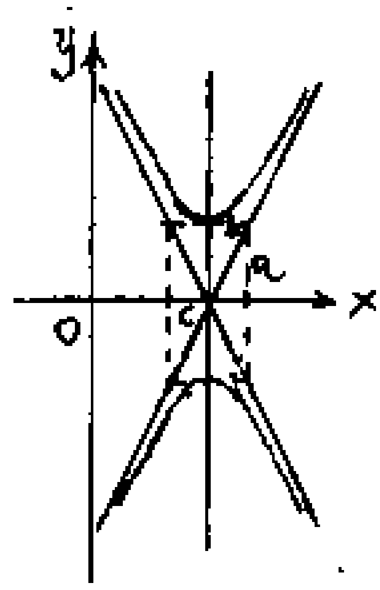
$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{33}$

$\boxed{b^2 = s_1^2}$; $\boxed{a^2 = s_2^2}$; $\dfrac{-(a_{11}\cdot a_{22})}{(+(a_{13})^2/a_{11} - a_{33})} = \boxed{\dfrac{-(Ks_1^2)(-Ks_2^2)}{Ks_1^2s_2} = K}$

$(s_1^2 = a_{11}/K)$; $(s_2^2 = a_{22}/K)$

Nel II caso $\boxed{a_{11}<0}$

L'iperbole ha il semiasse "a" sull'asse focale ed è parallelo all'asse y; ed è traslata in x di $x_c = \left(-a_{13}/a_{11}\right)$



L'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ è ruotata di $90° = \frac{\pi}{2}$ rad e traslata in $x + x_c$:

$$\boxed{-\frac{(x-x_c)^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$ da cui:

$$\boxed{-a^2x^2 + b^2y^2 + 2(a^2x_c)x + (-a^2x_c^2 - a^2b^2) = 0}$$

confrontata con: $-(Ks_1^4)x^2 + Ks_2^2y^2 + 2(Ks_1^2x_c)x + K(-s_1^2x_c^2 - a^2b^2) = 0$

$\boxed{a^2 = s_1^2}$; $\boxed{b^2 = s_2^2}$; $\dfrac{-(a_{11}\cdot a_{22})}{(-a_{13}^2/a_{11} - a_{33})} = \boxed{\dfrac{-(-Ks_1^2)(Ks_2^2)}{Ks_1^2s_2^2} = K}$

$(s_1^2 = a_{11}/K)$; $(s_2^2 = a_{22}/K)$

Esempio numerico:

L'equazione data: $\boxed{-20x^2+45y^2+200x-320=0}$

$$K s_1^2 s_2^2 = 10000/_{-20} + 320 = -500+320 = -\underline{180<0}$$

quindi moltiplichiamo per (-1)

$$\boxed{20x^2-45y^2-2(100)x+320=0} \rightarrow \underline{K s_1^2 s_2^2 = +180}$$

$\boxed{a_{11}>0}$ → (asse focale su x)

$$\frac{-(a_{11}\cdot a_{22})}{K s_1^2 s_2^2} = \frac{-(20)(-45)}{180} = K=+5$$

dividendo per 'K'

$$\boxed{4x^2-9y^2-2(20)x+64=0}$$

$$(2^2)x^2-(3^2)y-[2(2^2)5]x+(2)^2(5)^2-(2)^2(3)^2=0$$

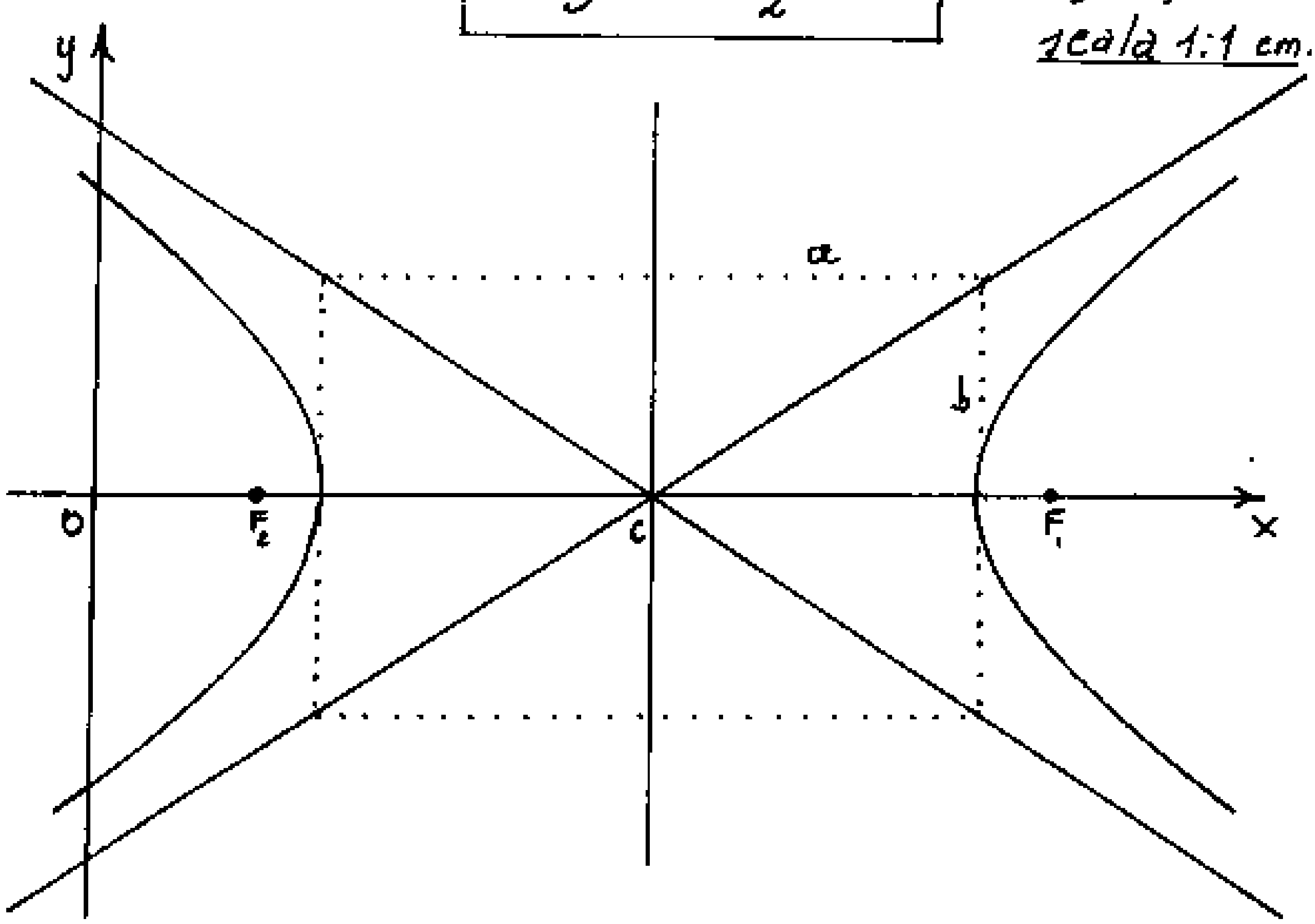
per cui:

$$a=3 \quad b=2 \quad x_c=5$$

L'equazione:

$$\boxed{\frac{(x-5)^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}=1}$$

grafico
scala 1:1 cm.



Iperbole ad assi solo traslati (in y)

L'equazione data: $\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0}$

corrisponde alla:

$$\boxed{\pm(K\delta_2^2)x^2 \mp (K\delta_1^2)y^2 \pm 2(K\delta_1^2 y_c)y + K\left(\mp\delta_2^2 y_c^2 - \delta_1^2\delta_2^2\right) = 0}$$

Confrontiamo i segni con l'equazione dell'iperbole traslata (in x): si nota che il coefficiente: $2a_{23}$ ha segno opposto ad a_{22} e concorde con a_{11}, mentre nell'eq. dell'iperbole traslata (in x). il coefficiente $2a_{13}$ ha segno opposto di a_{11} e concorde con a_{22}. (per $a_{11}>0$; $a_{22}<0$; $2a_{13}<0$; $2a_{23}>0$).
ciò significa di aver considerato $x_c>0$ ed $y_c>0$, e la risoluzione: $x_c = \frac{-a_{13}}{a_{11}}$; $y_c = \frac{-a_{23}}{a_{22}}$, risulta sempre valida qualunque siano i segni di x_c ed y_c.
I coefficienti a_{33}, nei due casi, sono:

$$K(\pm\delta_1^2 x_c^2 - \delta_1^2\delta_2^2) \quad ; \quad K(\mp\delta_2^2 y_c^2 - \delta_1^2\delta_2^2)$$

ove il doppio segno corrisponde rispettivamente a $K\delta_1^2$ e $K\delta_2^2$.
Avremo quindi:

$$\boxed{K\delta_1^2\delta_2^2 = \mp K\delta_2^2 y_c^2 - \delta_1^2\delta_2^2}$$

>0 (segni giusti)

<0 (moltiplicare per (-1))

si hanno due casi:

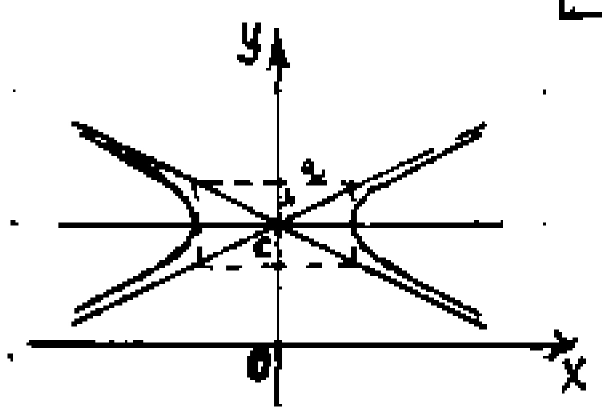
$$\boxed{+(K\delta_1^2)x^2 - (K\delta_2^2)y^2 + 2(K\delta_2^2 y_c)y + K\left(-\delta_2^2 y_c^2 - \delta_2^2\delta_1^2\right) = 0} \quad I)\ \text{caso.}$$

$$\boxed{-(K\delta_1^2)x^2 + (K\delta_2^2)y^2 - 2(K\delta_2^2 y_c)y + K\left(+\delta_2^2 y_c^2 - \delta_2^2\delta_1^2\right) = 0} \quad II)\ \text{caso.}$$

I° Caso $\boxed{a_{11} > 0}$

L'iperbole ha il semiasse "a" sull'asse focale ed è parallelo all'asse x; l'iperbole è traslata in y di $y_c = \left(\frac{-a_{23}}{a_{22}}\right)$. L'equazione é:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1}$$ che sviluppata:



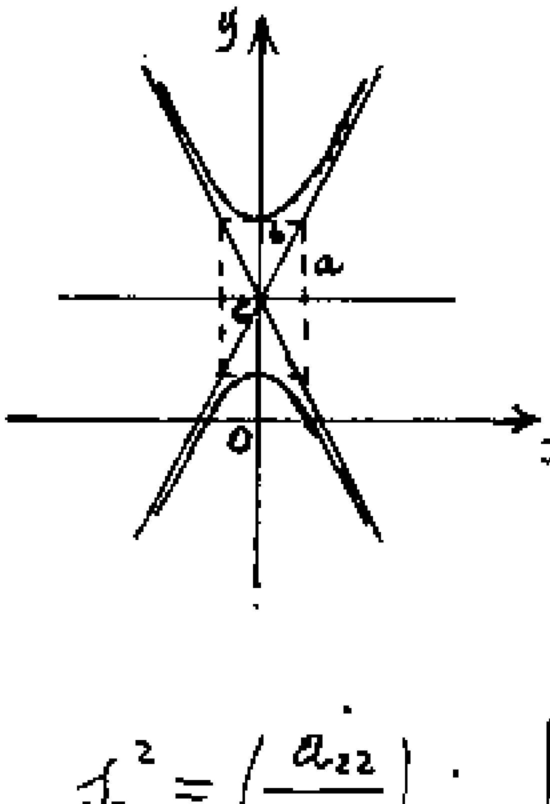
$$\boxed{(b^2)x^2 - (a^2)y^2 + 2(a^2y_c)y - a^2y_c^2 - a^2b^2 = 0}$$

$$K = \left(\frac{-(a_{11})(a_{22})}{a_{23}^2/a_{22} - a_{33}}\right); \left(s_1^2 = \frac{a_{11}}{K}\right); \left(s_2^2 = \frac{-a_{22}}{K}\right)$$

$$\boxed{a = s_2}; \boxed{b = s_1}$$

II Caso $\boxed{a_{11} < 0}$

L'iperbole ha il semiasse "a" sull'asse focale e coincidente con l'asse y; (cioè ruotata di $\pi/2 = 90°$) ed è traslata in y di $y_c = \left(\frac{(-a_{23})}{a_{22}}\right)$ L'equazione é:



$$\boxed{-\frac{x^2}{b^2} + \frac{(y-y_c)^2}{a^2} = 1}$$ che sviluppata:

$$\boxed{(-a^2)x^2 + (b^2)y^2 - 2(b^2y_c)y + b^2y_c^2 - a^2b^2 = 0}$$

$$K = \left(\frac{-(a_{11})(a_{22})}{a_{23}^2/a_{22} - a_{33}}\right); \quad s_1^2 = \left(\frac{-a_{11}}{K}\right);$$

$$s_2^2 = \left(\frac{a_{22}}{K}\right); \quad \boxed{s_1 = a}; \quad \boxed{s_2 = b};$$

Esempio numerico

L'equazione data : $\boxed{-2X^2+4,5y^2-45y+94,5=0}$

$K_{1,2}^2\,1_2^2 = \left(\frac{(\frac{1}{2}45)^2}{4,5} - 94,5\right) = +18 > 0$ (segni giusti)

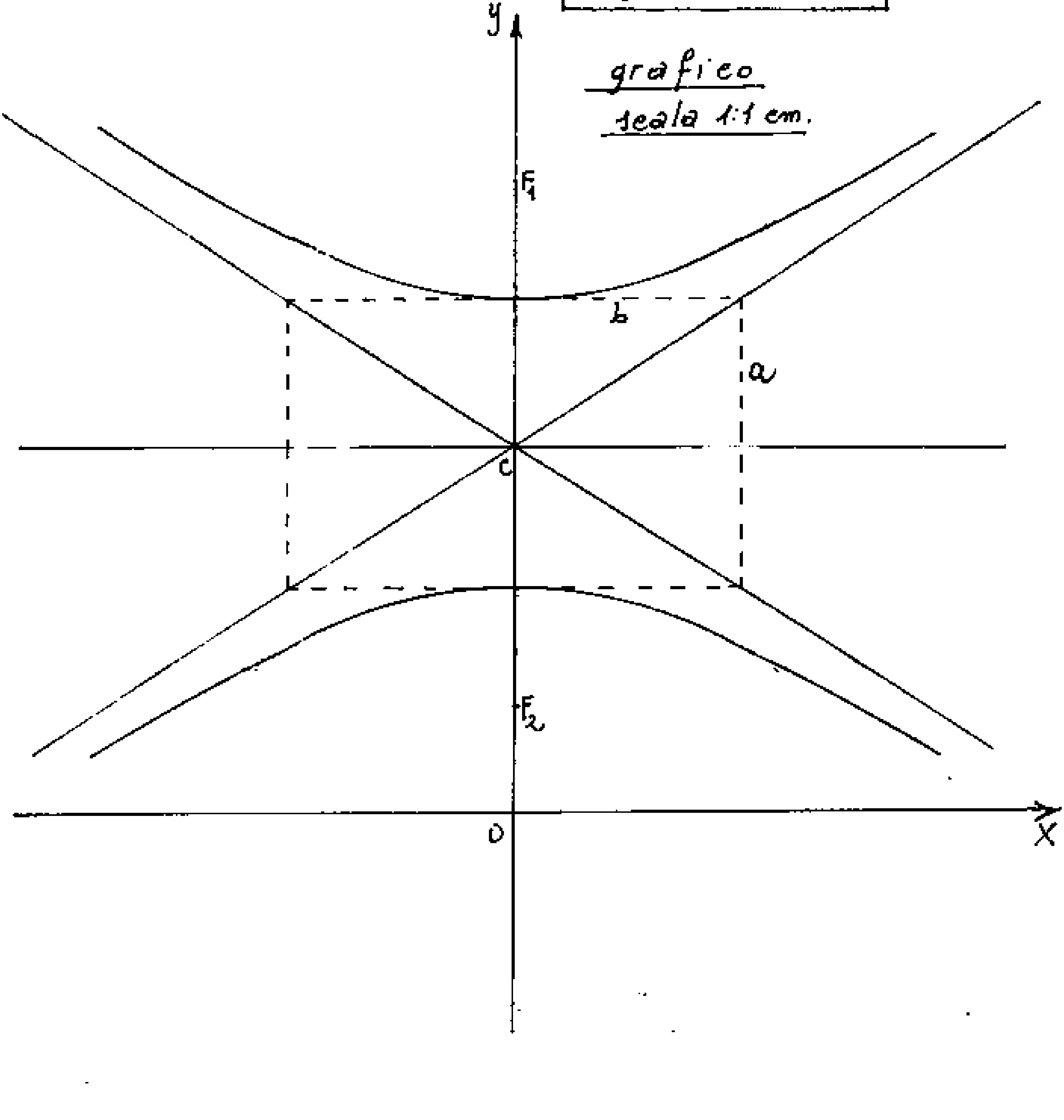
$\boxed{a_{11}<0}$ asse focale sulle y. (Iperbole ruotata di $\frac{\pi}{2}=90°$)

$\frac{-(-2)(4,5)}{18} = \boxed{\frac{1}{2}=K} \rightarrow \boxed{-4X^2+9y^2-90y+189=0}$

$-(2^2)X^2+(3)^2y^2-2(9)(5)y+(9)(25)-(4)(9)=0$

$\boxed{b=2}$; $\boxed{a=3}$; $\boxed{y_c=+5}$

$$\boxed{-\frac{X^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{4}=1}$$



Iperbole ad assi traslati (in x ed in y)

L'equazione data: $\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0}$

corrisponde alla:

$$\boxed{\pm(K s_1^2)x^2 \mp (K s_2^2)y \mp 2(K s_1^2 x_c)x \pm 2(K s_2^2 y_c)y + K(\pm s_1^2 x_c^2 \mp s_2^2 y_c^2 - s_1^2 s_2^2) = 0}$$

abbiamo già separatamente considerate le traslazioni in x ed in y

$$\boxed{K s_1^2 s_2^2 = \pm K s_1^2 x_c^2 \mp K s_2^2 y_c^2 - a_{33}}$$

cioè:

$$\boxed{K s_1^2 s_2^2 = \left(\frac{a_{13}^2}{a_{11}} + \frac{a_{23}^2}{a_{22}} - a_{33}\right)} \begin{cases} > 0 \text{ (segni giusti)} \\ < 0 \text{ (moltiplicare per } (-1)) \end{cases}$$

$$K = \frac{-(K s_1^2)(K s_2^2)}{K s_1^2 s_2^2} = \boxed{K = \frac{-(a_{11})(a_{22})}{(K s_1^2 s_2^2)}}; \quad \boxed{s_1^2 = \frac{a_{11}}{K}}; \quad \boxed{s_2^2 = \frac{a_{22}}{K}}$$

$$\boxed{x_c = \frac{a_{13}}{a_{11}}}; \quad \boxed{y_c = \frac{a_{23}}{a_{22}}}$$

Si hanno due casi:

$\boxed{a_{11} > 0}$ → asse focale parallelo ad x su cui giace "a"

$\boxed{a = s_2}$ $\boxed{b = s_1}$

$\boxed{a_{11} < 0}$ → asse focale parallelo ad y sui cui giace "a"

$\boxed{a = s_1}$; $\boxed{b = s_2}$

nel I° caso l'equazione è $\dfrac{(x-x_c)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1$

nel II caso l'equazione è $\dfrac{-(x-x_c)^2}{b^2} + \dfrac{(y-y_c)^2}{a^2} = 1$

<u>Esempio numerico</u>

L'equazione data: $\boxed{x^2-4y^2-10x+24y-27=0}$

$K s_1^2 s_2^2 = \frac{25}{1}+\frac{144}{-4}+27 = +16 > 0$ (segni giusti)

$K=\frac{-(1)(-4)}{16} = \frac{1}{4}$ dividendo per K si ha:

$\boxed{2^2x^2-4^2y^2-2(2^2)(5)x+2(4^2)(3)-108=0}$

corrisponde a: $\boxed{\frac{(x-5)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{4}1}$

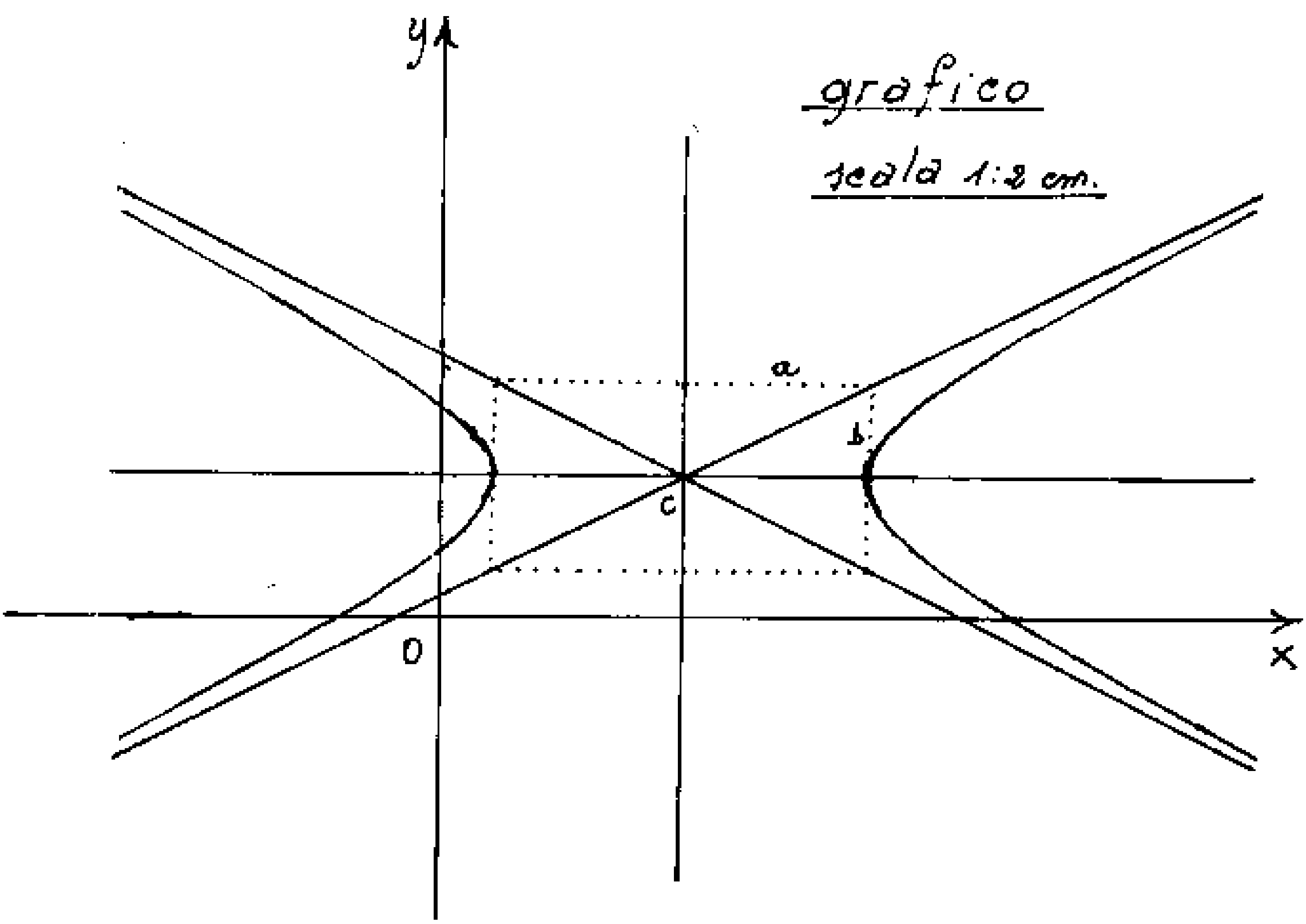
$a_{11} > 0$ iperbole con asse focale parallelo ad x.

di semiassi: $\boxed{a=4}$; $\boxed{b=2}$

traslata rispetto al centro di $\boxed{X_c=+5}$ $\boxed{Y_c=+3}$

<u>grafico</u>

scala 1:2 cm.



Iperbole ad assi solo ruotati

L'equazione data: $\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{33} = 0}$

corrisponde alla:

$$\boxed{K(s_1^2\cos^2\alpha - s_2^2 sen^2\alpha)x^2 + K(s_1^2 sen^2\alpha - s_2^2\cos^2\alpha)y^2 + K\left[(s_1^2+s_2^2)sen(2\alpha)\right]xy = Ks_1^2 s_2^2}$$

ove: "α" è l'angolo che l'asse focale dell'iperbole forma con l'asse x. (Si riduca $a_{33}<0$).

Si noti la diversità di segno di a^2 (rispetto all'ellisse) nei coefficienti: a_{11}; a_{22}; $2a_{12}$.

$$\boxed{((a_{11})+(a_{22})) = K(s_1^2 - s_2^2)} \begin{cases} >0 \;/\; s_1^2 > s_2^2 \\ =0 \rightarrow \text{iperbole equilatera} \\ <0 \;\backslash\; s_1^2 < s_2^2 \end{cases}$$

$$\boxed{((a_{11})-(a_{22})) = K(s_1^2+s_2^2)\cos(2\alpha)}$$

$$\boxed{\left(\frac{(2a_{12})}{(a_{11})-(a_{22})}\right) = \frac{K(s_1^2+s_2^2)\,sen(2\alpha)}{K(s_1^2+s_2^2)\cos(2\alpha)} = tg(2\alpha)}$$

$$\boxed{\begin{matrix}(\alpha) \\ (90°+\alpha)\end{matrix} = \frac{1}{2}\arctan g\left(\frac{2(a_{12})}{((a_{11})-(a_{22}))}\right)}$$

Poiché con $a_{33}<0$ si ha: $K>0$ perciò: $K(a^2+b^2)>0$

$$2a_{12}\begin{cases} >0 \rightarrow sen(2\alpha)>0 \rightarrow \boxed{0 < 2\alpha < 180°} \quad \boxed{0<\alpha<90°} \\ =0 \quad (\text{con } s_1 \neq s_2):\ \alpha = 90° \\ <0 \rightarrow sen 2\alpha < 0 \rightarrow \boxed{180° < 2\alpha < 360} \quad \boxed{90° < \alpha < 180°} \end{cases}$$

quindi il segno di $2a_{12}$ ci consente di scegliere fra i due valori di (α) e $(90°+\alpha)$; (implicita la ruotazione di 90°)

Trovato l'angolo:

$$tg(2\alpha) = \left(\frac{2a_{12}}{(a_{11} - a_{22})}\right) \; ; \; sen(2\alpha) = \left(\frac{2a_{12}}{\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2}}\right)$$

per cui: $(a_{33} < 0)$ $\boxed{K(s_1^2 + s_2^2) = +\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2}}$

$$\boxed{K(s_1^2 - s_2^2) = (a_{11} + a_{22})}$$

$$\boxed{2Ks_1^2 = (a_{11} + a_{22}) + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2}}$$

$$\boxed{2Ks_2^2 = +\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 2a_{12}} - (a_{11} + a_{22})}$$

$$\boxed{s_2^2 = \frac{-2a_{33}}{+\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2} + (a_{11} + a_{22})}} = \left(\frac{2Ks_1^2 s_2^2}{2Ks_1^2}\right)$$

$$\boxed{s_1^2 = \frac{-2a_{33}}{+\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2} - (a_{11} + a_{22})}} = \left(\frac{2Ks_1^2 s_2^2}{2Ks_2^2}\right)$$

$$2a_{12} \begin{cases} > 0 \rightarrow (0 < \alpha < 90^\circ) \\ < 0 \quad (90 < \alpha < 180^\circ) \end{cases} \Bigg\} \; \boxed{s_2 = \text{"}a\text{"}} = \text{asse focale} \; ; \; \boxed{s_1 = \text{"}b\text{"}}$$

con "a" = asse focale e "b" l'altro asse.

L'equazione è:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (\text{ruotata di } \alpha).$$

Si noti che per $K > 0$; $(s_1^2 + s_2^2) >$ quindi il segno della radice è solo (+), mentre nell'ellisse partendo da (−) assumeva entrambi i segni.

Esempi numerici

L'equazione data : $\boxed{6x^2 - 46y^2 + 52\sqrt{3}\,xy - 288 = 0}$

$(a_{11} + a_{22}) = K(s_1^2 - s_2^2) = -40$;

$(a_{11} - a_{22}) = K(s_1^2 + s_2^2)\cos(2\alpha) = +52$;

$tg(2\alpha) = \dfrac{52\sqrt{3}}{52} = \sqrt{3} \quad \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \begin{cases} 30° \leftarrow (2a_{12} > 0) \\ \cancel{120°} \rightarrow no \end{cases}$

$$s_2^2 = \frac{2\cdot(288)}{\sqrt{52^2 + (52\sqrt{3})^2} - 40} = \frac{2\,(288)}{2\cdot 52 - 40} = \frac{288}{32} = 9$$

$$s_1^2 = \frac{2(288)}{2\cdot(52+20)} = \frac{288}{72} = 4$$

$\boxed{a = 3}$ $\boxed{b = 2}$ $\left(K = \frac{288}{36} = 8\right)$

L'equazione è : $\boxed{\left(\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1\right)}$ ruotata di 30°

L'equazione data : $\boxed{-23x^2 + 3y^2 - 26\sqrt{3}\,xy - 144 = 0}$

$(a_{11} + a_{22}) = K(s_1^2 - s_2^2) = -20$

$(a_{11} - a_{22}) = K(s_1^2 + s_2^2)\cos(2\alpha) = -26$

$tang\ 2\alpha = \sqrt{3} \quad \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \begin{cases} 30° \rightarrow no \\ 120° \leftarrow (2a_{12} < 0) \end{cases}$

$$s_2^2 = \frac{2\cdot 144}{\sqrt{(-26)^2 + (26\sqrt{3})^2} - 20} = \frac{\cancel{2}\cdot 144}{\cancel{2}(26-10)} = \frac{144}{16} = 9$$

$$s_1^2 = \frac{\cancel{2}\cdot 144}{\cancel{2}(26+10)} = \frac{144}{36} = 4$$

$a = 3$; $b = 2$; $\left(K = \frac{144}{36} = 4\right)$ l'equazione: $\boxed{\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1}$ (ruotata di 120°)

Osservazioni sulla rotazione di assi

Consideriamo l'equazione, (non simmetrica rispetto ad O)

$\boxed{x^2+y^2-2Rx=0}$ e ruotiamola sostituendo:

$$\begin{cases} x = (\cos\alpha)x_1 - (\operatorname{sen}\alpha)y_1 & \rightarrow x^2=(\cos^2\alpha)x_1^2+(\operatorname{sen}^2\alpha)y_1^2-\cancel{2(\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)x_1y_1} \\ y = (\operatorname{sen}\alpha)x_1+(\cos\alpha)y_1 & \rightarrow y^2=(\operatorname{sen}^2\alpha)x_1^2+(\cos^2\alpha)y_1^2+\cancel{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\, x_1y_1} \end{cases}$$

avremo: $\boxed{x_1^2+y_1^2-2R\cos\alpha\, x_1+2R(\operatorname{sen}\alpha)y_1=0}$

per $\alpha=0$ torna l'equazione di partenza

$\alpha=60°$: $\boxed{x_1^2+y_1^2-Rx_1+R\sqrt{3}\,y_1'=0}$ per $x=0 \rightarrow y=-R\sqrt{3}$; per $y=0 \rightarrow x=+R$

Il cerchio passante per O ha ruotato di 60° <u>in verso orario</u>

$\alpha=90°$ $\boxed{x_1^2+y_1^2+2Ry_1=0}$ per $x_1=0 \rightarrow y=2R$; per $y_1=0 \rightarrow x=0$

continua a ruotare <u>orario</u>.

$\alpha=120°$ $\boxed{x_1^2+y_1^2+Rx_1+R\sqrt{3}\,y_1=0}$ per $x_1=0 \rightarrow y=-R\sqrt{3}$; per $y_1=0 \rightarrow x=-R$

Il centro del cerchio è nel III quadrante (antiorario)

$\alpha=180°$ $\boxed{x_1^2+y_1^2+2Rx_1=0}$ per $x_1=0 \rightarrow y=0$; per $y_1=0 \rightarrow x=-2R$

è col centro sul semiasse negativo delle x

$\alpha=240$ $\boxed{x_1^2+y_1^2+Rx_1-R\sqrt{3}\,y=0}$ $x_1=0 \rightarrow y=+R\sqrt{3}$; $y_1=0 \rightarrow x=-R$.

$\alpha=300$ $\boxed{x_1^2+y_1^2-Rx_1-R\sqrt{3}\,y=0}$ $x_1=0 \rightarrow y=R\sqrt{3}$; $y_1=0 \rightarrow x=R$

per $\alpha=360$ abbiamo l'iniziale. Se sostituiamo:

$$\begin{cases} x=(\cos\alpha)x_1+(\operatorname{sen}\alpha)y_1 \rightarrow x^2=(\cos^2\alpha)x_1^2+(\operatorname{sen}^2\alpha)y_1^2+\cancel{(2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)x_1y_1} \\ y=(\cos\alpha)y_1-(\operatorname{sen}\alpha)x_1 \rightarrow y_1^2=(\operatorname{sen}^2\alpha)x_1^2+\cos^2\alpha\, y_1^2-\cancel{(2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)x_1y_1} \end{cases}$$

dalla: $\boxed{x^2+y^2-2RX=0}$ si ottiene:

$$\boxed{x_1^2+y_1^2-2(R\cos(\alpha))x_1-2(R\,\mathrm{sen}(\alpha))y_1=0}$$

per $\alpha=0$ torna l'equazione iniziale.

per $\alpha=60°$ $\boxed{x_1^2+y_1^2-Rx_1-R\sqrt{2}\,y_1=0}$ $\begin{cases} x=0 \rightarrow y=+R\sqrt{2} \\ y=0 \rightarrow x=+R \end{cases}$

Il cerchio passante per O ha ruotato di 60° <u>in verso antiorario</u>

si vede che: <u>60° antiorari</u> corrispondono <u>a 300° orari</u>

e continuando:	90°	"	" a 270°
	120°	"	" 240°
	180°	"	" 180°
e viceversa.	240°	"	" 120°
	300°	"	" 60°

Se una funzione $f(x,y)=0$ vogliamo farla ruotare <u>in senso orario</u> dobbiamo sostituire

$$\begin{cases} x=(\cos\alpha)x_1-(\mathrm{sen}\,\alpha)y_1 \\ y=(\mathrm{sen}\,\alpha)x_1+(\cos\alpha)y_1 \end{cases}$$

se vogliamo farla ruotare <u>in senso antiorario</u> dobbiamo sostituire:

$$\begin{cases} x=(\cos\alpha)x_1+(\mathrm{sen}\,\alpha)y_1 \\ y=(\cos\alpha)y_1-(\mathrm{sen}\,\alpha)x_1 \end{cases}$$

Iperbole ad assi ruotati e traslati

L'equazione completa:

$$\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2(a_{12})xy + 2(a_{13})x + 2(a_{23})y + a_{33} = 0}$$

cui corrisponde:

$$\underbrace{\pm K(s_1^2\cos^2\alpha - s_2^2\operatorname{sen}^2\alpha)}_{a_{11}}x^2 + \underbrace{K(s_1^2\operatorname{sen}^2\alpha - s_2^2\cos^2\alpha)}_{a_{22}}y^2 + \underbrace{K[(s_2^2+s_1^2)\operatorname{sen}(2\alpha)]}_{2a_{12}}xy + \dots$$

$$\dots + \underbrace{(-2a_{11}x_c - 2(a_{12})y_c)}_{2a_{13}}x + \underbrace{(-2a_{12}x_c - 2a_{22}y_c)}_{2a_{23}}y + \dots$$

$$\dots + \underbrace{(a_{11}x_c^2 + a_{22}y_c^2 + 2a_{12}x_cy_c - K s_1^2 s_2^2)}_{a_{33}} = 0$$

consideriamo le uguaglianze:

$$\begin{cases} a_{11}x_c + a_{12}y_c = -a_{13} \\ a_{12}x_c + a_{22}y_c = -a_{23} \end{cases}$$

sistema risolvibile con Cramer:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{33} \quad ; \quad \begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{31} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{12} & -a_{23} \end{vmatrix} = -A_{32}$$

$$\boxed{x_c = \frac{A_{31}}{A_{33}}} \quad ; \quad \boxed{y_c = \frac{-A_{32}}{A_{33}}}$$

Sostituiamo in a_{33} le coordinate di C ora trovate e risolviamo rispetto a $(K s_1^2 s_2^2)$, si ha:

$$\boxed{(K s_1^2 s_2^2) = a_{11}\left(\frac{A_{31}}{A_{33}}\right)^2 + a_{22}\left(\frac{-A_{32}}{A_{33}}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{A_{31}}{A_{33}}\right)\left(\frac{A_{32}}{A_{33}}\right) - a_{33}}$$

$$\boxed{A_{33}^2(K s_1^2 s_2^2) = a_{11}A_{31}^2 + a_{22}(-A_{32})^2 - 2a_{12}(A_{31})(A_{32}) - a_{33}A_{33}^2}$$

sviluppando:

$$A_{33}^2 K s_1^2 s_2^2 = \Big[a_{11}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})^2 + a_{22}(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})^2 + 2a_{12}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}) - a_{33}A_{33}^2\Big]$$

$$= a_{11}(a_{12}^2 a_{23}^2 + a_{13}^2 a_{22}^2 - 2a_{12}a_{13}a_{22}a_{23}) +$$
$$+ a_{22}(a_{12}^2 a_{13}^2 + a_{11}^2 a_{23}^2 - 2a_{11}a_{12}a_{13}a_{23}) +$$
$$+ 2a_{12}(a_{12}^2 a_{13}a_{23} - a_{12}a_{13}^2 a_{22} - a_{11}a_{12}a_{23}^2 + a_{11}a_{13}a_{22}a_{23}) - a_{33}A_{33}^2$$

$$= + \cancel{a_{11}a_{12}^2a_{23}^2} + \underline{a_{11}a_{13}^2a_{22}^2} - \underline{2a_{11}a_{12}a_{13}a_{22}a_{23}}$$
$$+ \underline{a_{11}^2a_{22}a_{23}^2} - 2a_{11}a_{12}a_{13}\cancel{a_{22}}a_{23} + a_{12}^2\cancel{a_{13}^2}a_{22}$$
$$+ \underline{2a_{12}^3a_{13}a_{23}} - \cancel{2}\underline{a_{12}^2a_{13}^2a_{22}} - \cancel{2}\underline{a_{11}a_{12}^2a_{23}^2} + 2\cancel{a_{11}a_{12}a_{13}a_{22}a_{23}}$$
$$\underline{- a_{33}A_{33}^2}$$

$$\Big(A_{33}^2 K s_1^2 s_2^2 = \underline{a_{11}a_{13}^2a_{22}^2} + \underline{a_{11}^2a_{22}a_{23}^2} + \underline{2a_{12}^3a_{13}a_{23}} - \underline{a_{11}a_{12}^2a_{23}^2} - \underline{2a_{11}a_{12}a_{13}a_{22}a_{23}} -$$
$$- \underline{a_{12}^2a_{13}^2a_{22}} \quad \underline{- a_{33}A_{33}^2}\Big)$$

$$= \underline{a_{11}a_{22}(a_{13}^2a_{22} + a_{11}a_{23}^2)} - \underline{a_{12}^2(a_{13}^2a_{22} + a_{11}a_{23}^2)} + \underline{2a_{12}^3a_{13}a_{23}} -$$
$$- \underline{2a_{11}a_{12}a_{13}a_{22}a_{23}} - \underline{a_{33}A_{33}^2}$$

$$A_{33}^2 K s_1^2 s_2^2 = \underline{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(a_{13}^2a_{22} + a_{11}a_{23}^2)} - (\underline{a_{11}a_{22} - a_{12}^2})(\underline{2a_{12}a_{13}a_{23}}) - \underline{a_{33}A_{33}^2}$$

$$A_{33}^2 K s_1^2 s_2^2 = A_{33}(a_{13}^2a_{22} + a_{11}a_{23}^2 - 2a_{12}a_{13}a_{23}) - a_{33}A_{33}^2$$

$$K s_1^2 s_2^2 = \left(\frac{a_{13}^2a_{22} + a_{11}a_{23}^2 - 2a_{12}a_{13}a_{23}}{A_{33}}\right) - a_{33}$$

$$K s_1^2 s_2^2 = \frac{a_{13}(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}) + a_{23}(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})}{A_{33}} - a_{33}$$

$$K s_1^2 s_2^2 = \frac{a_{13}(-A_{31}) + a_{23}(A_{32}) - a_{33}(-A_{33})}{A_{33}}$$

$$\boxed{(K s_1^2 s_2^2) = \left(\frac{-A}{A_{33}}\right)}$$

$$(a_{11} - a_{22}) = K(s_1^2+s_2^2)\cos(2\alpha) \rightarrow \frac{2a_{12}}{(a_{11}-a_{22})} = \frac{\cancel{K}(s_1^2+s_2^2)\,\mathrm{sen}(2\alpha)}{\cancel{K}(s_1^2+s_2^2)\cos(2\alpha)}$$

$$\boxed{\mathrm{tang}(2\alpha) = \frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}}$$

$$\frac{1}{\cos(2\alpha)} = \pm\sqrt{1+\mathrm{tang}^2(2\alpha)} = \pm\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}\,\Big/(a_{11}-a_{22})$$

Il radicale ha il segno di $tg(2\alpha)$.

$$K(s_1^2+s_2^2)\frac{\cos(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{(a_{11}-a_{22})\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}}{(a_{11}-a_{22})} = \boxed{K(s_1^2 s_2^2) = \pm\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}}$$

$$\left\{\begin{aligned} K(s_1^2+s_2^2) &= \pm\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2} \\ K(s_1^2-s_2^2) &= (a_{11}+a_{22}) \end{aligned}\right\}$$ sommando e sottraendo:

$$K s_1^2 = \frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2} + (a_{11}+a_{22})\right]$$

$$K s_2^2 = \frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2} - (a_{11}+a_{22})\right]$$

$$K^2 s_1^2 s_2^2 = \frac{1}{4}\left[(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2-(a_{11}+a_{22})^2\right] = -\frac{1}{4}\left(4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)\right)$$

$$\boxed{K^2 s_1^2 s_2^2 = -A_{33}}$$

$$K = \frac{K^2 s_1^2 s_2^2}{K s_1^2 s_2^2} = \frac{-A_{33}}{-A/A_{33}} = \boxed{K = \frac{+A_{33}^2}{A}}$$

$$s_1^2 s_2^2 = \frac{K s_1^2 s_2^2}{K} = \frac{-A/A_{33}}{+A_{33}^2/A} = \frac{-A^2}{A_{33}^3} = \boxed{s_1^2 s_2^2 = \frac{-A^2}{A_{33}^3}}$$

$$b^2 = s_1^2 = \frac{K s_1^2 s_2^2}{K s_2^2} = \boxed{b^2 = \frac{+2A/A_{33}}{\pm\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}+(a_{11}+a_{22})}}$$

$$a^2 = s_2^2 = K s_1^2 s_2^2 / K s_1^2 \qquad \boxed{a^2 = \frac{+2A/A_{33}}{\pm\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2} \pm (a_{11}+a_{22})}}$$

__Esempio numerico__ (con risoluzione completa)

equazione data: $\boxed{4x^2+11y^2-24xy+32x+54y-141=0}$

$a_{11}=4$; $a_{22}=11$; $a_{12}=-12$; $a_{13}=16$; $a_{23}=27$; $a_{33}=-141$

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc} 4 & -12 & 16 \\ -12 & 11 & 27 \\ 16 & 27 & -141 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 4 & -12 \\ -12 & 11 \\ 16 & 27 \end{array}$$

$$+(4)(11)(-141)+(-12)(27)(16)+(16)(-12)(27)$$

$$= -(16^2)(11)-(27^2)(4)-(-12^2)(-141) =$$

$$= +(-6204)+(-5184)+(-5184) = -16572$$

$$= -(+2816)-(2916)-(-20304) = +14572$$

$$\Delta = \underline{\underline{-2000}}$$

$\boxed{\Delta \neq 0 \text{ (conica non degenere)}}$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 11 \end{vmatrix} = 44-144 = \underline{\underline{-100}}$$

$\boxed{A_{33}<0 \text{ (iperbole)}}$

$$+a_{33}A_{33} = (-141)(-100) = +14100$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} 4 & 16 \\ -12 & 27 \end{vmatrix} = 108+192 = \underline{\underline{+300}}$$

$$-a_{32}A_{32} = -(27)(300) = -8100$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -12 & 16 \\ 11 & 27 \end{vmatrix} = -324-176 = \underline{\underline{-500}}$$

$$+a_{31}A_{31} = +(16)(-500) = -8000$$

$$+a_{33}A_{33}-a_{32}A_{32}+a_{31}A_{31} = \underline{\underline{\Delta = -2000}}$$

$$x_c = \frac{A_{31}}{A_{33}} = \frac{-500}{-100} = \boxed{x_c=+5}$$

$$y_c = \frac{-A_{32}}{A_{33}} = \frac{-300}{-100} = \boxed{y_c=+3}$$

$$(a_{11}+a_{22}) = K(b^2-a^2) = \boxed{(4+11) = 15} = K(b^2-a^2)$$

$$(a_{11}-a_{22}) = K(b^2+a^2)\cos(2\alpha) = \boxed{(4-11) = -7} = K(b^2+a^2)\cos(2\alpha)$$

$$\frac{(2a_{12})}{(a_{11}-a_{22})} = \frac{\cancel{K(b^2+a^2)}\,\mathrm{sen}(2\alpha)}{\cancel{K(b^2+a^2)}\cos(2\alpha)} = \frac{-24}{-7} = \boxed{\mathrm{tang}(2\alpha) = 24/7}$$

$$\begin{matrix}(\alpha)\\(90+\alpha)\end{matrix} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{24}{7}\right) = \begin{matrix}36^\circ{,}86989765 \rightarrow 36^\circ\ 52'\ 12'' \\ 126{,}86989765 \rightarrow 126^\circ\ 52'\ 12''\end{matrix}$$

$$\cos(2\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2(2\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{1+24^2/7^2}} = \frac{7}{\sqrt{49+576}} = \frac{7}{\sqrt{625}}$$

$$\boxed{\cos(2\alpha) = \frac{7}{25}} = \frac{28}{100} = \underline{0{,}28}.$$

$$\frac{K(a^2+b^2)\cancel{\cos(2\alpha)}}{\cancel{\cos(2\alpha)}} = -\cancel{7}\,\frac{25}{\cancel{7}} = \boxed{K(b^2+a^2) = -25}$$

$$\boxed{K(b^2-a^2) = +15}$$

$$\boxed{Ka^2b^2 = a_{11}x_c^2 + a_{22}y_c^2 + 2a_{12}x_cy_c - a_{33}}$$

$$Ka^2b^2 = (4)(5)^2 + (11)(3)^2 + (-24)(5)(3) - (-141)$$

$$Ka^2b^2 = 100 + 99 - 360 + 141 = -20 \qquad \boxed{Ka^2b^2 = -20}$$

$$K(2b^2) = +(15) + (-25) = -10 \rightarrow \boxed{Kb^2 = -5}$$

$$K(2a^2) = (-25) - (15) = -40 \rightarrow \boxed{Ka^2 = -20}$$

$$a^2 = \frac{\cancel{K}a^2b^2}{\cancel{K}b^2} = \left(\frac{-20}{-5}\right) = +4 \quad ; \qquad \boxed{a = +2}$$

$$b^2 = \frac{\cancel{K}a^2b^2}{\cancel{K}a^2} = \frac{-20}{-20} = +1 \quad ; \qquad \boxed{b = +1}$$

$$K = \frac{Kb^2}{b^2} = \frac{Ka^2}{a^2} = \frac{-5}{1} = \frac{-20}{4} = \boxed{K = -5}$$

Se: $\alpha \cong 36{,}87°$ $\qquad 2\alpha = 73{,}74°$ $\begin{cases} sen(2\alpha) > 0 = +0{,}96 \\ \cos(2\alpha) > 0 = +0{,}28 \end{cases}$

$\alpha \cong 126{,}87°$ $\qquad 2\alpha = 253{,}74$ $\begin{cases} sen(2\alpha) < 0 = -0{,}96 \\ \cos(2\alpha) < 0 = -0{,}28 \end{cases}$

$$2a_{12} = -24 = K(b^2+a^2)\,sen\,2\alpha \rightarrow (b^2+a^2)\,sen\,2\alpha = \frac{-24}{-5} \rightarrow sen(2\alpha) = \frac{24}{5}\left(\frac{1}{5}\right)$$

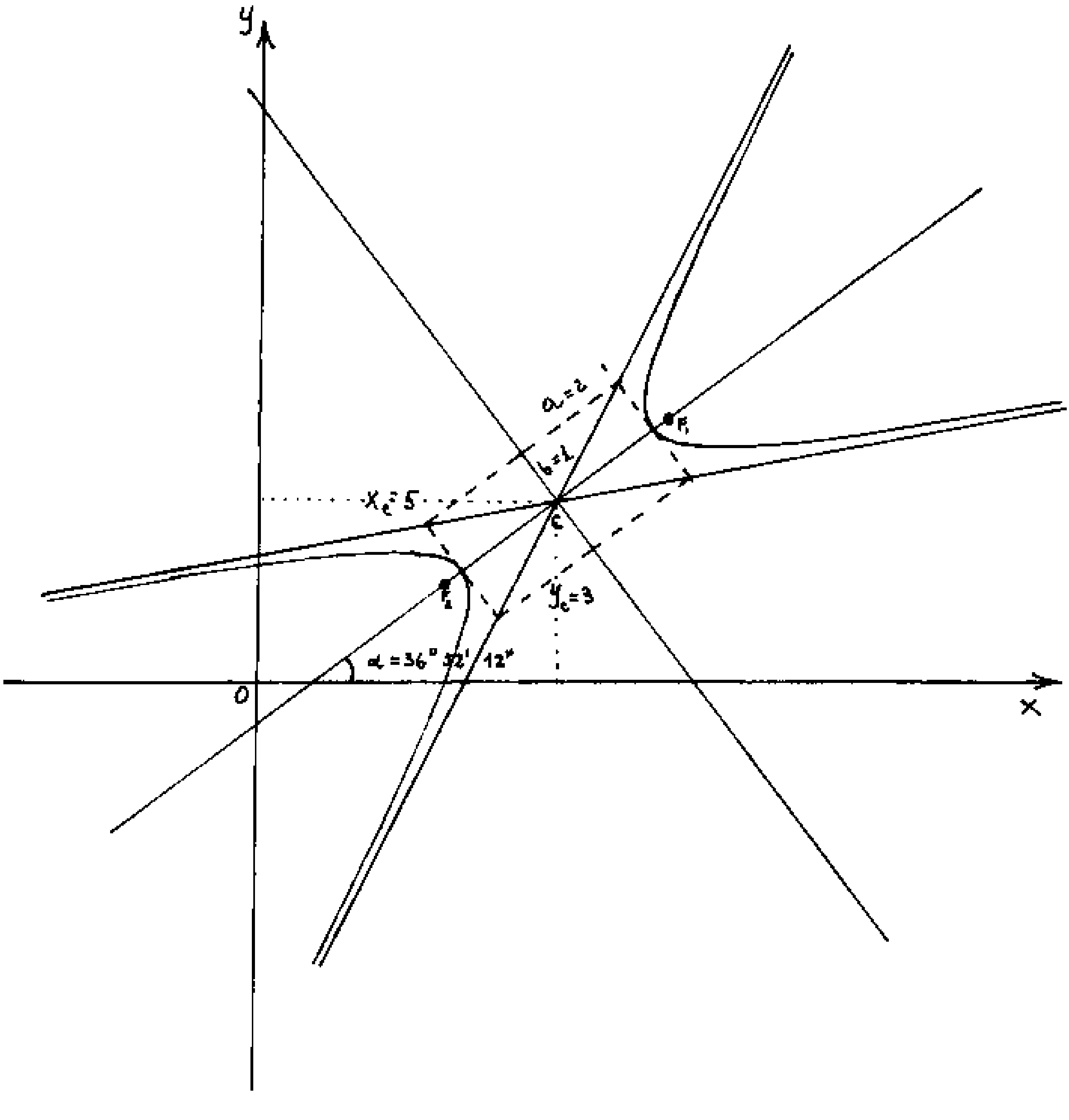
$$sen(2\alpha) = +\frac{24}{25} = \frac{(+24)4}{(25)4} = +\frac{96}{100} = +0{,}96$$

$$\boxed{\alpha = 36°\,52'\,12''}$$

Quindi è una iperbole di equazione canonica al centro: $\boxed{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1}$ ruotata di: $\underline{\alpha = 36°,86989765}$ = $\underline{\alpha = 0,6435011}$ rad. e traslata $\boxed{x_c = +5}$; $\boxed{y_c = +3}$

Il grafico

scala 1 : 1,25 cm.



La parabola

Dall'equazione generale delle coniche:

$$\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0}$$

si ha il caso parabolico quando:

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{cioè: } \underline{a_{12}^2 = (a_{11} \cdot a_{22})}$$

$$\boxed{a_{12} = \sqrt{a_{11}} \cdot \sqrt{a_{22}}}$$

Il caso parabolico è particolarmente delicato perché è il passaggio dal caso ellittico ($A_{33} > 0$) al caso iperbolico ($A_{33} < 0$); basta che $A_{33} = \pm \varepsilon$ piccolissimo perché sia escluso il caso parabolico. Lavorando con numeri irrazionali o trascendenti a infinite cifre, non è facile dire: "zero esatto": nel calcolatore lo "zero" si trova per valori inferiori a 10^{-n} ove: 10^{-n} è la "precisione" dei nostri calcoli; ma 10^{-n} non è zero!

Consideriamo il determinante:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} = 0 & \text{conica degenere} \\ \neq 0 & \text{conica non degenere} \end{cases}$$

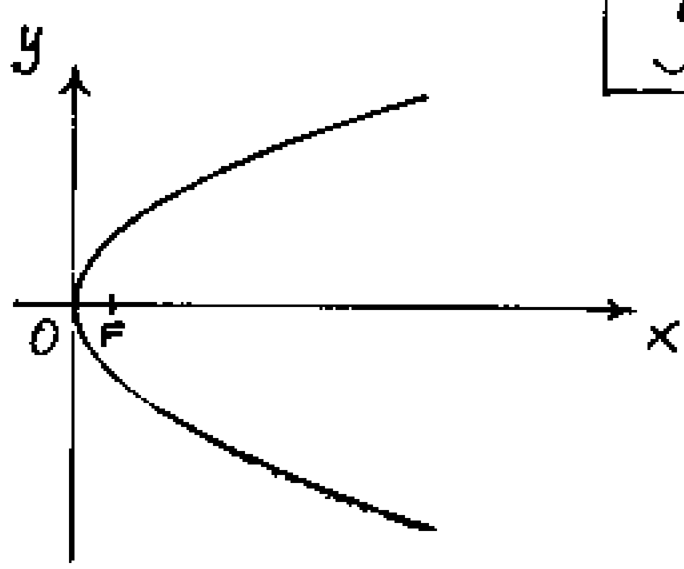
sviluppando per l'ultima riga e dovendo essere $A_{33} = 0$

$$\boxed{A = a_{31}A_{31} - a_{32}A_{32}} \quad \text{(caso parabolico)}$$

L'equazione canonica della parabola

In analogia con l'ellisse e l'iperbole, per la parabola al centro, poniamo l'asse focale coincidente con l'asse x, per cui l'equazione canonica della parabola diventa:

$$\boxed{y = \sqrt{X(4a)}}$$



può scriversi:

$$\boxed{K y^2 - K(4a)X = 0}$$

ove sono nulli:

a_{11}, a_{12}, a_{23}, a_{33} per cui:

il determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2Ka \\ 0 & K & 0 \\ -2Ka & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{A = -K^3(2a)^2}$$

ed essendo: $\boxed{K = a_{22}}$ Il modulo sarà: $\boxed{4a = \frac{-2a_{13}}{a_{22}}}$

quindi per la parabola al centro assi l'equazione data:

$$\boxed{a_{22} y^2 + 2a_{13} X = 0}$$

corrisponde a:

$$\boxed{K y^2 - 2K(2a) X = 0}$$

da cui:

$$\boxed{K = a_{22}} \qquad \boxed{4a = \frac{-2a_{13}}{a_{22}}}$$

Caso parabolico

$\boxed{A_{33} = 0}$

L'equazione può presentarsi:

$\boxed{a_{22} y^2 + 2a_{13} X = 0}$ parabola al centro con asse focale sulle x (equazione canonica)

$\boxed{a_{22} y^2 + 2a_{13} X + a_{33} = 0}$ parabola traslata in x

$\boxed{a_{22} y^2 + 2a_{13} X + 2a_{23} y + a_{33} = 0}$ traslata in y ed in x e y

$\boxed{a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_{12} xy + 2a_{13} X + 2a_{23} y = 0}$ solo ruotata non traslata (manca a_{33})

$\boxed{a_{11} X^2 + a_{22} y^2 + 2a_{12} Xy + 2a_{13} X + 2a_{23} y + a_{33} = 0}$ Parabola ruotata e traslata.

La ruotazione degli assi della parabola, (come per le altre coniche) è la presenza del coefficiente $2a_{12} = K \operatorname{sen}(2\alpha)$; se $\alpha = 90° \rightarrow \boxed{a_{11} x^2 + 2a_{23} y = 0}$ ($2a_{12} = 0$ per $\alpha = 90°; 180°; 270°$)

Mentre l'ellisse e l'iperbole sono affette da due parametri: "a", "b"; quindi nel caso generale le incognite sono 5: a, b, x_c, y_c, α; nella parabola le incognite sono solo quattro: a, x_c, y_c, α; perché è determinata da un solo parametro.

Parabola ad assi solo traslati (in x)

L'equazione data : $\boxed{a_{22}y^2 + 2a_{13}X + a_{33} = 0}$

corrisponde alla:

$$\boxed{K y^2 + 2K(2a)X + 2K(2a)(-X_c) = 0}$$

$\boxed{K = a_{22}}$ dividendo per K :

$\boxed{4a = \frac{2a_{13}}{a_{22}}}$ $\boxed{X_c = \frac{-a_{33}}{2a_{13}}}$

Parabola ad assi solo traslati (in y)

L'equazione data: $\boxed{a_{22}y^2 + 2a_{13}X + 2a_{23}y + a_{33} = 0}$

corrisponde alla:

$$\boxed{K y^2 + 2K(2a)X + 2K(-y_c)y + K y_c^2 = 0}$$

$\boxed{K = a_{22}}$ $\boxed{4a = \frac{2a_{13}}{a_{22}}}$ $\boxed{y_c = \frac{-a_{23}}{a_{22}}}$

Nel caso di assi solo traslati in y si ha che $2a_{23}$ ed a_{33} sono correlate da: $(a_{23})^2 = a_{33}$

Parabola ad assi traslati (in x ed y)

L'equazione data: $\boxed{a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0}$

corrisponde alla:

$$\boxed{K y^2 + 2K(2a)X + 2K(-y_c)y + K(-4aX_c + y_c^2) = 0}$$

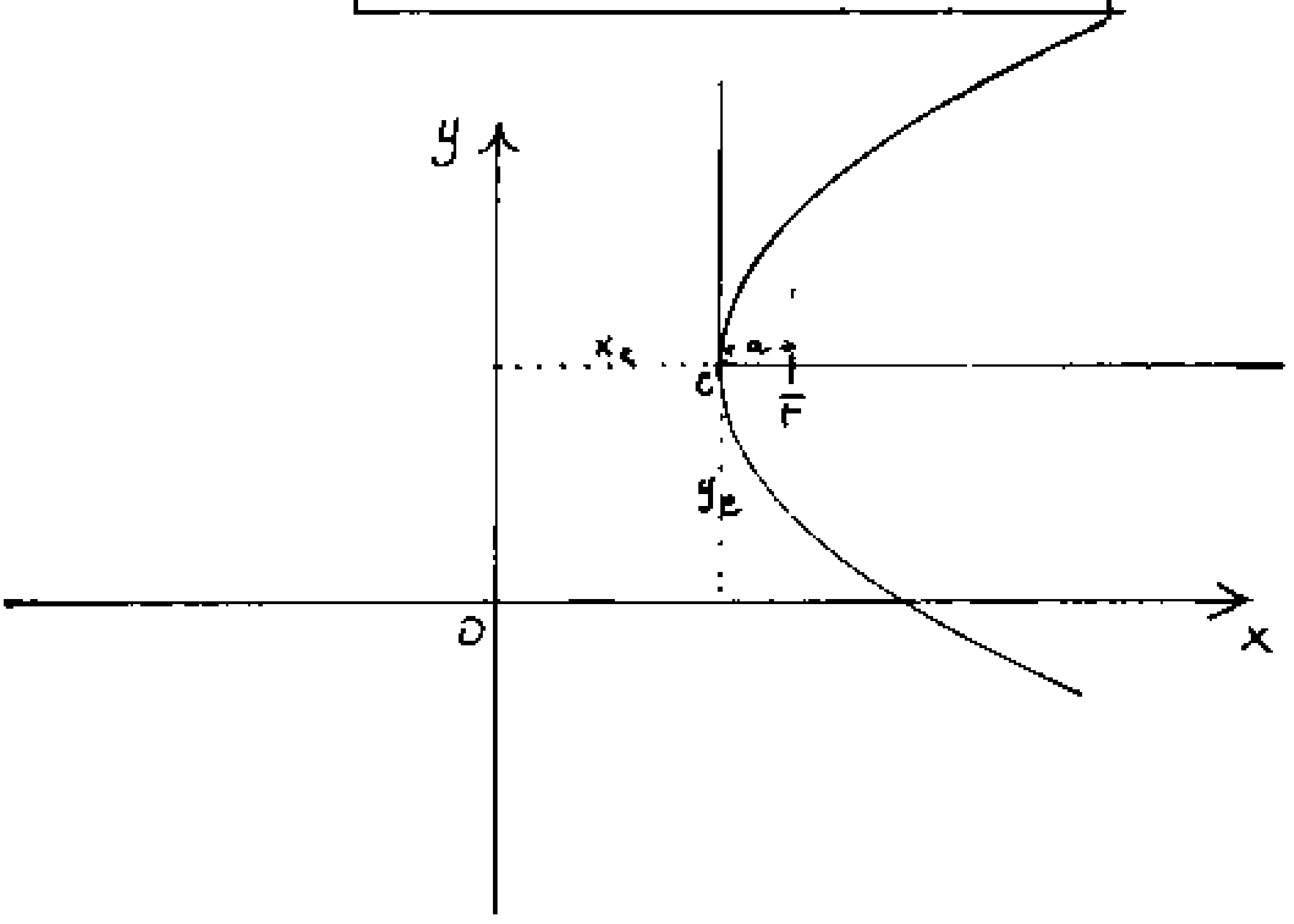
$$\boxed{K = a_{22}} \quad ; \quad \boxed{4a = \frac{2a_{13}}{a_{22}}} \quad ; \quad \boxed{y_c = \frac{a_{23}}{a_{22}}}$$

$$X_c = -\left(\frac{a_{33}}{a_{22}} - \left(\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2\right)\frac{a_{22}}{2a_{13}} =$$

$$X_c = -\left(\frac{a_{33}}{2a_{13}} - \frac{(a_{23})^2}{a_{22}\,2a_{13}}\right)$$

$$\boxed{X_c = \left(\frac{a_{23}^2}{a_{22}} - a_{33}\right)\frac{1}{2a_{13}}}$$

$$\boxed{X_c = \left(\frac{(a_{23})^2}{a_{22} \cdot 2a_{13}} - \frac{a_{33}}{2a_{13}}\right)}$$



Parabola ad assi solo ruotati (non traslati)

L'equazione data: $\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0}$

corrisponde alla:

$$\boxed{K(\operatorname{sen}^2\alpha)x^2 + K(\cos^2\alpha)y^2 - K(\operatorname{sen}(2\alpha))xy - K(4a\cos\alpha)x - K(4a\operatorname{sen}\alpha)y = 0}$$

La ruotazione degli assi della parabola porta, nel problema inverso, la necessità di determinare in quale quadrante è l'asse della parabola. Abbiamo già visto, per l'ellisse e l'iperbole la formula: $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}\right) \left\langle \begin{matrix} \alpha \\ (90+\alpha) \end{matrix} \right.$ e l'ambiguità era risolta dal segno di $2a_{12}$ in quanto, essendo l'ellisse e l'iperbole <u>curve simmetriche</u> rispetto ai due assi, basta una ruotazione di 180° per ripetere la figura di partenza. Per la parabola, <u>curva non simmetrica</u> rispetto alla retta tangente il vertice, occorre una ruotazione di 360° per ripetere la figura di partenza; ciò implica che la funzione inversa trigonometrica che fornisce l'angolo nel I° quadrante deve essere riportata al quadrante di appartenenza tenendo conto della funzione e se riferita ad: (α) o a: (2α). Nel caso di assi solo ruotati il problema è presto risolto: Calcolato $\boxed{K = a_{11} + a_{22}}$ e ridotto $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$,

$\operatorname{arctg}\left(\frac{a_{23}}{a_{13}}\right) =$

- (>0)
  - a_{13}: $-$, a_{23}: $-$ $\rightarrow = \alpha \rightarrow$ (I quadrante)
  - a_{13}: $+$, a_{23}: $+$ $\rightarrow = (180° + \alpha) \rightarrow$ (III ")
- (<0)
  - a_{13}: $+$, a_{23}: $-$ $\rightarrow = (180° - \alpha) \rightarrow$ (II ")
  - a_{13}: $-$, a_{23}: $+$ $\rightarrow = (360° - \alpha) \rightarrow$ (IV ")

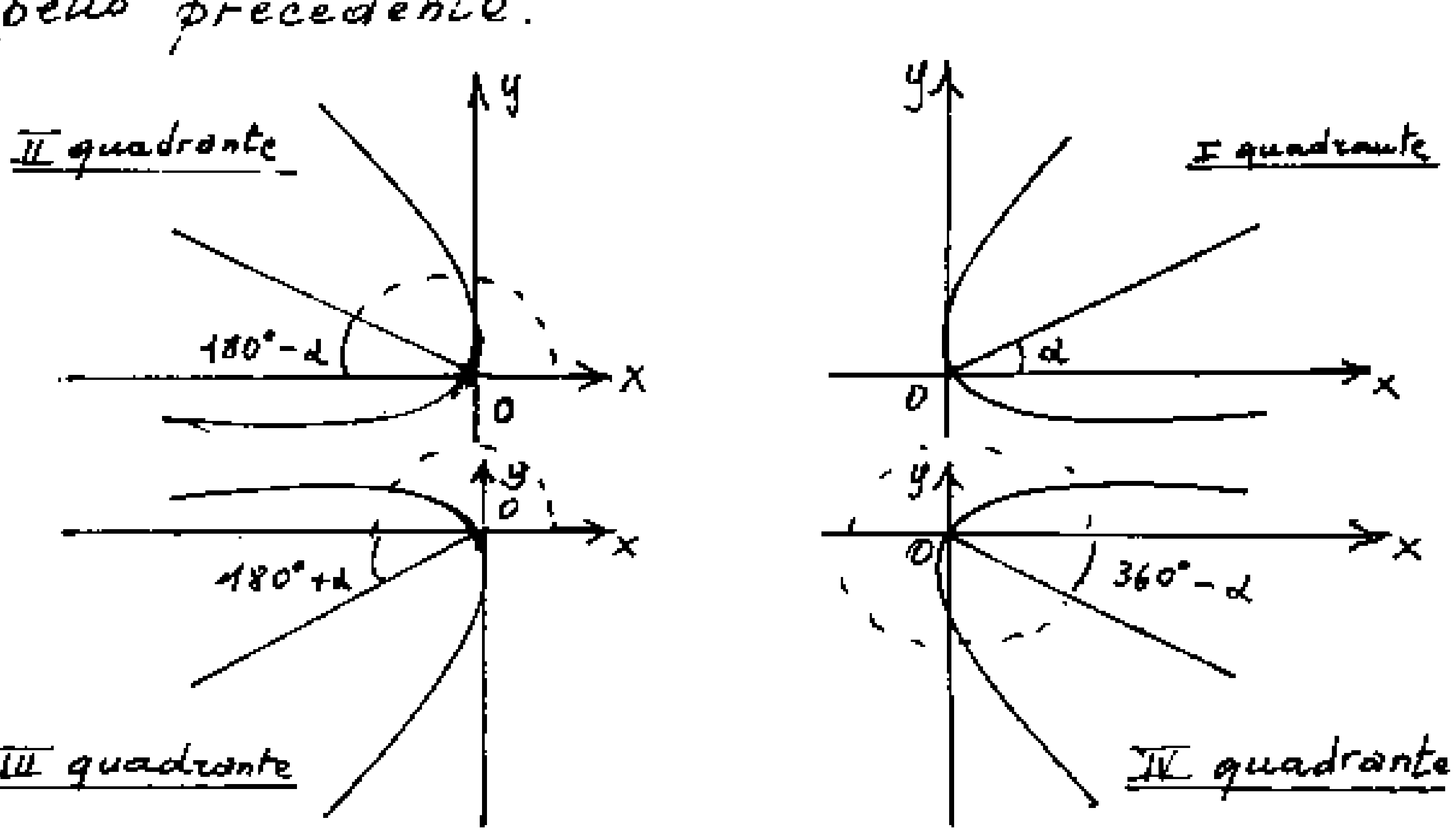
Abbiamo potuto fare questa semplificazione perché per assi <u>solo ruotati</u>: $2a_{13}$ e $2a_{23}$ non sono influenzati da x_c ed y_c.
Anche in questo caso è possibile utilizzare la stessa formula dell'ellisse e dell'iperbole: Ridotto $K > 0$; $K = (a_{11} + a_{22})$
a_{11} ed a_{22} debbono essere maggiori di zero. (non negativi)

$$(a_{11} - a_{22}) = K\,sen^2\alpha - K\cos^2\alpha = -K\cos(2\alpha)$$

$\frac{1}{2}arctg\left(\frac{2a_{12}}{(a_{11} - a_{22})}\right)$

- > 0
  - $2a_{12} < 0$
    - $0 < \alpha < 45° - I_1$
    - $180 < \alpha < 225° - III_1$
  - $2a_{12} > 0$
    - $90° < \alpha < 135° - II_1$
    - $270° < \alpha < 315° - IV_1$
- < 0
  - $2a_{12} < 0$
    - $45° < \alpha < 90° - I_2$
    - $225° < \alpha < 270° - III_2$
  - $2a_{12} > 0$
    - $135° < \alpha < 180° - II_2$
    - $315° < \alpha < 360° - IV_2$

Come si vede dal prospetto, quando sia invariata ~~la~~ la figura ruotata di 180°, cioè I e III quadrante, II e IV quadrante; basta il segno del coefficiente $2a_{12}$ per identificare la conica (ellisse o iperbole). Nel caso della parabola, in quanto assume configurazioni diverse nei quattro quadranti, dobbiamo utilizzare il prospetto precedente.



Per il calcolo del parametro "$4a$", che figura solo nei coefficienti: "$2a_{13}$" e "$2a_{23}$"; non vi sono problemi una volta noto l'angolo:

$$"4a" = \frac{2a_{13}}{K \operatorname{sen}\alpha} = \frac{2a_{23}}{K \cos\alpha}$$

ed avremo:

$$4a = \frac{2a_{13}}{(a_{11}+a_{22})\sqrt{\frac{a_{22}}{(a_{11}+a_{22})}}} = \frac{2a_{23}}{(a_{11}+a_{22})\sqrt{\frac{a_{11}}{(a_{11}+a_{22})}}}$$

$$4a = \frac{\left(\sqrt{a_{11}+a_{22}}\right)2a_{13}}{(a_{11}+a_{22})\sqrt{(a_{22})}} = \frac{\left(\sqrt{a_{11}+a_{22}}\right)2a_{23}}{(a_{11}+a_{22})\sqrt{a_{11}}}$$

$$\boxed{4a = \frac{2a_{13}}{\sqrt{(a_{11}+a_{22})(a_{22})}}}$$

$$\boxed{4a = \frac{2a_{23}}{\sqrt{(a_{11}+a_{22})(a_{11})}}}$$

$$\boxed{4a = \frac{\sqrt{2a_{13}^2 + 2a_{23}^2}}{(a_{11}+a_{22})}}$$

Però queste formule valgono nel caso di assi solo ruotati. Cercheremo le formule generali nel caso di assi ruotati e traslati.

Parabola ad assi ruotati e traslati

L'equazione data: $\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0}$

corrisponde alla:

$$\underbrace{K(\text{sen}^2\alpha)}_{a_{11}}X^2 + \underbrace{K(\cos^2\alpha)}_{a_{22}}Y^2 - \underbrace{K(\text{sen}(2\alpha))}_{2a_{12}}XY +$$

(si noti che i primi tre coefficienti sono identici alla solo ruotata)

$$+\underbrace{\left((-K\,\text{sen}^2\alpha)(2x_c) + (K\,\text{sen}(2\alpha))(y_c) - (K\,4a\cos\alpha)\right)}_{2a_{13}}X +$$

$$+\underbrace{\left((-K\cos^2\alpha)(2y_c) + (K\,\text{sen}\,2\alpha)(x_c) - (K\,4a\,\text{sen}\,\alpha)\right)}_{2a_{23}}Y +$$

$$+\left[(K\,\text{sen}^2\alpha)x_c^2 + (K\cos^2\alpha)y_c^2 - (K\,\text{sen}\,2\alpha)x_c y_c + (K\,4a\cos\alpha)x_c + (K\,4a\,\text{sen}\,\alpha)y_c\right] = 0$$

si nota che l'equazione corrisponde anche alla:

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + 2a_{12}XY + \left(-2a_{11}x_c - 2a_{12}y_c - K4a\cos\alpha\right)X +$$

$$+\left((-2a_{22})y_c - (2a_{12})x_c - (K4a\,\text{sen}\,\alpha)\right)Y + \left[a_{11}x_c^2 + a_{22}y_c^2 + 2a_{12}x_c y_c + K4a\,\text{sen}\,\alpha\, x_c + K4a\,\text{sen}\,\alpha\, y_c\right] =$$

$$= 0$$

Si noti anche: $(-K4a\cos\alpha) = 2a_{13}^*$ della parabola solo ruotata

$(-K4a\,\text{sen}\,\alpha) = 2a_{23}^*$ della parabola solo ruotata

abbiamo asteriscato i due simboli per distinguerli.

$$2a_{13} = \left(-2a_{11}x_c - 2a_{12}y_c + a_{13}^*\right)X$$

$$2a_{23} = \left(-2a_{22}y_c - 2a_{12}x_c + a_{23}^*\right)Y.$$

Calcoliamo ora il determinante A ed i minori $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33}$.

Calcolo dei determinanti della parabola.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & (-a_{11}x_c - a_{12}y_c + a_{13}^*) \\ a_{21} & a_{22} & (-a_{22}y_c - a_{12}x_c + \underline{a_{23}^*}) \\ (-a_{11}x_c - a_{12}y_c + \underline{a_{13}^*}) & (-a_{22}y_c - a_{12}x_c + a_{23}^*) & (a_{11}x_c^2 + a_{22}y_c^2 + 2a_{12}x_c y_c - 2a_{13}^* x_c - 2a_{23}^* y_c) \end{vmatrix}$$

od anche: $A =$

$$= \begin{vmatrix} \left(K(\text{sen}^2\alpha)\right) & \left(K\dfrac{\text{sen}\,2\alpha}{2}\right) & \left[K\left(-\text{sen}^2\alpha\, x_c + \dfrac{\text{sen}\,2\alpha}{2} y_c - 2a\cos\alpha\right)\right] \\ \left(K\dfrac{\text{sen}\,2\alpha}{2}\right) & \left(K(\cos^2\alpha)\right) & \left[K\left(-\cos^2\alpha\, y_c + \dfrac{\text{sen}\,2\alpha}{2} x_c - 2a\,\text{sen}\,\alpha\right)\right] \\ \left(K\left[-\text{sen}^2\alpha\, x_c + \dfrac{\text{sen}\,2\alpha}{2} y_c - 2a\cos\alpha\right]\right) & \left(K\left[-\cos^2\alpha\, y_c + \dfrac{\text{sen}\,2\alpha}{2} x_c - 2a\,\text{sen}\,\alpha\right]\right) & \left(K\left[\text{sen}^2\alpha\, x_c^2 + \cos^2\alpha\, y_c^2 - \dfrac{\text{sen}\,2\alpha}{2} y_c x_c + 4a\cos\alpha\, x_c + 4a\,\text{sen}\,\alpha\, y_c\right]\right) \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \left(a_{33}\cdot a_{22} - a_{23}^2\right) \quad ; \quad \left(\frac{\text{sen}\,2\alpha}{2}\right)^2 = (\text{sen}\,\alpha\cos\alpha)^2 = (\cos^2\alpha\,\text{sen}^2\alpha)$$

$$= K^2\Big(+\cancel{\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha\, x_c^2} + \cancel{\cos^4\alpha\, y_c} - \cancel{2\,\text{sen}\,\alpha\cos^3\alpha\, x_c y_c} + 4a\cos^3\alpha\, x_c + \cancel{4a\,\text{sen}\,\alpha\cos^2\alpha\, y_c}$$
$$-\cancel{\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha\, x_c^2} - \cancel{\cos^4\alpha\, y_c} + \cancel{2\,\text{sen}\,\alpha\cos^3\alpha\, x_c y_c} + 4a\,\text{sen}^2\alpha\cos\alpha\, x_c - \cancel{4a\,\text{sen}\,\alpha\cos^2\alpha\, y_c} - 4a^2\,\text{sen}^2\alpha\Big)$$

$$A_{11} = K^2\left[4a\cos\alpha\, x_c(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha) - 4a^2\,\text{sen}^2\alpha\right]$$

$$\boxed{A_{11} = K^2\left(4a\cos\alpha\, x_c - 4a^2\,\text{sen}^2\alpha\right)}$$

$$A_{11} = K^2 4a\left(\cos\alpha\, x_c - a\,\text{sen}^2\alpha\right) = K^2 4a\left(\cos\alpha\, x_c - a - \cos^2\alpha\, a\right)$$

$$\boxed{A_{11} = K^2 4a\left[\cos\alpha(x_c - \cos\alpha\, a) - a\right]}$$

analogamente:

$$\boxed{A_{11} = K^2\left(4a x_c \cos\alpha - 4a^2 \operatorname{sen}^2\alpha\right)}$$

$$\boxed{A_{22} = K^2\left(4a y_c \operatorname{sen}\alpha - 4a^2 \cos^2\alpha\right)}$$

$$\boxed{A_{12} = -K^2\left(2a x_c \operatorname{sen}\alpha + 2a y_c \cos\alpha + 4a^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right)} = A_{21}$$

$$\boxed{A_{13} = K^2\, 2a \cos\alpha} = A_{31}$$

$$\boxed{A_{23} = -K^2\, 2a \operatorname{sen}\alpha} = A_{32}$$

$$\boxed{A_{33} = 0}$$

$A_{33} = 0$ implica: $(a_{11} a_{22} = a_{12}^2)$ infatti $\operatorname{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = (\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)^2$

Calcoliamo il determinante $A = a_{11}A_{11} + a_{13}A_{13} - a_{12}A_{12}$

$$K^3\left(4a x_c \operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha - 4a^2 \operatorname{sen}^4\alpha\right) +$$
$$K^3\left(-2a x_c \operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha - 4a^2 \cos^4\alpha + 2a y_c \operatorname{sen}\alpha \cos^2\alpha\right)$$
$$K^3\left(-2a x_c \operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha - 4a^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\alpha - 2a y_c \operatorname{sen}\alpha \cos^2\alpha\right)$$
$$K^3\left(-4a^2\left[\operatorname{sen}^2\alpha\left(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + \cos^2\alpha\right] \right)$$

$$\boxed{A = -K^3 4a^2}$$

essendo $A_{33} = 0$

era più veloce sviluppando l'ultima riga: $A = a_{31}A_{31} - a_{32}A_{32}$

$$A = K^3\left(-2a \cos\alpha \operatorname{sen}^2\alpha\, x_c + 2a \cos^2\alpha \operatorname{sen}\alpha\, y_c - 4a^2 \cos^2\alpha\right)$$
$$K^3\left(+2a \cos\alpha \operatorname{sen}^2\alpha\, x_c - 2a \cos^2\alpha \operatorname{sen}\alpha\, y_c - 4a^2 \operatorname{sen}^2\alpha\right)$$
$$-K^3(4a^2)\left(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha\right)$$

(che verifica).

Si noti che i valori trovati per il determinante A e per i suoi minori restano validi qualunque sia la parabola (traslata o non traslata, ruotata o non ruotata) infatti il determinante A non è influenzabile da angoli di rotazione o coordinate di traslazione e, poiché: $\boxed{(a_{11} + a_{22}) = K}$ valida in ogni caso avremo che il modulo "a" della parabola può calcolarsi subito:

$$\boxed{2a = \sqrt{\frac{-A}{K^3}}} = \qquad a = \frac{\sqrt{-A/K}}{2K}$$

$$2a = \sqrt{\frac{-A}{(a_{11} + a_{22})}} \Big/ (a_{11} + a_{22})$$

$$2a = \frac{\sqrt{-a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) + a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})}}{(a_{11} + a_{22})\sqrt{(a_{11} + a_{22})}}$$

$$2a = \frac{\sqrt{-a_{12}a_{13}a_{23} + a_{13}^2 a_{22} + a_{11}a_{23}^2 - a_{12}a_{13}a_{23}}}{(a_{11} + a_{22})\sqrt{(a_{11} + a_{22})}}$$

$$\boxed{2a = \frac{\sqrt{a_{13}^2 a_{22} + a_{11}a_{23}^2 - 2a_{12}a_{13}a_{23}}}{(a_{11} + a_{22})\sqrt{(a_{11} + a_{22})}}}$$

ma $a_{12} = \sqrt{a_{11}a_{22}}$. perciò:

$$2a = \frac{\sqrt{(\sqrt{a_{11}}\,a_{23})^2 + (\sqrt{a_{22}}\,a_{13})^2 - 2\sqrt{a_{11}}\cdot\sqrt{a_{22}}\,a_{13}a_{23}}}{(a_{11} + a_{22})^{3/2}}$$

$$\boxed{2a = \frac{\sqrt{(a_{13}\sqrt{a_{22}} - a_{23}\sqrt{a_{11}})^2}}{(a_{11} + a_{22})\sqrt{a_{11} + a_{22}}}} = \boxed{\frac{|a_{13}\sqrt{a_{22}} - a_{23}\sqrt{a_{11}}|}{(a_{11} + a_{22})^{3/2}}}$$

essendo: $(a_{13}\sqrt{a_{22}} - a_{23}\sqrt{a_{11}})^2 = (a_{23}\sqrt{a_{11}} - a_{13}\sqrt{a_{22}})^2$.

altre espressioni per calcolare $2a$

$$2a = \frac{A_{13}}{K^2 \cos\alpha} = \frac{A_{13}}{(a_{11}+a_{22})^2 \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}+a_{22}}}} = \qquad \boxed{2a = \frac{A_{13}}{(a_{11}+a_{22})^{3/2}\sqrt{a_{22}}}}$$

$$2a = \frac{A_{23}}{K^2 \operatorname{sen}\alpha} = \boxed{\frac{A_{23}}{(a_{11}+a_{22})^{3/2}\sqrt{a_{11}}} = 2a} \quad \boxed{2a = \frac{A_{33}}{(a_{11}+a_{22})\sqrt{a_{12}^2+a_{11}^2}}}$$

Calcolo le coordinate di traslazione del vertice "c" $\boxed{K=(a_{11}+a_{22})}$

$$\boxed{2a = \sqrt{\frac{-A}{K^3}}}$$

$$X_c = \left(\frac{A_{11}}{K^2} + 4a^2 \operatorname{sen}^2\alpha\right)\frac{1}{4a\cos\alpha}$$

$$X_c = \frac{A_{11} + (K\,2a \operatorname{sen}\alpha)^2}{2(K^2\,2a\cos\alpha)} \qquad \boxed{X_c = \frac{A_{11} + (A_{23}/K)^2}{2A_{13}}}$$

$$y_c = \left(\frac{A_{22}}{K^2} + 4a^2\cos^2\alpha\right)\frac{1}{4a \operatorname{sen}\alpha}$$

$$y_c = \frac{A_{22} + (K\,2a\cos\alpha)^2}{2(K^2\,2a \operatorname{sen}\alpha)} \qquad \boxed{y_c = \frac{A_{22} + (A_{13}/K)^2}{-2A_{23}}}$$

calcolo dell'angolo di rotazione

$$\operatorname{tang}(\alpha) = \frac{-a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{11}}{-a_{12}} = \boxed{\frac{-A_{23}}{A_{13}} = tg(\alpha)} \qquad \boxed{\operatorname{tang}\alpha = \frac{-a_{12}}{a_{22}}}$$

$\operatorname{tang}\alpha = \left(\frac{-a_{12}}{a_{22}}\right)$

>0	I quadrante	$(A_{13} > 0)$	(α)
	III quadrante	$(A_{13} < 0)$	$(180° + \alpha)$
<0	II quadrante	$(A_{13} < 0)$	$(180° - \alpha)$
	IV quadrante	$(A_{13} > 0)$	$(360° - \alpha)$

Il Determinante e i minori della parabola

$(a_{ij} = a_{ji})$

Parabola	A	A_{11}	A_{22}	$A_{12} = A_{21}$	$A_{13} = A_{31}$	$A_{23} = A_{32}$	A_{33}
al centro	$-K^3(2a)^2$	0	$-K^2(2a)^2$	0	$K^2(2a)$	0	0
traslata	$-K^3(2a)^2$	$K^2(4a\,x_c)$	$-K^2(2a)^2$	$-K^2(2a)y_c$	$K^2(2a)$	0	0
ruotata	$-K^3(2a)^2$	$K^2(4a^2 \operatorname{sen}^2\alpha)$	$-K^2(4a^2)\cos^2\alpha$	$-K^2(4a^2)(\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)$	$K^2(2a)\cos\alpha$	$-K^2(2a)\operatorname{sen}\alpha$	0
ruotata e traslata	$-K^3(2a)^2$	$K^2(4a)(x_c\cos\alpha - a\operatorname{sen}^2\alpha)$	$K^2(4a)(y_c\operatorname{sen}\alpha - a\cos^2\alpha)$	$-K^2(2a\operatorname{sen}\alpha\,x_c + 2a\cos\alpha\,y_c + 4a^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)$	$K^2(2a)\cos\alpha$	$-K^2(2a)\operatorname{sen}\alpha$	0

I coefficienti dell'equazione della parabola

Parabola	a_{11}	a_{22}	$2a_{12}$	$2a_{13}$	$2a_{23}$	a_{33}
al centro	0	K	0	$-K4a$	0	0
traslata	0	K	0	$-K4a$	$-K2y_c$	$K(y_c^2 + 4a\,x_c)$
ruotata	$K\operatorname{sen}^2\alpha$	$K\cos^2\alpha$	$-K\operatorname{sen}(2\alpha)$	$-K4a\cos\alpha$	$-K4a\operatorname{sen}\alpha$	0
ruotata e traslata	$K\operatorname{sen}^2\alpha$	$K\cos^2\alpha$	$-K\operatorname{sen}(2\alpha)$	$K(-2x_c\operatorname{sen}^2\alpha + y_c\operatorname{sen}2\alpha - 4a\cos\alpha)$	$K(-2y_c\cos^2\alpha + x_c\operatorname{sen}2\alpha - 4a\operatorname{sen}\alpha)$	$K(\operatorname{sen}^2\alpha\,x_c^2 + \cos^2\alpha\,y_c^2 + \operatorname{sen}(2\alpha)x_c y_c + 4a\cos\alpha\,x_c + 4a\operatorname{sen}\alpha\,y_c)$

parabola canonica al centro assi con asse focale sul semiasse positivo delle x

formula generale: $\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0}$

La sequenza delle operazioni da compiere

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{33} = 0$$

(parabola) $\boxed{K = (a_{11} + a_{22})}$ zero$(K>0)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = A_{23}$$

- $= 0$
  - $2a_{13} < 0$ non ruotata
    - $a_{33} = 0$ <u>al centro</u>
    - $a_{33} \neq 0$ <u>traslata</u>
  - $2a_{13} > 0$ ruotata di π
- $\neq 0$
  - $a_{33} = 0$ <u>ruotata</u>
  - $a_{33} \neq 0$ <u>ruotata e traslata</u>

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = A_{13}$$

- $= 0$
  - $A_{23} > 0$ ruotata di $\frac{3}{2}\pi$
  - $A_{23} < 0$ ruotata di $\frac{\pi}{2}$
- $\neq 0$ (vedi sopra)

$$\boxed{A = A_{13} a_{13} - A_{23} a_{23}} \qquad \boxed{2a = \sqrt{\frac{A}{K^3}}} \text{ (modulo)}$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{11} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{22} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{12}$$

controllo:

$$\boxed{A = A_{11} a_{11} + A_{22} a_{22} - A_{12} a_{12}}$$

$$\boxed{x_c = \frac{1}{2A_{13}} \left(A_{11} + \left(\frac{-A_{13}}{K} \right)^2 \right)} \qquad \boxed{y_c = \frac{-1}{2A_{23}} \left(A_{22} + \left(\frac{A_{13}}{K} \right)^2 \right)}$$

$(x_c ; y_c) =$ <u>coordinate del vertice</u>

$$\boxed{\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{-a_{12}}{a_{22}} \right)}$$

(α = angolo del I quadrante)

$$tg\,\alpha = \left(\frac{-a_{12}}{a_{22}} \right) = \left(\frac{a_{11}}{-a_{12}} \right) = \left(\frac{-A_{32}}{A_{31}} \right)$$

- > 0 → α
  - $A_{13} > 0 \rightarrow$ I quadrante $= (\alpha)$
  - $A_{13} < 0 \rightarrow$ III quadrante $= (180° + \alpha)$
- < 0 → $360 - \alpha$
  - $A_{13} > 0 \rightarrow$ IV quadrante $= (360° - \alpha)$
  - $A_{13} < 0 \rightarrow$ II quadrante $= (180° - \alpha)$

infatti: <u>$A_{31} = A_{13} = K^2 2a \cos\alpha$</u> <u>ha il segno di $\cos\alpha$</u>.

Attenzione: per $\alpha = 90°$; $\alpha = 270°$; per cui $A_{13} = 0$ decide il segno di A_{23}

$$tg\,\alpha = \infty \begin{cases} A_{23} > 0 \rightarrow \alpha = 270° \\ A_{23} < 0 \rightarrow \alpha = 90° \end{cases}$$

(vedi anche sopra)

Il Determinante e i minori dell'ellisse ($a_{ij} = a_{ji}$)

Ellisse	A	A_{11}	A_{22}	$A_{12} = A_{21}$	$A_{13} = A_{31}$	$A_{23} = A_{32}$	A_{33}
al centro	$-K^3a^4b^4$	$K^2a^2b^2$	0	0	0	0	$K^2(a^2b^2)$
traslata	$-K^3a^4b^4$	$K^2(a^2b^2x_c^2 - a^4b^2)$	$K^2(a^2b^2y_c^2 - a^2b^4)$	$-K^2(a^2b^2x_cy_c)$	$K^2(a^2b^2x_c)$	$-K^2(a^2b^2y_c)$	$K^2(a^2b^2)$
ruotata	$-K^3a^4b^4$	$-K^2(a^2b^4\sin^2\alpha + a^4b^2\cos^2\alpha)$	$-K(a^2b^4\cos^2\alpha + a^4b^2\sin^2\alpha)$	$-K(a^2b^4 - a^4b^2)\sin\alpha\cos\alpha$	0	0	$K^2(a^2b^2)$
ruotata e traslata	$-K^3a^4b^4$	$-K(a^2b^4\sin^2\alpha + a^4b^2\cos^2\alpha)$	$-K(a^2b^4\cos^2\alpha + a^4b^2\sin^2\alpha)$	$-K(a^2b^4 - a^4b^2)\sin\alpha\cos\alpha$	$K^2(a^2b^2x_c)$	$-K^2(a^2b^2y_c)$	$K^2(a^2b^2)$

I coefficienti dell'equazione dell'ellisse

Ellisse	a_{11}	a_{22}	$2a_{12}$	$2a_{13}$	$2a_{23}$	a_{33}
al centro	Kb^2	Ka^2	0	0	0	$-Ka^2b^2$
traslata	Kb^2	Ka^2	0	$-2Kb^2x_c$	$-2Ka^2y_c$	$K(b^2x_c^2 + a^2y_c^2 - a^2b^2)$
ruotata	$K(b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha)$	$K(b^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha)$	$K((b^2-a^2)\sin(2\alpha))$	0	0	$-Ka^2b^2$
ruotata e traslata	$K(b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha$	$K(b^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha$	$K((b^2-a^2)\sin(2\alpha))$	$-2K(a_{11}x_c + a_{12}y_c)$	$-2K(a_{22}y_c + a_{12}x_c)$	$K(a_{11}x_c^2 + a_{22}y_c^2 + 2a_{12}x_cy_c - a^2b^2)$

equazione canonica al centro assi con asse focale sul semiasse positivo delle x

formula generale: $\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0}$

La sequenza delle operazioni da compiere

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{33} > 0 \quad (ellisse)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = A_{23} \qquad \boxed{y_C = \frac{-A_{23}}{A_{33}}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = A_{13} \qquad \boxed{x_C = \frac{A_{13}}{A_{33}}}$$

$$\boxed{A = A_{33}a_{33} - A_{23}a_{23} + A_{13}a_{13}}$$

$$\boxed{K = \frac{A_{33}^2}{-A}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{11} \; ; \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{12} \; ; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{22}$$

si controlla: $\boxed{A = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}}$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}\right) \begin{cases} \alpha & (\text{se } 2a_{12} < 0) \\ (90^\circ + \alpha) & (\text{se } 2a_{12} > 0) \end{cases}}$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{-2A/A_{33}}{(a_{11}+a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + (2a_{12})^2}}} = \begin{cases} \sqrt{b^2} = (\text{semiasse minore}) = b \\ \sqrt{a^2} = (\text{semiasse maggiore}) = a \end{cases}}$$

Si noti la semplicità delle operazioni utilizzando i minori del determinante delle coniche.

Il Determinante e i minori dell'iperbole $(a_{ij} = a_{ji})$

Iperbole	A	A_{11}	A_{22}	$A_{12} = A_{21}$	$A_{13} = A_{31}$	$A_{23} = A_{32}$	A_{33}
al centro	$+K^3a^4b^4$	$K^2a^2b^2$	0	0	0	0	$-K^2(a^2b^2)$
traslata	$+K^3a^4b^4$	$K^2(a^4b^2-a^2bx_c)$	$-K^2(a^2b^4+a^2b^2y_c)$	$+K^2(a^2b^2x_cy_c)$	$-K^2(a^2b^2x_c)$	$+K^2(a^2b^2y_c)$	$-K^2(a^2b^2)$
ruotata	$+K^3a^4b^4$	$-K^2(a^2b^4\sin^2\alpha-a^4b^2\cos^2\alpha)$	$-K^2(a^2b^4\cos^2\alpha-a^4b^2\sin^2\alpha)$	$-K^2(a^4b^2+a^2b^4)\sin\alpha\cos\alpha$	0	0	$-K^2(a^2b^2)$
ruotata e traslata	$+K^3a^4b^4$	$-K^2(a^2b^4\sin^2\alpha-a^4b^2\cos^2\alpha)$	$-K^2(a^2b^4\cos^2\alpha-a^4b^2\sin^2\alpha)$	$-K^2(a^4b^2+a^2b^4)\sin\alpha\cos\alpha$	$-K^2(a^2b^2x_c)$	$+K^2(a^2b^2y_c)$	$-K^2(a^2b^2)$

I coefficienti dell'equazione dell'iperbole

Iperbole	a_{11}	a_{22}	$2a_{12}$	$2a_{13}$	$2a_{23}$	a_{33}
al centro	Kb^2	$-Ka^2$	0	0	0	$-Ka^2b^2$
traslata	Kb^2	$-Ka^2$	0	$-2Kb^2x_c$	$+2Ka^2y_c$	$K(b^2x_c^2-a^2y_c^2-a^2b^2)$
ruotata	$K(b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha)$	$K(b^2\sin^2\alpha-a^2\cos^2\alpha)$	$K((b^2+a^2)\sin(2\alpha))$	0	0	$-Ka^2b^2$
ruotata e traslata	$K(b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha)$	$K(b^2\sin^2\alpha-a^2\cos^2\alpha)$	$K((b^2+a^2)\sin(2\alpha))$	$-2K(a_{11}x_c+a_{12}y_c)$	$-2K(a_{22}y_c+a_{12}x_c)$	$K(a_{11}x_c^2+a_{22}y_c^2+2a_{12}x_cy_c-a^2b^2)$

equazione canonica al centro assi con asse focale sul semiasse positivo delle x

formula generale: $\boxed{a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0}$

La sequenza delle operazioni da compiere

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{33} < 0 \quad (\text{iperbole})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = A_{23} \qquad \boxed{y_c = \frac{-A_{23}}{A_{33}}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = A_{13} \qquad \boxed{x_c = \frac{A_{13}}{A_{33}}}$$

$$\boxed{A = A_{33}\, a_{33} - A_{23}\, a_{23} + A_{13}\, a_{13}}$$

$$\boxed{K = \frac{-A_{33}^2}{A}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{11} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{12} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{22}$$

si controlla : $\boxed{A = A_{11}\, a_{11} - A_{12}\, a_{12} + A_{13}\, a_{13}}$

$$\boxed{\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{12}}{(a_{11} - a_{22})}\right) < \begin{matrix} (2a_{12} < 0) = \alpha \\ (2a_{12} > 0) = (90^\circ + \alpha) \end{matrix}}$$

$$\boxed{\frac{-2A/A_{33}}{-(a_{11} + a_{22}) + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2}} = b^2}$$

$b = \sqrt{b^2} = (\text{semiasse})$

$$\boxed{\frac{-2A/A_{33}}{+(a_{11} + a_{22}) + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2}} = a^2}$$

$a = \sqrt{a^2} = (\text{semiasse focale})$

Conica per cinque punti.

Dall'equazione generale delle coniche sostituendovi le coordinate di cinque punti: A, B, C, D, E; otteniamo un sistema di cinque equazioni, nelle cinque incognite: a_{11}/a_{33}; a_{22}/a_{33}; $2a_{12}/a_{33}$; $2a_{13}/a_{33}$; $2a_{23}/a_{33}$; ovviamente possiamo dividere per a_{11} o qualunque altro coefficiente, anziché per a_{33}, basta sapere quale coefficiente si è ridotto ad "uno" (1)..

Una conica passante per un punto $A \equiv (x_A ; y_A)$ ha per equazione: $a_{11}(x-x_A)^2 + a_{22}(y-y_A)^2 + 2a_{12}(x-x_A)(y-y_A) + 2a_{13}(x-x_A) + 2a_{23}(y-y_A) + a_{33} = 0$. (che è l'equazione di traslazione se manteniamo fissi i coefficienti, e li trasformiamo: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2(a_{13} - a_{11}x_A - a_{12}y_A)x + 2(a_{23} - a_{22}y_A - a_{12}x_A)y + (a_{33} + a_{11}x_A^2 + a_{22}y_A^2 + 2a_{12}x_Ay_A - 2a_{13}x_A - 2a_{23}y_A) = 0$.

Noi consideriamo un generico punto $P \equiv (x_P ; y_P)$ che sostituito nell'equazione la verifichi; dividiamo per a_{33} avremo la matrice completa ove con la regola di Cramer è possibile risolvere le incognite: cioè a_{11}/a_{33}; a_{22}/a_{33}; $2a_{12}/a_{33}$; $2a_{13}/a_{33}$; $2a_{23}/a_{33}$

$$\begin{array}{cccccc} \frac{a_{11}}{a_{33}} & \frac{a_{22}}{a_{33}} & \frac{2a_{12}}{a_{33}} & \frac{2a_{13}}{a_{33}} & \frac{2a_{23}}{a_{33}} & = \frac{a_{33}}{a_{33}} \\ \hline x_A^2 & y_A^2 & x_Ay_A & x_A & y_A & -1 \\ x_B^2 & y_B^2 & x_By_B & x_B & y_B & -1 \\ x_C^2 & y_C^2 & x_Cy_C & x_C & y_C & -1 \\ x_D^2 & y_D^2 & x_Dy_D & x_D & y_D & -1 \\ x_E^2 & y_E^2 & x_Ey_E & x_E & y_E & -1 \end{array}$$

Esempio numerico

I punti per i quali dovrà passare la conica, siano: $A \equiv (0;1)$; $B \equiv (1;3)$; $C \equiv (-1;-3)$; $D \equiv (2;1)$ $E \equiv (1,0)$. Sostituendo le coordinate di ciascuno di questi punti nell'equazione:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = -a_{33}$$

che possiamo scrivere:

$$\left(\frac{a_{11}}{a_{33}}\right)x^2 + \left(\frac{a_{22}}{a_{33}}\right)y^2 + \left(\frac{2a_{12}}{a_{33}}\right)xy + \left(\frac{2a_{13}}{a_{33}}\right)x + \left(\frac{2a_{23}}{a_{33}}\right)y = -1$$

avremo 5 equazioni ove i coefficienti sono le cinque incognite (da moltiplicare per coefficienti arbitrari K essendo (-1) la colonna dei termini noti.)

Il determinante dei coefficienti sarà:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 9 & 3 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 12 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 12 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 1 \end{vmatrix}(2)$$

$$\Delta = -2(6-36) = 60$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 9 & 3 & 1 & +3 \\ -1 & 9 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mp \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & 0 & 3 \\ 9 & 3 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 9 & -6 \\ 3 & 7 & -12 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & -6 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_{11} = 2(-48+24) = -96$$

$$\underline{\underline{a_{11} = \frac{-96}{60} = -1{,}6}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_{22} = 3(-12-4) = -48$$

$$\underline{\underline{a_{22} = \frac{-48}{60} = -0{,}8}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 9 & -1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 3 \\ 9 & 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 9 & -2 & -12 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 4{,}5 & -6 \\ 2{,}5 & -12 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_{12} = -4(-54+15) = +156$$

$$\underline{\underline{2a_{12} = \frac{156}{60} = +2{,}6}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & 3 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & 0 & 3 \\ 9 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 9 & -6 \\ 3 & 9 & -12 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_{13} = -2(-36+18) = +36$$

$$\underline{\underline{2a_{13} = \frac{36}{60} = +0{,}6}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 9 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 9 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 9 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 9 & 9 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{23} = -2(18-12) = -12$$

$$\underline{\underline{2a_{23} = \frac{-12}{60} = -0{,}2}}$$

L'equazione della conica:

$$-1{,}6\,x^2 - 0{,}8\,y^2 + 2{,}6\,xy + 0{,}6\,x - 0{,}2\,y = -1$$

può scriversi:

$$\boxed{\underset{a_{11}}{16x^2} + \underset{a_{22}}{8y^2} - \underset{2(a_{12})}{26\,xy} - \underset{2(a_{13})}{6x} + \underset{2(a_{23})}{2y} - \underset{(a_{33})}{10} = 0}$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & -13 \\ -13 & 8 \end{vmatrix} = (128 - 169) = \underline{-41} < 0 \quad (\text{iperbole})$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & -3 \\ -13 & 1 \end{vmatrix} = (16 - 39) = \underline{-23} \qquad y_c = \frac{-A_{23}}{A_{33}} = \frac{23}{-41} = -0{,}5609756$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & -3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = (-13 + 24) = \underline{11} \qquad x_c = \frac{A_{13}}{A_{33}} = \frac{11}{-41} = -0{,}2682927$$

$$\boxed{A = a_{33}A_{33} - a_{23}A_{23} + A_{13}a_{13}} \qquad A = (-10)(-41) - (1)(-23) + (11)(-3) = (410 + 23 - 33) =$$

$$\boxed{A = 400} \qquad \boxed{K = \frac{A_{33}^2}{A} = \frac{41^2}{400} = 4{,}2025}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & -10 \end{vmatrix} = (-80 - 1) = \underline{-81}$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & 1 \\ -3 & -10 \end{vmatrix} = (130 + 3) = \underline{133}$$

controllo:

$$\boxed{A = (16)(-81) - (-13)(133) + (-3)(11) = 400}$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & -3 \\ -3 & -10 \end{vmatrix} = (-160 - 9) = \underline{-169}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{12}}{(a_{11} - a_{22})}\right) = \begin{cases} 2a_{12} < 0 = \alpha \longrightarrow (2a_{12} = -26) \\ 2a_{12} > 0 = (90^\circ + \alpha) \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{-26}{16 - 8}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{-13}{4}\right) = \begin{cases} -36^\circ{,}44863552 = \underline{323^\circ\, 33'\, 05''} \\ 2a_{12} > 0 \text{ non è il nostro caso.} \end{cases}$$

calcolo dei semiassi

$$\boxed{a^2 = \frac{-2A/A_{33}}{(a_{11}+a_{22}) + \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}}}$$

$$a^2 = \frac{-2(400)/-41}{(16+8)+\sqrt{(16-8)^2+(-26)^2}} = \frac{800}{41\left(24+\sqrt{740}\right)}$$

$$a^2 = \frac{800}{41\,(51{,}202941)} = 0{,}381076 \rightarrow \boxed{a = 0{,}617313268}$$

(asse focale)

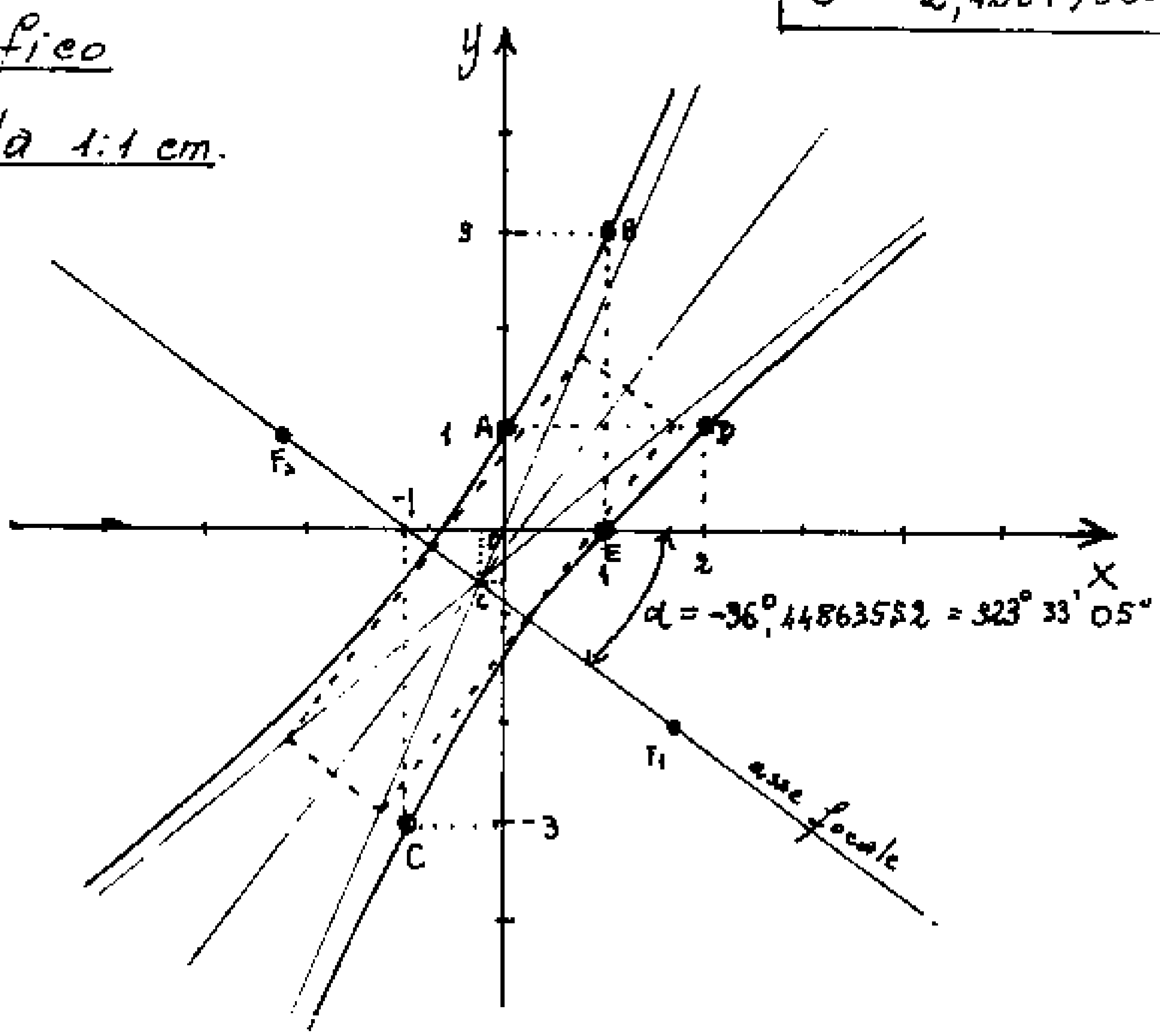
$$\boxed{b^2 = \frac{-2A/A_{33}}{-(a_{11}+a_{22}) + \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}}}$$

$$b^2 = \frac{800}{41\left(-24+\sqrt{700}\right)} = \frac{800}{41(3{,}20294101)} = 6{,}091962048$$

$$\boxed{b = 2{,}468190035}$$

grafico

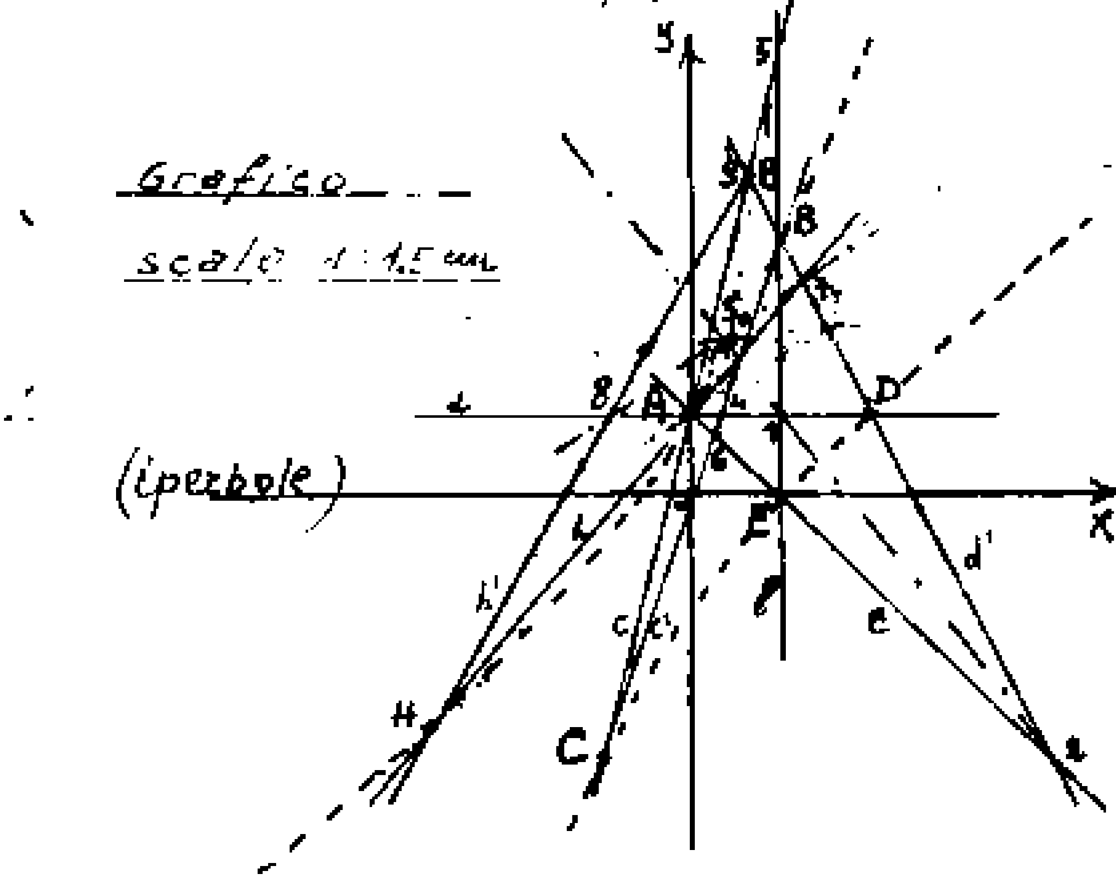
scala 1:1 cm.



Risoluzione grafica della conica per 5 punti

Questo problema può essere meglio trattato quando avremo esposto la geometria proiettiva (Teorema di Steiner - Chasles) che dice: "Il luogo dei punti comuni ai raggi corrispon= denti in due fasci proiettivi, (S) ed (S'), (complanari distinti e non prospettivi) è una conica".

In questa sede utilizzeremo il teorema senza dimostrarlo. Scelti due dei cinque punti come poli di proiezione, per esempio sia $A=(S)$ e $B=(S_1)$, da A e da B si proiettano gli altri tre punti, e siano rispettivamente c, c'; d, d'; e, e'; i raggi corri= spondenti da $A(S)$ e da $B(S')$ verso C, D, E. Avremo punti comuni: $e'd$ in 1; ed' in 2; (sulla retta $\overline{1\text{-}2}$ dovrà essere il centro di collineazione



S_0) $d'c$ in 3; dc' in 4; (anche la retta $\overline{3\text{-}4}$ deve passare per S_0). ce' in 5 $c'e$ in 6. (anche la $\overline{5\text{-}6}$ deve passare per S_0)

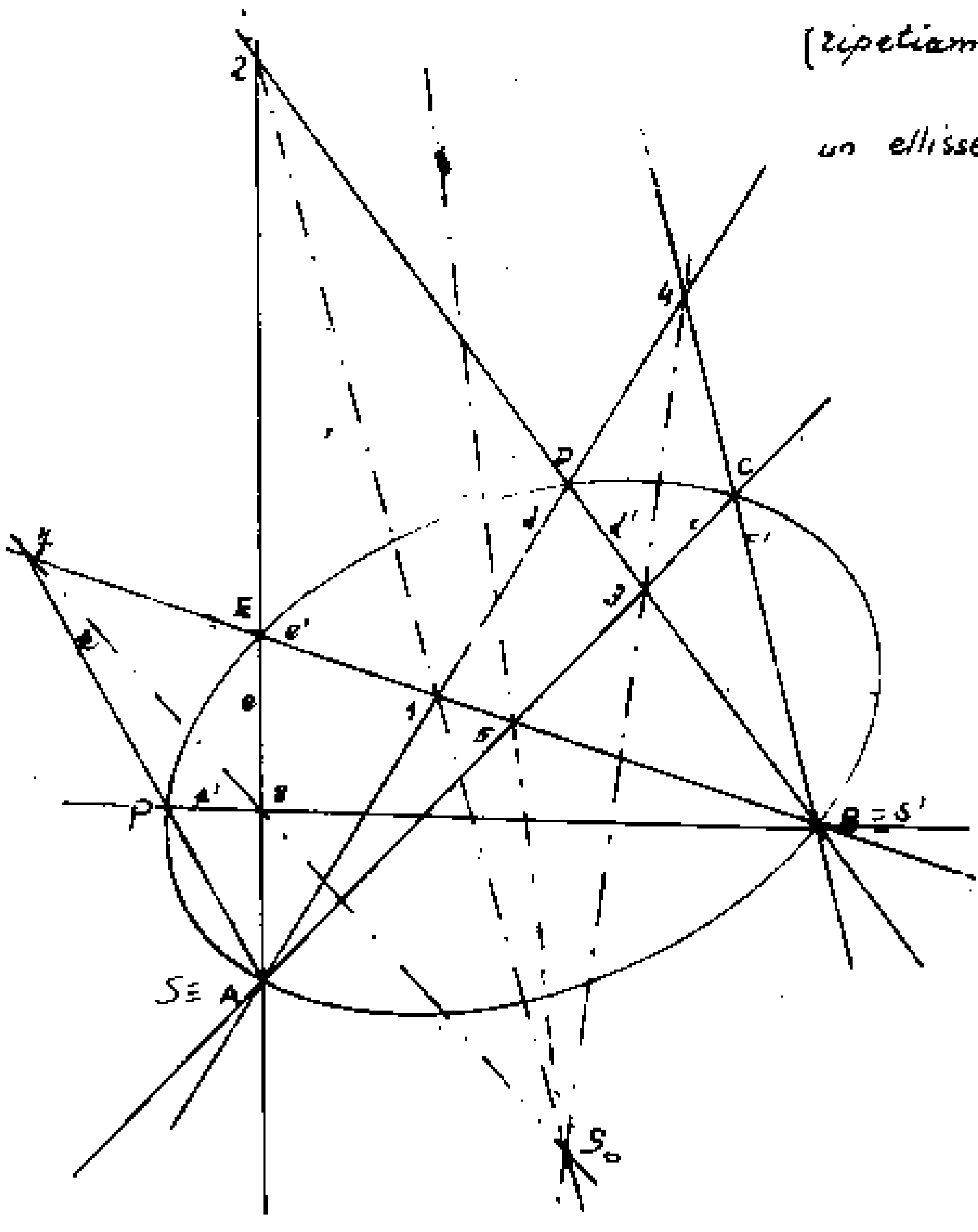
Tracciamo da A un generico raggio h che incontri in 7 il raggio d', se uniamo 7 con S_0 in 8 incontreremo d; perciò il raggio h' da $B(S')$ sarà l'unione di 8 con B il punto comune ad h e h' sarà H ulteriore punto della conica. E' così possibile tracciare per punti la conica (Il problema non ha risoluzioni in casi di punti allineati)

In questo genere di costruzioni grafiche, è piuttosto importante la scelta dei due punti S ed S', centri dei fasci proiettanti. Infatti se ripetessimo la costruzione prendendo S in C anziché in A e lasciando S' in B avremo che S_0 si allontanerebbe dai cinque punti, e dovremmo fare una scala molto piccola perché non esca dal foglio. Per cinque punti A, B, C, D, E le possibili coppie sono: $\binom{5}{2} = 10$ e precisamente:

$AB - AC - AD - AE - BC - BD - BE - CD - CE - DE$.

Anche sulla scelta delle coppie $(S), (S_1)$ rimandiamo l'argomento alla geometria proiettiva.

(ripetiamo la costruzione per un ellisse.)



Sequenza dei cubi

Abbiamo già visto che la sequenza dei numeri naturali al quadrato è data dalla somma progressiva dei numeri dispari. Ci domandiamo, se esiste, una espressione che ci dia la sequenza dei cubi.
Notiamo che la somma progressiva dei numeri interi, scalata di un posto, moltiplicata per 6, aumentata di 1 da una successione tale che le somme progressive (ridotte della serie) sono i cubi.

Osserviamo la seguente tabella:

n	$\Sigma(n-1)$	$6\cdot\Sigma(n-1)$	$\gamma = 6\Sigma(n-1)+1$	$\Sigma\gamma = n^3$	Note
1	0	0	1	1	Per far tornare n^3 in corrispondenza di n.
2	1	6	7	8	
3	3	18	19	27	
4	6	36	37	64	
5	10	60	61	125	
6	15	90	91	216	
7	21	126	127	343	
8	28	168	169	512	
9	36	216	217	729	
10	45	270	271	1000	
....	...	....	.....	....	....

Sappiamo che la somma dei primi n numeri naturali è data da: $\Sigma = \frac{n+1}{2}(n)$, ma avendo scalato di 1 diventa: $\Sigma_{n-1} = \frac{(n-1)+1}{2}(n-1)$

$\Sigma_{n-1} = \frac{n^2-2n+1+-1+n}{2} = \frac{1}{2}(n^2-n)$ e moltiplicata per 6 avremo $\frac{6}{2}(n^2-n) = (3n^2-3n)$, che aumentata di 1 $= \gamma = 3n^2+3n+1$, ove facendo la $\sum_1^n \gamma$ si ha:

$$\sum_1^n 3n^2 = 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{2}(2n^3+n^2+2n^2+n)$$

$$= \frac{1}{2}(2n^3+3n^2+n)$$

$$-\sum_1^n 3n = -3\frac{(n+1)}{2}n = -\left(\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n\right) = \frac{1}{2}(3n^2-3n)$$

$$\sum_1^n 1 = n = \frac{2}{2}n$$

Sommando: $\cancel{\frac{1}{2}}(\cancel{2}n^3+\cancel{3n^2}-\cancel{3n^2}+\cancel{n}-\cancel{3n}+\cancel{2n})$

$$= n^3$$

Le formule per le ridotte delle serie di potenze di numeri naturali, sono in questo II vol.
