La matematica, la geometria, l'analisi, per chi voglia ripartire da zero

Premessa

Avvertiamo subito che è perfettamente inutile studiare una molteplicità di teoremi "a memoria" per risolvere un qualsiasi problema. È invece assolutamente necessario che, il bagaglio di cognizioni, ciascuno se lo conquisti personalmente, partendo da constatazioni accettabili ed estremamente semplici. È questo il criterio che seguiremo nella nostra esposizione.

Posizione del problema.

L'uomo, come essere pensante, a qualunque epoca appartenga, ed in qualunque località viva, sente la necessità di "memorizzare" la propria esperienza, sia per se stesso, sia per comunicarla ai propri simili. D'altra parte, proprio l'esperienza ha insegnato che la mente umana può dimenticare. Per arrivare in un certo punto di una intricata foresta, occorre ricordare il percorso. I percorsi per arrivarci sono praticamente infiniti, alcuni più accessibili, più brevi, più lunghi, ed alcuni presentano difficoltà qualche volta insormontabili. Perciò una volta memorizzato un percorso "sicuro" l'uomo cercherà di trovare se ve ne sono dei migliori ... ciò avviene per tutte le cose, (matematica inclusa).

La memoria - la comunicabilità - i linguaggi

"Memorizzare" esternamente alla mente umana, significa produrre un qualcosa capace di "Comunicare" all'autore o ad altri, ciò che volevasi memorizzare. Il disegno è forse il "linguaggio" più universale, però, mentre rende bene "la forma", non è capace di memorizzare i suoni, i profumi, e tutte le altre cose non riducibili alla sensazione visiva. Ma le memorie esterne alla mente umana, possono distinguersi in due grandi gruppi: le memorie "permanenti" e le memorie "di transito o contingenti". Queste ultime servono solo all'atto in cui sono costituite, ed hanno comunicato il loro contenuto di informazione. È quindi della massima importanza conoscere il "linguaggio" mediante il quale certi "simboli" transitori, o permanenti possano trasmettere informazioni. I "simboli" possono essere gestuali (mimica), suoni, fonemi (linguaggio parlato), simboli grafici di varia natura, (scrittura, ideogrammi, grafici, o altro). È fondamentale che il linguaggio sia inequivocabile; purtroppo le lingue parlate, e le stesse parole, spesso con lo stesso accento, hanno significati diversi. Per esempio, in italiano, la parola: "amare" può essere l'infinito del verbo, ma può anche essere l'aggettivo qualificativo, di genere femminile, plurale. Da cui le ovvie battute.

Cosa memorizzare

Forse l'uomo prima di memorizzare i capi del suo bestiame incidendo tacche sul suo bastone (quelle che poi saranno detti numeri romani), ha eretto una stele di pietra per una persona cara.

E' possibile memorizzare tutto, il piacere, il dolore, il tempo, lo spazio, gli eventi, le ricette , i meccanismi, i processi di lavorazione. I diversi linguaggi a livello tribale, con i traffici, finiscono per unificarsi nei simboli quantificativi. I simboli numerici, correlati fra loro, porteranno all'aritmetica, in cui, la memorizzazione del prodotto, è quella che oggi si chiama: Tavola Pitagorica. Passeranno secoli prima di avere le tavole logaritmiche o addirittura i computer. Eppure il procedimento è sempre lo stesso: "vedere se vi è una via migliore per raggiungere lo scopo". E ciò puó avvenire correlando "fatti" acquisiti e memorizzati, anche molto diversi fra loro.

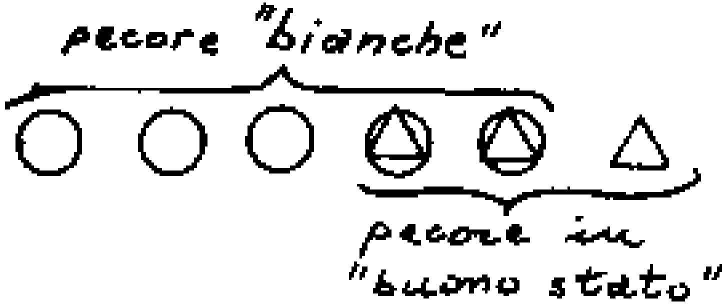
Non abbiamo trattato della memorizzazione incosciente quale si forma nel bambino nei primi anni di vita, perché lo studio è rivolto a persone adulte che desiderano: "ripartire da zero". Cioè non trattiamo psicologia o pedagogia infantile.

Le quantitá

Noi usiamo i "numeri" per esprimere le "quantitá"; in effetti non é lecita alcuna numerabilitá. Infatti le dieci pecore di Tirio sono tutte diverse fra loro, sia per etá, sia per colore del manto, sia per stato fisico, ecc. Quindi il numero "10" si riferisce solo alla caratteristica comune: (essere pecore). —

Questa osservazione, in tempi abbastanza recenti ha portato alla cosiddetta "insiemistica"; essa esprimerebbe: nell'insieme di 10 pecore di tirio, vi sono vari sottoinsiemi, infatti vi sono: 3 pecore nere, 5 pecore bianche, e 2 variegate. Vi sono: 3 pecore in buono stato, 4 in medio stato, 3 in cattivo stato. Se di pecore bianche in buono stato ve ne sono 2, queste che hanno le caratteristiche comuni a due sottoinsiemi, costituiscono la "intersezione" fra i sottoinsiemi: "pecore bianche e pecore in buono stato.

Si noti che la "unione" dei due sottoinsiemi: pecore bianche (5) e pecore in buono stato (3) non è otto: (5+3=8), ma sei (5+3-2=6), perché occorre togliere "l'intersezione" in quanto, le due pecore dell'intersezione, si conterebbero due volte; sia come pecore "bianche" ○ sia come pecore in "buono stato" △



l'intersezione è indicata con: (◬ ◬)

Le correlazioni dell'insiemistica tendono a determinare qualificazioni di quantità.

Le frazioni

Non sempre le quantità possono essere espresse per numeri interi, una torta può essere suddivisa in fette, ed ammesso che, chi ha tagliato la torta, abbia fatto fette: "uguali", (non esistono cose assolutamene uguali, per il semplice fatto che due cose distinguibili, fra l'altro, occupano posizioni diverse. L'identità di una cosa è solo con se stessa.) una parte di torta può essere espressa da una "frazione": (aritmeticamente due numeri separati da una barra di cui il primo detto "numeratore" indica il numero delle fette che si sono prese, il secondo detto "denominatore" indica il numero totale delle fette in cui è stata divisa la torta). Si hanno così tre tipi di frazioni:

Proprie :- Quando il numeratore è minore del denominatore, cioè quando quantificano un numero minore di (1) uno. (per esempio: $2/3$) (La torta è stata divisa in 3 parti, e ne abbiamo prese 2)

Improprie : - Quando il numeratore è maggiore del denominatore, cioè quando quantificano un numero maggiore di (1)(uno), e quindi la frazione può scindersi in un numero intero ed in una frazione propria.

(esempio: $23/5 = \frac{20+3}{5} = 4+\frac{3}{5}$)

(cinque torte sono state divise ciascuna in 5 parti ne abbiamo prese 23 delle 25 fette, ma bastava tagliare una sola torta in 5 parti e prendere quattro torte intere e tre fette di quella tagliata)

Apparenti : - Quando il numeratore è uguale o multiplo intero del denominatore, cioè quando quantificano un numero intero. (esempio: $\frac{12}{3} = 4$)(era inutile tagliare le 4 torte in tre fette ciascuna). Si noti però come: $\frac{12}{3}$ e 4 pur essendo la stessa quantità esprimano cose diverse (torte tagliate e non tagliate)

L'insieme dei numeri interi e dei numeri frazionari, si chiama insieme dei numeri "Razionali" cioè grandezze rappresentabili con una frazione (propria, impropria, apparente).

Vedremo che vi sono grandezze non esprimibili mediante una frazione, cioè non appartenenti all'insieme dei numeri razionali.

IMPORTANTE notare che moltiplicando o dividendo numeratore e denominatore per uno stesso numero il valore della frazione non cambia.

Supponiamo di aver diviso la nostra torta in tre parti e di averne presa una, cioè abbiamo preso $\frac{1}{3}$ di torta. Se la torta fosse stata divisa in 6 parti, tagliando a metá ogni terzo di torta la nostra parte $\frac{1}{3}$ diventerebbe $\frac{2}{6}$, a parte i tagli, la quantitá è la stessa: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{(1)\cdot(2)}{(3)\cdot(2)}$

Ciò vale per qualunque numero "n" siano state divise le fette iniziali: $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot n}{3 \cdot n}$, cioè:

"Moltiplicando (o dividendo) numeratore e denominatore per uno stesso numero, il valore della frazione non cambia."

Ciò è importantissimo perché ci consente di semplificare i calcoli: si abbia la frazione:

$\frac{420}{630}$ si vede subito che possiamo dividere: "sopra e sotto" per 10 ed avremo: $\frac{420:10}{630:10} = \frac{42}{63}$ si nota che $42 = 6 \times 7$; e $63 = 9 \times 7$ per cui possiamo dividere ambo i termini per 7 cioè $\frac{42:7}{63:7} = \frac{6}{9}$ e qui dividiamo per 3 : $\frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$.

Cioè:

$$\frac{420}{630} = \frac{\cancel{10}\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{3}\cdot 2}{\cancel{10}\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{3}\cdot 3} = \frac{2}{3}$$

notate come mentalmente è più facile acquisire quant'è 2/3 anziché 420/630.

Quindi per semplificare una frazione "si scompongono in fattori numeratore e denominatore e si elidono i fattori comuni"

Il prodotto dei fattori comuni (nel nostro caso $10 \times 7 \times 3 = 210$) è detto: "Massimo Comun Divisore" si sigla: M.C.D. per cui: $\left(\frac{420:210}{630:210} = \frac{2}{3}\right)$ per semplificare una frazione, cioè ridurla ai "minimi termini" occorre dividere numeratore e denominatore per il loro M.C.D.

(che è dato dal prodotto dei sottomultipli comuni)

Criteri di divisibilità - numeri primi

Per scomporre un numero di più cifre in fattori, ricordiamo che:

1) Un numero pari è sempre divisibile per due (2)
2) Se la somma delle sue cifre è divisibile per tre (3) l'intero numero è divisibile per 3 (tre)
3) Se l'ultima cifra è 0 o 5 è divisibile per (5)
4) Se la somma delle cifre di posto pari e quella delle cifre di posto dispari sono uguali o differiscono di un multiplo di (11) l'intero numero è divisibile per (11)
5) Un numero che sia divisibile solo per 1 e per se stesso si chiama: <u>numero primo</u>

Sono numeri primi: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41.... ecc.

Per eseguire la scomposizione di un numero, usualmente si procede per successive divisioni iniziando dai divisori più piccoli, fino ad esaurirli, si predispone i calcolo come segue: (per es: 5544)

5544	2
2772	2
1386	2
693	3
231	3
77	7
11	11
1	

cioè:

$$5544 = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot7\cdot11 = 2^3\cdot3^2\cdot7\cdot11$$

Queste successive divisioni risultano utili anche per semplificare i radicali.

Si sono omessi i criteri di divisibilità per potenze del 2, o del 3, o del 5, perché la scomposizione deve essere <u>in numeri primi</u>. Tuttavia, per completezza indichiamo:

divisibile per 4 (se lo è il numero formato dalle ultime due cifre)
" " 8 (" " " " " tre ")
" " 9 (se lo è la somma delle sue cifre)
" " 25 (se lo è il numero formato dalle ultime due cifre)
" " 125 (" " " " " tre ")
ecc.

Si noti che se N è un numero qualsiasi si ha:

$$\frac{N}{5} = \frac{2 \cdot N}{10} \quad ; \quad \frac{N}{25} = \frac{4 \cdot N}{100} \quad ; \quad \frac{N}{125} = \frac{8 \cdot N}{1000}$$

poiché dividere per 10, 100, 1000, è facile perché basta spostare la virgola, piuttosto che dividere per 5, 25, 125 conviene moltiplicare per 2, 4, 8 rispettivamente.

Per fare una tavola di <u>numeri primi</u> il filosofo greco <u>ERATOSTENE</u> (276 - 190 A.C.) scrisse in un quadro la successione dei numeri naturali, quindi perforò i multipli del 2 forando ogni due numeri, poi i multipli di tre lasciando il tre e forando ogni tre numeri (qualche numero lo trovava già forato, come 16), poi il primo numero non forato risulta il 7 ed egli fora ogni 7 numeri, e così via. I numeri non perforati erano numeri primi ed il quadro fu chiamato: <u>Crivello di Eratostene.</u>

(crivello è un attrezzo agricolo formato da una pelle perforata che si usava per separare il grano dalla pula)(oggi di lamiera perforata)(lo staccio o vaglio è di rete a maglie)

L'Algebra

Anzichè scrivere numeri spesso composti da molte cifre, è molto più comodo e veloce indicare le quantità con lettere:

a, b, c, ... per quantità note e costanti

x, y, z, ... per quantità incognite

K, H, λ, ... per quantità parametriche.

In oltre vi sono, in matematica, numeri spesso ricorrenti ed importantissimi, composti di infinite cifre decimali; per es. il rapporto fra la circonferenza ed il diametro che si indica con "π" (pi greco);

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716 9\ldots$

oppure la base dei logaritmi naturali che si indica con "e".

$e = 2{,}7182818284590452353602874713526624977572470 9\ldots$

Anche ad altre costanti sono riservate lettere o simboli particolari. Spesso nell'algebra si usa assumere come simbolo l'iniziale di ciò che rappresenta: lato $= l$; base $= b$; apotema $= a$; (essendo già usata "a"), per l'altezza si usa: altezza $= h$; ecc,

Per gli angoli si usano lettere greche:

Riportiamo un quadro delle lettere greche maiuscole e minuscole, nonchè la loro denominazione corrente in italiano.

Quadro dell'alfabeto greco

Maiuscole	minuscole	denominazione		corrispondenza
Α	α	alfa	ἄλφα	ă
Β	β	beta	βῆτα	b
Γ	γ	gamma	γάμμα	g (duro)
Δ	δ	delta	δέλτα	d
Ε	ε	epsilon	ἒ ψιλόν	ĕ (= e semplice)
Ζ	ζ	zeta	ζῆτα	z (dolce)
Η	η	eta	ἦτα	ē
Θ	ϑ, θ	theta	θῆτα	th (th inglese)
Ι	ι	iota	ἰῶτα	i
Κ	κ	Kappa	κάππα	(κ) c (duro)
Λ	λ	lamda	λάμβδα	l
Μ	μ	my	μῦ	m
Ν	ν	ny	νῦ	n
Ξ	ξ	xi (csi)	ξῖ	x
Ο	ο	omicron	ὂ μικρόν	o (= piccolo)
Π	π	pi	πῖ	p
Ρ	ρ	rho	ῥῶ	r
C, Σ	c σ, ς	sigma	σίγμα	s (duro)
Τ	τ	tau	ταῦ	t
Υ	υ	ypsilon	ὖ ψιλόν	y (u francese)
Φ	φ	phi (fi)	φῖ	ph
Χ	χ	chi	χῖ	ch
Ψ	ψ	psi	ψῖ	ps
Ω	ω	omega	ὦ μέγα	o (= grande)

In algebra esiste la convenzione che due lettere affiancate ab significano "b" moltiplicato per "a", oppure "a" moltiplica "b"; (il moltiplicatore precede, si chiama anche coefficiente moltiplicatore o semplicemente coefficiente: ax ("a" coefficiente di x).

Per le altre operazioni aritmetiche si ha anche: $(a+b)$ vuol dire "b" addizionato ad "a"; $(a-b)$ = "b" sottratto ad "a". Se uno stesso fattore "a" figura nei prodotti di tutti gli addendi, può essere: "messo in evidenza", cioè diventare coefficiente della sommatoria per esempio: $(ab^2 + acd + 4a - a^2b) = a(b^2 + cd + 4 - ab)$.

Il quoziente di due quantità si indica: a/b oppure, più raramente: $a:b$. Anche in algebra si possono semplificare le frazioni: $\frac{ac+ab}{a} = \frac{\cancel{a}(c+b)}{\cancel{a}} = (c+b)$.

Detto: $1/b$ l'inverso o reciproco di b è opportuno ricordare che la frazione: $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ ed anche: $\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$.

Premesso che dicesi: "proprietà commutativa" di una operazione aritmetica, la facoltà di scambiare i due operandi restando invariato il risultato. Cioè: $(b+a) = (a+b)$; $ab = ba$;

godono di questa proprietà, la somma e la moltiplicazione; però trasformando la divisione in prodotto, cioè prendendo il reciproco del divisore, si ha: $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \cdot a = \frac{a}{b}$. È opportuno ricordare che dividere una grandezza per un'altra significa moltiplicarla per l'inverso o reciproco di quest'ultima. Ciò evita errori ed ambiguità. Per esempio, avendo la frazione $\frac{m}{n}$, si debba dividerla per l, è bene scrivere: $\frac{m}{n} \cdot \frac{1}{l} = \frac{m}{nl}$. È bene evitare di scrivere: $\frac{\frac{m}{n}}{l}$, perché, se non si sta attenti alla lunghezza della barra di frazione può intendersi: $\frac{m}{\frac{n}{l}} = \frac{ml}{n}$ che sarebbe: $\frac{m}{n} \cdot l$ e cioè un errore avendo moltiplicato anziché diviso. (Mai fare frazioni a doppia barra quando è possibile evitarle) $\left(\frac{m}{n} \Big/ \frac{a}{b} = \frac{m}{n} \cdot \frac{b}{a} = \frac{mb}{na}\right)$ Il quoziente di due frazioni è il prodotto della frazione dividendo per l'inverso della frazione divisore.

Per sommare o sottrarre due frazioni è necessario ridurle allo stesso denominatore. Dopo aver ridotto le singole frazioni ai minimi termini dividendo i membri di ciascuna per il rispettivo M.C.D.; occorre trovare un multiplo comune dei denominatori; il più immediato è il prodotto dei denominatori, però, fra tutti i possibili multipli, esiste un minimo comune multiplo che si usa indicare con: "m.c.m".

Il m.c.m ha la proprietà di rendere la frazione risultante con numeri più piccoli. (non sempre la frazione risultante risulta ridotta ai minini termini)

esempio: $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} =$ (m.c.m = 6)

$$\frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

avremmo potuto: "moltiplicare in croce" cioè:

$$\frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot 5}{3 \cdot 6} = \frac{12+15}{18} = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$$

moltiplicare incrociato si usa per determinare quale di due frazioni è la maggiore; per es. $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{7}$

$2 \cdot 7 = 14$; $5 \cdot 3 = 15$; $15 > 14$ perciò: $\frac{3}{7} > \frac{2}{5}$. Il simbolo > $a > b$ si legge: "a maggiore di b".

Per trovare il minimo comune multiplo = m.c.m di più numeri, si scompongono i numeri in fattori primi e si moltiplicano fra loro i fattori comuni e non comuni col massimo esponente.

Per es. 8, 4, 15, 18, si ha: $8 = 2^3$; $4 = 2^2$; $15 = 3 \cdot 5$; $18 = 2 \cdot 3^2$ avremo: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360 =$ m.c.m.

$360/8 = 45$; $360/4 = 90$; $360/15 = 24$; $360/18 = 20$.

L'equivalenza di due frazioni - Le proporzioni

considerìamo l'uguaglianza : $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$

possiamo scriverla nella forma:

$$\boxed{a : b = c : d}$$

e si legge: **a stá a b come c stá a d**

ove: "b" e "c" sono detti medi , mentre:
"a" e d sono detti estremi della proporzione.

È da osservare come una frazione, sia un "rapporto". (La grandezza "a" "rapportata" alla grandezza "b" (confrontata, paragonata) è n volte tanto); ció vuol dire che: $\boxed{\frac{a}{b} = n}$, ed "n" è lo stesso "coefficiente di proporzionalitá" di "c" su "d" cioè anche: $\boxed{\frac{c}{d} = n}$

Se moltiplichiamo l'uguaglianza : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ per (bd) otteniamo:

$$\boxed{ad = bc}$$

cioè:

In una proporzione, il prodotto dei medi equivale il prodotto degli estremi.

perció:

"invertendo i medi o gli estremi la proporzione é ancora valida" (con diverso rapporto). $6:3=10:5$; $6:10=3:5$.

cioè data una proporzione: $\boxed{a:b=c:d}$ risultano valide anche:

$$a:c=b:d$$
$$c:a=d:b$$
$$d:c=b:a$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=n\ ;\quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c}=1/n\ ;\quad \frac{c}{a}=\frac{d}{b}=m\ ;\quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{1}{m}$$

queste correlazioni portano a tre importanti regole sulle proporzioni, infatti:

Se: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}=\frac{a(m\pm 1)}{b(m\pm 1)}=\frac{am\pm a}{bm\pm b}$.

ma dalla: $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}=m$ avremo: $am=c\ ;\ bm=d$

perciò sostituendo: $\frac{am\pm a}{bm\pm b}=\frac{c\pm a}{d\pm b}$

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{c\pm a}{d\pm b}}\qquad\boxed{\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a\pm b}{c\pm d}}$$

"Se due frazioni sono equivalenti, la somma, o la differenza ordinata, dei numeratori e dei denominatori dà ancora una frazione equivalente."

Se l'uguaglianza è scritta in forma di proporzione: $\boxed{a:b=c:d}$ si ha:

$\boxed{(a+b):b=(c+d):d}$ regola del componendo

$\boxed{(a-b):b=(c-d):d}$ regola dello scomponendo

$\boxed{(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)}$ regola del componendo-scomponendo

che può estendersi alle altre forme valide di proporzione.

Le proporzioni e le regole del tre semplice e del tre composto.

Stabilita una proporzionalità diretta o inversa fra due elementi noti, qualora si cambi il valore ad uno dei due, quale valore assumerà l'altro affinché permanga la proporzione? Questo tipo di problemi è detto della regola del tre semplice la cui risoluzione consiste nel risolvere una proporzione del tipo: $a : b = c : x$ da cui $x = \frac{b}{a}c$.

Caso della proporzionalità diretta:

8 metri di stoffa sono costati 192 dinari, volendo comprarne 6 m, quale sarà la spesa?

$$8 : 192 = 6 : x \qquad x = \frac{192}{8}6 = 144.$$

come si vede è implicita la "riduzione all'unità" infatti $192/8 = 24$ dinari/metro.

Caso della proporzionalità inversa.

Il tempo impiegato a compiere un certo lavoro è inversamente proporzionale al numero di operai.

8 operai impiegano 3 giorni, in 6 operai quanto tempo?

$$3 : \frac{1}{8} = x : \frac{1}{6} \quad ; \quad x = \frac{3}{6}8 = 4$$

(La proporzione è con i reciproci o inversi); meglio dire: "per quel lavoro occorrono $(3 \cdot 8) = 24$ giornate di operaio. 6 operai impiegano 4 giorni.

Regola del tre semplice

Si scrivono sulla stessa riga i nomi delle due grandezze (dimensioni) che entrano nel problema, ed al di sotto di essi le coppie di valori corrispondenti chiamando x l'incognita. Stabilito se le grandezze sono direttamente o inversamente proporzionali, se direttamente; si tracciano due frecce equiverse a fianco delle colonne; se inversamente le due frecce avranno verso opposto. Si scrive la proporzione prendendo gli elementi come indicato dalle frecce.

metri di stoffa	dinari
↓ 8	192 ↓
6	x

$$8 : 6 = 192 : x \qquad x = \frac{192 \cdot 6}{8} = 144$$

---

operai	giorni
↓ 8	3 ↑
6	x

$$8 : 6 = x : 3 \qquad x = \frac{3 \cdot 8}{6} = 4$$

Regola del tre composta

Qui le grandezze che entrano in gioco sono più di due; facciamo un esempio:

"15 operai lavorando per 24 giorni 10 ore al giorno, hanno lastricato una piazza lunga metri 40 e larga metri 30; quanti operai ci vorranno per lastricare in 18 giorni, lavorando 9 ore al giorno, una piazza lunga 35 metri e larga 25?"

Ciò che salta alla mente è che: (15 × 24 × 10 = 3600) ore di operaio per: (40 × 30 = 1200) metri quadri di lastricato: $\left(\frac{3600}{1200} = 3\right)$ ore di operaio per metro quadro; quindi per (35 × 25 = 875) metri quadri occorrono: (875 × 3 = 2625) ore di operaio.

ogni operaio però lavora per (18 × 9 = 162) ore/operaio, quindi:

(2625 | 162
1005 16
= 33) occorrono più di 16 operai (mancano 33 ore di lavoro). Si noti come il resto della divisione: 33 ore sia un intero utilizzabile diversamente da:

330 | 162
= 60 0,2037..
1140
= 6

ore i 33/162 di operaio non hanno senso; basta far lavorare un operaio in più dei 16 per 3 gioni (3 × 9 = 27) e per (33 − 27) = 6 ore cioè 6/9 = 2/3 di giorno.

La risoluzione è quindi:

occorrono 16 operai per 18 giorni (16 × 18 × 9 = 2592) ore
più un operaio per 3 giorni e 6 ore (1 × 3 × 9 + 6 = 33) ore
Totale (2592 + 33 = 2625) ore

Sarebbe sciocco rispondere: $16,\overline{2037}$ (periodico) operai.

Regola del tre composta:

"Si scrivono sulla stessa riga i nomi delle grandezze che intervengono nel problema, ed al disotto di esse le coppie di valori corrispondenti chiamando con x l'incognita. Stabilito quali grandezze sono direttamente proporzionali, o inversamente proporzionali si contrassegnano con frecce come nel caso del tre semplice, riferendosi all'incognita.

Nel nostro caso: più operai, più lavoro, meno tempo

	tempo		lavoro	
N° operai	N giorni	N ore lavoro	m. lunghezza	m larghezza
↓ 15	↑ 24	↑ 10	↓ 40	↓ 30
↓ x	18	9	35	25

Si possono riunire fra loro (per righe) le frecce concordanti avremo:

N° operai	tempo ore	lavoro mq
↓ 15	↑ 240	↓ 1200
↓ x	162	875

$$\underbrace{15 : x = 162 : 240}$$

ore operaio	lavoro mq
↓ 3600	↓ 1200
↓ $162 \cdot x$	875

$$3600 : 162x = 1200 : 875 \qquad x = \frac{875 \times 3600}{162 \times 1200} = 16,20\overline{37}.$$

La regola pratica esprime:
"Il valore dell'incognita x è dato da una frazione che ha per numeratore il prodotto del valore primitivo della grandezza incognita, per i valori nuovi delle grandezze alle quali essa è direttamente proporzionale e per i valori primitivi di quelle alle quali è inversamente proporzionale; il denominatore è il prodotto dei valori rimanenti" (dizione ripresa dai Soaci - Aritmetica Pratica)

$$x = \frac{15 \cdot 35 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10}{18 \cdot 9 \cdot 40 \cdot 30} = \frac{35 \cdot 25}{6 \cdot 9} = 16{,}20$$

Per questo genere di problemi si consiglia il metodo di riduzione all'unità. (occorrono 3 ore di operaio per mq di lastricato)

Una vasca d'acqua è alimentata da una sorgente perenne che versa 1 litro ogni 5 minuti, però una perdita sul fondo determina una diminuzione del livello dell'acqua di 6 cm al giorno; ogni ora una ~~pom~~ pompa automatica preleva 7 litri. Trovare la superficie della vasca sapendo che il livello è costante alle stesse ore. Porre (1 litro = 1 dm³)

$1\,\frac{l}{5} = 12\,l/h \div 7\,l/h = \underline{5\,l/h \Rightarrow 5 \times 24 = 120\,dm^3/g} \Rightarrow \frac{0{,}120}{0{,}06} = 2$ mq.

Ripartizione direttamente proporzionale

Supponiamo di voler ripartire la somma S fra "n" impiegati direttamente proporzionale agli anni di servizio prestati. $a_1, a_2 \dots a_n$

Il totale anni di servizio è $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ per ogni anno di servizio compete $\frac{S}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ per cui al primo impiegato spetterà:

$a_1 \frac{S}{a_1 + a_2 + \dots a_n}$; al secondo: $a_2 \frac{S}{a_1 + a_2 + \dots a_n}$ ....

all'ennesimo: $a_n \frac{S}{a_1 + a_2 + \dots a_n}$. ove sommando le quote avute dagli impiegati torna la somma S.

La formula generale per l'i^{mo} impiegato sarà:

$$S_i = a_i \frac{S}{\sum_1^n a_i}$$

Esempio Numerico: $n = 5$ $a_1 = a_2 = 3$; $a_3 = 5$; $a_4 = 7$; $a_5 = 8$; $S = 2.600.000$ £.

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \sum_1^5 a_i = 26$; $\frac{S}{\sum a_i} = 100.000$ £

$S_1 = S_2 = 300\,000$; $S_3 = 500\,000$; $S_4 = 700.000$; $S_5 = 800\,000$

Ripartizione inversamente proporzionale

Si opera come per la ripartizione direttamente proporzionale, peró prendendo gli inversi dei numeri.

Ripartire S inversamente proporzionale ad $a_1, a_2, \ldots a_i \ldots, a_n$; significa applicare la formula:

$$S_i = \frac{1}{a_i} \frac{S}{\sum_1^n \frac{1}{a_i}}$$

Per esempio: Volendo costituire un vitalizio ad un certo gruppo di 5 persone si pensó di distribuire la somma di 1000.000,= inversamente proporzionale all'etá. Le etá erano: 55, 60, 72, 80, 83. anni.

Avremo: $\frac{1}{55} + \frac{1}{60} + \frac{1}{72} + \frac{1}{80} + \frac{1}{83} = \frac{9635}{131472}$

$$S_{55} = \frac{1}{55} \frac{1000.000}{\frac{9635}{131472}} = \frac{1}{55} \frac{131472}{9635} 1000000 = 248.095$$

$$S_{60} = \frac{1}{60} \frac{131472}{9635} 1000\,000 = 227.421$$

$$S_{72} = \frac{1}{72} \frac{131472}{9635} 1000\,000 = 189.517$$

$$S_{80} = \frac{1}{80} \frac{131472}{9635} 1000\,000 = 170.566$$

$$S_{83} = \frac{1}{83} \frac{131472}{9683} 1000\,000 = 164.401$$

Totale 1.000.000

Applicazioni Geometriche

Analizziamo ora le "*frazioni*" ed applichiamone i risultati alla geometria.

Consideriamo il segmento $\overline{AB}$:

A————————B. L'uomo non dispone di alcun segmento che, in assoluto, possa assumersi come unitario; è costretto a "convenire" l'unità di misura. (In questo caso unità di lunghezza).

Le convenzioni in merito, dall'antichità ad oggi, sono state parecchie. Ogni tribù, ogni staterello, aveva le sue unità di misura, in particolare le unità di misura lineare erano generalmente riferite a misure del corpo umano: si avevano così:

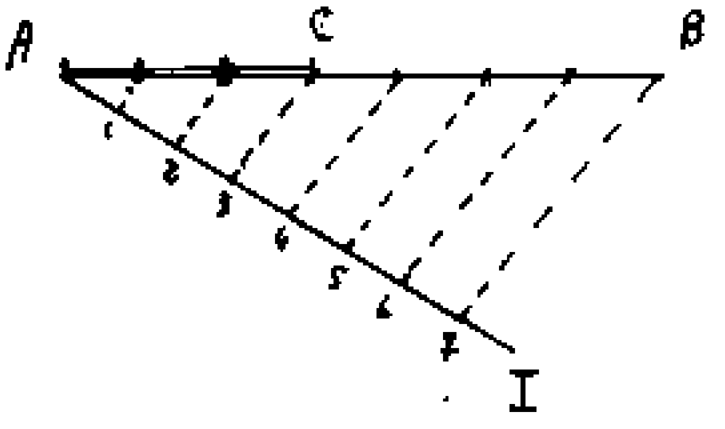
Il piede di Parigi = circa 32,5 centimetri, il piede romano del Campidoglio = circa 29,5 cm., il cubito ebraico, simile al braccio toscano = 58,366 cm. ed ogni città aveva una particolare unità di lunghezza che chiamava: "piede", "braccio", "palmo" (dal palmo della mano), ed anche: "canne", "pertiche", e così via.

Oggi abbiamo il metro ed i suoi multipli e sottomultipli, mentre negli stati di lingua inglese vale ancora il "pollice" (inch, in) ≅ 2,54 cm., il "piede" (foot, ft) ≅ 30,48 cm.

12 pollici = 1 piede; (12 in = 1 ft); 3 "piedi" = 1 yard = 91,43992 cm.

Lo sfrazionamento non decimale era di uso comune, in antico, a Bologna si aveva le seguenti dizioni: 12 "punti" fanno 1 "oncia", 12 "oncie" fanno 1 "piede", 10 "piedi" fanno una "pertica" (La pertica era circa 3,80 metri). Lo sfrazionamento sessagesimale che si usa ancora oggi per l'ora = 60', ed 1' = 60" risale ai caldei.

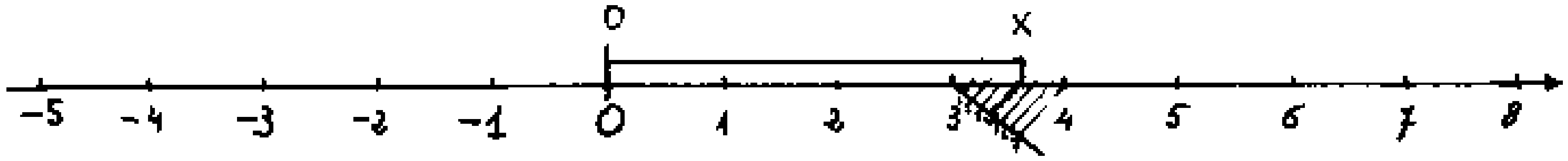
Ci domandiamo, se è possibile dividere il nostro segmento $\overline{AB}$, o qualunque altro segmento, in un prefissato <u>numero intero</u> di parti uguali e di staccare su di esso la parte corrispondente ad una frazione per esempio i $3/7$ in modo che: $\overline{AC} = \frac{3}{7}\overline{AB}$; $\left(\overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC} = \frac{7}{7} - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}\right)$



Soluzione.

Da A tracciamo una retta inclinata AI ed, a partire da A riportiamo su AI, consecutivamente, 7 segmenti uguali; cioè: $\overline{A1}$, $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$, $\overline{45}$, $\overline{56}$, $\overline{67}$; Uniamo 7 con B, e dai punti: 1, 2, 3, 4, 5, 6 tracciamo le parallele al segmento $\overline{7B}$, che divideranno $\overline{AB}$ in 7 parti uguali. È ora facile prenderne 3 fissando C.

Questa costruzione, apparentemente banale, implica la possibilità di "<u>graduare</u>" una retta indefinitamente lunga, a partire da un'origine "0" con modulo unitario prefissato, e può essere graduata sia positivamente, sia negativamente, con tutti i numeri (relativi, interi e frazionari, cioè con l'insieme dei numeri razionali.) E' possibile quindi staccare su di essa segmenti rappresentativi di qualsiasi numero razionale. (per esempio: $25/7 = 3 + 4/7 = 3{,}571428571..$) $= \overline{OX}$



Vedremo che su questa retta è possibile riportare qualunque numero reale anche non frazionario.

Questo è un'altro modo di simboleggiare "quantità" cioè mediante segmenti, tenendo presente che la misura numerica dipende dall'unità arbitraria prescelta, cioè (segmento unitario).

L'arbitrarietà dell'unità di misura, porta a rappresentare, in geometria, in diversa grandezza una stessa cosa, cioè porta al concetto di Similitudine assolutamente basilare e fondamentale dal quale hanno origine tutti!! i teoremi della geometria.

La similitudine

L'arbitrarietà dell'unità di misura porta al concetto di similitudine; una fotografia più o meno ingrandita ... lo stesso soggetto fotografato in dimensioni diverse ...

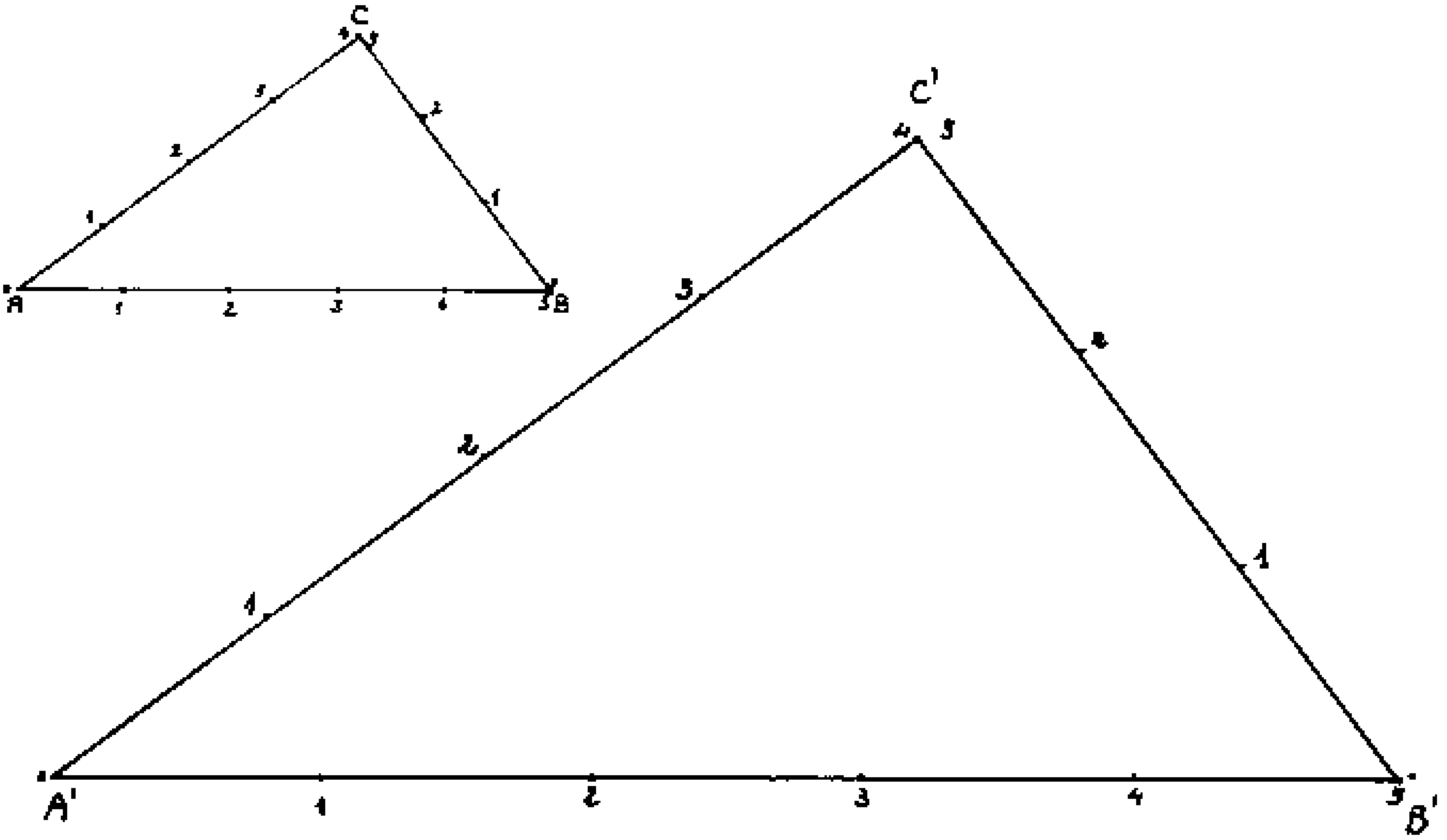
Facciamo una osservazione:

"Qualunque figura geometrica delimitata da punti e segmenti è sempre scomponibile in triangoli, ed ogni triangolo è sempre scomponibile nella somma (o nella differenza) di due triangoli rettangoli; quindi se conosciamo il triangolo rettangolo conosciamo l'elemento base della geometria."

Disegnamo due triangoli rettangoli aventi ciascuno i cateti di ampiezza 3 e 4 e l'ipotenusa 5, Per un triangolo usiamo come segmento unitario il centimetro, per l'altro usiamo come segmento unitario il pollice (inch).

Inoltre disponiamo i disegni in modo che per entrambe i triangoli l'ipotenusa sia orizzontale e che il cateto maggiore sia a sinistra ed il cateto minore a destra, ed il vertice C sia al di sopra dell'ipotenusa.

In altre parole i due triangoli rettangoli <u>simili</u> sono anche <u>similmente disposti</u>. (Due triangoli simili e similmente disposti si dicono omotetici)



Notiamo subito che moltiplicando o dividendo per uno stesso numero, i tre numeri indicativi dei lati, il triangolo non cambia se prendiamo una opportuna unitá di misura, e possiamo disegnarlo sovrapponibile.

(Per esempio se moltiplichiamo per 10 i tre numeri diventano 30, 40, 50, e basta prendere per unitá grafica il millimetro per disegnare un triangolo sovrapponibile al primo, oppure assumere come unitá grafica il decimo di pollice per sovrapporlo al secondo). (Il decimo di pollice non è usato, è usato l'ottavo di pollice)

Inversamente, se disegnamo un triangolo ed attribuiamo ad un determinato lato un numero arbitrario, restano determinati i numeri degli altri due lati in proporzione. Per esempio, nel nostro caso, se attribuiamo al lato $\overline{BC}$ il numero 7 (anziché 3) avremo che $\overline{AB} = 5 \cdot \frac{7}{3} = \frac{35}{3}$, ed $\overline{AC} = 4 \cdot \frac{7}{3} = \frac{28}{3}$.

Se misurassimo in centimetri il secondo triangolo, i numeri di 3, 4, 5, pollici risulterebbero moltiplicati per 2,54 e diventerebbero: 7,62 ; 10,16 ; 12,70. Cioè il secondo triangolo è ingrandito "linearmente" di 2,54 volte il primo. La loro configurazione è simile, ed essendo disegnati con lo stesso orientamento, cioè similmente disposti, si ha, oltre che similitudine, omotetia. Si ha quindi "Similitudine" (in geometria) quando i segmenti corrispondenti stanno in rapporto costante: $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \rho$ (nel nostro caso $\rho = 2,54$). Il rapporto ρ si chiama: "rapporto lineare di similitudine". Se le misure lineari stanno in rapporto costante, è facile dimostrare che le aree stanno fra loro come il quadrato del rapporto lineare, $\left(\frac{\text{area}'}{\text{area}} = \rho^2\right)$, ed i volumi come il cubo del rapporto lineare $\left(\frac{\text{volume}'}{\text{volume}} = \rho^3\right)$.

Se i due triangoli sono omotetici, cioè simili e similmente disposti, si nota che i segmenti cor=

rispondenti sono paralleli, e ciò implica che:
"gli angoli corrispondenti sono uguali"

L'uguaglianza degli angoli corrispondenti è la caratteristica fondamentale della similitudine geometrica; Se due figure hanno angoli corrispondenti uguali, è costante il rapporto fra segmenti corrispondenti, (e viceversa).

Ma il concetto di similitudine è molto più ampio; due sistemi fisici si dicono fisicamente simili quando in punti corrispondenti le grandezze fisiche stanno in rapporto costante. Ciò implica gli studi su "modelli" e porta alla determinazione di numeri adimensionali. Per esempio il numero di Reynolds, di Mach, di Péclet, di Prandtl, ecc. La similitudine generalizzata o analogia, è quella di due fenomeni di diversa natura, però, governati dalle stesse leggi matematiche.

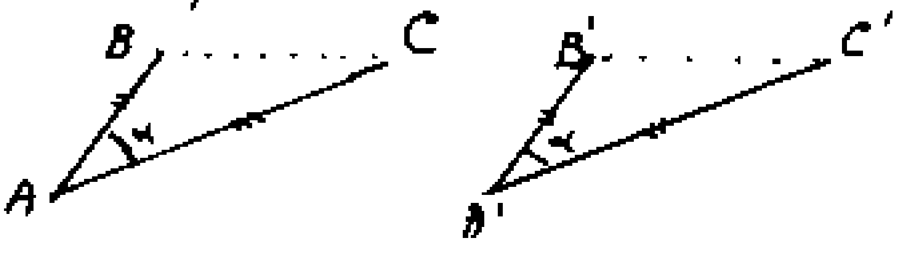
Il funzionamento dei calcolatori analogici si basa su ciò. Torniamo ai nostri triangoli:

— Se il rapporto di similitudine fra due triangoli è uno (1), non solo i due triangoli hanno angoli uguali, ma anche lati o segmenti corrispondenti sono uguali. Comunemente si dice che i due triangoli sono uguali, però vi sono casi in cui per sovrapporre i due triangoli e verificarne la perfetta coincidenza, occorre "ribaltare" il piano in cui giace un triangolo e portarlo rovesciato sull'altro, perciò, i due triangoli anziché "<u>uguali</u>" sono detti "<u>congruenti</u>".

(<u>Congruenza</u> (in geometria) = proprietà di due figure geometriche che possono coincidere sovrapponendosi con movimenti di ruotazione e traslazione anche spaziali, cioè uscenti dal loro piano di giacitura)

<u>Criteri di uguaglianza</u>

I°) Due triangoli sono uguali se hanno due lati e l'angolo compreso ordinatamente uguali.



II°) Due triangoli sono uguali se hanno un lato e i due angoli adiacenti ordinatamente uguali.

III°) Due triangoli sono uguali se hanno i tre lati ordinatamente uguali

Gli Angoli

Nella similitudine geometrica, abbiamo rilevato: "la costanza degli angoli corrispondenti". Esaminiamo il concetto di grandezza angolare.

In effetti l'angolo è l'unica dimensione fisica che dispone di una unità non convenzionale, cioè non arbitrariamente fissata dall'uomo. Infatti L'angolo giro è l'unità

La convenzione umana ha graduato tale unità in vari modi:

1°) Ponendo l'angolo giro = 360° gradi, cioè dividendo l'angolo giro in 360 parti uguali dette gradi, ogni grado è diviso in 60' (primi), ed ogni primo in 60" (secondi) per esempio: 27° 30' 42".
Questo tipo di misura si dice:

"in gradi sessagesimali"

Se invece dei primi e dei secondi, il grado si divide in decimali, la misura si dice:

"in gradi sessadecimali"

è usata nei calcolatori elettronici, si simboleggio con la parola: "Deg" e si esprime per es. 27°,51167...

La misura in gradi sessagesimali, risale ai Caldei (oltre 3000 anni A.C.) che avevano arrotondato i giorni dell'anno in 360, ed usavano una numerazione sessagesimale anziché decimale. Notiamo inoltre che è molto facile dividere un cerchio in sei parti uguali, facendo centro agli estremi di un diametro, usando lo stesso raggio del cerchio.

2°) Ponendo l'angolo giro = 400^g (gradi), si dice: "primo" la centesima parte del grado e "secondo" la centesima parte del primo. Per esempio: $30^g\,56^c\,85^{cc} = 30^g{,}5685\ldots$

Questa misura si dice:

"in gradi centesimali"

e si indica con la parola "GRD"

La misura in gradi centesimali è nata per adequarsi, in qualche modo, al sistema decimale; infatti, essendo stato definito il metro come la quarantamilionesima parte del meridiano terrestre, (cosa che poi è risultata inesatta) dividere un cerchio in quarantamilioni di parti (40.000.000,=) equivale ad un decimo di secondo centesimale, infatti: (400)(100)(100)(10) vale 40 000 000.= .

3°) Ponendo l'angolo giro pari alla lunghezza della circonferenza (raddrizzata) del cerchio di raggio unitario. Cioè l'angolo giro = $2\pi = 6,2831853...$

Quindi <u>l'angolo piatto</u> (= metà angolo giro) = π, <u>l'angolo retto</u> (= metà angolo piatto) = $\pi/2 = 90°$, $\frac{1}{12}$ di angolo giro = $30° = \pi/6$ e così via.

Questa misura si dice:

"<u>in radianti</u>",

e si indica con la parola: "<u>rad</u>" (o "<u>RAD</u>"); ed è di norma usata in analisi matematica, ove l'angolo è visto come il rapporto fra la lunghezza dell'arco ed il raggio: $\left(\alpha_{rad} = \frac{\widehat{AB}}{R}\right)$

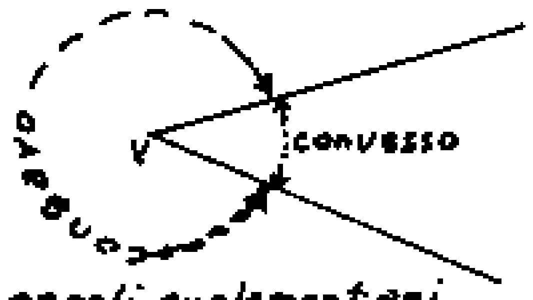
<u>Il radiante</u> (unità di misura) è quindi <u>l'angolo sotteso all'arco la cui lunghezza raddrizzata, è pari alla lunghezza del raggio.</u>

$1\ rad = 57°\ 17'\ 44'',805... = 63^g\ 66^c\ 19^{cc},772.$

4) Esiste anche la misura in <u>angoli giro</u> e frazioni decimali, che semplificherebbe molto i calcoli, (ma è poco usata in analisi matematica) In questa misura l'angolo giro sarebbe: 1 ciclo, $180° = \pi = 0,5$ cicli, $90° = 0,25$ cicli.

però il termine "ciclo" ed il suo multiplo kilociclo è stato usato per misurare le frequenze delle onde elettromagnetiche: (Kc/sec = Kilocicli al secondo) ove esiste anche la misura in Hz = Hertz cioè: 1 Hz = 1 ciclo/sec.

La definizione di angolo: "*Lo spazio compreso fra due semirette* uscenti dallo stesso *punto, detto vertice*", definisce poco, anche perché occorre

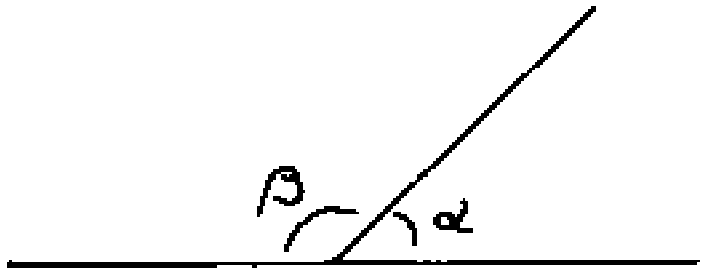


angoli explementari

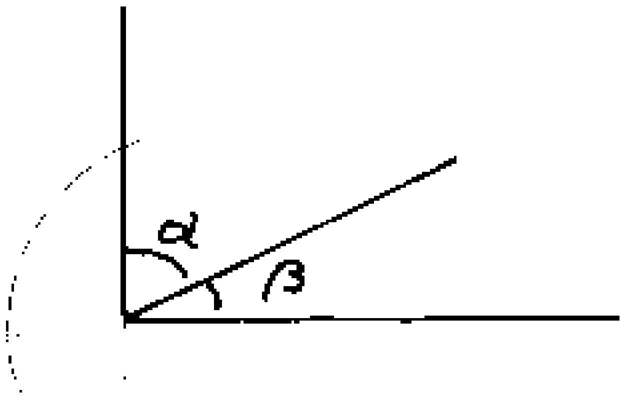
precisare se trattasi dell'angolo concavo o dell'angolo convesso.
L'angolo concavo e l'angolo convesso, formati da due semirette uscenti dallo stesso punto v, sommati danno un *angolo giro*; e perciò sono detti: "*explementari*".

Se la somma di due angoli è un *angolo piatto*, sono detti: "*Supplementari*"

Se la somma di due angoli è *un angolo retto*, sono detti: "*Complementari*".



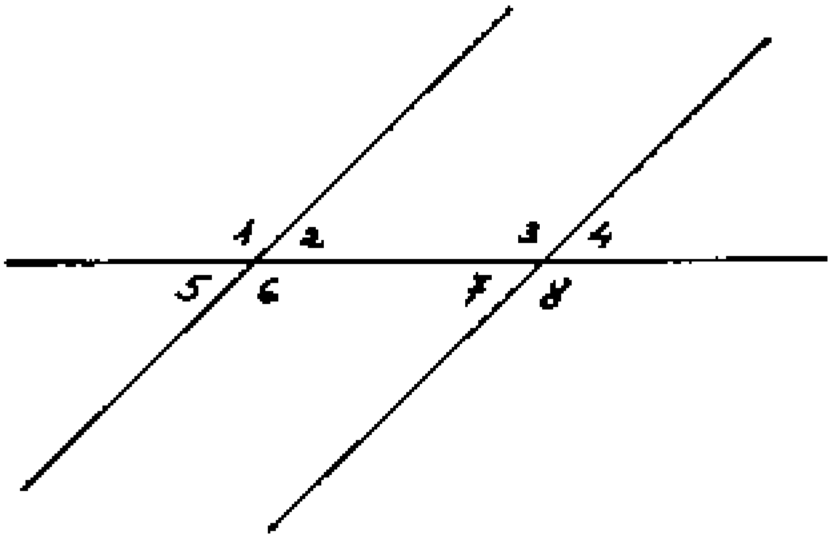
angoli supplementari



angoli complementari

Noi preferiamo definire l'angolo:
"*Una variazione di direzione*"

Date due rette parallele tagliate da una trasversale, è facile vedere che gli angoli da esse formati sono, a coppie, uguali.



1=6 ; 3=8 } opposti al vertice
5=2 ; 7=4

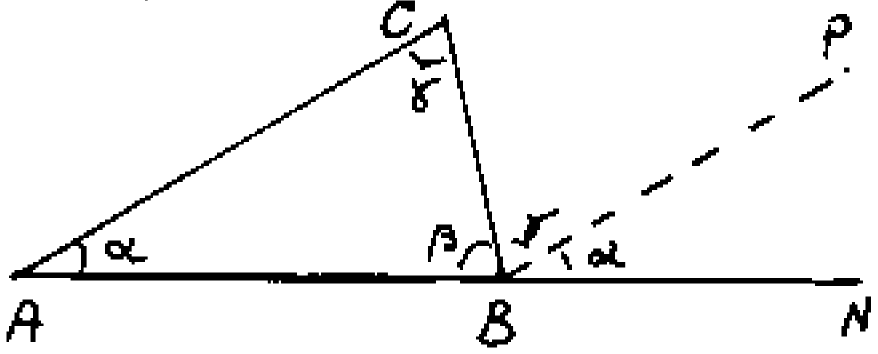
2=7 ; 6=3 } alterni interni
5=4 ; 1=8 } alterni esterni

1=3 ; 6=8 } corrispondenti
2=4 ; 5=7

(2 ; 3) e (6 ; 7) } coniugati interni
(1 ; 4) e (5 ; 8) } coniugati esterni

oltre ai coniugati, sono supplementari le coppie:
(5;1) ; (6;2) ; (7;3) ; (8;4) ; (1;2) ; (3;4) ; (5;6) ; (7;8) .

Il nostro "escursus" sugli angoli non è ancora compiuto. Dato un triangolo qualsiasi



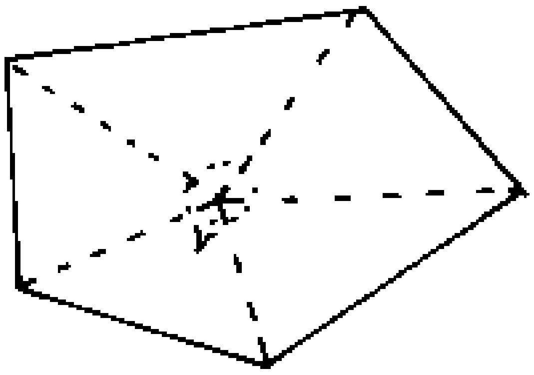
ABC di angoli interni α, β, γ rispettivi ad A, B, C, tracciata da B la parallela ad $\overline{AC}$ e sia $\overline{BP}$, avremo che: l'angolo $C\widehat{B}P = \gamma = A\widehat{C}B$ perché alterni interni alle parallele $\overline{AC}$ e $\overline{BP}$ tagliate dalla trasversale $\overline{CB}$. Prolungato $\overline{AB}$ fino ad N, l'angolo $P\widehat{B}N = \alpha = C\widehat{A}B = C\widehat{A}N$ perché corrispondenti nelle parallele $\overline{AC}$ e $\overline{BP}$ tagliate dalla trasversale $\overline{AN}$.

Con ciò resta dimostrato che l'angolo piatto $\hat{ABN}$, è composto degli stessi angoli α, β, γ interni al triangolo. Cioè:

1) La somma degli angoli interni di un triangolo è sempre un angolo piatto = 180° = π rad.

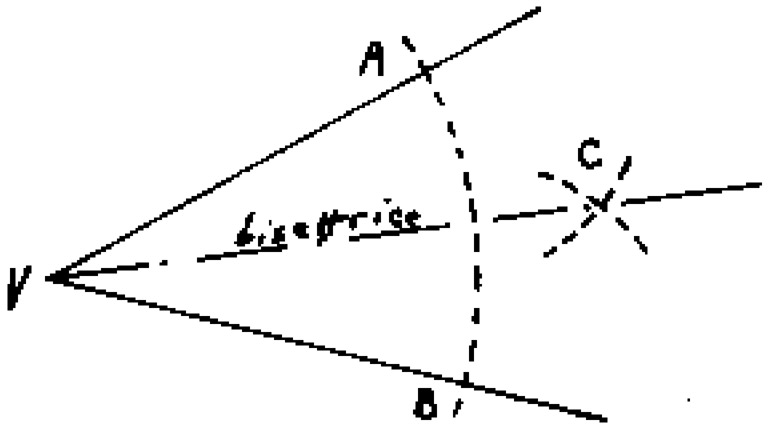
2) In un triangolo, l'angolo esterno compreso fra un lato ed il prolungamento di un lato adiacente ($\hat{CBN}$), equivale la somma degli angoli adiacenti il terzo lato ($\hat{CAB} + \hat{ACB} = \hat{CBN}$).

Poichè un poligono qualsiasi, può essere scomposto in triangoli, aventi per base i lati del poligono e come vertice comune un qualsiasi punto interno al poligono stesso, poiché la somma degli angoli interni di ciascun triangolo è un angolo piatto; avremo che: "la somma degli angoli interni di un poligono è pari a tanti angoli piatti quanti sono i lati, meno due." (I due angoli piatti (o lati) sottratti, sono il valore dell'angolo giro nel vertice V)

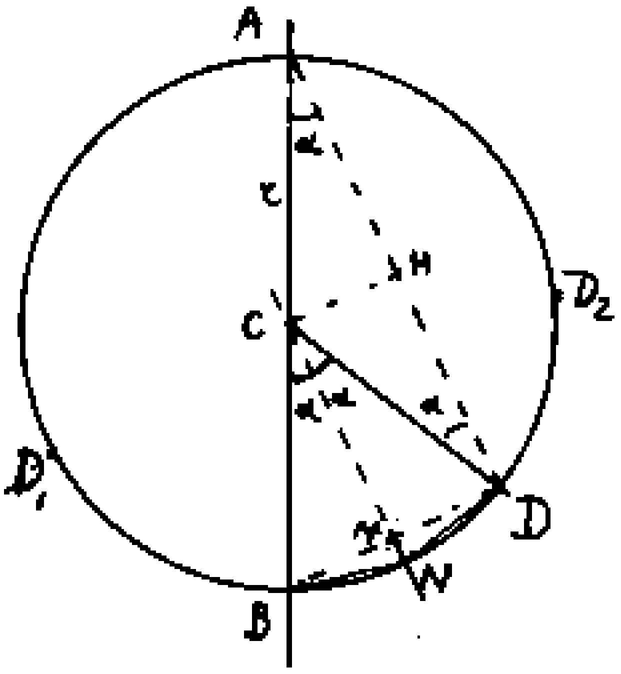


La somma degli angoli interni in un poligono di "n" lati sarà: $(n-2)180° = (n-2)\pi$ rad.

Bisecare un angolo significa tracciare dal vertice una semiretta (chiamata bisettrice) che divida l'angolo in due parti uguali. La costruzione grafica è molto semplice: si traccia, con centro nel vertice V un arco di cerchio che incontra in A ed in B le due semirette quindi con centro in A e centro in B si tracciano due archetti (di ugual raggio fra loro) che incontrando si determinano il punto C ove $\overline{VC}$ è la bisettrice.



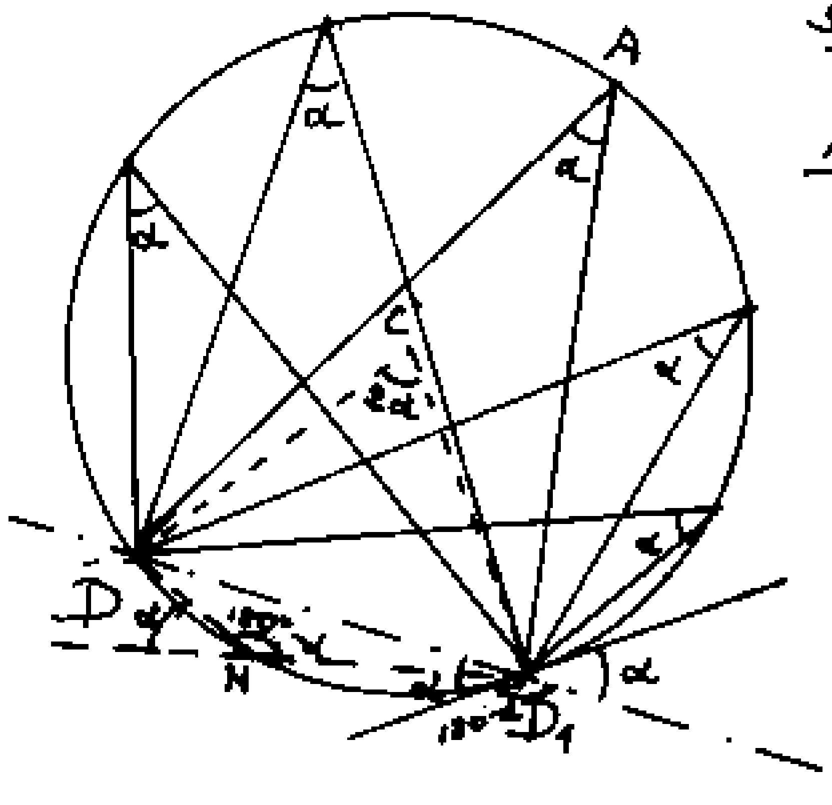
Consideriamo ora un cerchio di centro "C" tagliato da un diametro $\overline{AB}$ e prendiamo un qualsiasi punto D sulla circonferenza, unito C con D ed A con D, indichiamo con α l'angolo: $C\hat{A}D = \alpha = B\hat{A}D$. Sia H il punto medio di $\overline{AD}$ cioè $\overline{AH} = \overline{HD}$ i due triangoli CHA e CHD sono congrenti avendo i lati uguali $\overline{CH}$ in comune e $\overline{AC} = \overline{CD} = r$ perciò anche l'angolo $C\hat{D}A = C\hat{A}D = \alpha$. Se da C tracciamo $\overline{CN}$ parallela ad $\overline{AD}$ avremo che gli angoli $N\hat{C}D = C\hat{D}A = \alpha$ perché alterni interni alle parallele $\overline{AD}$ e $\overline{CN}$ tagliate dalla trasversale $\overline{CD}$ ed anche $B\hat{C}N = B\hat{A}D = \alpha$



perché corrispondenti nelle stesse parallele tagliate dalla trasversale $\overline{AB}$. Quindi *l'angolo al centro insistente sulla corda $\overline{BD}$*, cioè $B\hat{C}D = B\hat{C}N + N\hat{C}D = \alpha + \alpha = 2\alpha$ *è doppio dell'angolo alla circonferenza $B\hat{A}D = \alpha$ insistente sulla stessa corda $\overline{BD}$* ed avente il vertice dalla stessa parte del centro rispetto alla corda $\overline{AB}$

Lo stesso discorso può ripetersi se prendiamo un qualsiasi punto D_i sulla circonferenza. Avremo, sommando o sottraendo, che $2(D\hat{A}D_i) = D\hat{C}D_i$ cioè:

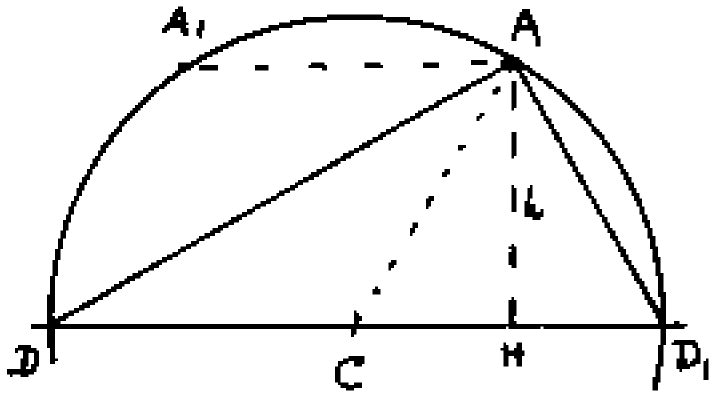
L'angolo al centro è doppio dell'angolo alla circoferenza od anche: *Tutti gli angoli alla circonferenza, insistenti, dalla stessa parte, sullo stesso arco sono uguali fra loro.*



Se il vertice dell'angolo alla circonferenza (N) cade da banda opposta al centro C rispetto alla corda $(\overline{DD_1})$, allora l'angolo alla circonferenza $(D\hat{A}D_1)$ è supplementare dell'angolo alla circonferenza $D\hat{A}D_1$ che giace sull'altro arco rispetto alla corda $\overline{DD_1}$.

Nel caso particolare che la corda $\overline{DD_1}$ sia un diametro, l'angolo al centro $D\hat{C}D_1 = 180 = \pi$ è un angolo piatto, per cui l'angolo alla circonferenza è $180/2 = 90° = \pi/2$ un angolo retto. Cioè:

"La semicirconferenza è il luogo geometrico dei vertici retti di tutti i triangoli rettangoli aventi per ipotenusa il diametro $\overline{DD'}$"



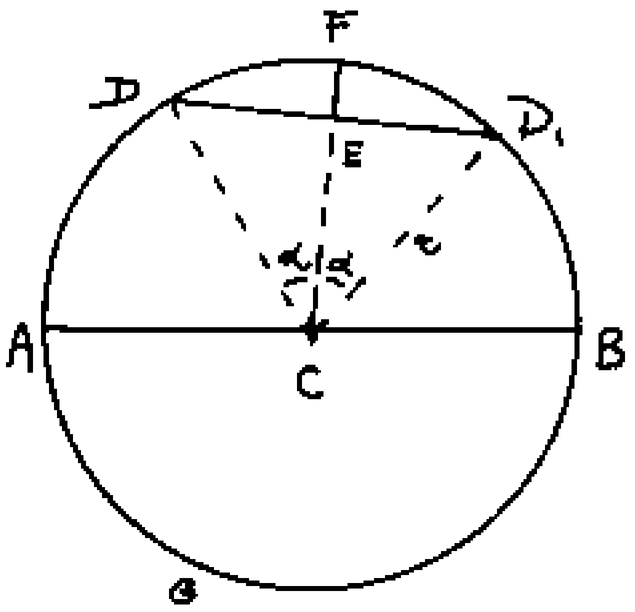
Ciò consente la risoluzione di molti problemi grafici, per esempio: se di un triangolo rettangolo si conosce l'ipotenusa e l'altezza h è possibile trovare il vertice A; (o A_1), ed unito $\overline{AC} = r = \overline{DD_1}/2$ avremo: $\overline{CH} = \sqrt{(\overline{DD_1}/2)^2 - h^2}$; $\overline{DH} = (\overline{DD_1}/2) + \overline{CH}$; $\overline{HD_1} = (\overline{DD_1}/2) - \overline{CH}$; $\overline{AD}^2 = \overline{DH}^2 + h^2$; $\overline{AD_1}^2 = \overline{HD_1}^2 + h^2$; $A\hat{D_1}D = (90° - A\hat{D}D_1)$.

In un triangolo rettangolo la mediana all'ipotenusa $\overline{AC}$ (passante per il punto medio dell'ipotenusa) è pari a metà ipotenusa. (raggio del cerchio).

Altezza relativa ad un lato, in un triangolo, è il segmento staccato sulla perpendicolare al lato stesso, a partire dal vertice opposto.

Asse di un segmento è la retta normale al segmento stesso e passante per il suo punto di mezzo.

Le parole "normale" e "perpendicolare" si equivalgono (formano angoli retti).



Nomenclatura di un cerchio

$\overline{AB}$ = diametro (si indica anche con ∅)

$\overline{AC} = \overline{CB} = \overline{CD} = r$ = raggio = $\overline{AB}/2$

$\overline{DD_1}$ = corda

$\overline{DE} = \overline{ED_1}$ = semicorda

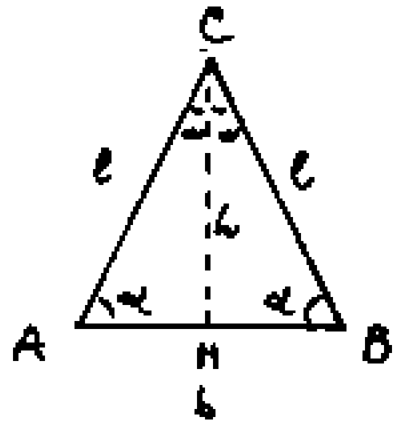
$\overline{EF}$ = freccia (normale alla corda)

Circonferenza = linea delimitante il cerchio =(diametro)(π).

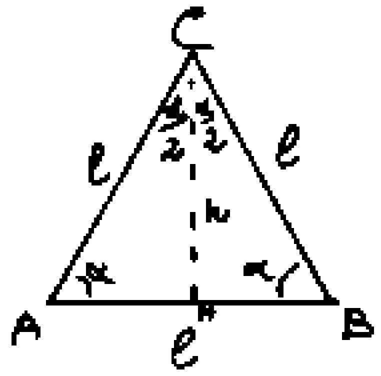
$\widehat{DD_1}$=arco sotteso alla corda $\overline{DD_1}$ di angolo al centro $D\hat{C}D_1 = 2\alpha$.

Conviene scrivere $\widehat{DFD_1}$ per distingure dall'arco: $\widehat{DGD_1}$.

Tipi di triangoli

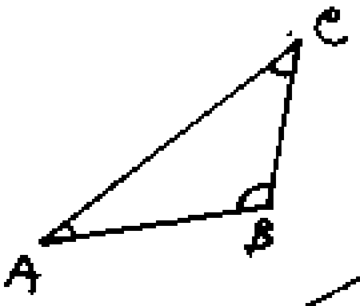


Isoscele = avente due lati uguali: $\overline{AC}=\overline{BC}=l$, quindi, gli angoli alla base $\overline{AB}=b$, pure uguali $C\hat{A}B = C\hat{B}A = \alpha$. In un triangolo isoscele coincidono in $\overline{CH}$, l'altezza h, la bisettrice in C, e la mediana alla base AB. I triangoli rettangoli AHC e BHC sono congruenti.

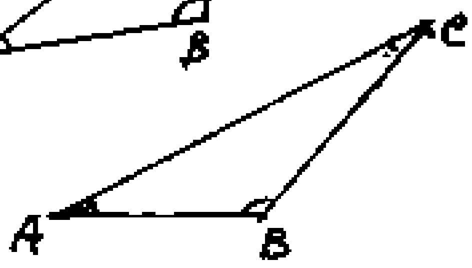


Equilatero = avente i tre lati uguali: $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}=l$ e quindi tre angoli uguali: $C\hat{A}B = A\hat{B}C = A\hat{C}B = \alpha = 60°$; $A\hat{C}H = B\hat{C}H = \frac{\alpha}{2} = 30°$

$$h = \overline{CH} = \frac{l}{2}\sqrt{3} = 0{,}866 \cdot l$$



Scaleno = avente i tre lati diversi.



Acutangolo = avente solo angoli acuti

Ottusangolo = avente un angolo ottuso (cioè maggiore di 90° o $\pi/2$ rad.)

Useremo di norma il seguente simbolismo:

I punti si indicano con lettere maiuscole per esempio: P

Le proiezioni dei punti, con le stesse lettere maiuscole affette da apici: P'; P''; P''' per la prima, seconda, terza proiez.

Le misure dei segmenti con lettere minuscole, se la figura è un triangolo, la lettera minuscola è quella stessa che è maiuscola nel vertice opposto.

Gli angoli con le lettere greche dei rispettivi vertici.

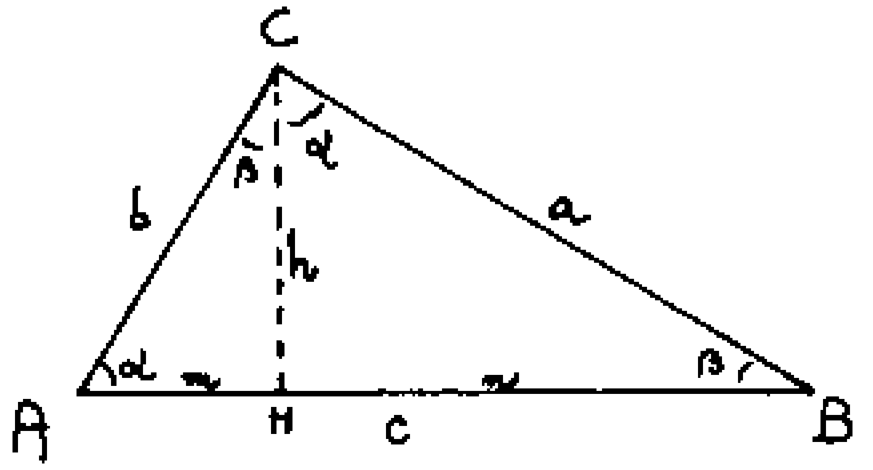
$a \rightarrow \alpha \rightarrow A$; $b \rightarrow \beta \rightarrow B$; $c \rightarrow \gamma \rightarrow C$.

Nel citare un triangolo rettangolo è opportuno mettere al centro delle tre lettere il vertice retto.

Per esempio il triangolo ACB è retto in C. (o rettangolo)

Possiamo ora tornare alla nostra similitudine (caratterizzata dall'uguaglianza degli angoli corrispondenti e dal rapporto costante delle lunghezze lineari omologhe). per dedurre i principali teoremi della geometria.

I principali teoremi della geometria.



Dato il triangolo rettangolo ACB e tracciata l'altezza "h" $= \overline{CH}$ relativa all'ipotenusa "c" $= AB$, ove H divide l'ipotenusa nelle due proiezioni dei cateti: $\overline{AH} = m$ (proiezione di $\overline{AC} = b$) ed $\overline{HB} = n$ (proiezione di $\overline{CB} = a$). Si ha: $(m + n = c)$.

Notiamo che il nostro triangolo rettangolo ACB, si è scomposto nella somma di altri due triangoli rettangoli <u>Simili</u>: AHC e CHB aventi angoli uguali ad ACB.

La sequenza degli elementi corrispondenti è:

$\overline{AC} \equiv \overline{CH} \equiv \overline{AH}$ = (cateti minori opposti all'angolo β)

$\overline{BC} \equiv \overline{BH} \equiv \overline{CH}$ = (cateti maggiori opposti all'angolo α)

$\overline{AB} \equiv \overline{CB} \equiv \overline{AC}$ = (ipotenuse)

Chiameremo I il triangolo rettangolo più grande: (ACB); II il triangolo rettangolo medio: (CHB); e III il triangolo rettangolo più piccolo: (AHC). Faremo, ordinatamente, tutte le possibili combinazioni degli elementi omologhi fra i triangoli; e precisamente: I ≡ II ; I ≡ III ; II ≡ III , rapportando: ipotenuse → cateti minori; ipotenuse → cateti maggiori; cateti minori → cateti maggiori.

Ricordiamo che nelle proporzioni: il prodotto dei medi = prodotto degli estremi; e che: ipotenusa I : ipotenusa II = cateto I : cateto II = rapporto di similitudine.

$\mathrm{I} \cong \mathrm{II}$

$c : a = b : h \longrightarrow ab = ch$ = doppia area che può $\left(h = \frac{ab}{c}\right)$ calcolarsi in due modi.

$c : a = a : n \longrightarrow \boxed{a^2 = cn}$ = I° teorema di Euclide

"Il quadrato di un cateto equivale il rettangolo: ipotenusa × proiez. cateto."

$b : h = a : n \longrightarrow ah = nb$ implica: $n = \frac{ah}{b}$.

$\mathrm{I} \equiv \mathrm{III}$

$c : b = b : m \longrightarrow \boxed{b^2 = cm}$ I° teorema di Euclide

che sommato al precedente implica: $a^2 + b^2 = c(n+m)$ cioè $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

$c : b = a : h \rightarrow (ab = ch)$

che è il teorema di Pitagora.

$b : m = a : h \longrightarrow bh = am \rightarrow$ implica $m = \frac{bh}{a}$ e col precedente: $c = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)h$; $\frac{c}{h} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$

"Il rapporto fra ipotenusa e altezza è pari al rapporto dei cateti maggiorato del suo reciproco"

$\mathrm{II} \equiv \mathrm{III}$

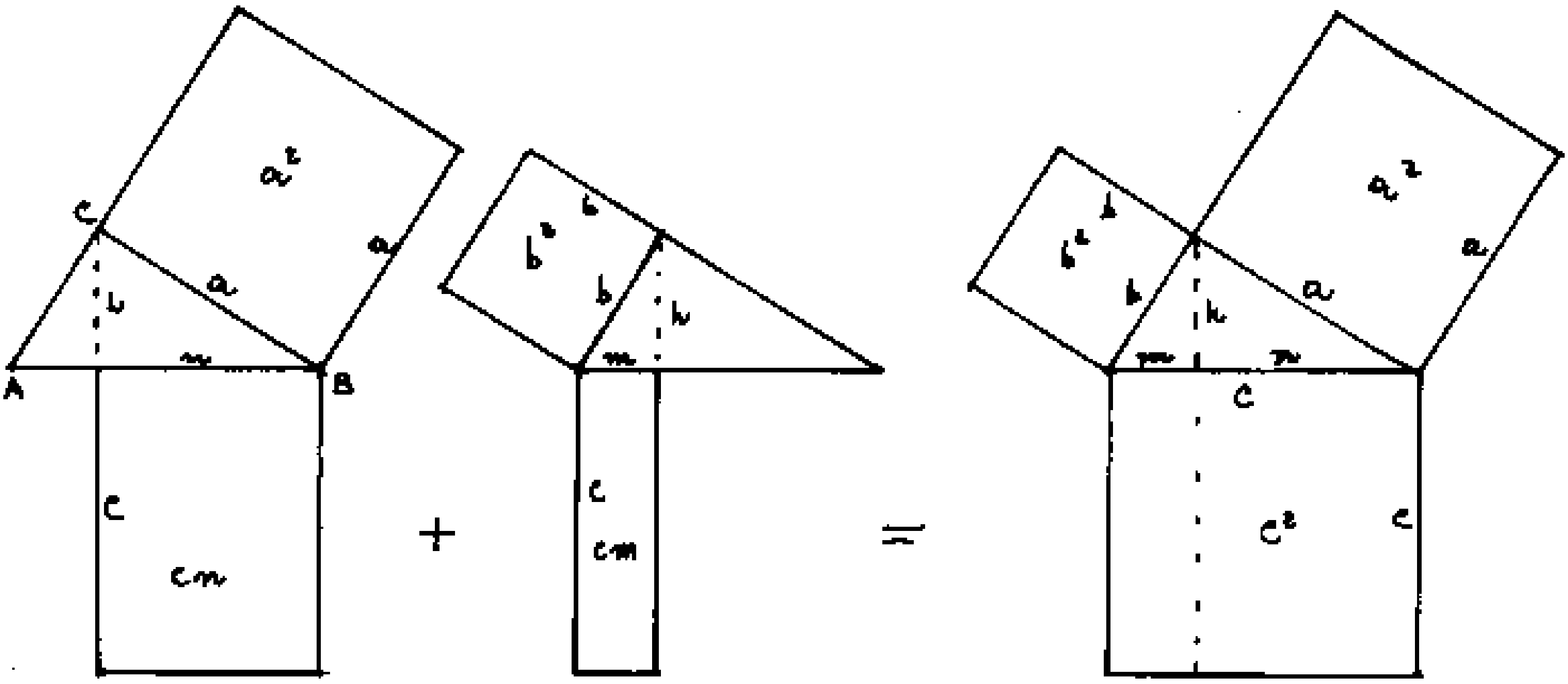
$a : b = h : m \longrightarrow bh = am$

$a : b = n : h \longrightarrow ah = bn$

$h : m = n : h \longrightarrow m : h = h : n \rightarrow \boxed{h^2 = m \cdot n}$ Secondo teorema di Euclide:

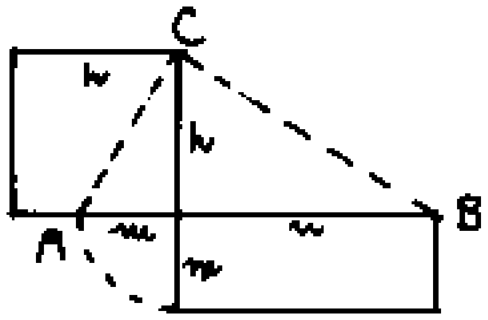
"L'altezza è media proporzione fra le proiezioni dei cateti," oppure: "Il quadrato dell'altezza equivale il rettangolo delle proiezioni dei cateti.

Illustriamo graficamente come la somma dei due primi teoremi di Euclide portino al teorema di Pitagora.



$$a^2 = cn \quad + \quad b^2 = cm \quad = \quad a^2 + b^2 = c^2$$

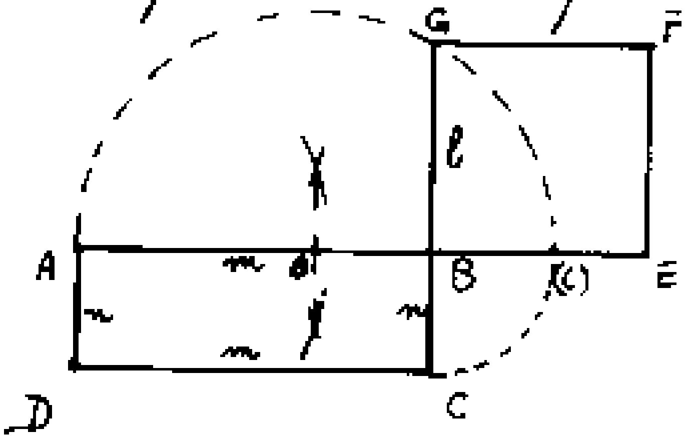
Illustriamo graficamente il II° teorema di Euclide dal quale è possibile dedurre facili costruzioni grafiche; in particolare quando una grandezza è media proporzionale fra altre due possiamo assumere una grandezza come unitaria. Per esempio dalla: $h^2 = mn$ con $h = 1$ è possibile avere graficamente il reciproco: $m = \frac{1}{n}$; se poniamo $n = 1$ abbiamo $m = h^2$ cioè il quadrato di una grandezza, od anche $h = \sqrt{m}$ la radice quadrata. Generalizzando si ottengono le successive potenze.



$$\boxed{h^2 = m \cdot n}$$

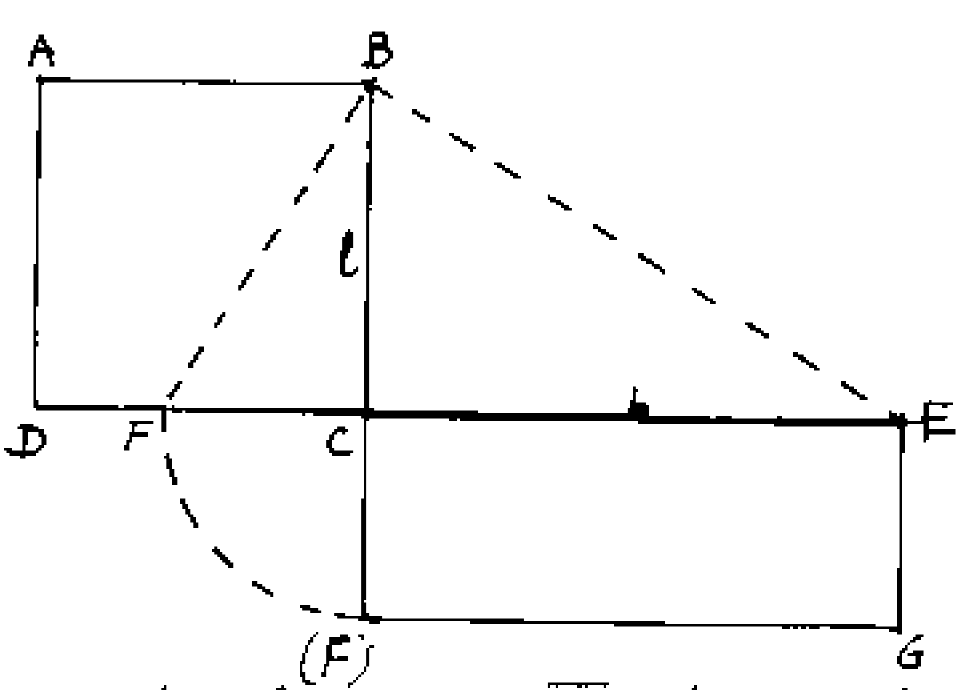
Alcune applicazioni grafiche del II° teorema di Euclide.

1) Dato il rettangolo di lati m, n trasformarlo in un quadrato equivalente (cioè avente la stessa area)



Sia ABCD il rettangolo di lati $\overline{AB} = \overline{DC} = m$; $\overline{AD} = \overline{BC} = n$. Si fa centro in B e con raggio $\overline{BC} = n$ si riporta C in (C) allineato con $\overline{AB}$. Quindi centro in (C) e centro in (A) con ugual raggio si determina il punto medio M di $\overline{A(C)}$, centro in M con raggio $\overline{MA} = \overline{M(C)}$ si traccia la semicirconferenza quindi da B si innalza la perpendicolare ad $\overline{A(C)}$ fino ad incontrarla in G, avremo $\overline{BG} = l$ = lato del quadrato equivalente (l tiene il posto di h).

2) Dato un quadrato di lato l trasformarlo in un rettangolo equivalente di base b assegnata.



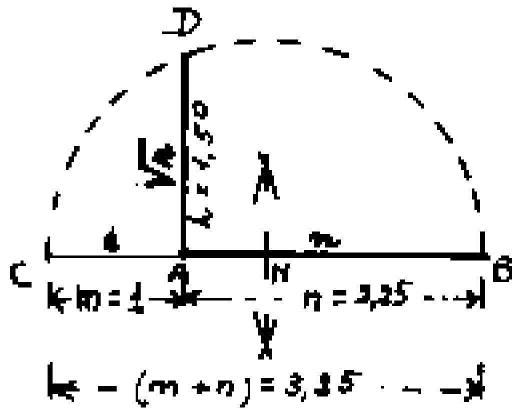
Sia ABCD il quadrato di lato l e sia $\overline{CE} = b$ la base assegnata che abbiamo riportato adiacente a $\overline{DC}$ (perpendicolare a $\overline{CB}$), da E si traccia $\overline{EB}$ e da B la perpendicolare ad $\overline{EB}$ fino ad F; $\overline{CF}$ è l'altro lato del rettangolo richiesto (EC(F)G).

L'esercizio svolto al punto 2) equivale a trovare m quando noti h ed n sappiamo che h è media proporzionale fra m ed n : $\boxed{m = \frac{h^2}{n}}$

3) Trovare il reciproco di un numero (per esempio dato $m = 2$).

Sia $\overline{AB} = m = 2$ da B la perpendicolare ad $\overline{AB}$ fino a C ove $\overline{BC} = 1$. Unito A con C, da C la perpendicolare fino a D ove $\overline{BD} = \frac{1}{AB} = \frac{1}{m} = n = \frac{1}{2}$

4) Trovare la radice quadrata di $n = 2,25$

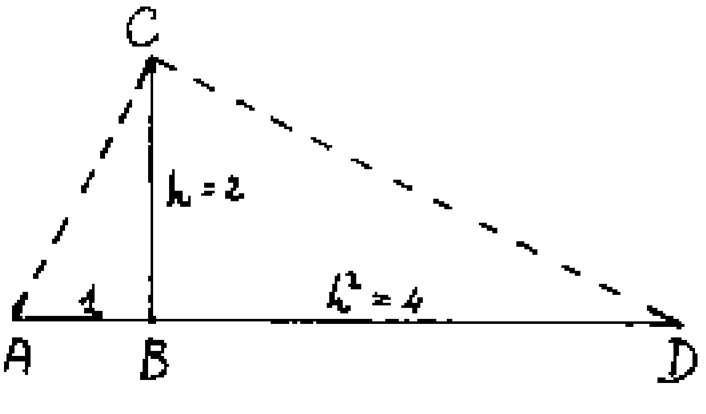


Sia $\overline{AB} = n = 2,25$ si prolunga $\overline{BA}$ fino a C ove $\overline{AC} = 1$, si cerca il punto M medio di $\overline{CB}$ quindi centro in M e raggio $\overline{MB} = \overline{MC}$ si traccia la semicirconferenza, e da A la perpendicolare ad AB fino ad incontrare in D la semicirconferenza: $\overline{AD} = \sqrt{AB}$ infatti.

$\overline{CA} : \overline{AD} = \overline{AD} : \overline{AB}$ da cui : $(\overline{AD})^2 = (\overline{CA})(\overline{AB})$; $(\overline{AD}) = \sqrt{(\overline{CA})(\overline{AB})}$; $(\overline{CA} = 1)$

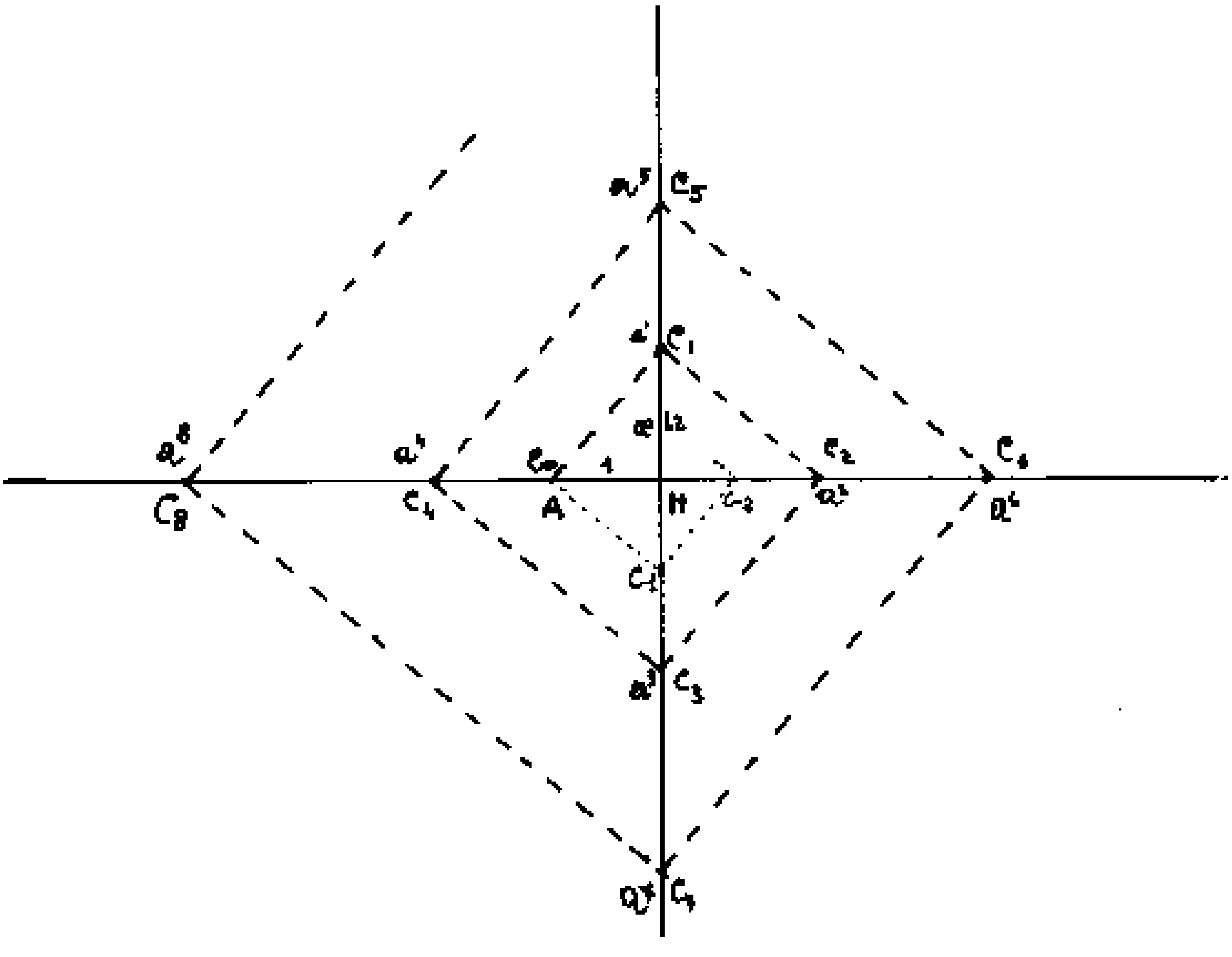
$1 : 1,5 = 1,5 : 2,25$ da cui $(1,5)^2 = (1)(2,25)$; $(1,5) = \sqrt{2,25}$.

5) trovare il quadrato di un numero $h = 2$



Sia $\overline{AB} = 1$ il modulo o segmento unitario, riportiamo da B perpendicolarmente ad esso il segmento $\overline{BC} = h = 2$, quindi unito A con C e da C la perpendicolare ad $\overline{AC}$ fino a D ove $\overline{BD} = h^2 = 4$.

Il procedimento di cui al punto 5) può essere generalizzato: tracciamo due assi ortogonali di origine H e riportiamo, (come in figura), $\overline{AH} = 1$ = modulo o segmento unitario, e perpendicolarmente $\overline{HC_1}$ = "a" un segmento di valore noto, (per esempio: $a = 1,2$). Unito A con C_1 da C_1 la normale ad $\overline{AC_1}$ fino a C_2 ove $\overline{HC_2} = a^2$, da C_2 la normale a $\overline{C_1C_2}$ fino a C_3 ove $HC_3 = a^3$, da C_3 la normale a C_2C_3 fino a C_4 ove $\overline{HC_4} = a^4$ e così via, ove da C_{n-1} la normale a $\overline{C_{n-2}C_{n-1}}$ fino a C_n ove $\overline{HC_n} = a^n$.



Se da A tracciamo la normale ad $\overline{AC_1}$ troviamo C_{-1} ove $\overline{HC_{-1}} = a^{-1} = \frac{1}{a}$ e continuando $\overline{HC_{-2}} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ e così via. Questo procedimento consente di trovare le potenze ad esponente intero (positivo e negativo) non consente le radici. (vedi Vol. I spirale logaritmica)

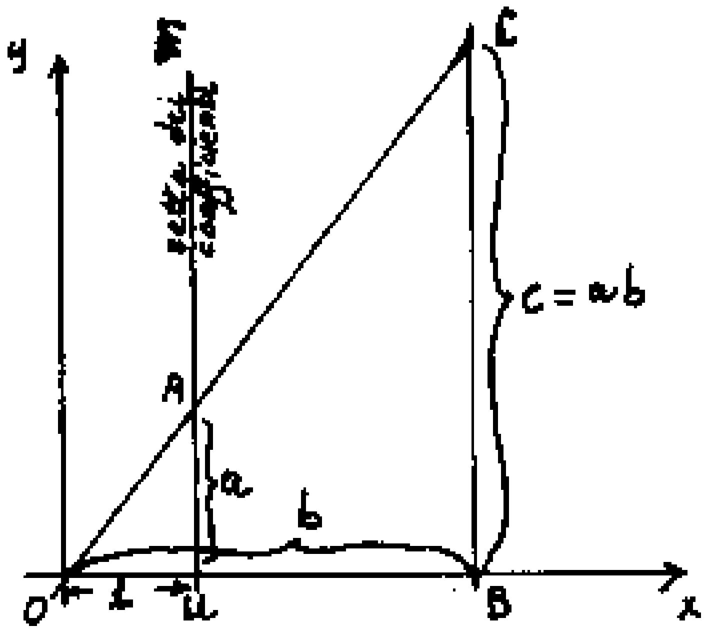
Altre costruzioni grafiche

Le costruzioni grafiche sono gli elementi base per il Calcolo Grafico. Le operazioni aritmetiche di somma o sottrazione sono ovvie, per il prodotto di due segmenti dati a e b, trovare $\boxed{c = a \cdot b}$

Si verificano due condizioni:

1) Se costruiamo il rettangolo di lati a, b: l'area di tale rettangolo è il prodotto di a·b, indipendente da qualsiasi unità di misura.

2) Se invece ad "a" ed a "b" attribuiamo valori numerici occorre conoscere (o ricavare) il modulo o segmento unitario rispetto al quale i due segmenti "a" e "b" possono rappresentare quei valori numerici, ed in questo caso è possibile trovare un segmento $c = a \cdot b$ che rappresenti (rispetto allo stesso modulo unitario) il prodotto dei valori numerici di "a" e di "b". — Disegnamo due assi ortogonali $\overline{OX}$ ad $\overline{OY}$, riportiamo su $\overline{OX}$ un segmento unitario (modulo) $\overline{OU} = 1$; per "u" tracciamo una parallela ad y $\overline{um}$ che sarà la retta dei coefficienti moltiplicatori, riportiamo su di essa il segmento "a" $= \overline{UA}$ e su $\overline{OX}$ il segmento $\overline{OB} = b$, unita O con A,



e prolungata la retta fino all'incontro in "C" con la verticale per B, avremo che $\overline{BC} = c = ab$; ciò è facilmente dimostrabile per similitudine di triangoli, infatti: $c : b = a : 1$ da cui: $c \cdot 1 = c = ab$.

Del tutto analogo il quoziente, si riporta su $\overrightarrow{Ox}$ il divisore $\overline{OB} = b$ e perpendicolarmente da B il dividendo $\overline{BC} = c$, unito C con l'origine O, si determina A per intersezione con retta dei coefficienti; avremo: $\overline{UA} = a = c/b$.

In generale, per tutti i punti del piano di coordinate: $x;y$ (per coordinata x si intende la distanza che il punto ha dall'asse y, per coordinata y si intende la distanza che il punto ha dall'asse x) ove il rapporto $\frac{y}{x} = m$, possiamo leggerlo sulla retta dei coefficienti per l'intersezione su di essa con la retta che unisce il generico punto $P \equiv (x;y)$ (leggi: "P determinato dalle coordinate x e y") con l'origine O. Quindi tutti i punti della retta $\overline{OP}$ hanno per coefficiente: $m = \frac{y}{x}$ cioè: $y = mx$ è l'equazione di tale retta ed m che indica la "pendenza" di tale retta è detto: Coefficiente angolare.

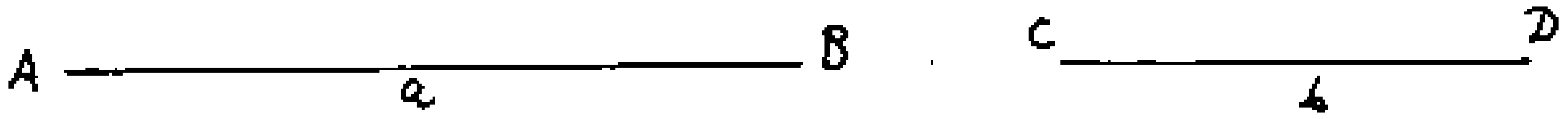
Confronto di due segmenti

La costruzione ora effettuata consente il confronto fra due segmenti di cui si ha la rappresentazione grafica, ma non si ha il modulo unitario per definirne numericamente la misura. Basterà riportare su $\overline{OX}$ uno dei due segmenti (e sia $\overline{OB}$); perpendicolarmente da B l'altro segmento (e sia $\overline{BC}$); unito l'estremo C con l'origine essa intersecherà la retta dei coefficienti in un punto (e sia A), avremo che $\overline{UA}$ letto numericamente nella scala $\overline{OU} = 1$ è il rapporto fra i due segmenti. Se tale rapporto è esprimibile in forma frazionaria, cioè se esiste un segmento che sia il M.C.D per entrambi, i segmenti si dicono "Commensurabili, in quanto ammettono un modulo unitario comune.

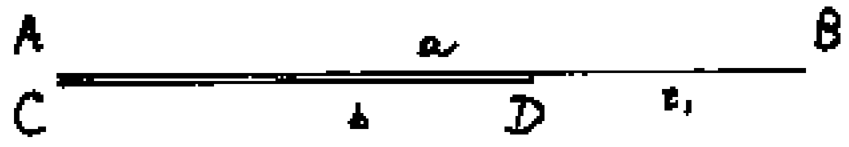
Due segmenti si dicono "incommensurabili" quando non esiste alcun segmento finito che entri un numero intero di volte in ciascuno dei due segmenti, cioè quando non ammettono un modulo unitario comune.

Commensurabilità ed incommensurabilità di segmenti.

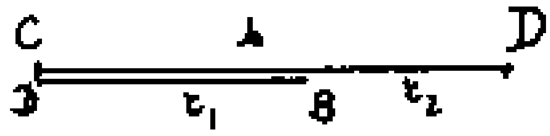
Dati graficamente due segmenti a e b



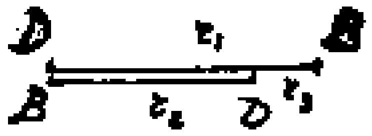
sovrapponiamoli con l'origine in comune: $A \equiv C$ il



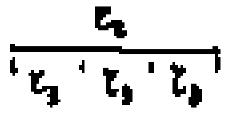
segmento minore entrerà un numero intero n di volte nel maggiore, poi, può avanzare un segmento, ancora minore, che chiameremo r_1; cioè: $nb + r_1 = a$ (nel nostro caso $n = 1$). Ripetiamo il procedimento con b ed r_1 ed avremo:



che r_1 entrerà un numero intero n_1 di volte in b poi avanzerà r_2, cioè: $b = n_1 r_1 + r_2$; (nel nostro caso anche $n_1 = 1$). Ripetiamo il procedimento con r_1 ed r_2 (in generale: r_n ed r_{n+1}) si ha:



; $r_1 = n_2 r_2 + r_3$;



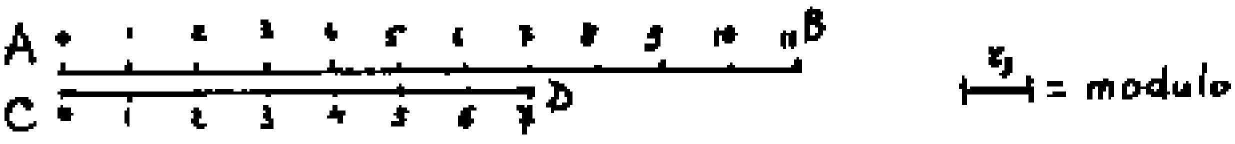
; $r_2 = 3 r_3$.

Ora che r_3 è entrato un numero intero di volte in r_2, facciamo i conti alla rovescia: $\boxed{r_3 = \frac{1}{3} r_2}$;

$r_1 = r_2 + r_3 = (1 + \frac{1}{3}) r_2 = \frac{4}{3} r_2 \supset \boxed{r_2 = \frac{3}{4} r_1}$; $b = r_1 + r_2$

$b = (1 + \frac{3}{4}) r_1 = \frac{7}{4} r_1 \supset \boxed{r_1 = \frac{4}{7} b}$; $a = b + r_1 = (1 + \frac{4}{7}) b = \frac{11}{7} b$

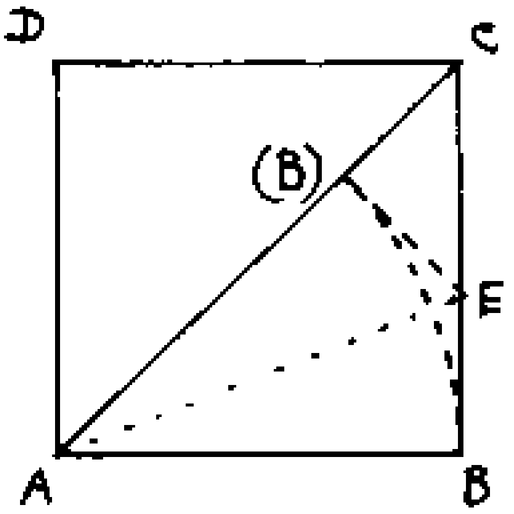
$\boxed{b = \frac{7}{11} a}$ notiamo che r_3 è il modulo comune che entra 7 volte in b ed 11 volte in a.



quindi i due segmenti "a" e "b" <u>sono commensurabili</u> ammettono cioè un summultiplo comune: (r_3). Poniamo: $r_3 = u$ avremo: $a = 11 \cdot u$; $b = 7u$.

Vediamo ora un classico esempio di incommensurabilità.

Dimostriamo che la diagonale ed il lato di un quadrato sono fra loro incommensurabili.

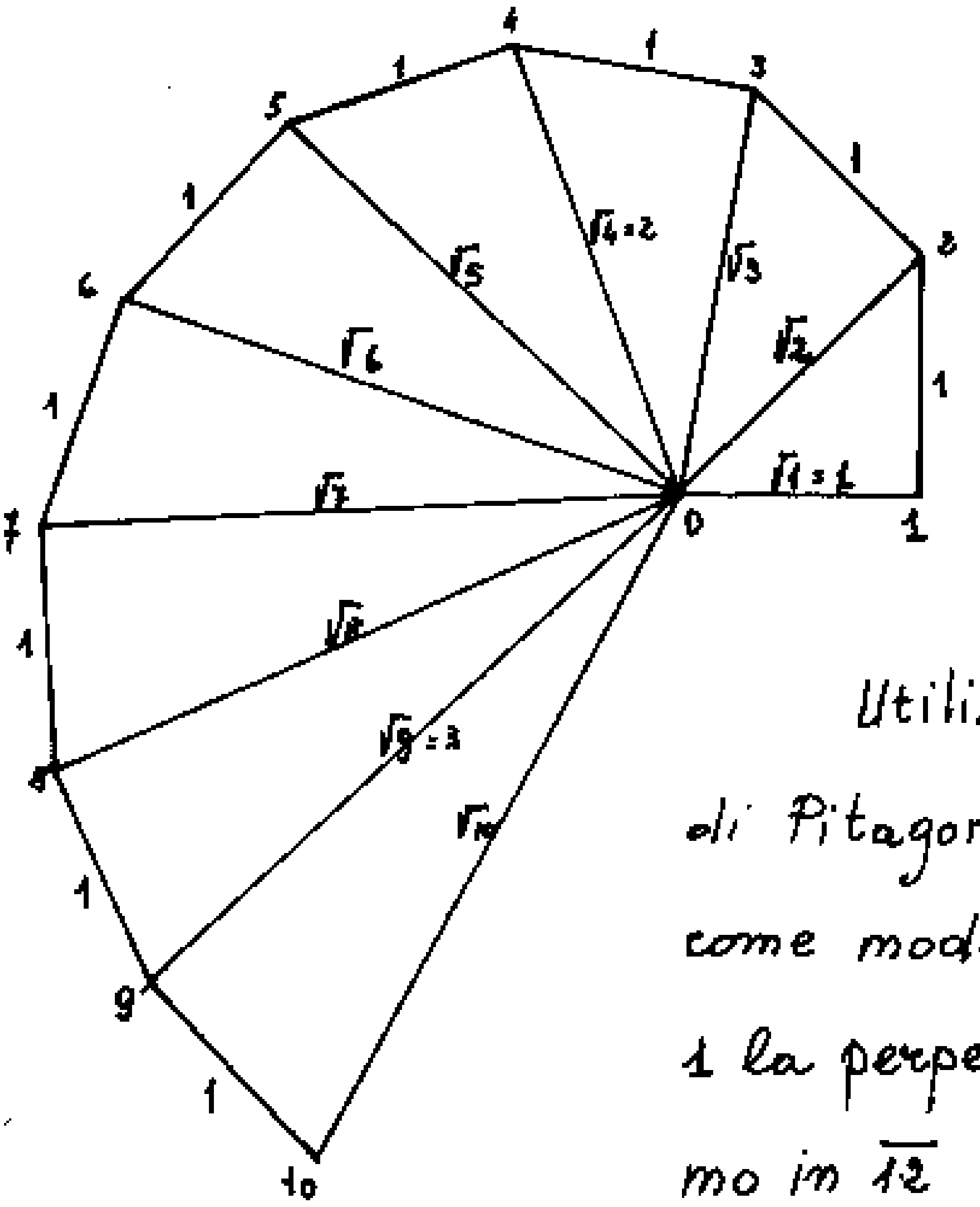


Di un quadrato ABCD consideriamo la diagonale $\overline{AC}$, su di essa, a partire da A riportiamo il lato $\overline{AB}$ che sarà: $\overline{A(B)}$, da (B) la perpendicolare fino ad E.

notiamo che l'avanzo di diagonale $\overline{(B)C} = \overline{(B)E}$ essendo il triangolo C(B)E rettangolo isoscele, cioè metà di un quadrato; anche $\overline{BE} = \overline{(B)E} = \overline{BC}$ perchè i due triangoli rettangoli ABE ed A(B)E sono congruenti in quanto hanno l'ipotenusa $\overline{AE}$ in comune ed $\overline{AB} = \overline{A(B)}$ per costruzione quindi se al lato togliamo l'avanzo di diagonale resta $\overline{CE}$ che a sua volta è diagonale rispetto a segmenti grandi: $\overline{EB} = E(B)$. Quindi riportando $\overline{E(B)}$ su $\overline{EC}$ ci ritroviamo nelle condizioni di partenza, ed avremmo quadrati sempre più piccoli fino ad essere infinitesimi senza aver trovato un modulo comune. Se: $\overline{AB} = l$ ed $\overline{AC} = d$ Sappiamo per Pitagora: $d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \Rightarrow d = l\sqrt{2}$; cioè: $\frac{l}{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ non è esprimibile in forma frazionaria, cioè: $\sqrt{2}$ non è un "numero razionale" è irrazionale.

Analoga dimostrazione potrebbe farsi fra il lato del triangolo equilatero e l'altezza; il loro rapporto è irrazionale: $\frac{h}{e} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Anche molti altri rapporti di segmenti o di grandezze in genere sono numeri irrazionali. Tuttociò dimostra che esistono "grandezze", (anche non geometriche), che non ammettono una comune unità di misura "finita". (Solo l'infinitesimo è comune alle varie grandezze).

Costruzione Grafica.



Utilizzando il teorema di Pitagora riportiamo $\overline{01}$ come modulo unitario, da 1 la perpendicolare, riportiamo in $\overline{12}$ il modulo; così avremo: $\overline{02} = \sqrt{2}$; da 2 la perpendicolare ad $\overline{02}$ e riportiamo il modulo 1 in $\overline{23}$, avremo $\overline{03} = \sqrt{3}$; e così via si possono costruire le radici quadrate di tutti i numeri interi.

La rappresentazione grafica di quantità, resa possibile in riferimento ad un modulo grafico unitario, rispetto al quale è possibile rappresentare tutte le quantità numeriche, razionali o irrazionali, o, come vedremo, "trascendenti" o, addirittura, "immaginari complessi". Il modulo grafico unitario, può essere un segmento unitario, al quale attribuiamo il valore puramente numerico: uno, (1). Ma a questo segmento unitario possiamo anche attribuire il valore dell'unità di misura di una qualsiasi dimensione fisica, per esempio 1 Watt, o 1 Volt, o un grado di temperatura, avremo così diagrammi e rappresentazioni grafiche che unificano la geometria con la matematica e la fisica. Se al modulo unitario è attribuito il valore di una "lunghezza" (per es. un centimetro, un pollice, un metro o un Kilometro) si ha una "scala grafica". Cioè se il modulo grafico è un cm. ed attribuiamo ad esso il suo vero valore (un cm.) avremo la scala 1:1 (e non è necessario specificare quali lunghezze) se ogni cm di grafico vale 1 metro, avremo la scala 1:100 (e anche qui non è necessario specificare lunghezze, è un rapporto di similitudine). Se invece il modulo grafico di un centimetro rappresenta 100 Kg dovremo scrivere: Scala cm 1 = Kg 100.

Nello stesso grafico possono coesistere scale diverse, (per esempio il grafico della temperatura nel tempo); cioè si possono correlare graficamente le diverse dimensioni fisiche.

Tornando alla commensurabilità, si nota che se "a" e "b" sono commensurabili fra loro e "b" e commensurabile con "c", anche "a" è commensurabile con "c". Infatti se $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ cioè se $(a : m = b : n)$ ed. $\frac{b}{c} = \frac{r}{s}$ cioè: $(b : r = c : s)$, avremo: $b = \frac{n}{m} a = c \frac{r}{s}$; per cui $a = \frac{mr}{ns} c$

$\frac{a}{c} = \frac{mr}{ns}$ cioè: $(a : c = mr : ns)$; $(a : mr = c : ns)$

ed essendo m, r, n, s numeri interi, lo è anche il loro prodotto, e resta dimostrato l'assunto.

Già Pitagora aveva trattato della commensurabilità e incommensurabilità delle grandezze, in particolare quella fra lato e diagonale del quadrato. A noi interessa evidenziare le caratteristiche dei modi per rappresentare le quantità; quì abbiamo evidenziato un simbolismo geometrico, ma è ancora più interessante lo sforzo umano per rappresentare aritmeticamente le quantità; indipendentemente dal simbolismo grafico (le cifre); abbiamo trovato numeri razionali ed irrazionali cioè esprimibili o no mediante frazioni.

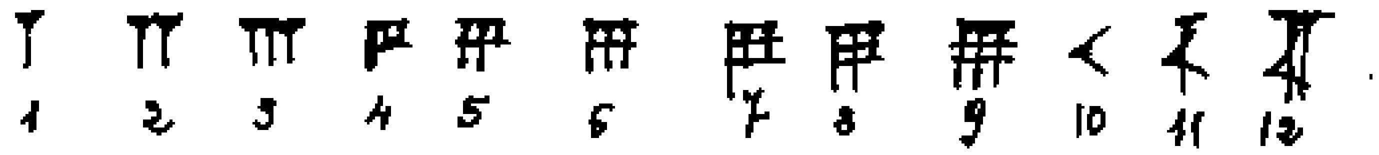
Vediamone ora l'aspetto aritmetico.

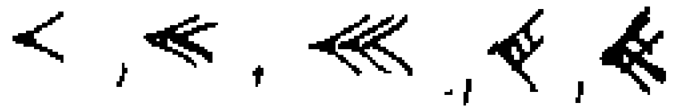
Le Numerazioni

O. Neugebauer, nel suo libro: "Le scienze esatte nell'Antichitá" (ed. Feltrinelli, edizione italiana 1974,), commenta, abbastanza amaramente: "...E' interessante osservare come ci siano voluti 2000 anni di trasmissione di conoscenze astronomiche dalla Mesopotamia attraverso i Greci, gli Indiani e gli Arabi, per arrivare a un sistema numerico veramente assurdo." L'autore si riferisce in particolare alla numerazione sessagesimale per gli angoli, di cui abbiamo giá esposti i fondamenti, ma il commento puó estendersi agli altri tipi di numerazione.

L'argomento: "Sistemi di numerazione" é particolarmente delicato e scabroso; ci riserviamo di trattarlo piú ampliamente dopo aver trattato l'intera analisi matematica. Dobbiamo distinguere l'azione del "contare", dall'enumerare, dal numerare, dal calcolare, dal memorizzare una quantitá. Abbiamo giá detto che i romani per memorizzare i capi di bestiame dei propri greggi, incidevano tacche sul bastone da pastore; questo metodo era in uso anche presso altri popoli antichi.

In Mesopotamia, nel periodo "antico-babilonese" (1800 ÷ 1600 A.C) la scrittura avveniva su tavolette di argilla pressappoco della dimensione di una mano, circa: $10 \times 5 \times 2$ cm. Erano incise con uno stelo appuntito e l'inizio del segno era più grande, fu detta scrittura cuneiforme. I numeri da 1 a 12 erano:



e: 10, 20, 30, 40, 50 erano: 

I greci usavano le lettere dell'alfabeto per i numeri: $\alpha = 1$; $\beta = 2$; $\gamma = 3$; $\delta = 4$; $\varepsilon = 5$; però "in sequenza" dopo ε verrebbe ζ, invece il 6 è un segno simile detto digamma (**); ϛ $= 6$; e $\zeta = 7$; $\eta = 8$; $\vartheta = 9$; $\iota = 10$; anche i greci avevano una impostazione decimale infatti $11 = \iota\alpha$; $12 = \iota\beta$; fino ad $\iota\vartheta = 19$; $\kappa = 20$; $\kappa\alpha = 21$ ... ecc $\pi = 80$; $\rho = 100$; $\sigma = 200$; $\tau = 300$; ... $\omega = 800$ poi: τ (o Λ o Ϡ) $= 900$ che sono simboli di un alfabeto greco più antico.

La questione decimale, dipendente dal contare sulle dita, che si ritrova anche nei numeri romani. I simboli numerici che abbiamo esposto riflettono <u>"numeri interi" assoluti</u> (cioè privi di segno).

Alcuni distinguono la notazione numerica in notazione *additiva* (come i numeri romani) ed in notazione *posizionale* (come la nostra numerazione).

Alla spontanea rappresentazione dei numeri interi, si affianca la notevole difficoltà di rappresentare grandezze non intere. Dividere una unità in un numero finito di parti uguali è facile quando l'unità è un segmento, anzi si possono avere segmenti *commensurabili*, che ammettono una stessa unità e *non commensurabili*, che non ammettono la stessa unità; però, sia gli uni che gli altri, si possono sempre dividere in un numero finito di parti uguali.

Poiché i numeri servono per determinare "quantità" che poss~~ono~~ essere espresse in peso, in volume, in area, in lunghezza, in valore, ecc. Occorrono dei sottomultipli dell'unità prescelta. Nel nostro sistema decimale è impossibile dividere per esempio il metro in 3 parti uguali, avremo:

$33,333\bar{3}$ .... cm cioè 3 dm + 3 cm + 3 mm + 333 μ + ...

Una Yarda di 3 piedi ed ogni piede di 12 pollici, cioè una Yarda è 36 pollici, è impossibile dividerla in 5 parti avremo 7 pollici + $\frac{1}{5}$ di pollice e poiché il pollice è diviso in 8^mi^ avremo: 7 pollici + $\frac{1}{8}$ di pollice $+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{8}$

Il sistema numerico sessagesimale che si usa anche oggi nei nostri orologi prevede 1ora di 60' ed 1' di 60" dopo di che il sistema torna decimale. Poiché una ora è 3600" essa è divisibile per: 2, 3, 4, 5, 6, *, 8, 9, 10, *, 12, *, *, 15, 16, *, 18, *, 20, *, *, *, 24, 25, *, *, **, 30, *, *, *, *, *, 36, *, *, *, 40, *, *, *, *, 45, *, *, 48, *, 50, *, *, *, *, *, *, *, *, *, 60. Dei primi 60 numeri è divisibile per 22 oltre l'unità e non è divisibile per i restanti 37.
D'altra parte il cerchio è facilmente divisibile in 6 parti e quindi in: 12, 24, 48, 96, Però mentre $\frac{1}{48}$ di circonferenza equivale a 75" cioè: 1' 15" ; $\frac{1}{96}$ di giro = 37",5 abbiamo già lo sfrazionamento del secondo in metà.

Cioè, dati i numeri interi, è difficile fare un sistema di sottomultipli che permettano l'equivalenza esatta con i reciproci dei numeri interi (per esempio 1/7); non solo, ma trovato, anche se possibile, un tale sistema, se la sua unità misura il lato di un quadrato, non potrà mai, con un numero finito di cifre, misurarne anche la diagonale.

Si noti quindi la praticità della geometria di fornire (nei limiti della precisione del disegno) la vera grandezza, mediante segmenti finiti di quantità numericamente espresse da infinite cifre.

LA SEZIONE AUREA

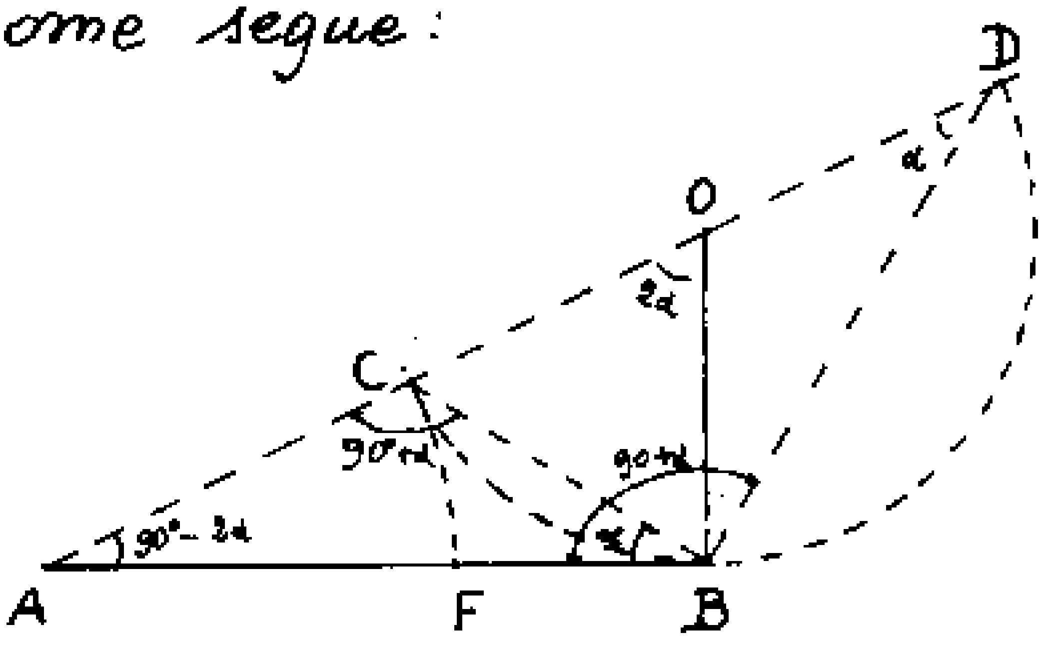
Il concetto di "frazione" che equivale a "rapporto", che equivale a "proporzione" porta a quella che fu chiamata: "SEZIONE AUREA" di un segmento od anche "divisione aurea", oppure: "dividere un segmento in media ed estrema ragione" e vuol dire che la parte minore del segmento stà alla parte maggiore, come la parte maggiore stà all'intero segmento, cioè la parte maggiore è media proporzionale fra la parte minore e l'intero segmento. La parte maggiore si chiama anche "parte aurea" del segmento.

Fin dall'antichità filosofi e matematici, compreso Pitagora e Platone, attribuivano grande importanza alla "Sezione Aurea" perchè permetteva di costruire il decagono (il pentagono) regolare e soprattutto il pentagono stellato detto "Pentagramma", (da noi chiamato: "Stella d'Italia"), che era simbolo di salute e di fortuna. Gli scienziati ed artisti del Rinascimento trovarono poi che le grandi opere d'arte figurativa (pittura, scultura, architettura) sono dominate dalla proporzione aurea.

Luca Pacioli di Borgo S. Sepolcro (Ar. Toscana) pubblicó nel 1509 un'opera intitolata: "Divina Proporzione". Quest'opera, di cui Leonardo da Vinci incise le figure geometriche, doveva stabilire le leggi di tutte le arti figurative.

Modernamente é stato trovato che la proporzione aurea domina anche in natura, nelle proporzioni di piante, di animali, e principalmente fra le parti del corpo umano.

La costruzione grafica della parte aurea di un segmento $\overline{AB}$, viene eseguita come segue:



Dall'estremo B si riporta perpendicolarmente ad $\overline{AB}$ un segmento $\overline{BO} = \frac{1}{2}\overline{AB}$; quindi con centro in "O" e raggio $\frac{\overline{AB}}{2} = \overline{OB}$ si traccia la semicirconferenza di diametro $\overline{CD}$ sulla retta congiungente A con O. Quindi centro in A e raggio $\overline{AC}$ si riporta $\overline{AC} = \overline{AF}$ su $\overline{AB}$. Il segmento $\overline{AF}$ é la parte aurea del segmento $\overline{AB}$. Infatti i triangoli ACB e ABD sono simili: angolo $\hat{A}$ in comune, $\widehat{ACB} = \widehat{ABD}$ per cui: $\overline{AC}:\overline{AB} = \overline{AB}:\overline{AD}$, ma $\overline{AB} = \overline{CD}$

$\overline{AC}:\overline{CD} = \overline{CD}:\overline{AD}$ ove si nota che $\overline{CD}$ é la parte aurea di $\overline{AD}$.

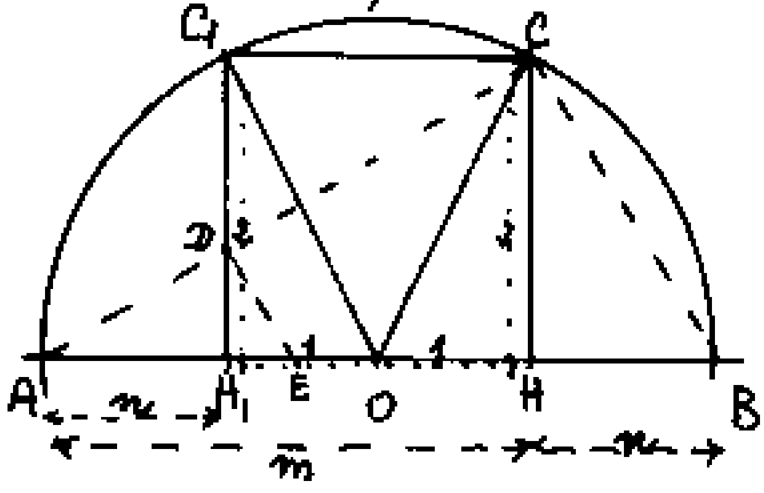
$(\overline{AD}-\overline{CD}):\overline{CD} = (\overline{CD}-\overline{AC}):\overline{AC}$ (per lo scomponendo)

cioè: $(\overline{AD}-\overline{CD}) = \overline{AC} = \overline{AF}$; $\overline{CD} = \overline{AB}$; $(\overline{CD}-\overline{AC}) = (\overline{AB}-\overline{AF}) = \overline{FB}$

$\overline{AF}:\overline{AB} = \overline{FB}:\overline{AF}$ cioè: $\boxed{\overline{FB}:\overline{AF} = \overline{AF}:\overline{AB}}$

che dimostra essere $\underline{\overline{AF}}$ la parte aurea di $\overline{AB}$.

Sia la dimostrazione che la costruzione grafica sono un po' elaborate, mentre la proporzione richiama alla mente il secondo teorema di Euclide: "L'altezza è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti"; $m:h = h:n$; ma dovrebbe essere: $m = (h+n)$ = intero segmento con h = parte aurea, mentre $\overline{AB} = m+n = h+2n$ cioè: $\overline{AB} - 2n = h$, significa che un quadrato di lato h inscritto in una semicirconferenza. Questa costruzione non presenta difficoltà: Dal centro "O" di

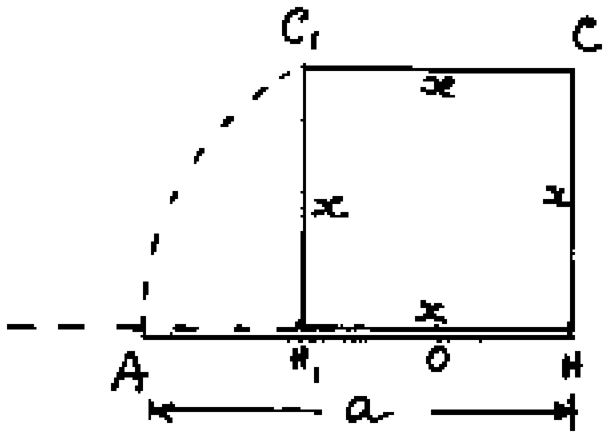


una semicirconferenza di diametro $\overline{AB}$, si tracciano a destra e a sinistra da "O" due segmenti inclinati 2/1 che incontreranno la semicirconferenza in C e C_1; da C e C_1 le normali ad $\overline{AB}$ fino ad H ed H_1; il quadrato CHH_1C_1 è il quadrato cercato ove $\overline{AH} = m = \overline{H_1B}$ = intero segmento; $\overline{AH_1} = \overline{HB}$ = parte minore; $\overline{H_1H} = \overline{HC} = \overline{H_1C_1} = \overline{CC_1}$ = parte aurea di $\overline{AH}$. Ma noi a priori abbiamo il segmento $\overline{AB}$, perciò se da D comune ad $\overline{AC}$ e $\overline{C_1H_1}$ tracciamo la parallela $\overline{DE}$ ad $\overline{CB}$ avremo $\overline{EB}$ = parte aurea di $\overline{AB}$, così come $\overline{DC}$ è la parte aurea di $\overline{AC}$, infatti se proiettiamo $\overline{AH_1}+\overline{H_1H}=\overline{AH}=m$ su $\overline{AD}+\overline{DC}=\overline{AC}$ e se $\overline{AD}+\overline{DC}=\overline{AC}$ lo proiettiamo su: $\overline{AE}+\overline{EB}=\overline{AB}$ si avranno gli stessi rapporti fra i segmenti.

Inversamente se è data la parte aurea x e si vuole l'intero segmento "a" ove:

$$a : x = x : (a-x)$$

basta disegnare il quadrato CHH_1C_1 di lato x e dal punto O medio di HH_1 si riporti il segmento $\overline{OC_1}$ sul prolungamento di $\overline{HH_1}$ in A avremo: $a=\overline{AH}$. Ed è la costruzione inversa.



Dalla proporzione si ha:

$a^2-ax-x^2=0$, per cui

$a=\frac{x}{2}\pm\sqrt{\frac{5x^2}{4}}$ (vale solo +)

$a=x\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$; $\underline{a=x(1{,}618034)}$

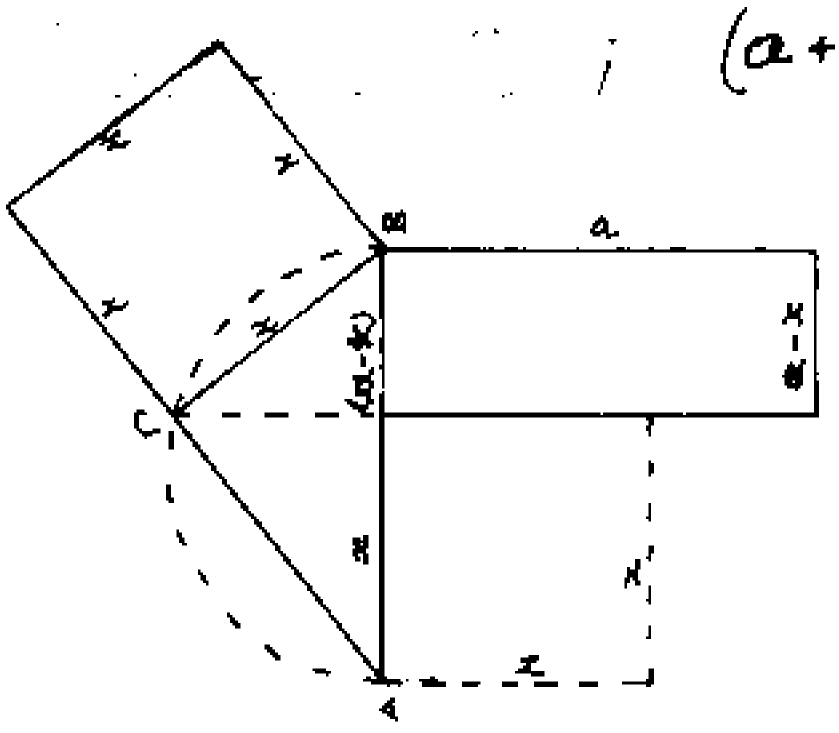
$x=a\frac{2}{1+\sqrt{5}}=a\frac{2(\sqrt{5}-1)}{4}=a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$; $\underline{x=a(0{,}618034)}$

cioè la parte aurea è poco più dei 6/10 del segmento

E' anche interessante notare che: $\boxed{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}=1}$

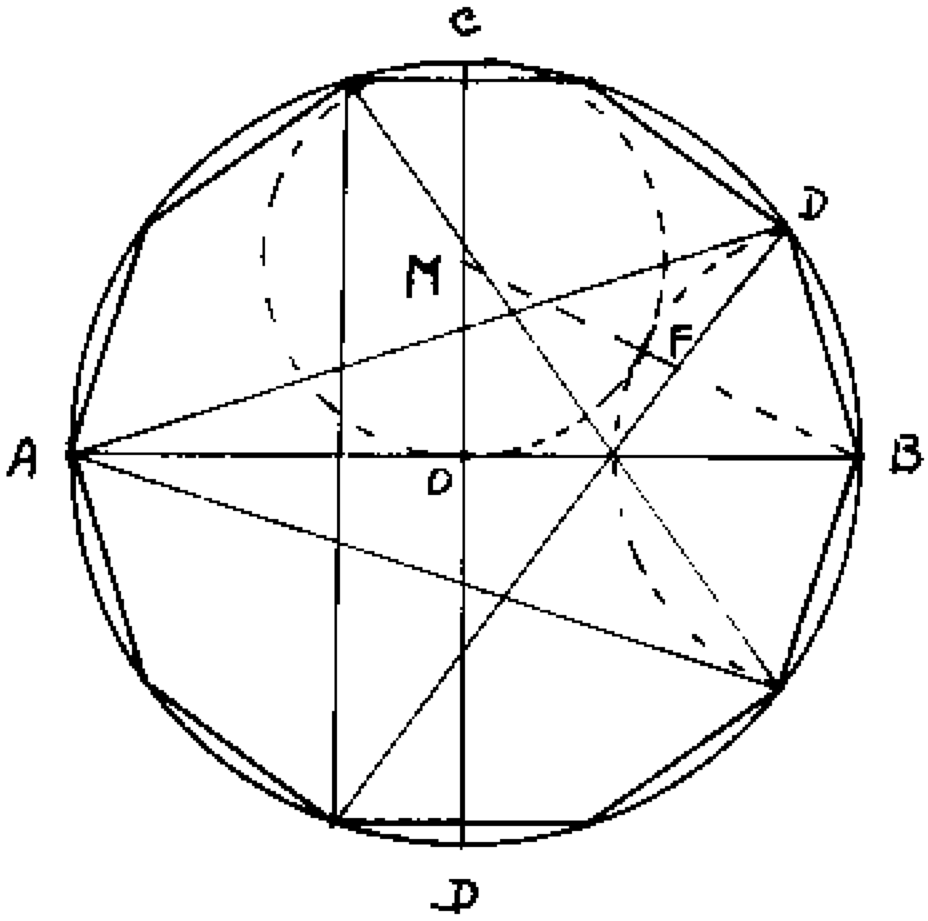
; $(a+x)(a-x)=ax$ cioè

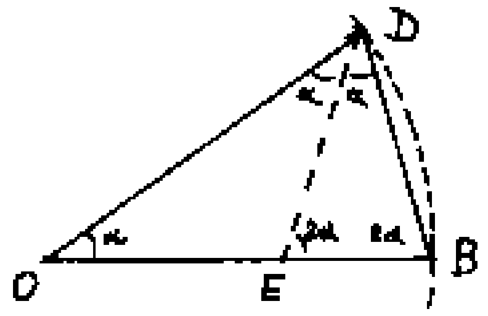
$$\boxed{a^2-x^2=ax}$$



In figura abbiamo riportato il I° teorema di Euclide $\boxed{(a-x)(a)=x^2}$ nel caso che x sia parte aurea di a.

Il Decagono Regolare





Per la costruzione del decagono regolare, tracciato il cerchio di centro "O" e diametro $\overline{AB}$, si tracci il diametro $\overline{CD}$ perpendicolare ad $\overline{AB}$, quindi con centro nel punto M medio di $\overline{CO}$, si tracci un cerchio di diametro: $\overline{CO}$, e si unisca M con B, il punto di intersezione: F determina il segmento $\overline{FB}$ che è il lato del decagono regolare ed è la parte aurea del raggio $\overline{OB}$. Infatti sia $\overline{OB}$ il raggio ed $\overline{OE} = \overline{BD}$ la sua parte aurea. I triangoli: BOD ed EDB, sono simili infatti per la proporzione aurea: $\overline{OB} : \overline{OE} = \overline{OE} : \overline{EB}$ ed essendo $\overline{OE} = DB$ si ha: $\overline{OB} : \overline{DB} = \overline{DB} : \overline{EB}$. (lati proporzionali). Ma $\overline{OB} = \overline{OD}$ per cui anche $\overline{DE} = \overline{DB} = \overline{OE}$ cioè il triangolo: OEB è isoscele e detti α gli angoli alla base, avremo che $\widehat{DEB} = 2\alpha$ (angolo esterno) $= \widehat{OBD}$; e $\widehat{BOD} = \widehat{EDB} = \alpha$. Dovendo essere: $\widehat{BOD} + \widehat{ODB} + \widehat{DBO} = 180° = \pi\text{rad}$ anche $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 5\alpha = 180° = \pi\text{rad}$ per cui $\alpha = \frac{180°}{5} = 36° = \frac{360°}{10} = \frac{2\pi\text{rad}}{10} = 0{,}62832\text{ rad}$. c.v.d.

Gli angoli notevoli

Nei problemi concernenti angoli, conviene sempre accertarsi se gli angoli noti o incogniti sono "notevoli", oppure complementari, o supplementari, o explementari di angoli notevoli, od anche multipli o sottomultipli interi di angoli notevoli.

Gli angoli notevoli sono:

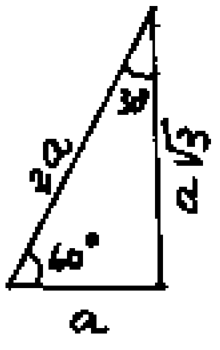
fondamentali
$$\begin{cases} 360° = 2\pi \text{ rad} = \text{angolo giro} \\ 180° = \pi \text{ rad} = \text{angolo piatto} = (\frac{1}{2} \text{ giro}) \\ 90° = \frac{\pi}{2} \text{ rad} = \text{angolo retto} = (\frac{1}{4} \text{ giro}) \end{cases}$$

notevoli
$$\begin{cases} 60° = \frac{\pi}{3} \text{ rad} = \frac{1}{6} \text{ giro} = \text{l'angolo del triangolo equilat.} \\ 45° = \frac{\pi}{4} \text{ rad} = \frac{1}{8} \text{ giro} = \text{l'angolo in metà quadrato} \\ 30° = \frac{\pi}{6} \text{ rad} = \frac{1}{12} \text{ giro} = \text{l'angolo in metà triangolo equilat.} \end{cases}$$

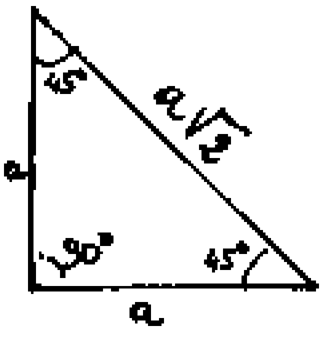
conviene aggiungere:

aurei
$$\left.\begin{cases} 36° = \frac{\pi}{5} \text{ rad} = \frac{1}{10} \text{ giro} \\ 72° = \frac{2\pi}{5} \text{ rad} = \frac{1}{5} \text{ giro} \end{cases}\right\} \text{angoli trattati con la sezione aurea.}$$

Ricordare le figure:

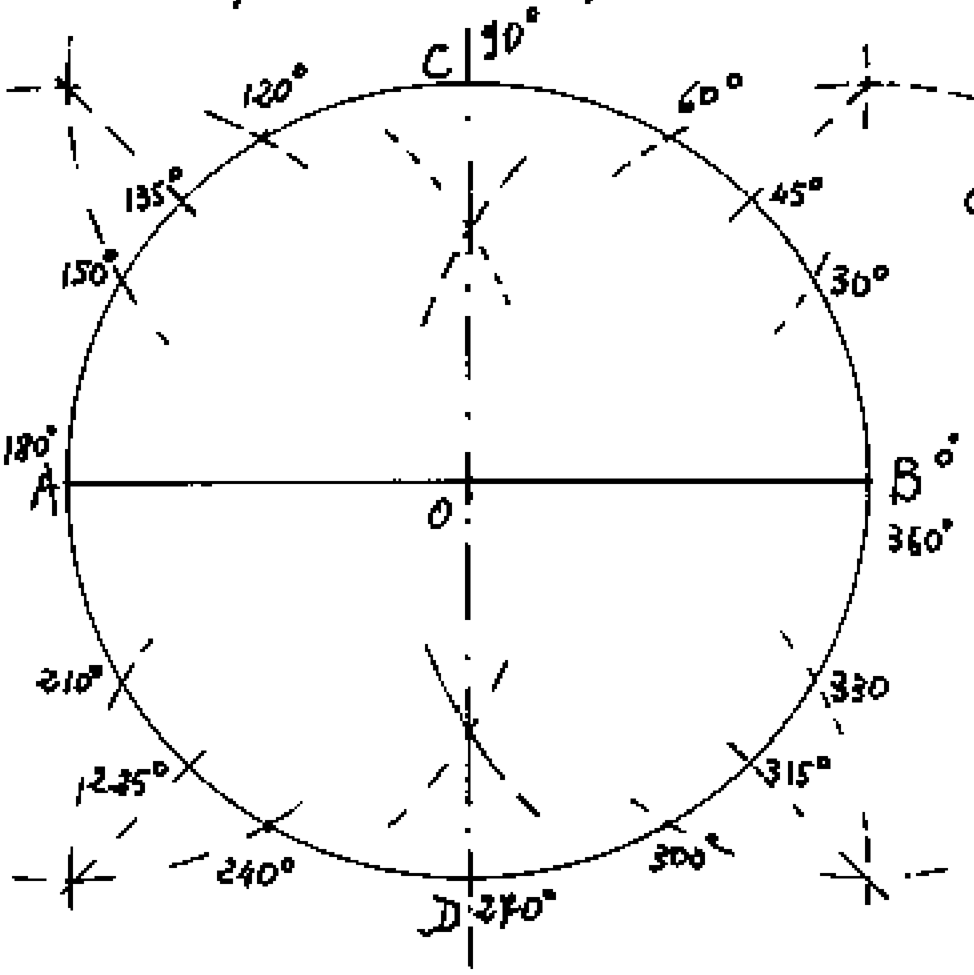


;

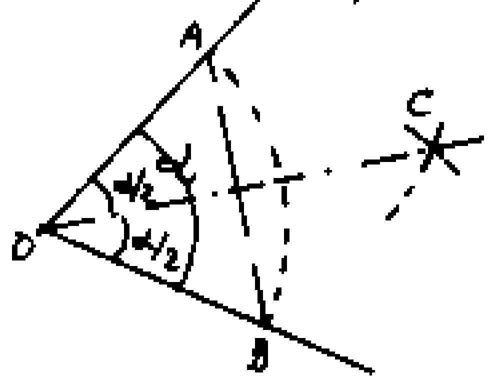


Come costruire graficamente gli angoli notevoli

Tracciato il segmento $\overline{AB}$, facendo centro in A ed in B con raggio qualsiasi, (maggiore di $\overline{AB}/2$) si tracciano due archi che si incontreranno in due punti appartenenti all'asse di $\overline{AB}$, cioè alla retta normale ad $\overline{AB}$ e passante per il suo punto di mezzo O. Quindi centro in "O" e raggio $\overline{OA} = \overline{OB}$ si traccia una circonferenza che incontrerá in C e D l'asse di $\overline{AB}$ ed avremo i primi 4 angoli: 90°, 180°, 270°, 360° cioè $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π in radianti. - Con lo stesso raggio $\overline{OB}$ centro in A e B, troveremo gli angoli: 60°, 120°, 240°, 300°, cioè $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$ rad. che insieme ad A e B sono i vertici di un esagono. Con lo stesso raggio $\overline{OB}$, centro in C e D, troveremo gli angoli 30°, 150°, 210°, 330°, cioè $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$ rad. Non solo, ma uniti con "O" i quattro punti comuni ai precedenti archetti, troviamo gli angoli 45°, 135°, 225°, 315°, cioè: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$ rad. Con la costruzione del decagono sappiamo costruire gli angoli 36°, 72°, 108°, 144°, 216°, 252°, 288°, 324° cioè: $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2}{5}\pi$, $\frac{3}{5}\pi$, $\frac{4}{5}\pi$, $\frac{6}{5}\pi$, $\frac{7}{5}\pi$, $\frac{8}{5}\pi$, $\frac{9}{5}\pi$ rad.



Poichè, dato un angolo qualsiasi, è sempre possibile dividerlo graficamente in due parti uguali tracciando l'asse della corda dell'arco sotteso all'angolo; cioè, facendo centro in A e B si determina C, ed unito C con O, ove $\overline{CO}$ è l'asse di $\overline{AB}$, si ottiene che l'angolo $\alpha = \widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB}$, ove: $\widehat{AOC} = \widehat{COB} = \alpha/2$.



Il procedimento può ripetersi su $\alpha/2$ ed avremo $\alpha/4$, $\frac{\alpha}{8}$, $\frac{\alpha}{16}$, ... $\frac{\alpha}{2^n}$, con n procedimenti.

Non è invece possibile dividere un angolo <u>qualsiasi</u> in tre parti uguali; è il problema insoluto, che fin dall'antichità veniva chiamato: "il problema della TRISEZIONE dell'ANGOLO". Questo problema è connesso con la risoluzione delle equazioni di terzo grado nel caso irriducibile, con l'estrazione delle radici cubiche, con la costruzione dell'ettagono regolare, con la duplicazione del cubo (<u>detto anche problema di Delo</u>), Per questi problemi possiamo avvalerci di curve particolari predisegnate: per esempio "La Lumaca di Pascal"; "La trisettrice di Mac Laurin"; "La cissoide",(studiata da Diocle II sec A.C.)"; "La concoide di Nicomede"; ecc; oppure usare le tavole trigonometriche, cioè i valori precalcolati delle funzioni trigonometriche.

Dividere il cerchio in un numero qualsiasi di parti uguali

Abbiamo visto come dividere il cerchio in 2,3,4,5,6, parti uguali e come dividere ciascun angolo in 2^n parti uguali; si possono così ottenere:

2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; ... 2^n parti uguali
3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ; 96 ; ... $3 \cdot 2^n$ " "
5 ; 10 ; 20 ; 40 ; 80 ; 160 ; ... $5 \cdot 2^n$ " "

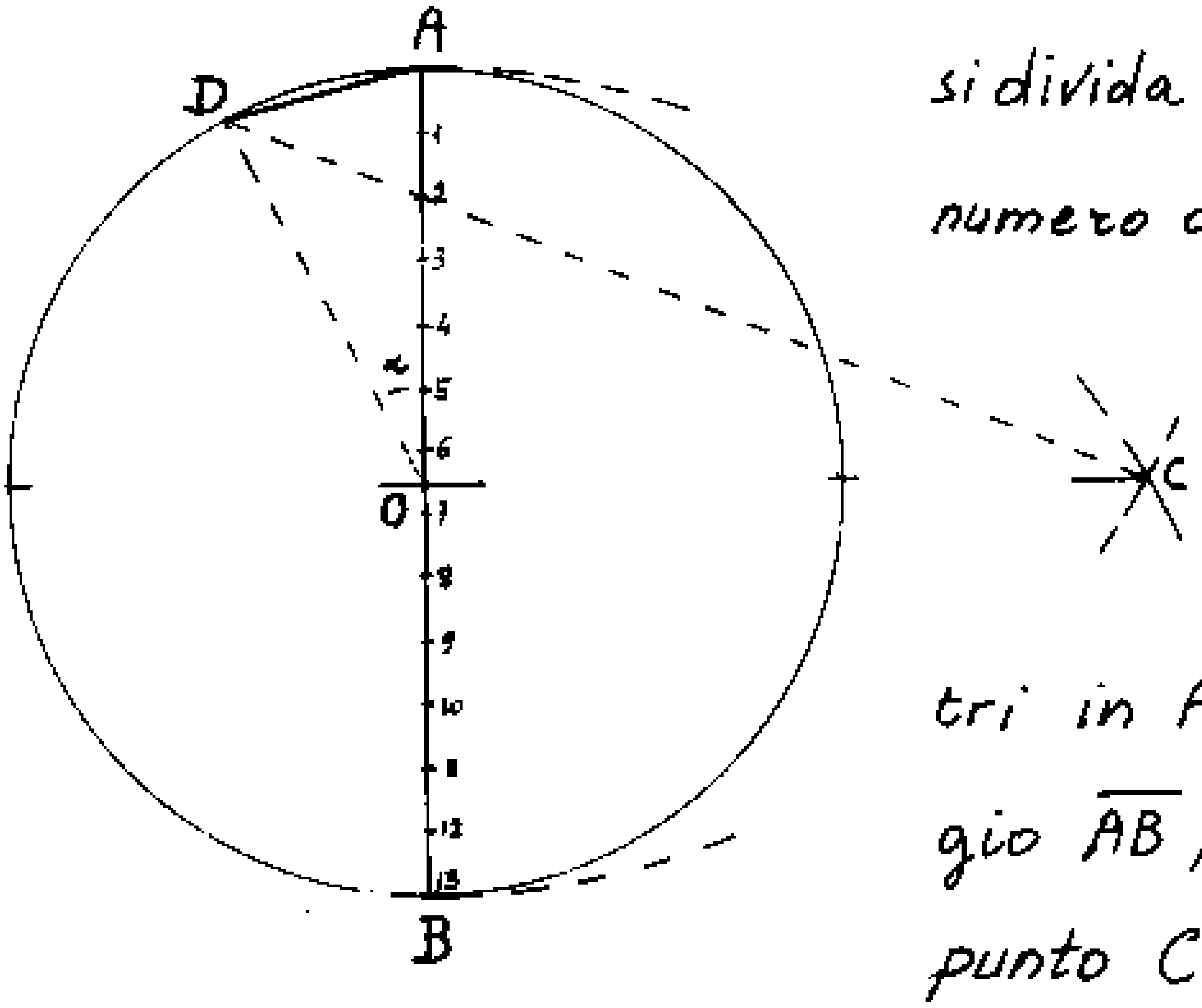
risutano mancanti : 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; ... e le loro suddivisioni in 2^n.

Per dividere in 15 parti possiamo avvalerci della differenza : $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$; $\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$; oppure della differenza : $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$; $\frac{1}{2} \frac{2}{15} = \frac{1}{15}$;

Vedremo a suo tempo le costruzioni grafiche (approssimate) dell'ettagono, dell'ennagono, ecc ; e la loro discussione.

Alcuni manuali di disegno riportano la seguente costruzione grafica per "<u>dividere la circonferenza in un numero qualsiasi di parti uguali</u>". (<u>Senza avvertire che la costruzione è soltanto approssimata</u>)

Riportiamo la semplice modalità esecutiva di questa costruzione, facendo seguire una tabella degli errori che si commettono in funzione del numero di divisioni ossia del numero dei lati del poligono inscritto nella circonferenza.



"Si tracci il diametro $\overline{AB}$ e si divida nel desiderato "n" numero di parti uguali; (nel nostro caso in figura "n" = 13) quindi con centri in A ed in B e raggio $\overline{AB}$, si determini il punto C, Si unisce C con l'estremo 2 della seconda gradazione (sempre 2 qualunque sia "n"), e si prolunga fino ad incontrare in D la circonferenza: l'arco $\widehat{AD}$ è l'ennesima parte della circonferenza, (circa); la corda $\overline{AD}$ è circa il lato del poligono inscritto di "n" lati; l'angolo $\widehat{AOD} = \alpha$ è circa l'ennesima parte dell'angolo giro".

Notiamo che la costruzione è esatta solo se disegnamo l'esagono, cioè per "n" = 6; l'errore massimo si ha per "n" = 22, ove l'angolo $\frac{360°}{22} = 16°,363636 = 16° 31' 49''$, graficamente $\alpha = 17°,00101 = 17° 00' 03'',6$ porta un errore di $0°,63737 = 38' 14'',5$

L'errore sull'angolo giro cioè: $(n\alpha° - 360°)$ è crescente col numero dei lati, per "n" = 22 si ha: $(17°,00101) \cdot 22 - 360° = 14°,02222$.

Si noti che salvo per $n = 5$ l'angolo costruito graficamente è sempre maggiore di quello vero.

La tabella che riportiamo, può essere di ausilio per chi voglia utilizzare tale costruzione grafica.

TAVOLA DELLE DIFFERENZE fra l'angolo disegnato α' e l'angolo vero

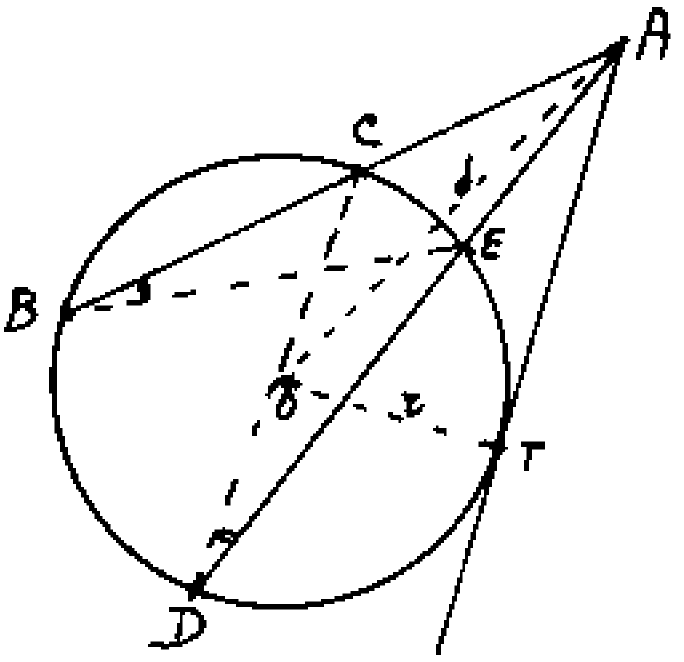
n	360/n	α'	α'-360/n	nα'-360
5.00000	72.00000	71.95345	-0.04655	-0.23273
6.00000	60.00000	60.00000	0.00000	0.00000
7.00000	51.42857	51.51822	0.08965	0.62757
8.00000	45.00000	45.18737	0.18737	1.49896
9.00000	40.00000	40.27782	0.27782	2.50039
10.00000	36.00000	36.35581	0.35580	3.55804
11.00000	32.72727	33.14794	0.42067	4.62732
12.00000	30.00000	30.47344	0.47343	5.68121
13.00000	27.69231	28.20800	0.51570	6.70404
14.00000	25.71429	26.26343	0.54914	7.68797
15.00000	24.00000	24.57522	0.57522	8.62824
16.00000	22.50000	23.09525	0.59525	9.52405
17.00000	21.17647	21.78679	0.61032	10.37539
18.00000	20.00000	20.62132	0.62132	11.18374
19.00000	18.94737	19.57633	0.62896	11.95020
20.00000	18.00000	18.63386	0.63386	12.67723
21.00000	17.14286	17.77940	0.63654	13.36737
22.00000	16.36364	17.00101	0.63737	14.02221
23.00000	15.65217	16.28888	0.63670	14.64418
24.00000	15.00000	15.63481	0.63481	15.23547
25.00000	14.40000	15.03192	0.63192	15.79809
26.00000	13.84615	14.47434	0.62819	16.33297
27.00000	13.33333	13.95716	0.62383	16.84343
28.00000	12.85714	13.47607	0.61892	17.32982
29.00000	12.41379	13.02738	0.61359	17.79412
30.00000	12.00000	12.60791	0.60791	18.23742
31.00000	11.61290	12.21488	0.60198	18.66133
32.00000	11.25000	11.84585	0.59585	19.06720
33.00000	10.90909	11.49868	0.58959	19.45635
34.00000	10.58824	11.17141	0.58318	19.82804
35.00000	10.28571	10.86245	0.57673	20.18571
36.00000	10.00000	10.57024	0.57024	20.52850

Alcuni teoremi dedotti dalla proporzionalitá

Il campo dei numeri razionali è il campo delle proporzioni lineari, ove si uguagliano due frazioni.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e se ne deduce: $ad = bc$.

Per esempio: (Teorema delle secanti)



Se da un punto A esterno ad una circonferenza, di centro O e raggio r, si tracciano due secanti, i segmenti definiti dalla circonferenza e misurati a partire da A sono rispettivamente i medi e gli estremi di una proporzione: $\boxed{\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AE} : \overline{AC}}$

Infatti i triangoli: BEA e DCA sono simili avendo $\hat{A}$ in comune; $\hat{B} = \hat{D}$ alla circonferenza sullo stesso arco $\overset{\frown}{CE}$; ne consegue la proporzione.

(Teorema della secante e della tangente)

Dalla precedente proporzione si ha $(\overline{AB})(\overline{AC}) = (\overline{AD})(\overline{AE}) =$ $=$ costante $= \overline{AT}^2$ che porta: $\boxed{\overline{AB} : \overline{AT} = \overline{AT} : \overline{AC}}$

Se da un punto A esterno ad una circonferenza si traccia una secante ed una tangente e si misurano i segmenti a partire da A, si ha che il segmento tangente è medio proporzionale fra i segmenti sulla secante.

Nel caso particolare che la secante passi per il centro o distante d da A cioè: $d = \overline{OA}$ avremo:

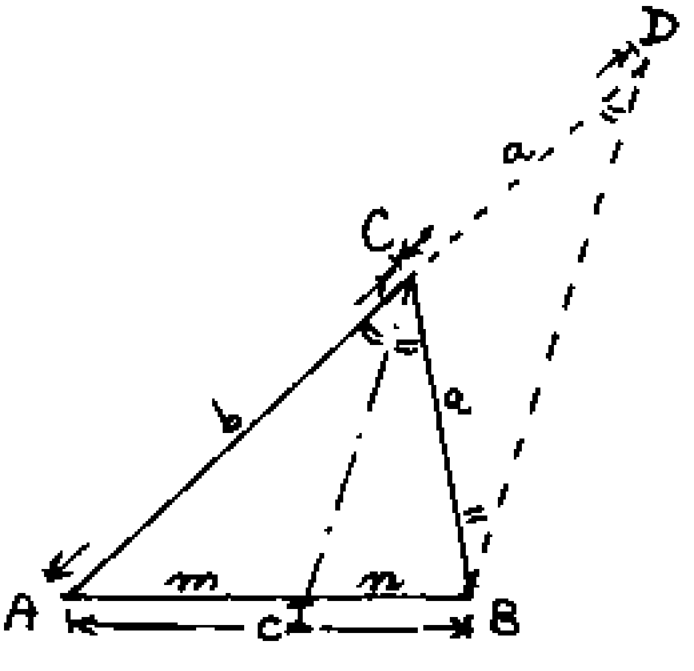
$$(d+r) : \overline{AT} = \overline{AT} : (d-r)$$

$$\boxed{d^2 - r^2 = \overline{AT}^2}$$

che verifica il teorema di Pitagora sul triangolo rettangolo OTA.

(Teorema della bisettrice)

In un triangolo la bisettrice divide il lato opposto in parti proporzionali ai lati adiacenti.



Dato il triangolo ABC di lati: $\overline{AB} = c$; $\overline{AC} = b$; $\overline{BC} = a$, tracciata la bisettrice $\overline{CI}$ essa divide il lato $\overline{AB}$ in due parti $\overline{AI} = m$; $\overline{IB} = n$

Sul prolungamento di $\overline{AC}$ riportiamo il segmento $a = \overline{CB} = \overline{CD}$ ed uniamo $\overline{BD}$; il triangolo BCD è isoscele e gli angoli: $C\hat{B}D = C\hat{D}B = I\hat{C}B = I\hat{C}A$ cioè $\overline{DB}$ è parallelo a $\overline{CI}$. Cioè possiamo definire D come punto comune alla retta su $\overline{AC}$ e la parallela per B alla bisettrice, e dimostrare che $I\hat{C}B = C\hat{B}D$ perché alterni interni; $A\hat{C}I = A\hat{D}B$ perché corrispondenti, e quindi essendo $A\hat{C}I = I\hat{C}B$ anche $C\hat{B}D = C\hat{D}B$ ed $\overline{CD} = \overline{CB} = a$

Cioè i triangoli AIC ed ABD sono simili:

$$m : b = m+n : b+a = n : a$$

cioè: $\boxed{\overline{AI} : \overline{AC} = \overline{IB} : \overline{BC}}$

verifichiamo la doppia proporzione:

$$\cancel{bm} + bn = \cancel{bm} + am$$

La proporzione armonica.

Dicesi proporzione armonica: $\boxed{(a-b) : (b-c) = (a) : (c)}$
il numero "b" $= {}^{2ac}/_{a+c}$ è detto medio armonico fra "a" e "c".

Infatti la media armonica è l'inverso della media aritmetica degli inversi: se gli elementi sono: $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$; la media aritmetica è: $(a_1+a_2+\dots a_n)/n$; per cui la media armonica è: $\dfrac{n}{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_n}\right)}$

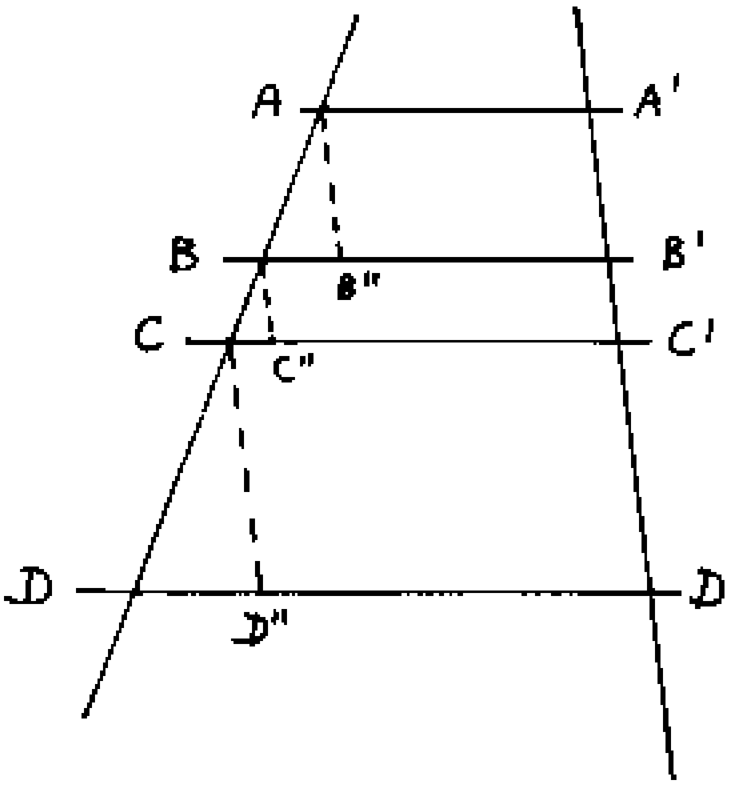
nel nostro caso $n=2$ quindi:

$$b = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}} = \frac{2ac}{a+c}$$

$$\boxed{\frac{1}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)}$$

Teorema di Talete (1)

"Un fascio di rette parallele determina su due trasversali due serie di segmenti direttamente proporzionali".



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \text{cost.}$$

se da A, B, C, tracciamo parallele ad $\overline{A'B'} = \overline{AB''}$; $\overline{B'C'} = \overline{BC''}$; $\overline{C'D'} = \overline{CD''}$ avremo che i triangoli ABB'', BCC'', CDD''; sono simili da cui $\overline{AB} : AB'' = \overline{BC} : \overline{BC''} = \overline{CD} : \overline{CD''}$ e sostituendo le uguaglianze: $\overline{AB''} = A'B'$; $\overline{BC''} = \overline{B'C'}$; $\overline{CD''} = \overline{C'D'}$ torna la proporzione dimostrata.

---

1) Talete di Mileto (639 - 548 A.C.) o (624 - 546 A.C) o (VII - VI sec A.C) Uno dei sette savi, (detto il più saggio dei sette sapienti). Non si hanno scritti di Talete, ciò che sappiamo è arrivato da Aristotele, Erodoto, Diogene Laerzio, Proclo, Plutarco, Plinio il Vecchio. Gli si attribuisce il detto: "Conosci te stesso" stampato sulla facciata del tempio di Delfo. Fondo la scuola ionica, predisse (o commentò) un eclisse solare (probabilmente quella del 28 Maggio 585 A.C.)

La linearizzazione

Ci proponiamo di vedere meglio il significato di una frazione in cui numeratore e denominatore siano rappresentati da due grandezze variabili: x, y; ma il loro rapporto sia costante.

$$\boxed{\frac{y}{x} = m} = \text{costante}$$

moltiplicando ambo i termini per x possiamo scrivere:

$$\boxed{y = mx}$$ (ove m = coefficiente di proporzionalità fra x ed y)

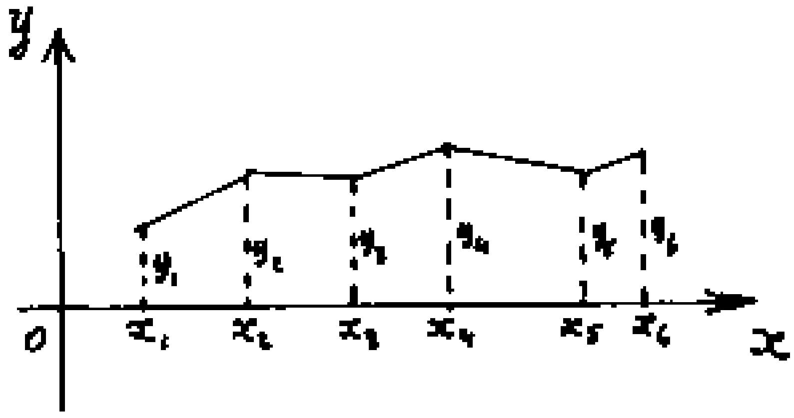
Questa correlazione è quella che lega le dimensioni fisiche nella fisica classica, cioè tutte le formule fisiche possono ridursi a quella espressione: per esempio:

(Spazio) = (Velocità)(tempo) ; (velocità) = (accelerazione)(tempo) ;
(Forza) = (massa)·(accelerazione) ; (impulso) = (forza)(tempo) =
= (quantità di moto) = (massa)(velocità) ; (lavoro) = (forza)(spostamento)
(Energia) = (Potenza)(tempo) ;
(Energia termica) = (costante)(Energia meccanica) {1° principio della termodinamica}
(Tensione elastica) = (Modulo di Elasticità)(dilatazione) ; {legge di Hooke}
(Tensione elettrica) = (Resistenza)(intensità di corrente) ; {legge di Ohm}
(Quantità di carica elettrica) = (capacità del condensatore)(tensione elettrica)
(Potenza elettrica) = (tensione elettrica)(intensità di corrente)

E potremmo continuare, ma noi vogliamo vedere meglio cos'è questa "linearizzazione"

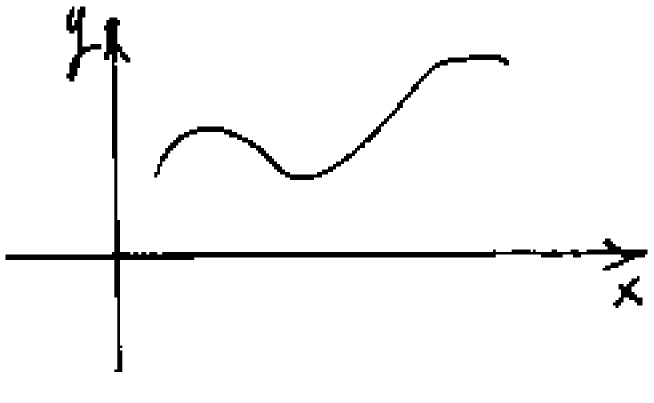
I Diagrammi e il concetto di funzione

Per rappresentare i più svariati fenomeni si usano i "diagrammi" per esempio del tipo di quello in figura (che sono detti: lineari).



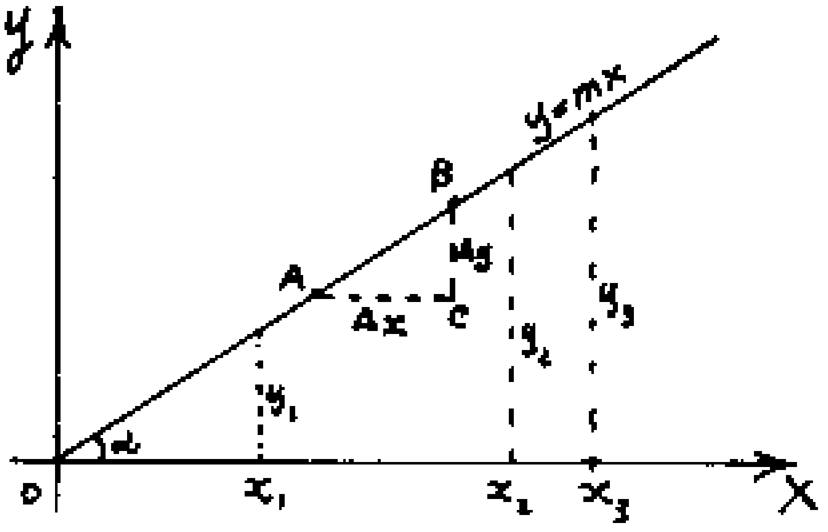
Rilevato che, quando una grandezza x (che può essere il tempo o qualunque altra grandezza) assume un certo valore x_i, allora la grandezza y (che in generale è la grandezza o dimensione che ci interessa del fenomeno) assume un certo determinato valore y_i che riportiamo nel diagramma.

Poichè le rilevazioni della x e conseguentemente della y sono state eseguite in modo discontinuo (per esempio la misura della temperatura ad un malato) il diagramma è una spezzata. Ma se l'apparecchio rilevatore agisse con continuità (come i termografi, i barografi, gli igrografi, ecc) il diagramma avrebbe un andamento continuo, senza cuspidi, (salvo casi particolari) Comunque in un certo tratto il fenomeno in esame presenta una linea continua con curvatura più o meno accentuata, volta verso l'alto o verso il basso, e con andamento



che puó essere crescente, decrescente o costante, a seconda del punto esaminato sul diagramma. Si suole scrivere $y = f(x)$, e si legge: "ipsilon funzione della x". Cioé la lunghezza del segmento in direzione y (detta ordinata), dipende dalla lunghezza del segmento in direzione x (detta ascissa). Le grandezze o valori dell'ascissa e dell'ordinata di ogni punto del piano, sono dette "coordinate" di quel punto" e si indicano nell'ordine: prima la x poi la y. $P \equiv (x, y)$. Le coordinate di una linea che riflette un certo fenomeno, sono correlate dalla: $y = f(x)$ quando in "forma esplicita" si voglia evidenziare che la y è una variabile dipendente dai valori attribuiti alla variabile indipendente x. In generale la $f(x)$ è una formula matematica ove figura la (x), formula non necessariamente diversa da fenomeno a fenomeno, ove i simboli assumeranno le dimensioni delle grandezze del fenomeno in esame. (per "dimensioni" intendiamo: lunghezze, aree, volumi, masse, tempo, velocitá, accelerazioni, temperature, tensione, lavoro, ecc).

Se per l'origine degli assi, tracciamo una retta, per la similitudine dei triangoli possiamo scrivere:



$y_1 : x_1 = y_2 : x_2 = y_3 : x_3 = \Delta y : \Delta x =$ = costante: Δ_x e Δ_y (leggi: delta x e delta y), rappresentano l'incremento in x ed in y, per passare dal punto A al punto B). La proporzione implica che qualunque sia il punto considerato sulla retta, vale la:

$$\boxed{\frac{y}{x} = m} = \text{costante}$$

che scritta nella forma: $\boxed{y = m \cdot x}$ è l'equazione di una retta passante per l'origine degli assi, scritta in forma: "esplicita". (è la più semplice delle $y = f(x)$.)

Vogliamo vedere bene cos'è quell' m = costante = (numero), che vale anche per: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$.

Infatti:

$$\boxed{y_B : y_A = x_B : x_A}$$

e per lo scomponendo:

$$\boxed{(y_B - y_A) : y_A = (x_B - x_A) : x_A}$$

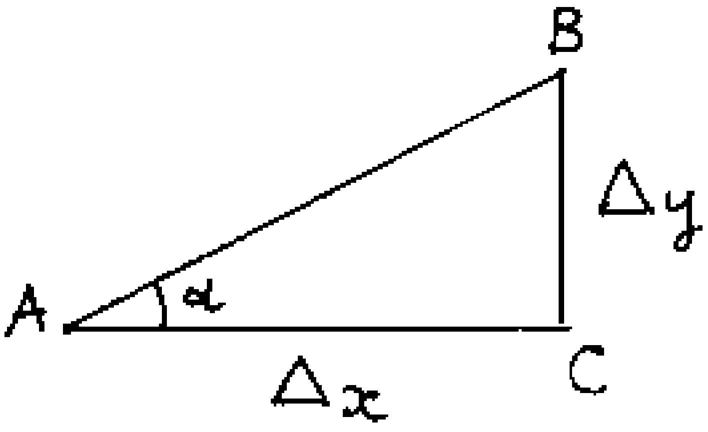
ma: $(y_B - y_A) = \Delta y$; $(x_B - x_A) = \Delta x$; cioè: $\Delta y : y_A = \Delta x : x_A$

invertendo i medi:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A}{x_A} = \frac{y}{x} = m}$$

(già noto per Talete)

Notiamo che il rapporto: $\boxed{\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = m}$

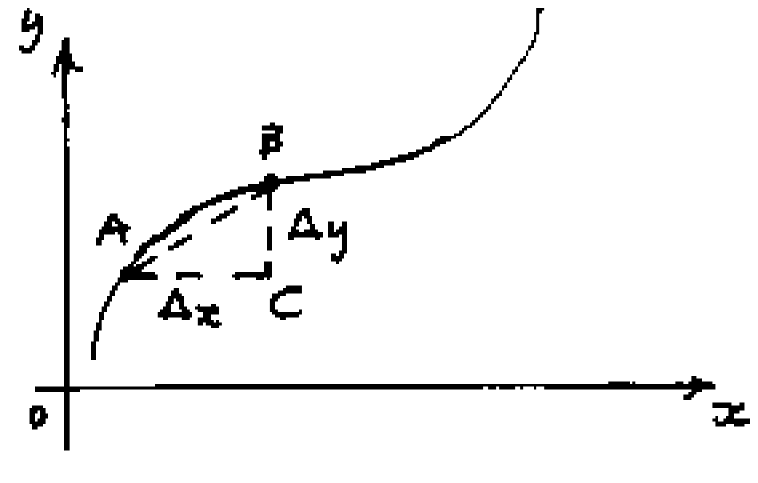


rappresenta la: <u>"Pendenza"</u> del segmento $\overline{AB}$, e quindi <u>la pendenza</u> di tutta la retta: $\boxed{y = mx}$

Si pensi ad una strada dove Δy rappresenta la differenza di quota fra i punti distanti orizzontalmente di Δx; (se $\Delta x = 100$ metri e $\Delta y = 3$ metri quella strada ha una pendenza del 3%).

La pendenza cresce al crescere di Δy (direttamente proporzionale a Δy) e decresce al crescere di Δx (inversamente proporzionale a Δx).

Se consideriamo i soliti due punti A e B su un diagramma curvilineo, rappresentare



il fenomeno nel tratto $\overline{AB}$ con la formula: $\boxed{y = m \cdot x}$ significherebbe <u>"linearizzare l'espressione: $y = f(x)$"</u>

<u>cioè significherebbe sostituire all'arco $\overset{\frown}{AB}$ il segmento $\overline{AB}$</u>.

È chiaro che si commetterebbe un errore, che è tanto più piccolo quanto più la linea curva si approssima ad una retta.

Ma è anche tanto più piccolo l'errore, quanto più piccolo è il triangolo ABC di cateti Δy e Δx. Quando questo triangolo diventa infinitamente piccolo, l'errore è trascurabile; i cateti "Δy" e "Δx" sono divenuti infinitesimi e si indicano con: "dy" e "dx" (si leggono rispettivamente "<u>differenziale y</u>" e "<u>differenziale x</u>") il loro rapporto è <u>ancora la pendenza</u> : $\boxed{\frac{dy}{dx} = m}$
e al caso limite di triangolo infinitesimo, il rapporto: $\frac{dy}{dx}$ si chiama <u>derivata</u> della $y = f(x)$ e si indica con y' oppure con $f'_{(x)}$ ed il suo valore numerico "m" è la <u>pendenza</u> della $y = f(x)$ nel punto considerato.

Nasce così quello che sarà chiamato: "<u>Calcolo infinitesimale</u>", che in definitiva è una "<u>linearizzazione</u>" di un fenomeno complesso, al fine di <u>rimanere</u> (sia pure al limite infinitesimo) <u>nel campo dei numeri razionali</u>.

un Numero reale irrazionale o più generalmente <u>non razionale</u> è espresso da infinite cifre non esprimibile con frazioni di numeri finiti.

Il simbolismo

Sia "a" un simbolo rappresentativo di una certa quantità esprimibile anche numericamente. Il simbolo "a" può essere affetto anche da altri simboli che sono scritti in carattere più piccolo, essi, a seconda della posizione che hanno rispetto ad "a", sono denominati:

indici (in basso a destro) servono a distinguere quantità di una stessa specie. Per esempio:

$(a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_H \ldots a_i\, a_j\, a_K \ldots\ldots a_n)$

ove: a_i, a_j, a_H, a_K indicano termini generici di una successione, mentre a_n in genere indica l'ultimo termine.

("a_{ij}") indica il termine generico in una matrice ove "i" è il numero della riga, e "j" il numero della colonna.

(per matrice si intende un quadro di elementi incasellati per righe e colonne)

Però l'incasellatura oltrechè piana, può essere spaziale: ("a_{ijK}") ove K indica l'altezza del quadro. E può aversi ("$a_{ij\ldots n}$") in campi "n" dimensionali. —

Se il simbolo indica funzione e l'indice è in parentesi ($f(x)$) si legge: "funzione della x".

apici (in alto a destro) questi si distinguono in più specie:

1) apici propriamente detti quando sono degli apostrofi, che à loro volta si distinguono in due specie:

- Se apposti a lettere maiscole: A', A'', A'''... indicano proiezioni del punto A rispettivamente in prima, seconda, terza proiezione; se apporti a lettere minuscole r', r'', r''' si hanno le proiezioni di rette.
- Se apposti a lettere indicanti funzioni di variabili, per esempio: $y=f(x)$ (leggi y funzione della x): y', y'', y''' indicano rispettivamente la derivata prima, seconda, terza, rispetto alla variabile indipendente x. Cioè l'ordine di una derivata.

2) Se l'apice è un asterisco: si usano per indicare grandezze fittizie, per es. $q^*=M$ in scienza delle costruzioni significa che si assume come fosse un carico q (carico fittizio) in una sezione, il valore che in quella sezione ha il momento flettente.

ESPONENTE

Se l'apice è un numero o una lettera in generale si considera tale numero o lettera un esponente; cioè il numero di volte che la quantità affetta da quell'esponente, deve moltiplicare se stessa: per es. $a^3 = (a \cdot a \cdot a)$

$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$; $a^n = \left(\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdots\cdots \frac{a}{n}\right)$

La quantità affetta da esponente si chiama base ed il simbolo completo "a^n" si chiama potenza e si legge: (potenza ennesima di "a") od anche: (la base "a" elevata ad "n") o semplicemente: ("a" elevata ad "n"). Potenza è anche il valore di a^n oltreché il simbolo: per esempio: (la potenza di 5^4 è 625)

Parentesi

Si distinguono in tre specie:

- parentesi tonde: ( )
- parentesi quadre: [ ]
- parentesi a graffa { }

Le parentesi hanno molteplici usi in aritmetica, in algebra e nel simbolismo.

Possono indicare la sequenza delle

operazioni da effettuare. La regola generale è: "prima le tonde, poi le quadre, poi le graffe". Significa: prima effettuare, nell'ordine aritmetico, le operazioni entro parentesi tonde, quindi, trovati i valori, si tolgono le parentesi tonde che racchiudevano tali valori, e che ora rimangono entro le più esterne parentesi quadre che a loro volta sono interne alle parentesi a graffa. (L'ordine aritmetico è: prima le potenze, poi i prodotti e quozienti, poi somme o sottrazioni)

per esempio:

$$2\left\{\left[(5-3)\cdot 4-(5-3\times 4)\right]-1\right\}=$$

$$=2\left\{\left[2\times 4+7\right]-1\right\}=$$

$$=2\left\{15-1\right\}=$$

$$=2\times 14=28$$

Come in algebra, parentesi affiancate indicano prodotto; per es: $(5)(6)=30=(5)6$. ecc.

Le parentesi possono indicare nei grafici i punti o rette spostate nella posizione di arrivo; per es A da una certa posizione è finito per movimento, (non per proiezione) in (A).

Se i punti di arrivo sono in sequenza si ha: A che va prima in $(A)_1$ poi in $(A)_2$ poi .. $(A)_n$. Ciò può tradursi in una funzione: $f(x)$.

- Le parentesi graffa possono indicare una successione di termini $\{a_n\}$ significa $a_1, a_2, \ldots a_n$; Ma possono anche indicare la legge che regola tale successione: $\{2n-1\}$ è la legge dei numeri dispari sostituendo a n ($n=1$; $n=2$;... $n=n$)

Le barrette verticali che delimitano un simbolo o piú simboli indicano valore assoluto o modulo $|a|$ (leggi: valore assoluto di "a"). Valore assoluto vuol dire che qualunque segno ± abbia la quantitá contenuta entro le barrette verticali essa deve essere considerata positiva. Ciò implica che per valori solo positivi le barrette non sono necessarie; (per es. a^2 è inutile dire: $|a^2|$) Se trattasi di valori solo negativi possiamo moltiplicare per (-1) il valore entro le barrette e sostituirle con parentesi. Per esempio: per x maggiore di 3 l'espressione $|3-x|$ puó sostituirsi $(x-3)$.

Le barrette verticali indicano spesso matrici e determinanti (il determinante è una matrice quadrata) per es. $|A|$

Tal volta per distinguere una matrice non quadrata da un determinante si usa la doppia barra verticale: $\|A\|$ ove: $\|A\|$; $\|a_{ij}\|$ vuol esprimere:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

che è una matrice $(m \times n)$

$\|A\|$ $(m \times n)$

con $(i = 1, 2, 3, \ldots m)$

con $(j = 1, 2, 3, \ldots n)$

<u>Le virgolette</u> Si usano in uno scritto, per evidenziare che la lettera, o l'espressione letterale, è una quantità o simbolo algebrico; e non una lettera dell'alfabeto linguistico. per es. "a". In alcuni elaboratori elettronici avviene esattamente l'opposto; infatti se comandiamo al calcolatore di stampare "a" cioè: (Print "a") esso stampa la lettera a. Se invece digitiamo: (Print a) esso stampa il valore numerico di "a"..

Controindici (in basso a sinistra) servono ad indicare *provenienza*, origine, e si utilizzano in calcoli speciali; per es. (${}_{x}a$; ${}_{1}a$; ${}_{n}a$) e possono indicare quando un elemento si è sostituito in una certa tabulazione indicizzata. Se vogliamo la successione delle sostituzioni in a_{ijk} avremo: ${}_{1}a_{ijk}$, ${}_{2}a_{ijk}$, ...${}_{i}a_{ijk}$;...${}_{n}a_{ijk}$.

Controapici (in alto a sinistra) Servono per indicazioni speciali, per esempio di ubicazione in tabulati pluridimensionali in cui si voglia evidenziare la *caratteristica qualitativa* di appartenenza, campi, od altro; esempio: (${}^{7}a$, ${}^{2}a$, ${}^{n}_{m}a$) ed anche: (${}^{\varphi}a_{ijk}$) ; (${}^{\psi}_{n}a_{ijk}$).

sottostanti (posti al di sotto della lettera) il più banale è *la sottolineatura* che serve ad evidenziare quella certa quantità (in alcuni testi la sottolineatura indica che la grandezza è un vettore) [si dicono Vettori, o grandezze vettoriali, quelle entità, che, oltre alla qualità (dimensione) e quantità (intensità), sono caratterizzate dalla direzione e verso, secondo cui agiscono (per es. la pressione del vento, la velocità, i campi elettrici, magnetici, gravitazionali ecc)] per es. $\underline{a}$. Se sotto al simbolo vi sono due lettere separate da un archetto per es. $\underset{\overset{\frown}{AB}}{\mathcal{M}_s}$ indica il momento calcolato per forze a sinistra valido nel campo da A a B. Sarebbe stato meglio scrivere: $\underset{\overset{\frown}{AB}}{\overset{s}{\mathcal{M}}}$ od anche: $\underset{\overset{\frown}{AB}}{{}_s\mathcal{M}}$, a seconda che si voglia evidenziare il tipo (qualità) di momento (calcolato per forze a sinistra) oppure si voglia evidenziare la provenienza delle azioni che lo generano.

Separare un simbolo od una espressione con una barra e porre sottostanti altri simboli è il normale simbolo di frazione.

In alcuni calcoli di elettrotecnica conviene indicare con $\underset{ijl\ldots}{\Sigma}$ la sommatoria delle impedenze $Z_i + Z_j + Z_l \ldots$ (cfr. Tesi di Laurea di C. Brogi - Bologna 1960).

Soprastanti (posti al di sopra della lettera) si ha la sopralineatura che serve per evidenziare particolari caratteristiche. In scienza delle costruzioni si sopralineano i momenti d'incastro perfetto, in alcuni testi si sopralineano le grandezze vettoriali, in analisi talvolta si sopralinea una variabile (per es $\overline{X}$) per evidenziare un particolare valore della x, oppure che in quella operazione la x è da riguardare come costante parametrica. Per indicare grandezze vettoriali è preferibile sopralineare con un freccia: $\vec{V}$ (leggi "V vettore", o "il vettore V").

Un accento circonflesso indica angolo: $\hat{A}$ (l'angolo in A), mentre un archetto indica arco: $\overset{\frown}{a}$ (l'arco a), la sopralineatura di due lettere indica segmento: $\overline{AB}$ (segmento da A a B) $\overline{BA}$ (segmento da B ad A) e quindi anche: $\overset{\frown}{AB}$ (arco da A a B).

Un punto o due punti o più punti sovrapposti ad una let tera, indicano il grado della derivata rispetto al tempo per es. la funzione $\dot{u}$ è la derivata prima di u rispetto a t (tempo); $\ddot{u}$ è la derivata seconda di u rispetto a t. Poiché per derivata si può intendere il rapporto fra la variazione infinitesima di u e la variazione infinitesima di t, cioè: $\frac{du}{dt}$, se u è uno spazio, il tratto infinitesimo di spazio diviso il tempo infinitesimo necessario a percorrerlo è la velocità istantanea = $\dot{u}$ mentre l'accelerazione istantanea sarà = $\ddot{u}$.

Un'altro simbolo che si sovrappone alle lettere è il segno ~; se A è una matrice $\|A\|$; $\tilde{A}$ è la matrice trasposta, cioè se il simbolo a_{ij} è il simbolo generico di $\|A\|$ avremo che a_{ji} è il simbolo generico di $\|\tilde{A}\|$, Cioè si sono scambiate le righe con le colonne.

È evidente che il simbolismo, non essendo unificato può essere interpretato in modi diversi da quello qui esposto, quindi ciascuno potrá, nei propri studi, usare quel simbolismo che risulta più evidente al suo modo di pensare. (I tedeschi per i vettori usano spesso lettere in grassetto o addirittura in alfabeto gotico). Se poi si vuole esporre ad altri le proprie ricerche, si deve, per prima cosa, chiarire il significato del simbolismo usato.

Vi sono altri simboli correlatori fra due grandezze, oltre i simboli delle operazioni aritmetiche: (+ ; − ; X ; oppure · ; : oppure /), ne riportiamo alcuni:

= (uguale), o (congruente)

≡ (simile), o (definito da), o (determinato da)

≠ (diverso) (nel senso non uguale) (ogni simbolo sbarrato assume il significato opposto)

≢ (non simile)

≣ (equivalente) ≣̸ (non equivalente)

// (parallelo)

⊥ (perpendicolare o normale)

$\int_a^b f(x)\,d(x)$ (integrale della f(x) esteso da a a b)

$\simeq$ (circa uguale)

$\sim$ (circa)

$\sum_{i=a}^{i=b} a_i$ (Somma dei termini a_i con i variabile da "a" a "b")

$>$ (maggiore di..) $\not>$ (non maggiore di)

$\geqslant$ (maggiore o uguale a..)

$\gg$ (molto maggiore di..)

$<$ (minore di..) $\not<$ (non minore di)

$\leqslant$ (minore o uguale a..)

$\ll$ (..molto minore di..)

$\supset$ (da cui, ... include ..., implica che, comprende, ne consegue)

$\not\supset$ (non include)

$\subset$ (... è incluso...) $\not\subset$ (non è incluso)

$\in$ (appartiene a) $\notin$ (non appartiene)

$\cup$ (unione di insiemi
.... unito a ......)

$\cap$ (intersezione di insiemi, cioè gli elementi comuni di due diversi insiemi)

$\forall$ (per ogni) $\not\forall$ (non ogni)

$\exists$ (esiste) $\nexists$ (non esiste)

LE CINQUE PROPRIETÀ DELLE POTENZE

Dicesi potenza di un numero (base) il prodotto ottenuto moltiplicando per se stesso il numero (base) quante volte indica l'esponente:

$$\boxed{a^n = \underset{1}{\overset{\frown}{a}} \cdot \underset{2}{\overset{\frown}{a}} \cdot \underset{3}{\overset{\frown}{a}} \cdots\cdots \underset{n}{\overset{\frown}{a}}}$$

ove: a = base ; n = esponente.

I^a) Proprietà:

espressione matematica:

$$\boxed{(a^m)(a^n) = (a^{m+n})}$$

espressione in lingua:

Il prodotto di due potenze aventi per base la <u>stessa</u> base e per esponente <u>anche diversi</u> esponenti, è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.

dimostrazione:

$$\left(\underset{1}{a} \cdot \underset{2}{a} \cdots\cdots \underset{m}{a}\right)\left(\underset{1}{a} \cdot \underset{2}{a} \cdots\cdots \underset{n}{a}\right) =$$

$$= \left(\underset{1}{a} \cdot \underset{2}{a} \cdots\cdots \underset{m}{a} \cdot \underset{m+1}{a} \cdot \underset{m+2}{a} \cdots\cdots \underset{m+n}{a}\right)$$

esempio numerico:

$$(2^3)(2^4) = 2^{3+4} = 2^7$$

$$(2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^7 = 128$$

$$(8) \cdot (16) = 128$$

$2 \times 2_2$

$4 \times 2_3$

$8 \times 2_4$

$16 \times 2_5$

$32 \times 2_6$

$64 \times 2_7$

128

IIª Proprietá

<u>espressione matematica</u>

$$\boxed{(a^m):(a^n) = (a^{m-n})}$$

<u>espressione in lingua</u>

Il quoziente di due potenze aventi per base la <u>stessa</u> base e per esponenti <u>anche diversi</u> esponenti, è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti

dimostrazione:

$$\frac{\cancel{a_1}\cdot\cancel{a_2}\cdot\cancel{a_3}\cdots\cancel{a_n}\cdot\overbrace{a_{n+1}\cdot a_{n+2}\cdots\cdots a_m}^{\text{restano}(m-n)}}{\cancel{a_1}\cdot\cancel{a_2}\cdot\cancel{a_3}\cdots\cancel{a_n}}$$

poiché dividendo ambo i termini di una frazione per uno stesso numero il valore della frazione non cambia.

esempio numerico:

$$\frac{2^7}{2^4} = 2^{7-4} = 2^3 = 8 = \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}} = 8$$

Implicazioni della IIª proprietá.

La frazione apparente: $\frac{a^m}{a^m} = 1$ per la IIª proprietá: $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = \boxed{a^0 = 1}$ ciò vuol dire che <u>qualunque numero ad esponente zero è pari all'unitá</u> (vale uno).

Da ciò si deduce: $\frac{1}{a^m} = \frac{a^0}{a^m} = a^{0-m} = \boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$

"<u>Ogni potenza ad esponente negativo è il reciproco della stessa potenza ad esponente positivo</u>" (e viceversa).

Gli esponenti negativi si usano spesso per lo sfrazionamento decimale delle unità.

$10^{-1} = 1/10 =$ deci = (un decimo)

$10^{-2} = 1/100 =$ centi = (un centesimo)

$10^{-3} = 1/1000 =$ milli = (un millesimo)

$10^{-6} = 1/1000000 =$ micro = (un milionesimo)

$10^{-9} = 1/1000000000 =$ nano = (un miliardesimo)

$10^{-12} = 1/1000000000000 =$ pico = (un trilionesimo)

III^a Proprietà:

espressione matematica	espressione in lingua
$\boxed{(a^m)\cdot(b^m) = (a\cdot b)^m}$	Il prodotto di due potenze di diversa base e di uguale esponente è una potenza che ha per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente.

---

dimostrazione:

$$\left(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\ldots a_m\right)\left(b_1\cdot b_2\ldots\ldots b_m\right) = \left((a_1 b_1)\cdot(a_2\cdot b_2)\ldots\ldots(a_m b_m)\right)$$

---

esempio numerico:

$$(2^3)(3^3) = (2\cdot 3)^3 = (6)^3 \quad ; \quad (8)(27) = 216 = (6^3)$$

IV^a Proprietà:

espressione matematica

$$\boxed{(a^m):(b^m) = (a/b)^m}$$

espressione in lingua

Il quoziente di due potenze di diversa base e di uguale esponente è una potenza che ha per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente

dimostrazione:

$$\frac{\underset{1}{a}\cdot\underset{2}{a}\cdots\cdots\underset{m}{a}}{\underset{1}{b}\cdot\underset{2}{b}\cdots\cdots\underset{m}{b}} = \left(\underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)}_{1}\underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)}_{2}\cdots\cdots\underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)}_{m}\right)$$

esempio numerico:

$$(4^3):(2^3) = (4/2)^3 = 2^3 = 8 = \frac{4\cdot4\cdot4}{2\cdot2\cdot2} = \frac{4}{2}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{4}{2}$$

V^a Proprietà:

espressione matematica

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m\cdot n}}$$

espressione in lingua

La potenza di una potenza è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.

dimostrazione:

$$\underbrace{\left(\underset{1}{a}\cdot\underset{2}{a}\cdots\underset{m}{a}\right)}_{1}\underbrace{\left(\underset{1}{a}\cdot\underset{2}{a}\cdots\underset{m}{a}\right)}_{2}\left(\cdots\cdots\cdots\cdots\right)\underbrace{\left(a_{3}\cdot\underset{2}{a}\cdots\underset{m}{a}\right)}_{n} =$$

$$= \left(\left(\underset{1}{a}\cdot\underset{2}{a}\cdots\underset{m}{a}\right)\left(\underset{m+1}{a}\cdot\underset{(m+2)}{a}\cdots\underset{2m}{a}\right)\left(\cdots\cdots\cdots\underset{(n-1)m}{a}\right)\left(a\cdot a\cdots\underset{m\cdot n}{a}\right)\right)$$

esempio numerico

$$\left(2^3\right)^2 = 2^6 = 8^2 = 64 = \left(\underset{1}{2}\cdot\underset{\underset{1}{\frown}}{\underset{2}{2}}\cdot\underset{3}{2}\right)\cdot\left(\underset{1}{2}\cdot\underset{\underset{2}{\frown}}{\underset{2}{2}}\cdot\underset{3}{2}\right)=\left(\underset{1}{2}\cdot\underset{2}{2}\cdot\underset{3}{2}\cdot\underset{4}{2}\cdot\underset{5}{2}\cdot\underset{6}{2}\right)$$

Implicazioni della V^a proprietà:

Se eleviamo ad $\left(\frac{1}{m}\right)$ la potenza a^m si ha:

$$\left(a^m\right)^{\frac{1}{m}} = a^{m\cdot\frac{1}{m}} = a.$$

Poiché per definizione di "radice" ennesima di un numero N è quel numero R che elevato ad n riproduce N cioè: $R^n = N$ elevando ambo i termini ad $\frac{1}{n}$

$$\left(R^n\right)^{\frac{1}{n}} = N^{\frac{1}{n}} = R^{\cancel{n}} = N^{\frac{1}{n}} \supset R = \sqrt[n]{N}.$$

Queste osservazioni portano alla considerazione di potenze ad esponente frazionario ove:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

OSSERVAZIONE

Si confronti la sintesi del linguaggio matematico: (espressioni matematiche) espresso dalle formule a sinistra; con la laboriosità della lingua parlata (espressioni in lingua) esposte a destra in corrispondenza delle rispettive formule. E' un invito ad esercitare la traduzione di formule matematiche in lingua parlata e viceversa. Renderà semplice tradurre in simboli un problema.

I LOGARITMI

Le cinque proprietà delle potenze sono d'importanza fondamentale; meritano di essere esaminate con maggiore attenzione. Iniziando dalla prima proprietà, si nota che il prodotto di due numeri, espressi in forma di potenza, si riduce ad una somma, (quando non esistevano calcolatori, è chiaro che era, ed è, preferibile fare a mano una somma piuttosto che una moltiplicazione; specie se con molte cifre). La seconda proprietà riduce ad una sottrazione l'operazione della divisione ....(mica male come risparmio). La 5ª proprietà riduce ad una moltiplicazione l'elevazione a potenza, ed ad una divisione l'estrazione di radici, con qualsiasi indice di radice, o qualsiasi esponente.

Queste osservazioni fecero nascere in Nepero (Napier-John, scozzese, 1550-1617) il concetto di logaritmo, (parola che deriva dal greco, ove, logos era chiamata la base di una potenza, ed aritmo il suo esponente). Noi supponiamo, (non possiamo in effetti sapere quali fossero i suoi pensieri), noi supponiamo che Napier abbia formulato per prima questa idea: "Poiché un numero qualsiasi può essere sempre espresso da una potenza, se teniamo fissa la base, varierà l'esponente, se teniamo fisso l'esponenta varierà la base. Ma le operazioni avvengono sull'esponenta; quindi se teniamo fissa la base, nel sistema di quella base, ad ogni esponente corrisponde un numero e viceversa. Cioè ogni esponente rappresenta un numero, il cui valore è appunto fornito dalla potenza che ha per base quella scelta, (nota e costante).

e per esponente quello capace di dare quel numero. Si faranno delle tavole ove, accanto a ciascun numero porremo l'esponente capace di rappresentarlo (in una certa base)

Definiamo quindi Logaritmo di un numero "l'esponente da dare ad una determinata base per ottenere quel numero."

Ma, quale base? La scelta non era facile, Nepero scelse un numero importantissimo in analisi matematica, (lo vedremo a suotempo) e cioè il numero e = 2,7182818284590452... che risulta espresso dal limite: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ per n tendente all'infinito. Facciamo una tabella per vedere cosa succede al crescere di n nell'espressione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	NOTE
1	2	
2	2,25	(cresce) di 1/10
3	2,37..	
4	2,44..	
5	2,49..	
6	2,52...	
7	2,55...	
8	2,57 ...	
9	2,58...	cresce di 1/100
10	2,59...	
20	2,65...	
50	2,69...	
100	2,70...	
1000	2,71692	l'incremento di crescita è sempre più piccolo, e non muta più le prime cifre
10 000	2,71815	
10^6	2,71828182	
...	......	
∞	"e"	

Nepero produsse le sue tavole logaritmiche e scrisse un trattato: "Mirifici logaritmorum canonis descriptio". I logaritmi neperiani (base "e") detti anche "logaritmi naturali" si indicano col simbolo: ln(...).

Il Briggs (Briggs Enrico - inglese, 1556-1630) pubblicò: "Arithm. logarithmica; Trigonom. britann." Scelse come base dei logaritmi il n=10. sono detti logaritmi di Briggs, sono stati di grande uso, specie nei calcoli trigonometrici prima dell'avvento dei calcolatori elettronici. Si simboleggiano con $\log(N)$. I logaritmi con base decimale o di Briggs: $\log(1) = 0$; $\log(10) = 1$; $\log(100) = 2$; ecc. mostrano che, i logaritmi in base 10, possono distinguersi in due parti: 1) le cifre prima della virgola sono dette: "caratteristica"; 2) le cifre dopo la virgola sono dette: "mantissa". Infatti se prendiamo $\log(2) = 0,30103$ (con 5 cifre decimali) e vogliamo $\log(20) = \log[(2)(10)] = \log(2) + \log(10) = (0,30103) + (1) = 1,30103$; analogamente $\log(2000) = \log(2) + \log(1000) = 3,30103$. Cioè la "mantissa" resta invariata, mentre la "caratteristica" è data dal numero di cifre prima della virgola meno una. In altre parole la "mantissa" è il logaritmo invariato di un insieme di cifre; la "caratteristica" indica la posizione della virgola in tali cifre. Notare che: $\log(0,2) = \bar{1},30103$; $\log(0,002) = \bar{3},30103$.

Questa proprietà vale solo per logaritmi in base 10, non vale per i logaritmi naturali in base "e", infatti: $\ln(2) = 0,693147$; $\ln(2000) = 7,600902$ $\ln(0,2) = -1,609438$; $\ln(5) = +1,609438$.

Se i logaritmi hanno base diversa da "e" oppure da "10", per esempio se hanno base "a" questa deve essere indicata e scriveremo: $\log_a(N)$ cioè se: $\boxed{\log_a(N) = x}$ allora: $\boxed{a^x = N}$

ricordando che:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)} \\ \boxed{\log(a/b) = \log(a) - \log(b)} \\ \boxed{\log(a^m) = m \log(a)} \end{array}\right\} \left(\begin{array}{l}\text{valide per} \\ \text{qualunque} \\ \text{base.}\end{array}\right)$$

ci proponiamo il problema: "Dato il logaritmo di un numero in una certa base "a", trovare il logaritmo dello stesso numero nella nuova base "b"."

Cambio di base logaritmica

Applichiamo i logaritmi in base "b" alla espressione: $\boxed{a^x = N}$ si ha: $\log_b(a^x) = \log_b(N) = x \log_b(a)$

ma per definizione sappiamo che $x = \log_a(N)$ per cui:

$$\boxed{\log_b(N) = \log_a(N) \cdot \log_b(a)}$$

(Il logaritmo di un numero N nella nuova base "b" è dato dal logaritmo dello stesso numero N nella vecchia base "a", moltiplicato per il logaritmo della vecchia base "a" nella nuova base "b")

In particolare se abbiamo da trasformare logaritmi naturali in logaritmi decimali avremo:

$$\boxed{\log(N) = \ln(N)\cdot\log(e)}$$

poichè $\log(e) = (0{,}434294482)$

$$\boxed{\log(N) = \ln(N)\cdot(0{,}434294482)}$$

(per es.)

$\underline{\log(2)} = \ln(2)(0{,}434294482) = (0{,}693147..)(0{,}434294482) = \underline{0{,}30103}$

Inversamente:

$$\boxed{\ln(N) = \log(N)\cdot\ln(10)}$$

cioè:

$$\boxed{\ln(N) = \log(N)\cdot(2{,}302585093)}$$

notiamo che:

$$\ln(10) = 2{,}302585093 = \frac{1}{0{,}434294482} = \frac{1}{\log(e)}$$

cioè in generale che:

$$\boxed{\log_{a}(b) = \frac{1}{\log_{b}(a)}}$$

Infatti l'equazione esponenziale:

$a^{x} = b$; $a = b^{\frac{1}{x}}$; cioè: $x = \log_{a}(b)$; $\frac{1}{x} = \log_{b}(a)$

Applicazione dei logaritmi al calcolo

Molti testi di analisi matematica usano la parola "log" in generale anche se trattasi di logaritmi naturali.

Ma se noi conosciamo il logaritmo di un numero e vogliamo risalire al numero, occorre conoscere la base. Se: $\log_a(N) = x$, avremo: $N = a^x$, ed il numero N è detto: "Antilogaritmo" del logaritmo "x" in base "a".

Se i logaritmi sono in base "e" (come avviene ordinariamente in algebra), l'antilogaritmo in base "e" si indica con "exp(x)".

Cioè: $\boxed{e^x = N = \exp(x) \quad ; \quad \ln(N) = x}$

Supponiamo di voler calcolare numericamente una espressione del tipo:

$$\boxed{\sqrt[n]{\left(\frac{a \cdot b}{c}\right)^m}}$$

logaritmicamente:

$$\log\left(\sqrt[n]{\left(\frac{a \cdot b}{c}\right)^m}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)\left(\log(a) + \log(b) - \log(c)\right)$$

Poichè dividere per un numero è moltiplicare per il suo inverso: $\frac{a}{c} = (a)\left(\frac{1}{c}\right)$; $\log\left(\frac{1}{c}\right) = \log(1) - \log(c)$ ma: $\log(1) = 0$ (in qualunque base), in base dieci $\log\left(\frac{1}{c}\right) = 0 - \log(c) = \mathrm{colog}(C)$ è detto "cologaritmo" di C, si indica: colog(c). per esempio: $\log\left(\frac{1}{2}\right) = \log(1) - \log(2) = (0,00000 - 0,30103) = \boxed{\mathrm{colog}(2) = \bar{1},69897}$ in tal modo la nostra espessione si riduce ad unica somma

$$\boxed{\log\left(\sqrt[n]{\left(\frac{a \cdot b}{c}\right)^m}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)\left(\log(a) + \log(b) + \mathrm{colog}(c)\right)}$$

Per praticità di calcolo, usando i logaritmi di Briggs, anziché scrivere la caratteristica negativa si usava il complemento a 10, cosicché: 9 significava caratteristica $\bar{1}$,..; 8,.. = $\bar{2}$,... ecc. . Ciò era possibile non essendo, specie in topografia, interessate misure al elevato esponente del 10, e quindi non ambiguo il significato.

$\log(\frac{1}{2}) = \log(0,5) = 9,69897$ perciò l'antilogaritmo in base 10 di 9,69897 era da interpretare: 0,5 da non confondere con: 50.000.000.000. (occorre sottrarre 10 alla caratteristica)

Abbiamo chiarito questi "metodi pratici" per chi nel tempo, consultando vecchie scartoffie di calcoli non rimanga dubbioso sul loro significato.

Facciamo un esempio numerico su una espressione:

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{(127)(742)}{220}\right)^5} \quad ; \log(x) = \frac{5}{3}\left(\log(127) + \log(742) + \text{colog}\,220\right)$$

dalle tavole logaritmiche:
(a 7 decimali)

$\log(127) = 2,1038037$

$\log(742) = 2,8704039$

$\log(220) = 2,3424227 \quad \text{colog}(220) = 7,6575773$

sommando: $= 12,6317849$
$-(10)$

si interpreta: $= 2,6317849$

$$\begin{array}{l} 2,6317849 \times 5 \\ \hline 13,1589245 \;\lfloor 3 \\ \qquad\qquad\quad \underline{} \\ \qquad\qquad\quad 4,3863082 = \log\left(\sqrt[3]{\left(\frac{(127)(742)}{(220)}\right)^5}\right) \end{array}$$

$$\text{antilog}\,(4,3863082) = \underline{24339,31} = \sqrt[3]{\left(\frac{(127)(742)}{(220)}\right)^5}$$

LE RADICI, I RADICALI, LE POTENZE ad ESPONENTE FRAZIONARIO

Il simbolo di radice: $\sqrt{\ }$ deriva dalla deformazione della lettera "r". Sia: $\sqrt[n]{a}$, si legge: "ennesima radice di a" ove "a" è il radicando ed "n" l'indice di radice. Il valore numerico della radice ennesima di un radicando "a" è un numero "b" tale che: $(b)^n = a$. cioè: $\boxed{b = \sqrt[n]{a}}$ ed elevando all'ennesima potenza ambo i membri si ha: $b^n = (\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a$. cioè per la 5ª proprietà delle potenze: $\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$ ed anche: $\boxed{a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}}$

Cioè una potenza ad esponente frazionario è un radicale che ha per indice di radice il denominatore della frazione "esponente" e per esponente il numeratore della stessa frazione.

Con ciò ogni radicale può scriversi come potenza ad esponente frazionario: $\sqrt[i]{R^e} = R^{e/i}$. Si hanno le seguenti operazioni sui radicali:

1) Portare sottosegno di radice: $\boxed{b \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n \cdot a}} = b \cdot a^{\frac{1}{n}} = (b^n \cdot a)^{\frac{1}{n}}$

2) Portare fuori radice: Se $a = b^n \cdot c \cdot d^n$ si ha $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n \cdot c d^n} = bd\sqrt[n]{c}$

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3 \cdot 8} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3} \ ; \ \sqrt[3]{1080} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5} = 6\sqrt[3]{5}.$$

3) Ridurre allo stesso indice di radice, (che equivale a ridurre allo stesso denominatore l'esponente frazionario)

$$(\sqrt[3]{4}) \cdot (\sqrt{2}) = (4^{\frac{1}{3}})(2^{\frac{1}{2}}) = (2^{\frac{2}{3}})(2^{\frac{1}{2}}) = (2^{\frac{4}{6}})(2^{\frac{3}{6}}) = 2^{7/6} = 2^{1+\frac{1}{6}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 2\sqrt[6]{2}$$

PRODOTTI NOTEVOLI

Scopo preciso dell'analisi matematica è quello di semplificare i calcoli. Cioè, le frazioni ridurle ai minimi termini, i radicali renderli il più semplice possibile, così le uguaglianze ed ogni altro calcolo. A questo scopo, in matematica sono detti "NOTEVOLI" quei prodotti che frequentemente consentono semplificazioni. I prodotti notevoli sono in genere binomi, essi sono:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = (a^2+b^2+2ab)$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = (a^2+b^2-2ab)$$

$$(a-b)(a+b) = (a^2-b^2)$$

$$(a^2+b^2-ab)(a+b) = (a^3+b^3)$$

$$(a^2+b^2+ab)(a-b) = (a^3-b^3)$$

DIVISIBILITÀ di BINOMI

Gli ultimi tre prodotti notevoli suggeriscono una regola generale sulla divisibilità dei binomi, cioè se sono scomponibili in fattori.

$(a^n+b^n); n$
- pari: non è divisibile mai
- dispari: è divisibile per $(a+b)$ (stesso segno)

$(a^n-b^n); n$
- pari è divisibile sia per $(a+b)$, sia per $(a-b)$ sempre
- dispari è divisibile per $(a-b)$ (stesso segno)

si può scrivere:

esponente n
- Pari
  - segno(+) = non divisibile mai
  - segno(-) = divisibile per entrambi $(a+b)$ e $(a-b)$
- dispari
  - segno(+) divisibile per $(a+b)$ } (stesso segno)
  - segno(-) " " $(a-b)$ } (stesso segno)

RAZIONALIZZAZIONE del DENOMINATORE

Ricordiamo: $(a-b)(a+b)=(a^2-b^2)$ per cui: $\frac{N}{(a+\sqrt{b})}\frac{(a-\sqrt{b})}{(a-\sqrt{b})}=\frac{N(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$

$\boxed{\frac{3-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}\cdot\frac{(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})}=\frac{6-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3}{4-3}=\boxed{(3+\sqrt{3})}$; $\boxed{\frac{2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}}\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}=\boxed{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$

Qualora al denominatore vi sia un trinomio con due o tre radici, occorre ripetere due volte il procedimento.

METODI PER CALCOLARE LE RADICI

Oggi il metodo più sbrigativo è di avvalerci di calcolatori elettronici. In mancanza di calcolatori, un metodo rapido è quello di usare i logaritmi: $\sqrt[n]{R}=X$ $\quad \log X=\frac{1}{n}\log R$ quindi dalle tavole ricavare l'antilogaritmo. $x=\sqrt[7]{5}$; $x=\exp\left(\frac{1}{7}\ln(5)\right)$ (ove exp è l'antilogaritmo di ln). $\underline{X=\exp\left(\frac{1}{7}(1{,}60944)\right)}=\underline{\exp(0{,}22992)\simeq 1{,}25850}$;

$\underline{1{,}25850=e^{0{,}22992}\simeq e^{\frac{1{,}60944}{7}}=\sqrt[7]{e^{1{,}60944}}=\sqrt[7]{5}}$.

Per le radici quadrate abbiamo visto un veloce metodo grafico; <u>il metodo aritmetico</u> anch'esso per radici quadrate,

```
 √47.27,49 | 68,75
  -36      |------
  ----     | 6
   112|7   | 6
 -1024     |----
 -----     | 128
   1034|9  |   8
  - 9569   |----
  ------   | 1367
     7800|0|    7
     ...   |-----
           | 13745
           |     5
           |  ...
```

consiste nel separare, a gruppi di due cifre, a partire dalla virgola, il radicando. Quindi per l'ultimo gruppo a sinistra (di una o due cifre) si cerca il quadrato più vicino inferiore. (Nel nostro caso: 47 è 36 = 6^2 il più vicino. Si segna 6 tre volte come in figura si moltiplica l'ultima con la penultima (6×6=36) e si sottrae a sinistra, mentre si somma (6+6=12) a destra. Si affiancano al resto 11 le due cifre adiacenti (27) e si separa l'ultima cifra (11|7); si divide 112/12 = 9.. e si prova il 9 affiancandolo a 12 cioè 129×9 = 1161 > 1127 non va bene, si prova 8 cioè: 128×8 = 1024 < 1127, va bene; si scrive 8 come in figura, si moltiplica per sottrarre a sinistra e si somma con la precedente a destra. Si abbassano le due cifre 49.. e così via.

I RADICALI DOPPI

I radicali doppi sono del tipo $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ essi possono o meno ridursi da biquadratici a quadratici.

Consideriamo l'espressione:

$$\sqrt{\left(\sqrt{a+\sqrt{c}} \pm \sqrt{a-\sqrt{c}}\right)^2} = \boxed{\sqrt{a+\sqrt{c}} \pm \sqrt{a-\sqrt{c}}}$$

$$= \sqrt{a \cancel{+\sqrt{c}} + a \cancel{-\sqrt{c}} \pm 2\sqrt{a^2-c}} = \boxed{\sqrt{2\left[a \pm \sqrt{a^2-c}\right]}}$$

per cui:

$$\boxed{\left(\sqrt{a \pm \sqrt{a^2-c}}\right) = \sqrt{\frac{a+\sqrt{c}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{c}}{2}}}$$

posto: $(a^2-c) = b$; cioè: $c = (a^2-b)$; abbiamo:

$$\boxed{\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}}$$

Cioè un radicale doppio equivale a due radicali doppi separati dallo stesso segno, il primo termine è per entrambi uguale al primo termine a cui prima (+) e poi (−) il sottoradicale che è la differenza dei quadrati dei due termini del radicando dato; tutto diviso per $\sqrt{2}$. Se (a^2-b) = quadrato perfetto i due radicali diventano semplici e il radicale doppio si dice biquadratico. Esempio: $\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3+2}{2}} - \sqrt{\frac{3-2}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$

Si noti anche la possibile semplificazione inversa.

$$\boxed{\sqrt{a+\sqrt{c}} \pm \sqrt{a-\sqrt{c}} = \sqrt{2}\sqrt{a \pm \sqrt{a^2-c}}}$$

esempio: $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}\right) = \sqrt{2}\sqrt{4+3} = \sqrt{14}$

$\left(\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}\right) = \sqrt{2}\sqrt{4-3} = \sqrt{2}$

Gli operatori

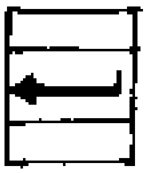
In matematica il concetto di "operatore" é molto delicato. Si deve considerare un qualcosa che opera su entitá per produrre altre entitá. Le entitá possono essere numeriche, geometriche, o di altra natura. Se l'operatore opera su una sola entitá per produrne altre, l'operazione si dice: "monadica". Se l'operatore opera su due entitá per produrne altre, l'operazione si dice: "diadica".

In aritmetica abbiamo solo operazioni diadiche. Occorre distinguere bene fra: operatore, operando ed operazione. E' di fondamentale importanza la sequenza dei simboli. Si suol dire: "operatore a sinistra", quando il simbolo dell'operatore precede l'operando. Si suol dire: "operatore a destra", quando il simbolo dell'operatore segue l'operando. Queste dizioni, talvolta, possono falsare il significato di una espressione. Per chiarire meglio questi concetti, consideriamo tre macchine da calcolo: una calcolatrice comune, una calcolatrice con notazione inversa polacca, un computer con linguaggio Basic; e supponiamo di voler eseguire le seguenti operazioni aritmetiche:

5+2 ; 5-2 ; 5×2 ; 5:2 .

Nella calcolatrice comune si batte il primo numero, poi si batte il segno dell'operazione, poi si batte il secondo numero, quindi premendo il tasto = si ottiene il risultato.

Nella calcolatrice con notazione inversa polacca, si batte il primo numero, quindi si preme il tasto: "ENTER", poi si batte il secondo numero, ed infine si preme il tasto dell'operazione e si ottiene il risultato.

Nel computer P.C. I.B.M. in Basic. Si batte per primo il punto interrogativo, quindi si scrive l'operazione come scritta sopra, (per es: ? 5+2) quindi, accertato di aver scritto giusto, si preme il tasto "invio" che è simboleggiato:  (è una specie di enter, o di fai) e si ottiene il risultato.

Ci domandiamo: se il primo numero è considerato il preesistente, ed il secondo il quantificatore dell'operazione, che diverso significato hanno queste due espressioni: 5+2 ; 2+5, ? Il risultato è lo stesso (per la proprietà commutativa dell'operazione), peró nel primo caso il contributo dell'incremento (secondo termine) è ben minore che nel secondo caso. Se poi il tutto è destinato ad indicare una situazione, (un preesistente, l'operazione ed il risultato contingente), è evidente che i due casi indicano situazioni diverse, anche se arrivano allo stesso risultato.

Un altro caso banale si ha con la proprietá commutativa del prodotto: 3×4 ; 4×3 ; Se il primo simbolo numerico è considerato: "coefficiente", cioè moltiplicatore del secondo, se gli oggetti sono 12 palline, il 3×4 esprime: tre mucchietti di 4 palline, mentre 4×3 esprime: quattro mucchietti di 3 palline. Completamente opposta è la significazione se il primo termine è il preesistente ed il secondo il quantificatore dell'operazione.

Particolarmente delicato è il concetto che si cela dietro l'operazione della sottrazione.

Il primo termine (detto minuendo) è considerato come il preesistente, il secondo termine (detto diminutore) è considerato quantificatore dell'operazione.

Nella scuola primaria, alle elementari, insegnano che se il diminuendo è minore del diminutore, l'operazione "non si puó effettuare". Perché se in un vaso vi sono 3 caramelle, non possiamo toglierne 5.

In matematica le cose sono viste diversamente: vengono introdotti i numeri con segno + o — e vengono chiamati: "numeri relativi" in contrapposto ai numeri o valori chiamati: "Assoluti" i quali sono privi di segno e sono da considerarsi solo positivi. Per evidenziare che un valore, simboleggiato con una lettera, o con una espressione algebrica, è un valore assoluto si include il simbolo o l'espressione algebrica fra due barrette verticali; per es. $|K|$; $|x-3|$ e si leggono K in valore assoluto, $x-3$ in valore assoluto. (Purtroppo le barrette verticali sono anche usate nel calcolo matriciale con diverso significato e nel calcolo vettoriale per indicare il "modulo" che in effetti è un valore assoluto)

I numeri relativi quindi, indipendentemente dall'essere prima o dopo, sono quantità operatrici: eseguendo per esempio: $-5+3$ si ottiene che l'operatore -5 e l'operatore $+3$ equivalgono all'operatore -2 che è il risultato dell'operazione.

Per la moltiplicazione, in matematica basta affiancare due simboli relativi a due valori perchè ciò equivalga al loro prodotto. Però vi sono prodotti di due entità che mutano se scambiamo fra loro i fattori. (Sono detti prodotti non Abeliani) Ciò avviene, per esempio, per il prodotto vettoriale ed altri.

Nella matematica applicata, ove figurano valori numerici, (in numeri o lettere) e valori dimensionali (in numeri o lettere) (questi ultimi quantificano dimensioni, per esempio: 3 centimetri; 3 metri; 3 Watt; oppure: "l" cm.; "a" Watt. ecc; ove il numero da solo non puó quantificare la grandezza), conviene far precedere i valori numerici come coefficienti dei valori dimensionali, non solo, ma conviene eseguire affiancato il calcolo dimensionale. [L'analisi dimensionale, su cui avremo occasione di tornare, è utilissima nel campo della sperimentazione, evidenziando, nelle formule, numeri adimensionali che consentono una più precisa interpretazione del fenomeno in esame, ed una più rapida verifica sperimentale.

Per la divisione in matematica conviene riguardare il divisore come il reciproco di un moltiplicatore, cioè ad esempio $4:3 = \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \cdot 4 = 4 \cdot \frac{1}{3}$, in tal modo si rende indipendente la sequenza dei termini, dividendo, divisore, diventano tali da poter esprimere altri contenuti: per esempio, dire: Un terzo di quattro, oppure; quattro volte un terzo, oppure: quattroterzi, hanno diverse sfumature di significato. Quando il dividendo non è multiplo del divisore, aritmeticamente, avremo un resto, costituito dalla differenza fra il dividendo ed il prodotto fra il quoziente ed il divisore. $(R = N - QD)$ cioè: $\frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D}$.

Importantissima la sequenza con la quale vengono effettuate le operazioni aritmetiche: per esempio: $5 \times 8 - 6 : 2$ può essere interpretata:

$(5 \times 8) - (6 : 2) = 37$ (ove le operazioni in parentesi hanno

$5 \times (8 - 6) : 2 = 5$ priorità di effettuazione)

$5 \times [8 - (6 : 2)] = 25$ In matematica c'è una regola: "prima si

$[(5 \times 8) - 6] : 2 = 17$ effettuano le moltiplicazioni e le divisioni,

poi le somme e le sottrazioni" Però sono preferibili le parentesi

---

Passiamo ora ad un'altro tipo di operatori, cioè agli operatori monadici; essi trasformano un numero in un altro numero. Possono essere: operatori a sinistra, come: "sen(x); log(x) ecc," oppure operatori a destra come: "$(x)^2$; $(X)!$ ecc". Oltre gli operatori monadici che operano su numeri, vi sono gli operatori funzionali che operano su funzioni: per esempio la derivata di $f(x) = f'(x)$, o l'integrale di $f(x) = \int f(x)\,dx$; oltre questi che operano ancora su funzioni vi sono gli operatori del Brogi: $ra\, f(x) = f(x)/(x)$; $p\, f(x) = (x) f(x)$; $\delta\, f(x) = f(x) - (x)$; $1\, f(x) = f(x) + x$.

Per capire gli operatori, è necessario riferirsi al concetto di funzione. Consideriamo un valore, che indicheremo con y, il quale risulta determinato quando, in una espressione algebrica, ove oltre i numeri e le costanti letterali figura la X, attribuiamo un valore ad x. Cioè: $y = f(x)$.

Immaginiamo una espressione composta da una sequenza di molte operazioni, in alcune delle quali, o in tutte, figura la x variamente disposta; e noi diamo un nome a questa espressione, la chiamiamo per esempio "*oper*". Supponiamo di disporre di una macchina la quale effettua tutte le operazioni previste dall'espressione e ne dà il risultato, quando trovi la parola "oper" che precede o segue un valore numerico. Abbiamo cioè: y = "oper"(x) ad ogni valore di x corrisponde un valore di y. (in questo caso "oper" è un operatore a sinistra) mentre: $y=f(x)$ si legge: "y funzione di (x)" può essere anche y=oper(x) ma può anche essere un complesso di operatori.

Il complesso delle operazioni che sono semplicemente sintetizzate dal "nome" dell'operatore (*"nome" che diventa simbolo operativo*) può essere di varia natura, in generale è *una operazione monadica*. In un calcolatore diamo un solo numero ed il "nome" (simbolo) dell'operatore per avere il risultato.

Si noti che *dare un "nome"* "sintetico" ad un complesso di operazioni *è una semplificazione*

Un procedimento matematico composto di varie operazioni di varia natura, che si susseguono in sequenza preordinata, e destinato ad ottenere certe risoluzioni, si chiama *Algoritmo*

LE SUCCESSIONI

Prima di entrare nel vivo della questione, conviene ampliare la conoscenza del simbolismo usato in matematica.

Con enne minuscolo "n" si indica in generale un numero intero assoluto che può assumere tutti i valori da 1 a ∞ (il simbolo: ∞ si legge: infinito).

Spesso "n" è <u>indice</u> di un altro simbolo ed indica il <u>termine ennesimo</u>.

Per esempio, se vogliamo un numero pari basterà scrivere: $\{2 \cdot n\}$ che vuol dire la successione di tutti i numeri pari. cioè:

a_1	a_2	a_3	a_4	......	a_n
2	4	6	8		$(2 \cdot n)$
$(2 \cdot 1)$	$(2 \cdot 2)$	$(2 \cdot 3)$	$(2 \cdot 4)$		

Cioè l'indice "n" sostituito numericamente rappresenta il valore del termine ennesimo.

Analogamente per la successione dei numeri dispari basta scrivere $\{2n-1\}$

a_1	a_2	a_3	a_4	....	a_n
1	3	5	7		$\{2n-1\}$
$(2 \cdot 1-1)$	$(2 \cdot 2-1)$	$(2 \cdot 3-1)$	$(2 \cdot 4-1)$		

Abbiamo così introdotto il concetto di successione

"Dicesi successione un insieme ordinato di infiniti elementi, la cui sequenza è coordinata dall'insieme crescente di tutti i numeri naturali."

può indicarsi:

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \ldots a_n$$

o semplicemente: $\{a_n\}$ ove in parentesi graffa può mettersi la formula matematica che fissa la legge con la quale si susseguono i termini della successione

Dicesi: Serie la somma degli infiniti termini di una successione

Dicesi: ridotta di una serie la somma dei primi "n" termini di una successione

Trattiamo ora due successioni particolarmente interessanti.

Progressione Aritmetica

La successione nella quale: "la differenza di due termini consecutivi è costante" è detta progressione aritmetica: $\boxed{a_{k+1} - a_k = r}$

la differenza costante: "r" è detta ragione

la progressione aritmetica si indica col simbolo: "$\div$"

Se a_1 è il primo termine: $a_2 = a_1 + r$; $a_3 = a_1 + 2r$; ecc

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

Dati due elementi: $a_K = a_1 + (K-1)r$ ed $a_H = a_1 + (H-1)r$ si può trovare la ragione sottraendo membro a membro:

$$\boxed{r = \frac{(a_K - a_H)}{(K - H)}}$$

Scriviamo la stessa progressione in ordine diretto ed in ordine inverso e sommiamo termine a termine

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_1 & + & (a_1+r) & + & (a_1+2r) & + & \dots & + & (a_1+(n-1)r) \\
(a_1+(n-1)r) & + & (a_1+(n-2)r) & + & (a_1+(n-3)r) & + & \dots & + & (a_1) \\
\hline
(2a_1+(n-1)r) & + & (2a_1+(n-1)r) & + & (2a_1+(n-1)r) & + & \dots & + & (2a_1+(n-1)r)
\end{array}$$

abbiamo n termini uguali: $(2a_1+(n-1)r) = (a_1) + (a_1+(n-1)r) = (a_1 + a_n)$ e poichè abbiamo sommato i termini di due progressioni uguali, avremo:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1+a_n)\,n}{2}}$$

"*La somma di n termini di una progressione aritmetica è data dalla media fra il primo e l'ultimo termine, moltiplicata per il numero dei termini*"

Interessante fare la somma di "n" numeri dispari dal primo.

$$S_n = \frac{1+(2n-1)}{2}n = \boxed{S_n = n^2}$$

(numeri dispari) $= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 \dots + (2n-1)$

$\sum_1^n (2n-1) =$	1	4	9	16	25	n^2
$n =$	1	2	3	4	5	n

La somma dei primi n numeri dispari è il quadrato di n

Progressioni geometriche

Sono dette: progressioni geometriche, quelle successioni nelle quali è costante il rapporto di due termini consecutivi. $\boxed{a_{(K+1)}/a_K = q}$ il quoziente q è detto ragione della progressione geometrica.

La progresione geometrica si indica col simbolo: "÷÷"

Se a_1 = primo termine si ha: $a_2 = a_1 \cdot q$; $a_3 = a_1 \cdot q^2$; $a_4 = a_1 q^3$

$$\boxed{a_n = a_1 q^{(n-1)}} \qquad \boxed{a_1 = a_n q^{(1-n)}}$$

dati due elementi(÷÷) $a_K = a_1 q^{(K-1)}$; $a_H = a_1 q^{H-1}$; dividendo membro a membro:

$$\frac{a_K}{a_H} = \frac{a_1 q^{(K-1)}}{a_1 q^{H-1}} = \frac{q^K}{q^H} = q^{K-H}$$

è possibile trovare la ragione:

$$\boxed{q = \left(\frac{a_K}{a_H}\right)^{(1/K-H)}}$$

Se dalla somma di n termini moltiplicata per la ragione q, sottraiamo la somma stessa si ha:

$$S_n \cdot q = a_1 q + a_2 q + a_3 q + \cdots + a_{n-2} q + a_{n-1} q + a_n q$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots a_{n-1} + a_n$$

$$S_n (q-1) = -a_1 + \qquad + a_n q$$

per cui:

$$\boxed{S_n = \left(\frac{a_n q - a_1}{(q-1)}\right)}$$

"La somma di n termini di una progressione geometrica è data dall'ultimo termine moltiplicato per la ragione diminuito del primo termine tutto diviso la ragione meno l'unità"

sostituendo a_n abbiamo: $S_n = \frac{a_1 q^{n-1} q - a_1}{q - 1}$

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Se: $q > 1$ la progressione ÷ è crescente e S_∞ diverge a ∞.

Se $q < 1$ la ÷ è decrescente ed è possibile trovare S_n, infatti cambiando segni; e tenendo presente che per $q < 1$; $q^n \ll 1$; $S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$ e che: $q^\infty = 0$

$$\boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}}$$

In matematica per indicare la somma dei termini consecutivi di una successione dall'H^{mo} al K^{mo} termine si usa il simbolo Σ (che è la sigma maiuscola dell'alfabeto greco); si legge "sommatoria", e si scrive:

$$\sum_{i=H}^{i=K} \{a_i\} = S_K - S_H = a_H + a_{H+1} + a_{H+2} + \cdots a_K$$

$a_1 \quad a_2 \quad a_i \cdot a_n = \{a_n\}$

$$\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} \{a_i\}}$$

ove "a_i" è il termine generico.

Facciamo alcuni esempi per capire cosa significa sommare infiniti termini ed avere un risultato finito

Abbiamo già detto che si chiama serie la somma degli infiniti termini di una successione.

Lascia perplessi il fatto che infiniti addendi diano un valore finito.

Facciamo esempi molto semplici:

il numero razionale $\frac{10}{3}$ è indubitabile che è una quantità finita. Se però l'esprimiamo in numero decimale $\frac{10}{3} = 3,333333 \dots\dots 3$ diventa di infinite cifre che significano:

$$\frac{10}{3} = 3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots + \frac{3}{10^{n-1}}$$

e ponendo in evidenza 3 si ha:

$$\frac{10}{3} = 3\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^{n-1}}\right)$$

ove l'espressione in parentesi è una progressione ÷ di ragione $\frac{1}{10} = q$ e di primo termine $1 = a_1$. applicando la formula:

$$S_\infty = \left(\frac{a_1}{1-q}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{10-1} = \frac{10}{9}$$

e moltiplicando per 3 abbiamo:

$$S_\infty = 3 \cdot \frac{10}{9} = \frac{10}{3}$$

torna il valore numerico $10/3$, che il numero decimale non riuscirebbe mai ad esprimere esattamente.

Facciamo ora un esempio "pratico":

Uno studente torna da scuola affamato e trova che in casa non c'è nessuno, mentre sul tavolo vi sono due torte molto appetibili. Il ragazzo ne mangia subito una, ha ancora fame e non arriva nessuno, allora mangia metà della seconda torta, lasciandone l'altra metà, ... poi ...mangia la metà della metà lasciata ... e così via fino all'ultimo briciolo.

(Il procedimento non ha fine perchè anche il più piccolo briciolo può essere diviso a metà).

Il ragazzo ha agito secondo la serie:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\quad\dots+\frac{1}{2^n}$$

progressione geometrica di ragione $\frac{1}{2}$ e primo termine $a_1 = 1$

Applicando la formula della somma di infiniti termini si ha:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{2-1} = 2$$

$$\boxed{S_\infty = 2}$$

Infatti al limite infinito lo studente ha mangiato *interamente* le due torte!

Frazione generatrice di un numero periodico

Un numero decimale periodico è in genere distinguibile in tre parti: 1) La parte intera delimitata dalla virgola; 2) L'antiperiodo che sono quelle cifre che, dopo la virgola, non sono periodiche; 3) La parte periodica.

Per esempio: 4,3272727... si scrive: $4{,}3\overline{27}$ (La parte periodica si sopralinea) è composto da: 4 = parte intera; 3 = antiperiodo; 27 = periodo.

Scomponendo il numero dalla notazione decimale, alla notazione algebrica (che qualche testo impropriamente chiama "scientifica") si ha: $4{,}3\overline{27} = 4\cdot 10^0 + 3\cdot 10^{-1} + 2\cdot 10^{-2} + 7\cdot 10^{-3} + 2\cdot 10^{-4} + 7\cdot 10^{-5} \ldots$

$$\text{cioè: } 4{,}3\overline{27} = 4{,}3 + 27\left(\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^7} + \cdots + \frac{1}{10^{2n+1}}\right); (n = 1,2,3 \ldots)$$

La parte in parentesi è una progressione geometrica di ragione: $\frac{1}{10^2}$; e primo termine: $\frac{1}{10^3}$ per cui applicando la formula: $S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1/10^3}{1 - 1/10^2} = \frac{10^2}{10^3(10^2-1)} = \frac{1}{10(100-1)} = \frac{1}{990}$.

quindi:

$$4{,}3\overline{27} = 4{,}3 + 27\left(\frac{1}{990}\right) = \frac{(4{,}3)(990) + 27}{990} = \frac{4{,}3(1000-10)+27}{990}$$

$$4{,}3\overline{27} = \frac{4300 - 43 + 27}{990} = \boxed{\frac{4327 - 43}{990} = 4{,}3\overline{27}}$$

L'espressione ora scritta è la regola: "La frazione generatrice di un numero periodico, ha per numeratore le cifre della parte intera seguite dalle cifre dell'antiperiodo e del periodo, diminuito dal numero formato dalle cifre della parte intera e dell'antiperiodo e per denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo e tanti zero quante sono le cifre dell'antiperiodo."

9 periodico è solo apparente infatti: $4{,}399999.. = 4{,}3\overline{9} = 4{,}4$.

Consideriamo ora un particolare operatore di una operazione monadica consistente nel prodotto successivo della serie naturale dei numeri fino al numero "n" considerato. Si indica con: $n!$ e si legge: "enne fattoriale". Quindi:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n$$

$1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Questo operatore è fondamentale in analisi matematica: per esempio il numero "e" base dei logaritmi naturali è dato dalla serie:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} = 2{,}71828\ldots$$

ed anche:

$$\exp(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Esprimere in serie di infiniti termini un numero, permette di calcolare il numero stesso con l'approssimazione che vogliamo. Per esempio: per "e" $= 2{,}718281828$-

$1 + 1 = 2$; $2 + \frac{1}{2} = 2{,}5$; $2{,}5 + \frac{1}{6} = 2{,}67$; $2{,}67 + \frac{1}{24} = 2{,}70833$;

$2{,}70833 + \frac{1}{120} = 2{,}71667$; $2{,}71667 + \frac{1}{6!} = 2{,}71806$; $2{,}71806 + \frac{1}{7!} =$
$= 2{,}71825$ abbiamo già esatta la 4ª cifra decimale.

Il fattoriale è anche molto importante nel calcolo combinatorio perché rappresenta il numero delle permutazioni di n oggetti diversi. (Per esempio a,b,c sono 3 lettere $3! = 6$ quindi possiamo avere: abc, acb, bac, bca, cab, cba, sei permutazioni

In analisi si trova anche il simbolo $n!!$ si legge: SEMIFATTORIALE ed è la sequenza dei prodotti della stessa parità di n.
esempio: $6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$; $5!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$.

NUMERI REALI e NUMERI IMMAGINARI

Si noti che il valore numerico di $e = 2,718281828...$ non può essere espresso né da una frazione, né dall'estrazione di radici, cioè non appartiene né ai numeri "razionali", né ai numeri "irrazionali". Altro numero che non è né razionale, né irrazionale, è $\pi = 3,1415926535....$, vi sono anche valori di funzioni logaritmiche, trigonometriche, ecc.; che non appartengono a tali insiemi numerici.

Questo nuovo insieme di numeri si chiama: insieme dei "numeri TRASCENDENTI"

Tutte le grandezze numeriche, che abbiamo esaminato, razionali, irrazionali, trascendenti sono sottoinsiemi del complessivo insieme dei numeri Reali, ai quali si aggiunge l'insieme dei numeri Immaginari.

Vediamo come nasce il concetto di numero immaginario:

Sappiamo che: $(+2)^2 = (+4)$ e che: $(-2)^2 = (+4)$ quindi, nel processo inverso: $\sqrt{(+4)} = \begin{matrix} +2 \\ -2 \end{matrix}$, cioè la radice quadrata di un numero positivo, ammette, come soluzione due valori numericamente uguali, ma di segno opposto.

Se cerchiamo, nel campo dei numeri reali, la radice quadrata di un numero negativo, (per es. $\sqrt{(-4)}$) non troviamo nessun numero reale che moltiplicato per se stesso dia il radicando :(-4).

Allora scriviamo: $\sqrt{(-4)} = \sqrt{(-1)}\,\sqrt{(+4)} = \pm 2\sqrt{(-1)}$.

Il fattore radicale: $\sqrt{(-1)}$, in quanto inesistente nel campo dei numeri reali, lo chiamiamo: "unità immaginaria" e lo simboleggiamo con la lettera "i"

cioè: $\sqrt{-1} = \pm i$; $(\pm i)^2 = -1$; $\sqrt{(-4)} = \pm 2i$

Certamente incuriosisce saperne di più su questo tipo di grandezze, ma andiamo per gradi.

L'operatore immaginario

Eseguiamo le successive potenze del coefficiente immaginario "i" ed avremo:

$$(i)^0 = 1 = (i)^4 = (i)^8 = \cdots = (i)^{4n}$$

$$(i)^1 = i = (i)^5 = (i)^9 = \cdots = (i)^{1+4n}$$

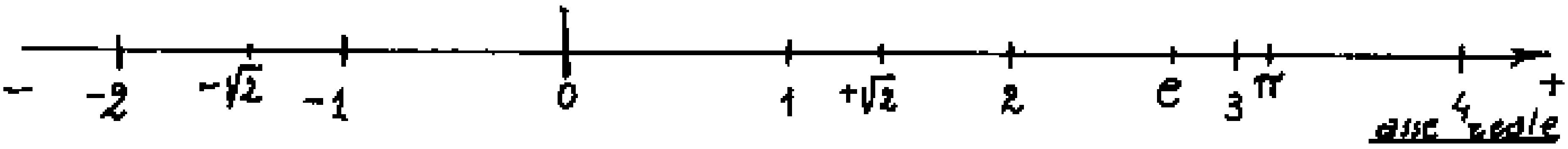
$$(i)^2 = -1 = (i)^6 = (i)^{10} = \cdots = (i)^{2+4n}$$

$$(i)^3 = -i = (i)^7 = (i)^{11} = \cdots = (i)^{3+4n}$$

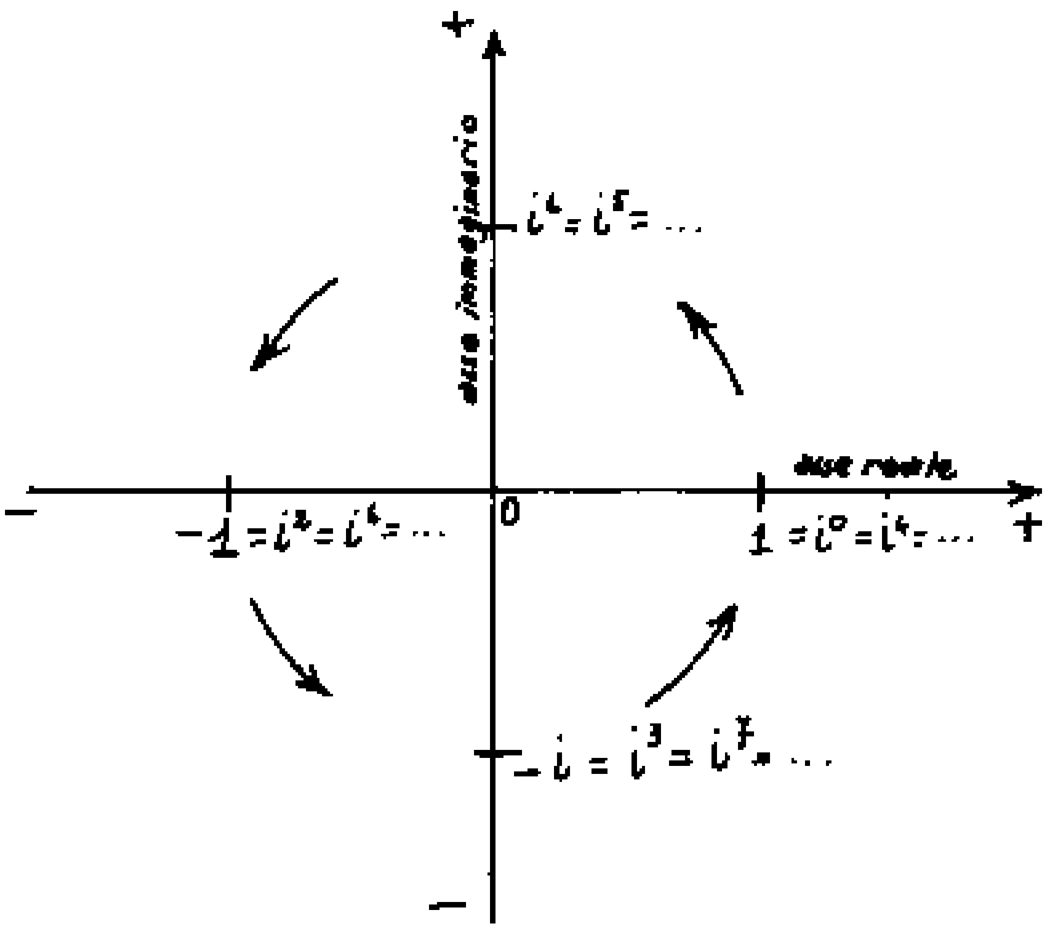
$$(i)^4 = 1 = (i)^8$$

Si nota che il valore delle potenze si ripete di 4 in 4. Poichè fenomeni che tornano su se stessi, (ricorrenti) ordinariamente si dicono ciclici o cicli, in quanto rappresentabili in angoli, ove, ad ogni giro, il raggio ruotante <u>ripete la stessa direzione</u>.

Cominciamo col "graduare" una retta; cioè fissiamo <u>un segmento unitario</u> (modulo), (per esempio un centimetro, un pollice, o qualsiasi lunghezza), in modo che, posta una origine "O" sulla retta, ad ogni segmento staccato sulla retta a partire da "O", (a destra od a sinistra di "O", cioè in direzione positiva o in direzione negativa) corrisponda un <u>numero reale</u>, perciò, per la continuità di tale retta, essa può rappresentare l'insieme di tutti i numeri reali e sarà detta: <u>ASSE REALE</u>



Se assumiamo come asse reale, l'asse delle ascisse, potremo porre in ordinate l'asse immaginario; fissiamo i versi positivi e negativi dei due assi, e poiché si intende che l'asse reale preceda l'asse immaginario, notiamo che fissare i versi positivi e negativi dei due assi implica aver fissato un verso alle rotazioni,



Il verso di rotazione è quello che compie l'asse reale per sovrapporsi, in un quarto di giro, all'asse immaginario con segni direzionali concordanti. In figura appare il verso antiorario, (se guardassimo il disegno dal disotto controluce, apparirebbe orario. E' una relatività. La relatività fu esposta prima da Galileo, poi fu estesa ai fenomeni elettromagnetici da Einstein)

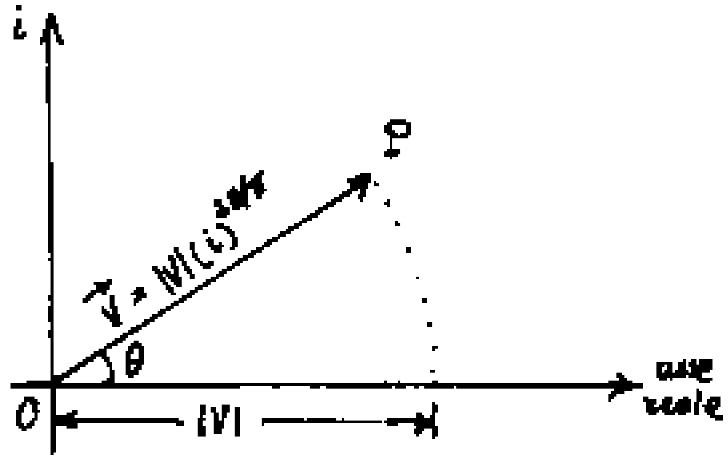
Fissiamo sull'asse reale un segmento pari a (+1) operiamo la ruotazione dell'asse reale, (ruotazione continua) avremo che la nostra unità reale (+1), quadrante per quadrante si sovrapporrà, ordinatamente, alle potenze crescenti dell'immaginario (vedi figura)

Cioè:

"Il coefficiente "i" è un operatore capace di ruotare di un angolo retto ($90° = \pi/2$ rad) un segmento il cui modulo sia moltiplicato per "i"

Ma il discorso può essere generalizzato; infatti consideriamo l'operatore: $i^{\theta/\pi/2} = i^{2\theta/\pi}$ (ove θ è un angolo qualsiasi). Se poniamo: $\theta = 0$; $\theta = \pi/2$; $\theta = \pi$; $\theta = \frac{3}{2}\pi$; $\theta = 2\pi$, la potenze diventano rispettivamente: i^0; i^1; i^2; i^3; i^4; . Allora per θ qualsiasi l'operatore: "$i^{2\theta/\pi}$" è capace di ruotare di θ un segmento qualsiasi.

Se il segmento è sull'asse reale ed ad esso equiverso, l'operatore: "$i^{2\theta/\pi}$" l'orienterà secondo θ. Se il



segmento avrà per modulo $|V|$ avremo:

$$|V| \cdot (i)^{2\theta/\pi} = \vec{V} = \overrightarrow{OP} = (P-O)$$

ove: $\vec{V}$ si legge: "vettore V"

$\overrightarrow{OP}$ " " : " vettore $\overline{OP}$

$(P-O)$ " " : " Vettore P meno O.

Quindi un vettore (dal latino vehor o anche vector) vuol dire: "operatore capace di trasportare il punto "O" in "P"."; oppure: "far muovere in direzione θ con intensità precisata da $|V|$";

Con ciò, geometricamente, abbiamo chiamato "<u>Vettore</u>" un segmento orientato, vedremo che il suo significato si estende ad una classe di grandezze fisiche. Vedremo anche l'estensione del concetto di vettore allo spazio tridimensionale ed n-dimensionale, ciò sarà possibile quando avremo svolto gli algoritmi capaci di calcolarli.

I numeri complessi

"Si dicono <u>complessi</u> quei numeri che non seguono il sistema decimale".

In aritmetica sono numeri complessi i numeri che esprimono grandezze angolari, o misure di tempo, queste numerazioni seguono il sistema sessagesimale:

Cioè per gli angoli si ha:

1 giro $= 360°$ (gradi); $1°$ (un grado) $= 60'$ (sessanta primi); $1'$ (un primo) $= 60''$ (sessanta secondi). Lo sfrazionamento del secondo è decimale. Esempio $\underline{30°\ 30'\ 42'',375}$.

Per le misure di tempo si ha:

1^g giorno $= 24$ ore ; 1^h ora $= 60'$ minuti ; $1' = 60''$ secondi. Es: $\underline{3^h\ 06'\ 20'',2}$ queste grandezze sono facilmente riducibili a sessadecimali infatti: $3^h \times 3600 = 10800''$; $06' \times 60 = 360''$

$$3^h\ 06'\ 20'',2 = 10800'' + 360'' + 20'',2 = 11180'',2 = \frac{11180,2}{3600} = 3^h,10561111.$$

Le operazioni aritmetiche avvengono tenendo conto dei valori dei sottomultipli; facciamo degli esempi:

$$\begin{array}{rrrl} 30° & 50' & 30'' & + \\ 1° & 40' & 40'' & \\ \hline 32° & 31' & 10'' & \end{array}$$

perchè: $30'' + 40'' = 70'' = 10'' + 60'' = 10'' + 1'$

$60' + 40' + 1' = 91' = 31' + 60' = 31' + 1^h$

$$\begin{array}{rrrl} 30° & 10' & 07'' & - \\ 10° & 56 & 49'' & \\ \hline 19° & 13' & 18'' & \end{array}$$

si considera: $30°\ 10'\ 07'' = 30°\ 09'\ 67'' = 29°\ 69'\ 67''$

Analoghe operazioni per monete o grandezze che non seguono il sistema decimale. Per esempio:

1 Lira sterlina = 20 scellini
1 scellino = 12 pence
1 pence = 4 farthings.

oppure: 1 Lira antica toscana = 12 crazie
1 Lira antica toscana = 20 soldi
1 soldo = 12 denari
1 Crazia = 1 soldo e 8 denari

Si noti una certa analogia fra lo sfrazionamento della lira toscana e quello della lira sterlina.

Antiche misure lineari toscane:

1 Braccio toscano = (0,58366 metri) = 20 soldi
1 soldo = (2,91830 cm.) = 12 denari
1 denaro = (0,24319) cm.).
1 canna agrimensoria (2,91830 m.) = 5 braccia.
1 braccio quadro = 0,3410 m².

Esempi di moltiplicazioni:

$$5^\circ\ 22'\ 31''\times 7 = 35^\circ\ 154'\ 217'' = 37^\circ\ 37'\ 37''$$

$$\left(10\ \text{Lt}/_h\ \ 18\ \text{soldi}/_h\ \ 7\ \text{denari}/_h\right)\times\left(8^h\ 30'\ 40''\right) = 93^{Lt}\ 0^s\ 4^d{,}64$$

per le prime 8 ore competono: $80^{Lt}\ 144^s\ 56^d$ cioè: $87^{Lt}\ 8^s\ 8^d$

per $30' = \frac{1}{2}h$ competono $5^{Lt}\ 9^s\ 3^d{,}5 \longrightarrow 5^{Lt}\ 9^s\ 3^d{,}5$

per $40'' = \frac{40}{3600} = \left(\frac{1}{90}h\right)(2623)^d/_h = 29^d{,}14 = \longrightarrow 2^s\ 5^d{,}14$

$$\overline{93^{Lt}\ 0^s\ 4^d{,}64}$$

esempi di divisioni:

$$
\begin{array}{l|l}
20^h \; 32' \; 15'' & 19 \\ \hline
1 \times 60 = 60' & 1^h \; 4' \; 51'' \quad = \; 1^h \, 4' \, 51'' \, e \left(\frac{6}{19}\right)'' \\
\quad 92' & \\
\quad 76 & \\
\quad 16' \times 60 = 960'' & \\
\qquad 975'' & \\
\qquad -25 & \\
\qquad\; 6'' &
\end{array}
$$

$$93^{lt} \; 0^s \; 4{,}64^d \;\; \lfloor\, 8^h \, 30' \, 40''$$

in questo caso conviene ridurre tutto alla minima unità cioè a denari ed a secondi

$$\left(22324{,}64^d : 30640''\right)\left(3600\right) = 2623^{d/h} = \left(10^{lt} \, 18^s \, 7^d\right) \text{ all'ora.}$$

Si dicono: "<u>Complessi</u>" anche quei numeri che sono composti dalla somma o differenza fra un numero <u>reale</u> ed un numero <u>immaginario</u>, questi è meglio chiamarli: "<u>immaginari - complessi</u>"

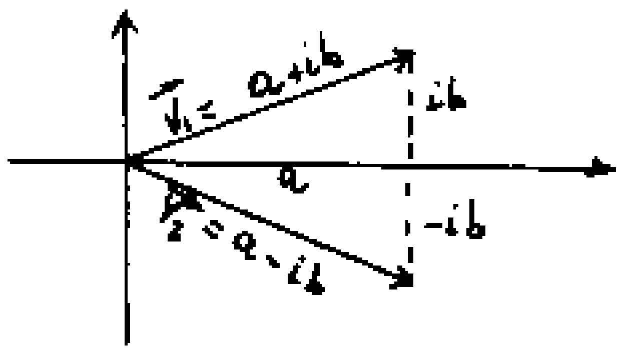
$$\vec{N} = a \pm ib$$

ove a = parte reale ; b = reale ; i = coeff. immaginario

ib = parte immaginaria.

Siano $V_1 = (a+ib)$; $V_2 = (a-ib)$; V_1 e V_2 si dicono: "<u>numeri immaginari complessi coniugati</u>", la loro, somma: $(\vec{V_1}+\vec{V_2}) = 2a$; differenza $(V_1 - V_2) = 2ib$; prodotto $(V_1 V_2) = a^2 + b^2$

quoziente: $V_1/V_2 = \frac{(a+ib)}{(a-ib)} \cdot \frac{(a+ib)}{(a+ib)} = \frac{a^2 - b^2 + 2aib}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + i\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)$.



Graficamente <u>i numeri immaginari complessi coniugati</u>, si presentano come in figura. La trattazione più estesa potrà farsi dopo aver trattato la trigonometria.

Un numero complesso in aritmetica è quindi composto da più numeri esprimenti ciascuno la quantità di una certa unità dimensionale, tutti riferiti ad una stessa dimensione, ove il primo numero rappresenta l'unità principale ed i successivi rappresentano via via sfrazionamenti dell'unità precedente.

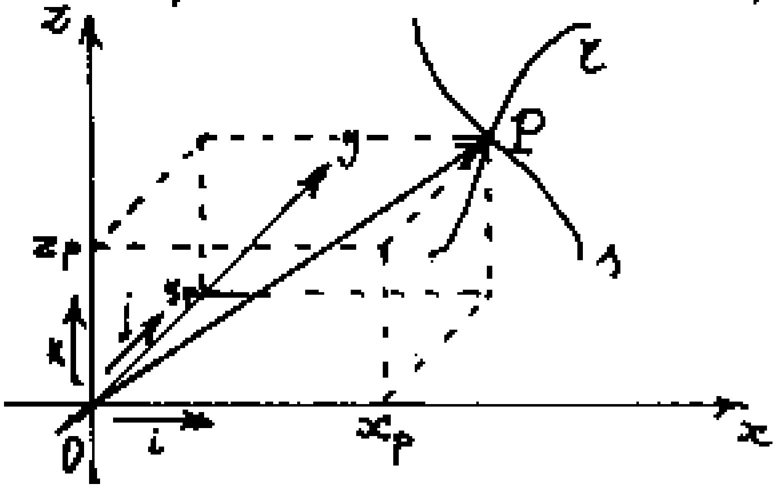
Prima dell'introduzione del sistema metrico decimale, le grandezze erano rappresentate con numeri complessi.

Se per le <u>misure lineari</u> gli antichi avessero avuto il metro, il decimetro ed il centimetro e non fosse introdotta la numerazione a base decimale, per scrivere: metri 4,25, avrebbero scritto: 4m. 2dm 5cm, che in sostanza valeva dire 4 metri + 2 decimetri + 5 centimetri, però i numeri 4, 2, 5, pur essendo relativi alla stessa dimensione fisica (lunghezze), riflettendo <u>unità diverse</u> non è lecito scrivere il segno(+) 4 + 2 + 5 che comporterebbe errore.

<u>Nell'immaginario complesso</u> invece si usa scrivere: $(a \pm ib)$ sottointendendo che, in altra direzione la quantità "b" ha lo stesso "modulo" (stessa unità) della quantità "a". Se $\vec{i}, \vec{j}, \vec{K}$, indicano tre direzioni dello spazio geometrico, ortogonali fra loro, avremo: $\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{K}$, cioè: un segmento orientato (vettore) nello spazio tridimensionale.

Il concetto è estendibile anche a campi non geometrici n-dimensionali. Supponiamo di avere tre assi: x, y, z; ortogonali fra loro, con origine in O ed orientati dai versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{K}$. (Dicesi <u>"versore"</u> un vettore di modulo unitario, determinante una direzione.)

Il punto $P \equiv (x_p, y_p, z_p)$ determina il vettore:



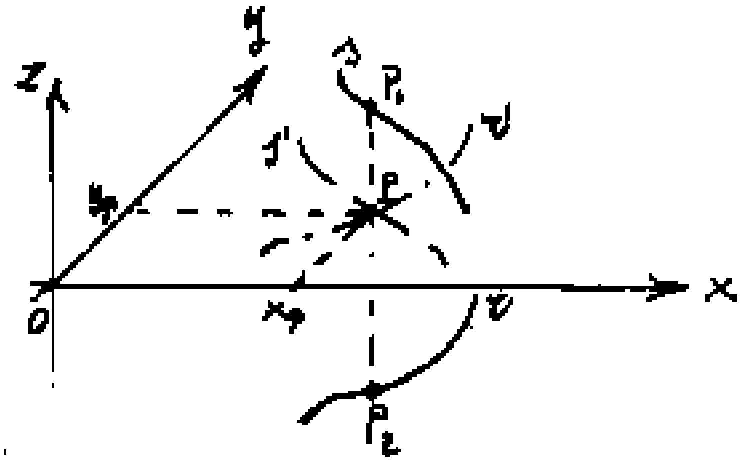
$\vec{V} = (|x_p|\,\vec{i} + |y_p|\,\vec{j} + |z_p|\,\vec{K})$ i segmenti $|x_p|, |y_p|, |z_p|$ sono detti <u>le</u> componenti cartesiane del vettore $\vec{V}$ di modulo: $|V| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}$.

i vettori: $\vec{X} = x_p\vec{i}$; $\vec{Y} = y_p\vec{j}$; $\vec{Z} = z_p\vec{K}$, sono detti <u>i</u> componenti del vettore $\vec{V}$.

Consideriamo le linee "r" ed "s" passanti per P, e tracciate da due diverse penne scriventi. Può capitare che le due punte scriventi passino per "P" nello stesso istante, ma, in generale passeranno per P in tempi diversi. Mentre in geometria possiamo dire che le due linee "r" e "s" si incontrano in P (le coordinate di P sono comuni alle due linee), non sempre possiamo dirlo per le pente scriventi; abbiamo così introdotto una quarta dimensione: <u>il tempo</u> per definire: $\boxed{P \equiv (x_p, y_p, z_p, t_p)}$,

e quindi il vettore: $(P-O) = \vec{V} = x_p\vec{i} + y_p\vec{j} + z_p\vec{K} + t_p\vec{t}$.

Questo discorso è analogo a quello che possiamo fare quando si passa da due a tre dimensioni nello spazio geometrico.



A due dimensioni due linee r ed s giacenti su due piani paralleli ad xy, le vediamo, su xy, incontrarsi in P. In effetti noi non vediamo le linee, ma le loro proiezioni su xy. Il vettore $(P-0) = \vec{V} = x_p\vec{i} + y_p\vec{j}$, se P è comune diventa: $(P-0) = \vec{V} = x_p\vec{i} + y_p\vec{j} + z_p\vec{K}$.

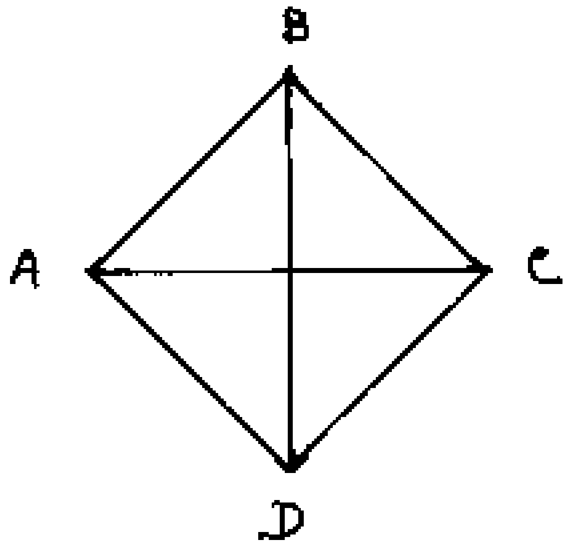
Le due linee si incontrano, se sono tracciate sullo stesso piano alla stessa quota, e P sia contemporaneo.

Con ciò si acquisisce il concetto di: "Proiezione" molto importante perché noi "vediamo" le cose come proiettate su un piano. Solo la visione "binoculare" ci dà il senso del rilievo spaziale; tale senso è tanto meno efficiente quanto più l'oggetto è lontano, ciò è dovuto alla limitata distanza interpupillare.

Tuttavia questa inefficienza viene in parte corretta dalla messa a fuoco del cristallino, e dall' effetto della Prospettiva che ci fa vedere più piccoli gli oggetti più lontani. La fotografia in genere utilizza solo la prospettiva, tuttavia, vi sono macchine fotografiche a due obiettivi, che producono due fotogrammi sovrapposti o no, uno a linee rosse ed uno a linee verdi, che guardati con occhiali aventi da un lato vetro verde e dall'altro rosso, ci danno la sensazione del rilievo.

Una serie di fotogrammi proiettati con la stessa frequenza con cui sono stati ripresi, ci dà l'effetto Cinematografico del movimento, che puó essere accelerato o rallentato, variando la frequenza di proiezione da quella di ripresa. (La frequenza è limitata dal tempo di ritensione dell'immagine nell'occhio umano). Le immagini cinematografiche hanno la quarta dimensione "tempo", non hanno la terza dimensione in quanto sono proiettate in piano. Ciò implica che due rette sghembe, che abbiano il segmento di minima distanza, giacente sull'asse dell'obiettivo della cinepresa, ci appariranno incidenti, se non si hanno altri elementi.

Riportiamo alcuni disegni in cui é impossibile determinare cosa rappresentano.



Per es. il disegno a fianco cos'é?

1) Un quadrato con diagonali?

2) La proiezione di un ottaedro?

3) La proiezione di un tetraedro a facce trasparenti (in vetro)?

Ciò insegna come sia illusoria anche la visione delle cose, e come, cercando di capire la fenomenologia che ci circonda, si debba sempre fare una analisi critica dei dati acquisiti tramite una logica, ed un modello mentale , n-dimensionale, memorizzato, e via via perfezionato nell'ampliarsi della conoscenza. Resta sempre più valido il socratico: "Sò di non sapere".

Torniamo ai numeri.

Un numero non ha senso se non è specificato a cosa si riferisce.

Si distingono due specie di numeri:

Ordinali (primo, secondo, ... ennesimo) che indicano: "sequenza" cioè un succedersi, ordinano la posizione

Cardinali (uno, due, ... enne) indicano: "quantità" della stessa specie o che hanno almeno un attributo comune.

Facciamo una tabella dei numeri studiati

TAVOLA dei NUMERI

- NUMERI
  - *ordinali*
  - *cardinali*
    - REALI assoluti e relativi
      - RAZIONALI
        - INTERI
          - *pari* - (sempre divisibili per 2)
          - *dispari*
            - Multipli di altri numeri
            - Primi (non divisibili)
          - Potenze di interi
          - non ricavabili da potenze di interi
        - FRAZIONARI
          - FRAZIONE
            - *propria* - (frazione di unità)
            - *impropria* - (intero + frazione propria)
            - *apparente* - (numero intero)
          - (numero decimale periodico, o numero decimale finito.)
      - IRRAZIONALI - (ricavabili mediante estrazioni di radici, non ricavabili da frazioni)
      - TRASCENDENTI - (ricavabili da calcoli di sviluppi in serie, per es. π; e ecc.)
      - COMPLESSI - (non seguono la numerazione decimale)
    - IMMAGINARI
      - *puri* (composti dal prodotto di un numero reale per il coefficiente immaginario, ricavabili da radicandi negativi in radici ad indice pari.)
      - *complessi* (composti dalla somma algebrica di un numero reale, detta parte reale, e da un numero immaginario, detta parte immaginaria)

I Numeri - Le Misure - Le Dimensioni - L'equivalenza.

I numeri sono usati per esprimere la misura di un "qualcosa" rispetto ad una unitá arbitraria di quel "qualcosa". (Il "qualcosa" spesso è una dimensione fisica) Cose di ugual misura nella stessa dimensione, si dicono equivalenti, (stessa area, stesso volume, stesso peso, stesso prezzo, stesso voltaggio, ecc.)

E' bene ricordare che le dimensioni fisiche sono convenzioni umane; sono relative a certe condizioni legate a come appaiono all'uomo; nessuna di esse "esiste" in se, in assoluto, le poniamo noi col nostro pensiero. Il grande problema dei fisici era di fissare un "sistema assoluto di misure", partirono col: "c.g.s." elettrostatico, poi elettromagnetico, per arrivare al sistema Giorgi (M, K, S più una dimensione elettrica). "c.g.s" significa: centimetro, grammo-massa, secondo; "M, K, S" significa metro, Kilogrammo-massa, secondo. Come si vede, con grande disinvoltura, fissarono la dimensione lunghezza come un invariante con la direzione; e da essa dedussero le aree ed i volumi. Altro assoluto: il tempo, (per togliere quell'"assoluto" basta il meridiano del cambiamento di data, non importa scomodare Einstein). Se dividete un cerchio in 24 parti e li considerate meridiani terrestri, noterete che il meridiano ore zero del giorno "n" corrisponde al meridiano ore 24 dello stesso giorno n, cioè ore zero del giorno (n+1).

Notato che il peso varia con l'attrazione di gravità, fu introdotto come invariante il concetto di massa, sotto intendendo: "quantità di materia", purtroppo l'equivalenza fra materia ed energia fa saltare quell'invariante. Da queste tre dimensioni fondamentali i fisici si proponevano di dedurre tutte le altre, arrivando a compromessi assurdi come il concetto di forza su cui torneremo. Noi, "ripartendo da zero", non ci sentiamo di propagandare, come vangelo, le convenzioni dei fisici, preferiamo un esame critico che ci consenta di capire certi "assurdi" che da esse derivano.

Abbiamo già visto come un operatore immaginario possa orientare i segmenti, abbiamo definito l'angolo "una variazione di direzione" Abbiamo dato risalto al concetto "direzione" che sarà ulteriormente sviluppato in seguito. Abbiamo bisogno di vedere meglio il concetto: "Variazione". Questo concetto si presta ad assumere aspetti anche molto diversi fra loro. La "variazione" di coordinate, ci ha portato il concetto di "*differenziale*". La variazione puó essere *continua* o *discontinua*. Noi distinguiamo le cose, gli oggetti, per brusche variazioni di colore, di forma, ecc. Per capire meglio le Variazioni, consideriamo il concetto di "*tempo*" come una estensione di un succedersi sequenziale ove l'inizio confina con l'ultimo "*prima*" e la fine col primo "*dopo*". (è un intervallo di tempo)

graficamente: - - - prima - - |——intervallo——| - - dopo - - - →

Ma noi abbiamo semplicizzato lo schema grafico con un segmento orientato, meglio sarebbe considerare sfere concentriche, per avere tutte le direzioni, ma anche ció implicherebbe un centro delle sfere. Poiché la variazione di direzione implica anch'essa un tempo, questo fluire del tempo è pluridirezionale e abbastanza complesso.

Pensiamo ad una punta scrivente, la quale da un certo istante si muova in *una certa direzione* con *velocitá finita*, dopo un certo lasso di tempo si fermi, essa ha tracciato un *segmento* che sará tanto maggiore quanto maggiore è la velocitá, e tanto maggiore quanto maggiore è il tempo del suo moto. Il

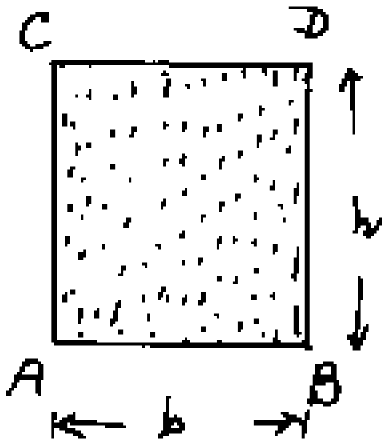
segmento risulta avere un inizio ed una fine, cioè è orientato; noi indicheremo $\overline{AB}$ se si muove da A verso B, o viceversa $\overline{BA}$, se si muove da B verso A.
Il segmento può avere tutte le direzioni possibili. Se ponessimo 1 la velocità media, le grandezze del segmento e del tempo, sarebbero rappresentate dallo stesso numero, però mancherebbe la direzione del segmento; non solo, ma ammessa costante la velocità media, la modulazione delle velocità istantanee nel tratto $\overline{AB}$, (a parità di punti A e B e di tempi: $t_{(A)}$; $t_{(B)}$; $t=(t_{(B)}-t_{(A)})$) implicherebbe una diversificazione capace di sostenere un'altra ipotetica dimensione fisica.

Se pensiamo tutti i segmenti uscenti da A in tutte le possibili direzioni, abbiamo una emissione spaziale, (a parità di segmenti) sferica. Quì interverrebbe un complesso concetto di: "contemporaneità" su cui torneremo; Per ora ci accontentiamo di notare come l'esame di due cose distinte (anche due punti diversi), richieda tempi diversi. Notiamo inoltre come sia comodo misurare le lunghezze, in qualsiasi direzione, con lo stesso segmento posto "per convenzione" uguale ad uno (per es. un cm)

Posta quindi una unità di lunghezza, da utilizzare anche per linee curve raddrizzate, vediamo le unità derivate.

LE AREE

Supponiamo ora che il nostro segmento $\overline{AB}$ sia costituito dal segmento comune ad un tratto di mina di lapis, ed al foglio su cui, tale pezzetto di grafite è appoggiato. Se, mantenendo il contatto, (grafite - carta) muoviamo il tratto di mina perpendicolarmente ad $\overline{AB}$, avremo, dopo un certo tempo che A sarà arrivato in C, e B in D ove: $\overline{AB} // \overline{CD}$ $\overline{AC} // \overline{BD}$ ed $\overline{AC} \perp \overline{AB}$; $\overline{AC} \perp \overline{CD}$; $\overline{BD} \perp \overline{AC}$; $\overline{BD} \perp \overline{CD}$



Poiché la grafite scrive sulla carta, tutta la superficie rettangolare ABCD risulta colorata. L'estensione di tale superficie (area) sarà tanto maggiore quanto maggiore è $\overline{AB}$ e quanto maggiore è $\overline{AC} = \overline{BD}$, posto: $\overline{AB} = b$; $\overline{AC} = \overline{BD} = h$ L'area di ABDC sarà: $b \cdot h$; ($A_{ABDC} = bh$).

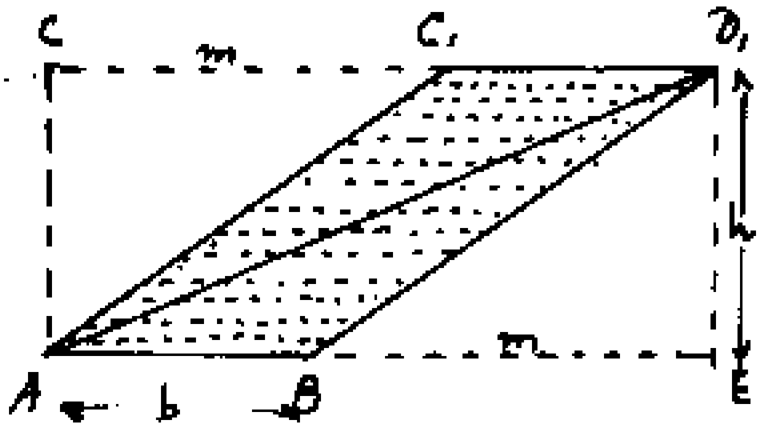
Si noti che discorso identico si può fare facendo muovere $\overline{AC}$ in direzione perpendicolare, fino a sovrapporsi ad $\overline{BD}$. Le superfici generate da rette che si muovono perpendicolarmente a se stesse, si dicono *superfici rigate*. (anche se un punto della retta è fermo, gli altri punti si spostano perpendicolarmente alla retta)

Si noti che tutto il segmento $\overline{AB}$ è scrivente, se fosse scrivente solo il punto che ha tracciato $\overline{AB}$ e le velocità in direzione $\overline{AB}$ ed in direzione $\overline{AC}$ sono uguali, la punta scrivente traccerebbe la diagonale $\overline{AD}$.

Se $\overline{AB} = \overline{AC} = l$; $\underline{l^2 = \text{area del quadrato di lato "}l\text{"}}$

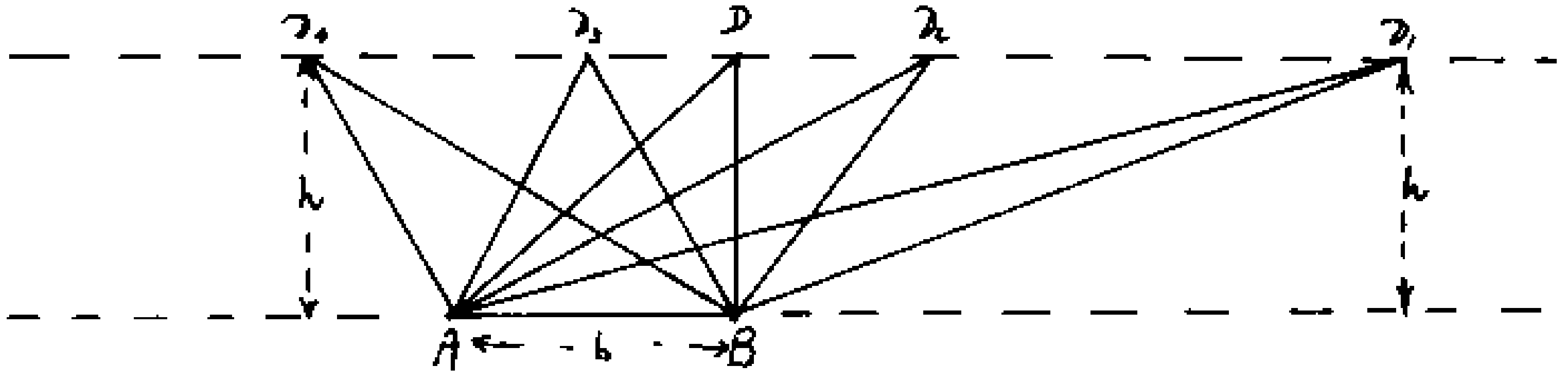
Se $l = 1$ = segmento unitario, $\underline{l^2 = 1^2 * 1}$ = $\underline{\text{unità di area}}$.

Supponiamo ora che il segmento $\overline{AB}$ si muova obliquamente, mantenendosi parallelo nelle varie posizioni; esso finirà per sovrapporsi ad un segmento



$\overline{CD_1} \parallel \overline{AB}$. Sia $\overline{CC_1} = \overline{BE} = m$ l'area del rettangolo AED_1C sarà: $A_{AED_1C} = (b+m)h = bh + hm$. Ma se accostiamo A su B e C_1 su D_1 otteniamo l'accostamento dei due triangoli ACC_1 e BED_1 cioè otteniamo un rettangolo di base m ed altezza h di Area $h \cdot m$., perciò se togliamo questa area al rettangolo AED_1C otteniamo l'area del <u>parallelogramma</u> ABD_1C_1: $A_{ABD_1C_1} = \underline{bh}$; cioè anche l'area del parallelogramma equivale al rettangolo di pari base e pari altezza qualunque sia l'inclinazione del parallelogramma.

Tracciamo ora la diagonale $\overline{AD_1}$ che divide in due triangoli uguali il parallelogramma cioè di area $bh/2$. Perciò <u>tutti i triangoli</u> aventi la stessa base e la stessa altezza sono <u>equivalenti</u>.

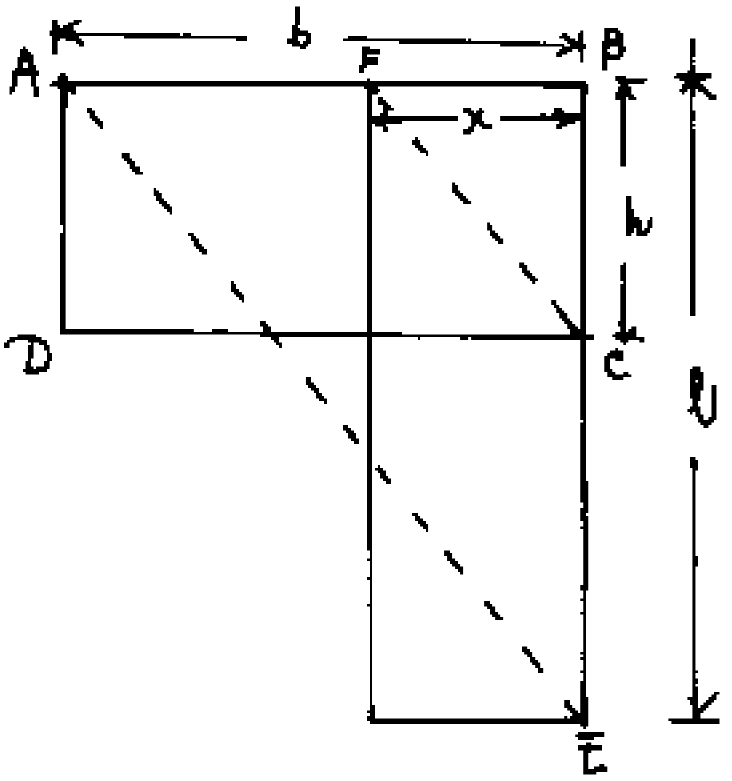


La retta passante per un vertice di un triangolo e parallela al lato opposto, è il luogo dei vertici di tutti i triangoli equivalenti aventi in comune il lato opposto, ed il vertice su tale retta.

Ciò consente varie costruzioni grafiche

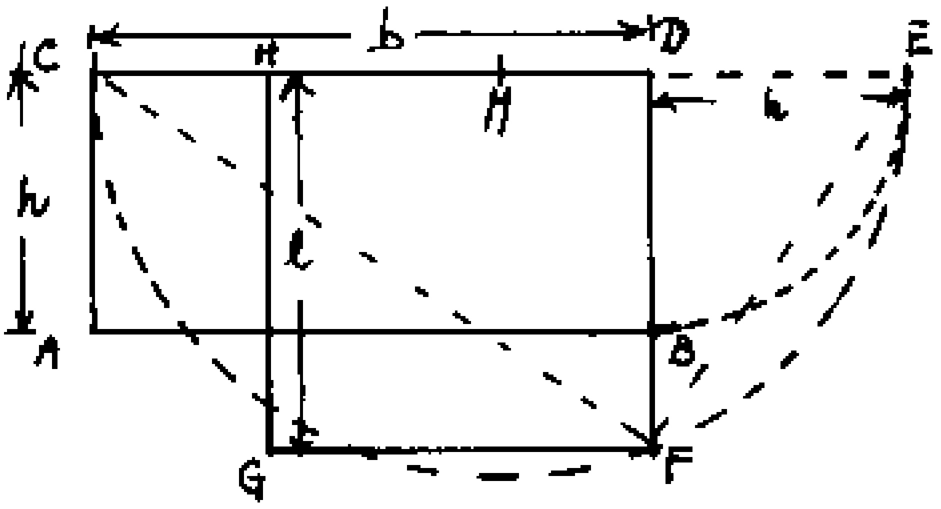
<u>Dato un rettangolo di base b e altezza h disegnare il rettangolo equivalente di base l ed altezza incognita x.</u>

Dovrà essere: $bh = lx \Rightarrow x = \frac{bh}{l} \Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{b}{l} \Rightarrow \boxed{b:l = x:h}$



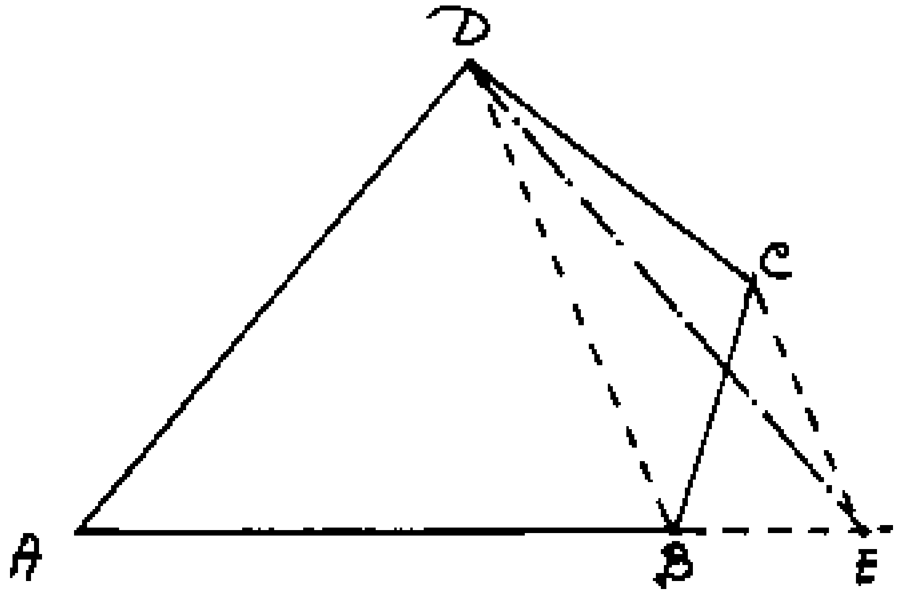
la proporzione scritta è graficamente visibile nei triangoli $\overline{ABE}$ ed $\overline{FBC}$ nell'ordine. Unito $\overline{AE}$ da C la parallela fino ad F. ove $\overline{BF} = x$ l'incognita cercata. In questo caso abbiamo utilizzato la proporzionalità di triangoli simili

Dato un rettangolo b, h trovare il lato l del quadrato equivalente.



Ribaltato B su E, con $\overline{DB} = \overline{DE}$ si trova il punto medio M di $\overline{CE}$ ove: $\overline{CM} = \overline{CE}$; centro in M e raggio $\overline{CE} = \overline{CM}$ si traccia una semicirconferenza, quindi prolungando $\overline{DB}$ fino ad F avremo $\overline{DF} = l$ = lato del quadrato equivalente ed DFGH è il quadrato equivalente al rettangolo CDBA. In questo caso abbiamo utilizzato il 2° teorema di Euclide (vedi triangolo rettangolo CFE.

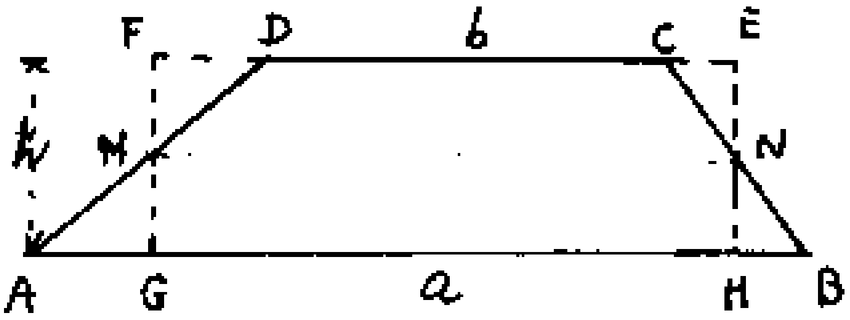
Dato un quadrilatero qualsiasi, trovare il triangolo equivalente



Se vogliamo che il triangolo abbia la base su AB ed il vertice in D, tracciamo la diagonale $\overline{DB}$ e da C la parallela a $\overline{DB}$ fino ad E. La retta $\overline{CE}$ è il luogo dei vertici dei triangoli equivalenti aventi per base $\overline{DB}$ perciò i triangoli DCB e DEB sono equivalenti per cui il quadrilatero ABCD equivale al triangolo AED. Ripetendo questa costruzione si riduce a triangolo equivalente ogni poligono.

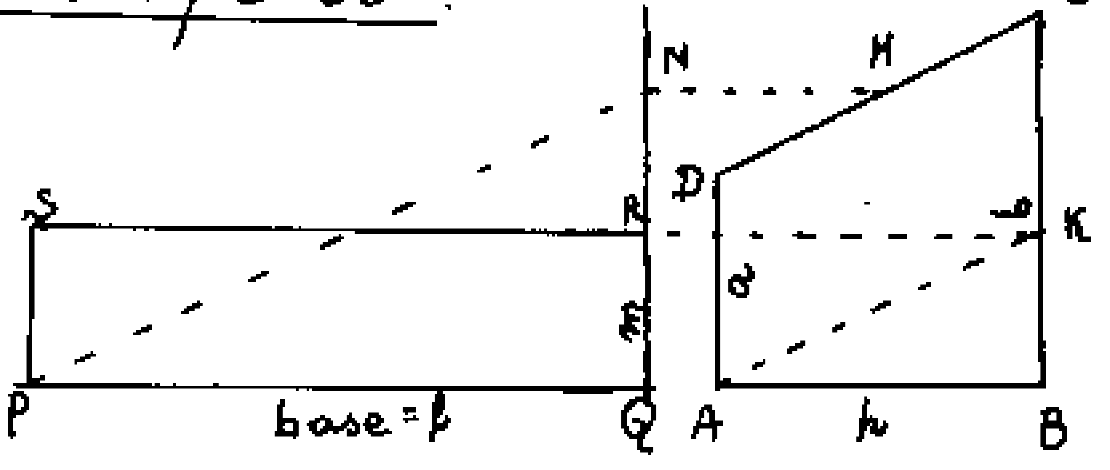
Dato un trapezio qualsiasi disegnare il rettangolo equivalente

Per i punti medi M ed N dei lati obliqui del trapezio ABCD, tracciamo le perpendicolari



alle basi $\overline{AB}$=a ed $\overline{CD}$=b; avremo così il rettangolo equivalente EFGH, infatti i triangoli MGA ed MFD sono uguali, ed anche i triangoli: NEC ed NHB sono uguali, perciò aggiungendo all'area comune: NCDMGH i triangoli MGA ed NHB si ottiene il trapezio, mentre aggiungendo all'area comune NCDMGH i triangoli MFD ed NEC (di uguale area dei precedenti, si ottiene il rettangolo EFGH. Il segmento $\overline{MN}$ è medio fra le basi per cui l'area del trapezio $A_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

Dato un trapezio rettangolo disegnare il rettangolo equivalente di base assegnata $\overline{PQ}$ e giacente sul prolungamento dell'altezza $\overline{AB}$ del trapezio

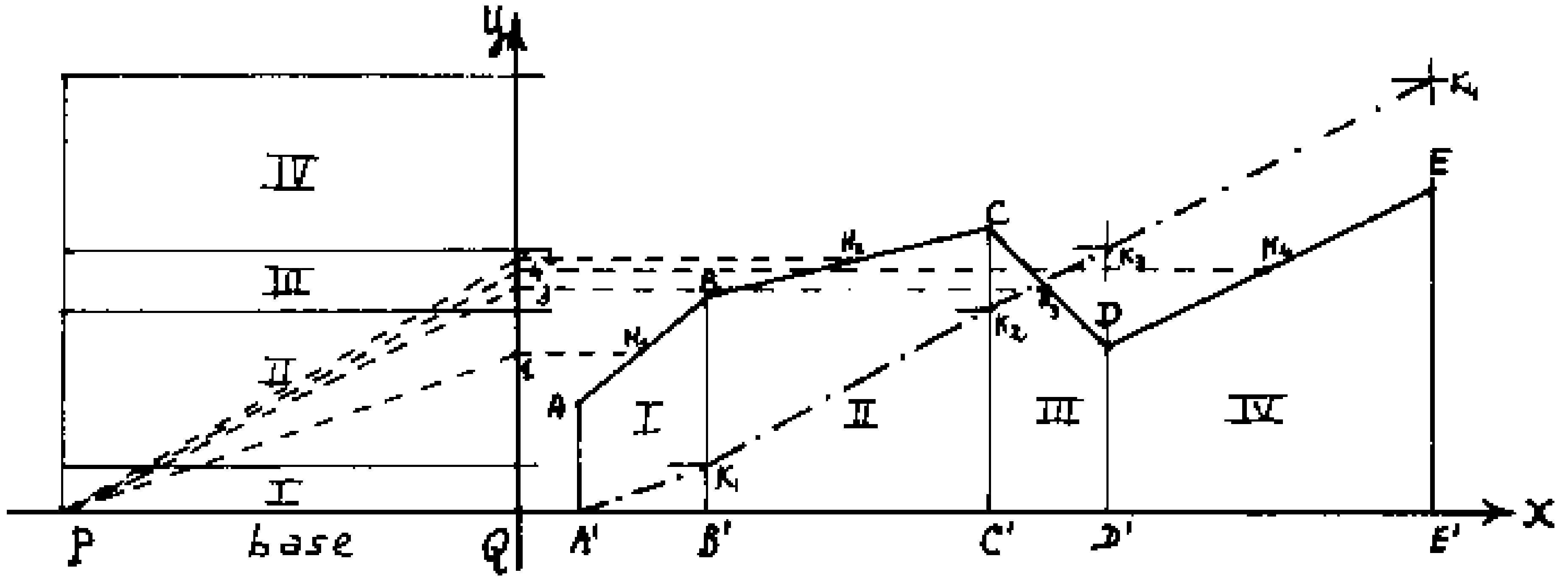


Proiettiamo in N il punto medio M del lato obliquo $\overline{DC}$ e tracciamo $\overline{AK}$ // $\overline{PN}$, proiettiamo

K in R ed avremo PQRS il rettangolo equivalente. Infatti : Area = $\frac{a+b}{2}\cdot h = (\overline{QN})h = lm$, $\overline{QN} : l = m : h$. Questo metodo generalizzato viene chiamato integrazione grafica.

INTEGRAZIONE GRAFICA

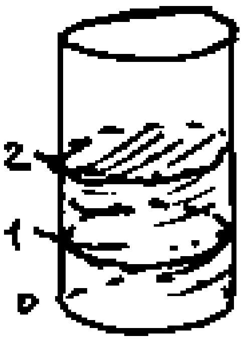
Data una poligonale ABCDE riferita agli assi x,y Si vuole l'area (rettangolo equivalente) della porzione di piano delimitata dall'asse x, dalla poligonale e dalle ordinate dei punti estremi A ed E.

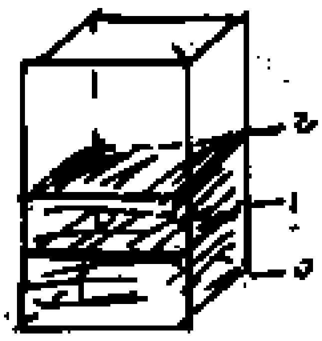


La poligonale si suddivide in quattro trapezi, per base si sceglie, in scala, un numero facile da moltiplicare (come uno, oppure dieci). Fatta la costruzione come l'esercizio precedente troviamo che l'altezza del primo rettangolo equivalente al primo trapezio è $\overline{B_1K_1}$. La parallela a $\overline{PN_2}$ sarà $\overline{K_1K_2}$ così l'altezza del secondo rettangolo sarà la differenza di ordinate fra K_1 e K_2, e la linea $AK_1K_2K_3K_4$ è detta curva integrale, le cui ordinate (per la base) sono le aree.

Le capacità, i volumi

La misura di capacità, è una misura di volume. Per rendersi conto dei volumi, facciamo una esperienza. Prendiamo una bottiglia, cilindrica o prismatica, (cioè che abbia la stessa figura di sezione a qualunque altezza si tagli perpendicolarmente), ed un bicchiere o misurino col quale si possa stabilire <u>una stessa quantità</u> di liquido. Mettiamo nella bottiglia il primo bicchiere di liquido, in trasparenza vedremo una certa altezza di liquido che segneremo con un tratto sulla superficie della bottiglia. Il liquido ha assunto la forma di un prismettino o cilindrino alto fino al tratto. Mettiamo ora un secondo bicchiere di liquido nella bottiglia vedremo innalzarsi il livello del liquido nella bottiglia e lo fisseremo tracciando un secondo tratto, se mettiamo un terzo bicchiere avremo un terzo tratto e così via... se l'area delle sezioni della bottiglia è la stessa i tratti risultano equidistanti, è come se si fossero sovrapposti tanti volumetti elementari.



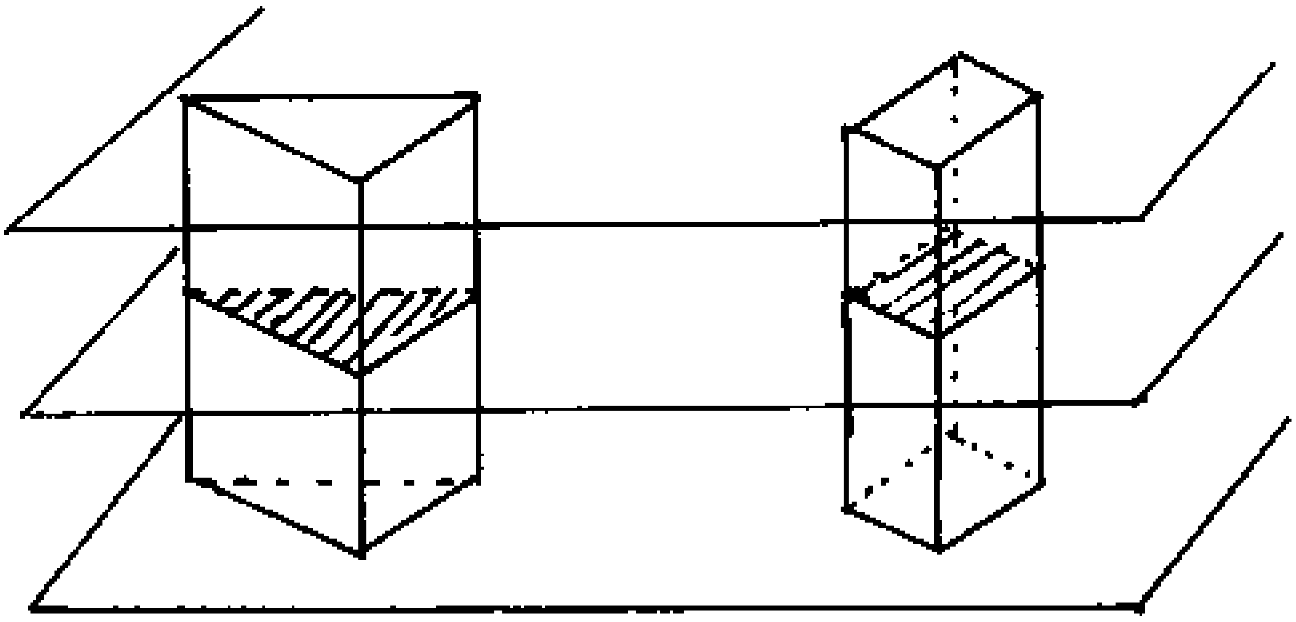


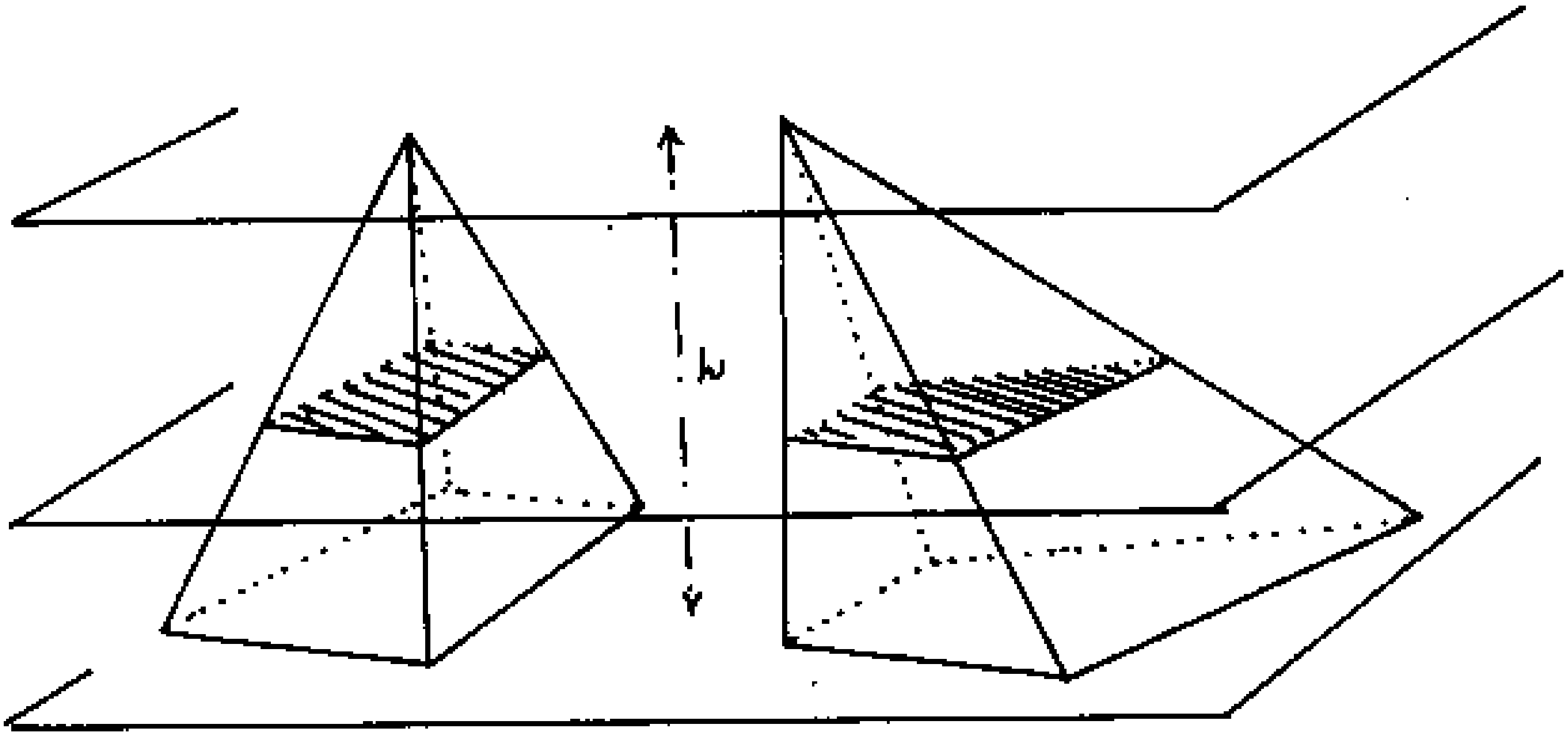
perciò, a parità di base, il volume è proporzionale all'altezza. Se mettiamo la stessa quantità di liquido in recipienti aventi area di base (e di sezione) doppia, tripla, ecc. vedremo che l'altezza del liquido risulta metà, un terzo, ecc. Ciò vuol dire che il volume è proporzionale all'area della sezione (o di base). Da ciò il volume di un cilindro o di un prisma risulta dal prodotto dell'area di base per l'altezza. Quindi dimensionalmente un volume è una lunghezza elevata al cubo. Se l = lunghezza lineare, avremo che: l^2 = area ; l^3 = volume. Cioè se $l = 1$ anche $l^3 = 1$ perciò l'unità di volume è un cubo di spigolo unitario. (La parola cubo ha due significati, uno è il solido esaedro, l'altro è la terza potenza cioè una base con esponente 3 si dice elevata al cubo).

Per un errore di campionatura, gli scienziati dell'epoca, non riuscirono a far sì che un decimetro cubo di acqua distillata, a 4° C e 760 mm di pressione, fosse esattamente un Kg, ma risultò: $0,999972 \ldots \simeq 1$ Kg, perciò inventarono il "litro" ove un litro di acqua nelle suddette condizioni pesa esattamente 1 Kg. Un litro quindi equivale a 1,000028 dm^3. Per i calcoli ordinari si può considerare 1 litro $\cong dm^3$. (Fu scelta l'acqua alla massima densità, in modo che si dilatasse sia aumentando che diminuendo la temperatura. Un Kg di tale acqua (Kg massa) deve rappresentare l'unità di massa)

Principio di Cavalieri

Dati due solidi, se esiste una giacitura di piani paralleli, tale che, ciascun piano di essa che tagli i due solidi formi sezioni equivalenti, i due solidi sono equivalenti



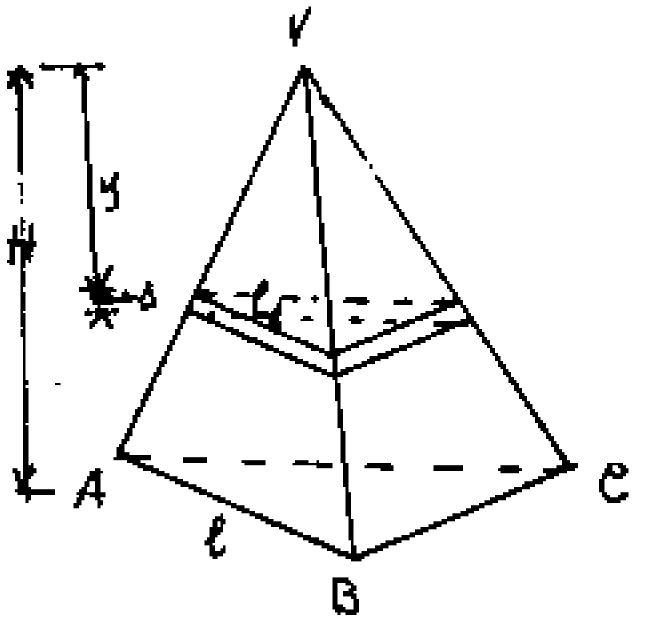


E' come considerare un volume costituito da tanti fogli, sottili di spessore costante, sovrapposti. Ciascun foglio ha il suo volume piccolissimo costituito dalla sua area per lo spessore.

Bonaventura Cavalieri, milanese (1598 - 1647), gesuata, discepolo di Galileo, insegnò a Bologna e scoperse la: "teoria degli indivisibili", egli chiamò: "Indivisibile" ciò che modernamente è il differenziale volume. Cioè, con discorso analogo a quello degli Eleati, egli pensò di dividere in due lo spessore di ciò che noi abbiamo chiamato: fogli sottili, e metà la gettiamo e l'altra metà la dividiamo, il procedimento non ha fine, quando finire l'ultimo spessore il nostro foglio diventerebbe una superficie piana priva di spessore, mentre l'attimo avanti l'ultimo taglio si ha il più piccolo volume possibile avente per base l'area del foglio e per spessore un infinitesimo che chiameremo differenziale. (Come si vede il calcolo infinitesimale aveva già gettato le sue basi, ben prima di Leibniz e di Newton.)

Avremo occasione di mostrare che la somma di differenziali si indica con una esse allungata $\int$, che si chiama integrale, ed il volume sarà la somma degli indivisibili - Il principio di Cavalieri dice:

Due solidi compresi fra due stessi piani paralleli sono equivalenti quando si compongono degli stessi indivisibili.



In una piramide le dimensioni lineari delle sezioni parallele alla base sono proporzionali alla distanza dal vertice:

$$l : l_1 = H : y$$

$$l_1 = \frac{ly}{H} = \rho l$$ ove ρ = coefficiente di proporzionalità lineare.

Le aree delle sezioni sono proporzionali al quadrato delle misure lineari, cioè sono proporzionali al quadrato della loro distanza dal vertice

$$S_b : S = H^2 : y^2$$

$$S = \frac{S_b y^2}{H^2} = S_b \rho^2$$

I volumi sono proporzionali ai cubi delle misure lineari. possiamo scrivere $V_1 = V_b \rho^3 = K y^3$ (ove K= coeff. prop.)

Il volume di un foglio distante y dal vertice sarà: $K(y+s)^3 - Ky^3 = S_1 \cdot s = \frac{S_b}{H} y s$

$$K(\cancel{y^3} + 3y^2 s + 3ys^2 + s^3)\cancel{s} = \frac{S_b}{H} y s$$

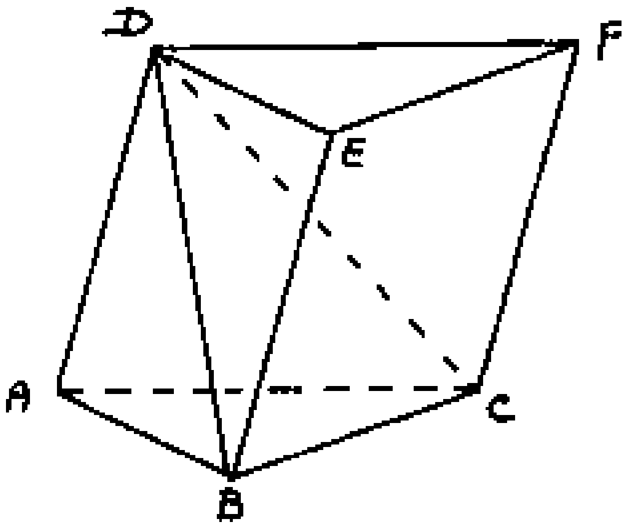
$$K(3y^2 + 3ys + s^2) = \frac{S_b}{H} y = S_1$$

Se pensiamo che s è lo spessore di un indivisibile infinitamente più piccolo di y^2 avremo che $K 3 y^2 = S_1$

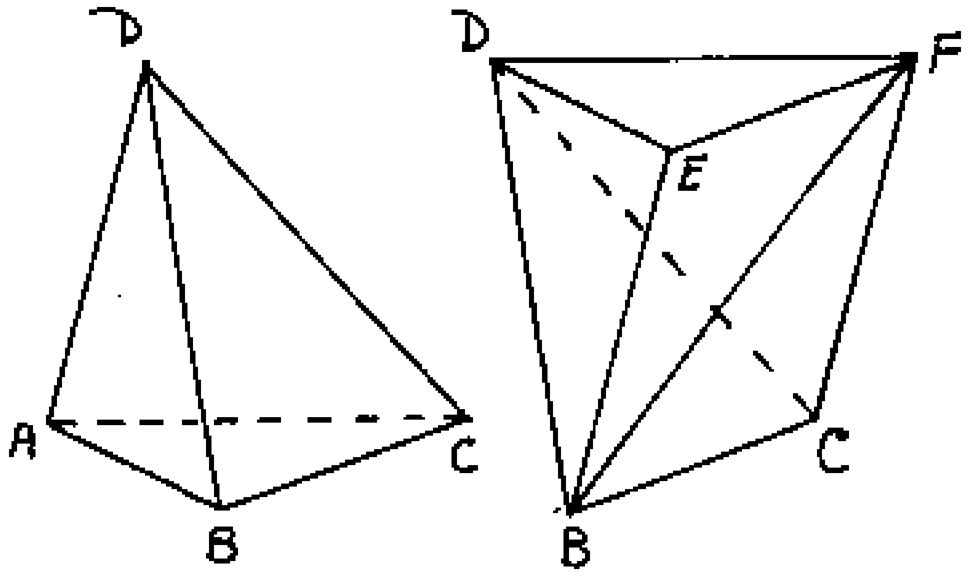
e moltiplicando per y:

$$\boxed{K y^3 = V_1 = \frac{S_1 y}{3}}$$

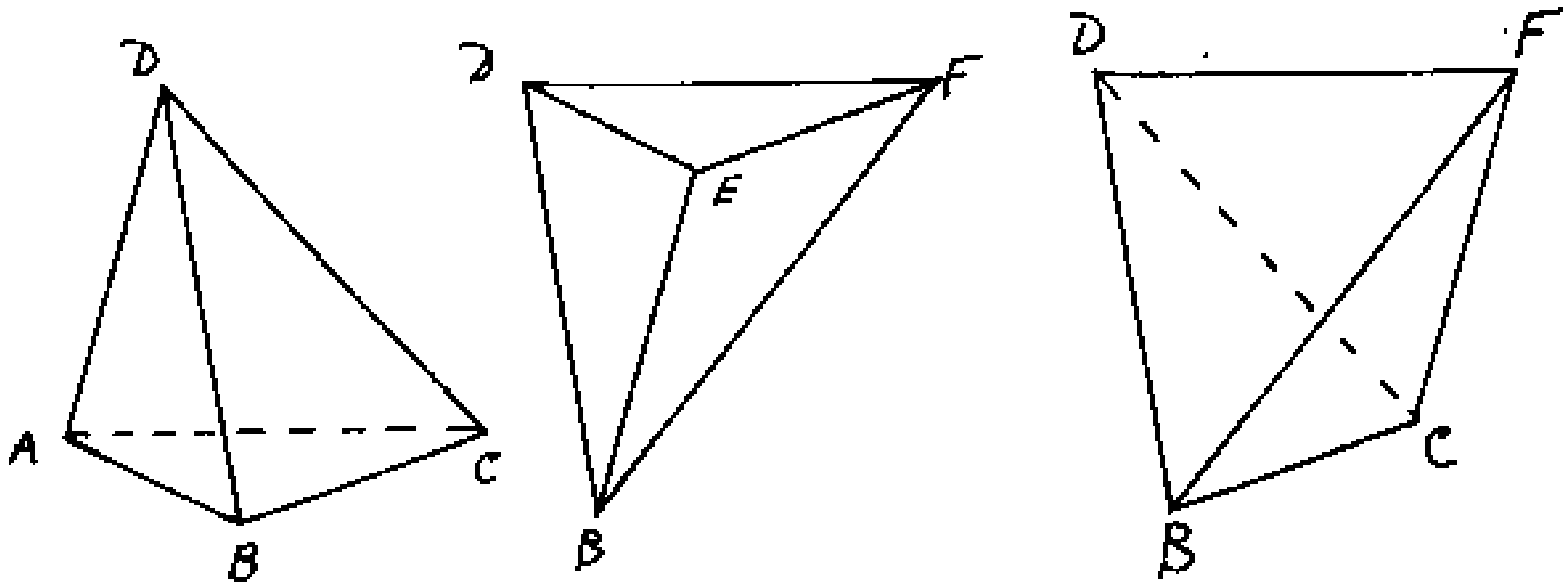
cioè il volume di una piramide è un terzo del prodotto della base per la distanza dal vertice (altezza)



La piramide ABCD ha la stessa base e la stessa altezza del prisma ABCDEF.



La piramide a base quadrangolare BCFE e vertice D viene divisa in due parti dal piano DBF.



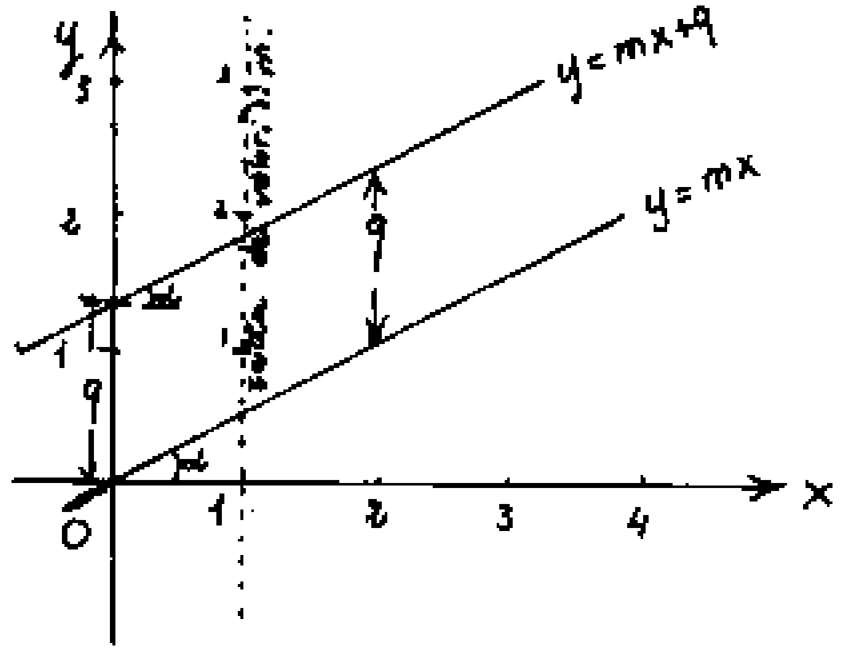
Le piramidi ABCD e DEFB hanno lo stesso volume avendo uguali le basi ABC = DEF e stessa altezza.

Le piramidi BEFD e BFCD hanno lo stesso volume perché le aree di base BEF e BCF sono uguali a metà del parallelogramma BCFE e stessa altezza avendo in comune il piano di base ed il vertice. Perciò il volume uguale delle tre piramidi è un terzo del volume del prisma.

Le equazioni

Abbiamo visto che certe espressioni matematiche possono ridursi alla forma: $y = f(x)$ che si legge: "y = funzione della x.", cioè assegnato un valore numerico, arbitrario, definito alla variabile indipendente "x", risulta definito il corrispondente valore numerico della variabile dipendente "y". La parola: "funzione" è la "generalizzazione" di espressioni matematiche più o meno complesse contenenti almeno una variabile x, ove sostituendo alla x (o alle x) il prescelto valore numerico, ed effettuati i calcoli dell'espressione matematica, si ottiene un'altro valore numerico, che è quello della variabile dipendente (y). La parola "funzione" esprime quindi un concetto di dipendenza (la y dipende dalla x).

Fra le più semplici correlazioni fra x ed y è l'espressione: $\boxed{y = mx}$ che abbiamo già visto nella trattazione dei numeri razionali, ed abbiamo già detto che l'espressione sopra scritta è l'equazione di una retta in forma esplicita, passante per l'origine degli assi. Ove m è il coefficiente angolare e rappresenta la "pendenza della retta. I valori di m, (per rette passanti per l'origine O degli assi) si possono leggere sulla retta parallela ad y e passante per $x = 1$.



Ogni punto del piano x,y può essere individuato da due valori numerici detti: "Coordinate" di quel punto. Prima il valore "x" detto ascissa che misura (positivamente o negativamente) la distanza del punto dall'asse y. L'asse x è detta asse delle ascisse. Poi segue il valore "y" detto ordinata che misura (positivamente o negativamente) la distanza del punto dall'asse x. L'asse y è detta asse delle ordinate. (per es. $P \equiv (x_P ; y_P)$). L'ascissa "x_P" e l'ordinata "y_P", sono dette coordinate cartesiane del punto P. Ogni correlazione fra le variabili x ed y rappresenta un luogo geometrico, per esempio le rette per l'origine scritte nella forma: $\frac{y}{x} = m$, possono definirsi: "il luogo geometrico di tutti i punti le cui coordinate hanno rapporto costante". La retta dei valori di m, cioè: $x = 1$, sarà il "luogo geometrico di tutti i punti aventi la stessa ascissa $x = 1$".

Tutte le rette parallele hanno lo stesso coefficiente angolare "m", quindi se trasliamo in direzione ± y parallelamente a se stessa una retta per l'origine, e sia "q" l'entitá della traslazione; tutti i punti della retta per l'origine manterranno la stessa ascissa x mentre l'ordinata varia di "± q". Il "q" è detto: <u>coefficiente di traslazione lineare</u>, e l'equazione della retta generica in <u>forma esplicita</u> diventa:

$$\boxed{y = mx + q}$$

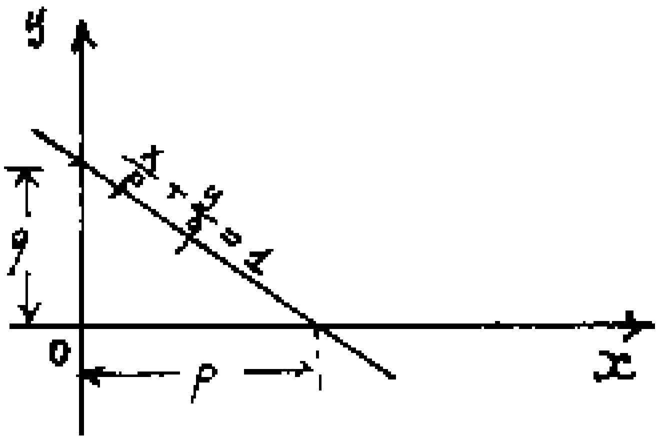
Il valore di "q" si legge sulla retta delle y nel punto ove la retta interseca tale asse.

Se nell'equazione della retta poniamo: $y = 0$ e risolviamo "x" si ha: $x = -q/m$, posto: $-q/m = p$; $m = -q/p$ sostituendo: $y = -\frac{q}{p}x + q$ che può scriversi:

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$

(<u>equazione della retta in forma segmentaria</u>)

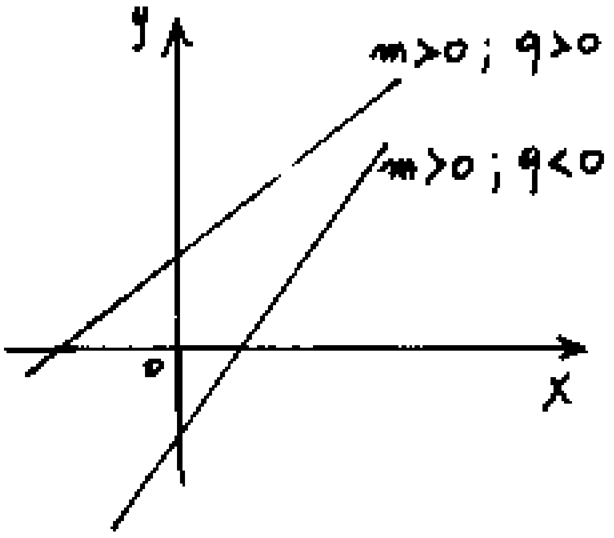
"p" e "q" rappresentano i segmenti intercettati dalla retta sugli assi x ed y. Moltiplicando l'equazione segmentaria della retta per (p.q) abbiamo: $qx + py - qp = 0$ e posto: $q = a$; $p = b$; $-(qp) = c$ sostituendo:

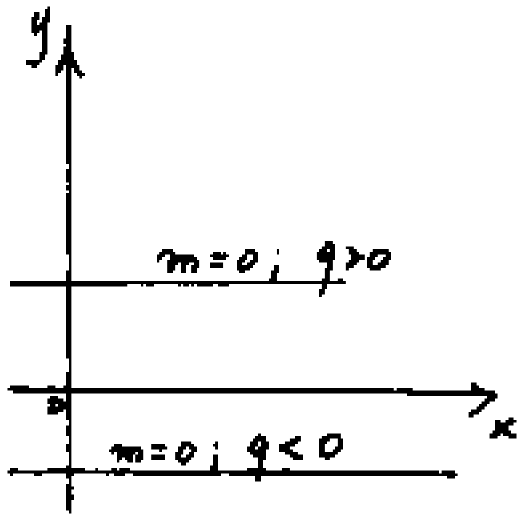


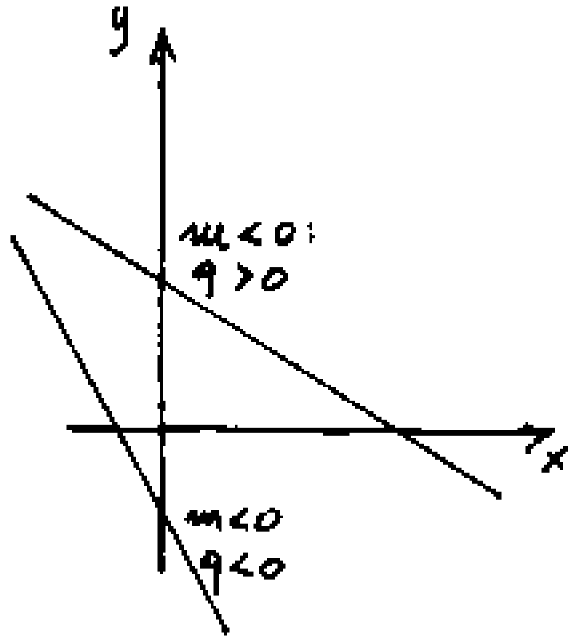
$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

<u>equazione della retta in forma implicita.</u>

E' molto importante notare i segni di "m" e di "q"
Per: $m=0$ si hanno rette parallele ad x di equazione: $y=q$.







L'equazione della retta in forma implicita: $ax+by+c=0$ è la forma lineare generale per esprimere le equazioni lineari (o di I° grado) in due incognite.

Equazioni Lineari

La più semplice equazione lineare in una incognita è del tipo: $ax+b=0$ da cui: $x=-b/a$.
(Graficamente sarebbe l'ascissa p)

Ricordiamo che per equazioni lineari in più incognite occorrono tante equazioni "indipendenti" quante sono le incognite. Faremo in seguito la trattazione generale, ora studiamo i metodi risolutivi di due equazioni in due incognite, e la loro rappresentazione grafica.

Si abbia il sistema:

$$\begin{cases} x+2y-8=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$$

conviene scriverlo nella forma:

$$\begin{cases} x+2y=8 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

cioè conviene portare la colonna dei termini noti a secondo membro.

I°) metodo risolutivo detto di riduzione, o di somma e sottrazione. "Consiste nel moltiplicare o dividere le uguaglianze in modo che l'incognita che si vuole eliminare abbia coefficienti uguali e di segno opposto, cosicché sommando le due equazioni tale incognita si elide".

moltiplichiamo per -1 la seconda equazione e sommiamo:

$$\begin{array}{r} \cancel{x}+2y=8 \\ \cancel{-x}+y=1 \\ \hline 3y=9 \end{array} \qquad \text{da cui: } y=\frac{9}{3}=3$$

invece moltiplicando per $+2$ la seconda equazione e sommando si ha:

$$\begin{array}{r} x+\cancel{2y}=8 \\ 2x\cancel{-2y}=-2 \\ \hline 3x=6 \end{array} \qquad \text{da cui } x=\frac{6}{3}=2$$

II° metodo detto di sostituzione

esplicitata una incognita si sostituisce nell'altra.

dalla 2ª equazione si ha: $x=-1+y$ e sostituendo nella 1ª equazione: $(-1+y)+2y=8$ da cui $3y=9$ $y=\frac{9}{3}=3$ e riportando y nella x esplicitata: $x=-1+3=2$.

III° metodo detto di Confronto

Si esplicita la stessa incognita nelle due equazioni e si uguagliano (si confrontano) le espressioni.

$$x = (8-2y) \;;\quad x = (y-1) \;;\quad (8-2y) = (y-1)$$

$$3y = 9 \qquad y = \frac{9}{3} = 3 \qquad x = 3-1 = 2$$

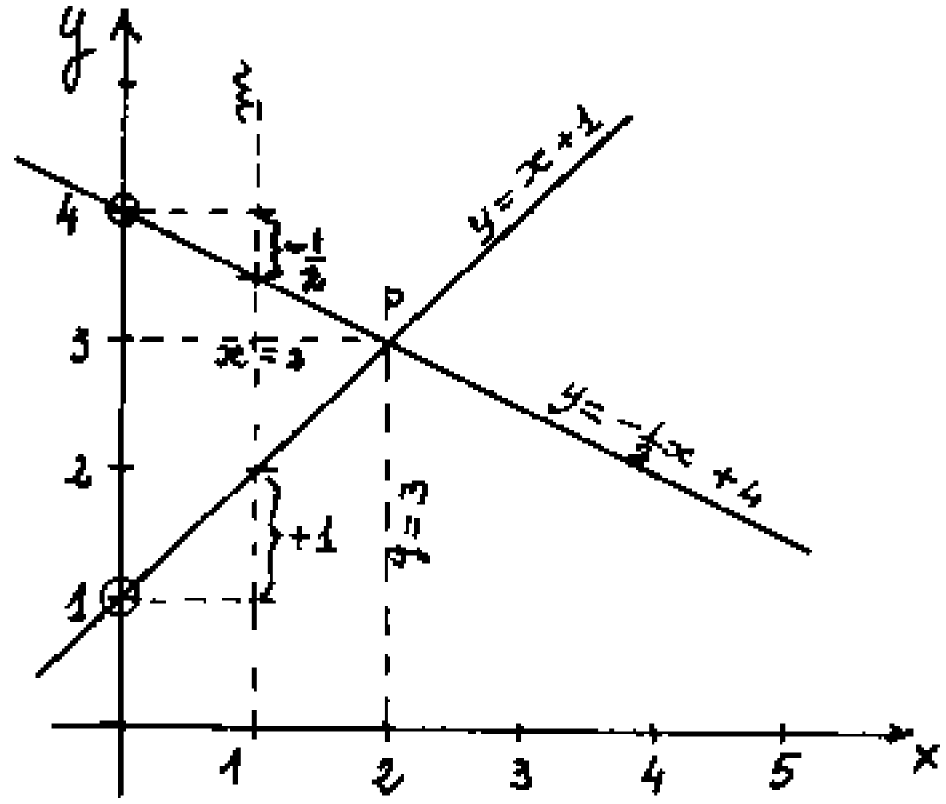
Se avessimo esplicitata la y avremmo:

$$\begin{cases} y = \left(-\frac{1}{2}x + 4\right) \\ y = (x + 1) \end{cases} \qquad (x+1) = \left(-\frac{1}{2}x + 4\right) \qquad \frac{3}{2}x = 3$$

$$x = 2 \;;\quad y = (2+1) = 3$$

questa forma consente la verifica grafica, infatti è facile disegnare le due rette espresse in forma esplicita:

"Fissato sulla y il punto di traslazione, ponendo zero la stessa quota sulla "m" si fissa la pendenza. Il punto comune alle due rette risolve il sistema."



Il disegno a fianco dimostra che un sistema di equazioni in due incognite può essere facilmente risolto graficamente, o almeno, per via grafica, verificato.

Equazioni indipendenti

Notiamo che ogni equazione corrisponde a una correlazione che è espressa in una uguaglianza; e poiché moltiplicando o dividendo i due membri dell'uguaglianza per uno stesso numero l'eguaglianza non cambia, cioè la correlazione rimane la stessa, ed è graficamente rappresentata dalla stessa retta, cioè le due espressioni non sono indipendenti (sono la stessa equazione espressa in forma diversa). esempio:

(rette sovrapposte) $\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y = 5 \\ 6x + 4y = 10 \end{array}\right\}$ (sistema indeterminato)

sono due rette sovrapposte ogni punto può essere una soluzione, ma resta indeterminato quale punto.

Notiamo anche che due correlazioni possono essere contradditorie, e non possiamo decidere quale di esse sia vera, ammesso che una delle due sia vera l'altra è certamente falsa. (Anche queste equazioni non sono indipendenti e non possono essere entrambe vere).

esempio:

(rette parallele non si incontrano) $\left\{\begin{array}{l} (x + y) = 7 \\ (x + y) = 9 \end{array}\right\}$ (sistema impossibile)

Abbiamo detto che ogni equazione è una correlazione fra le grandezze espressa in linguaggio matematico, cioè fra il testo di un problema esposto in lingua parlata ed il linguaggio matematico si può fare una traduzione, direi quasi interlineare. Per esempio

problema.

La somma di due numeri	è	sessantadue
$x + y$	$=$	62

Il quoziente del maggiore per il minore è 3 e resto 6

si può scrivere: $\begin{array}{l|l} x & y \\ \cline{2-2} 6 & 3 \end{array}$ oppure: $\frac{x}{y} = 3 + \frac{6}{y}$

ove moltiplicando per y si ottiene $x = 3y + 6$

avremo così il sistema ordinato:

$$\begin{cases} x + y = 62 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

che per riduzione:

$$4y = 56 \quad \supset \quad y = 14 \ ; \quad x = 62 - 14 = 48$$

possiamo verificare che i due numeri: 48 e 14 soddisfano le correlazioni imposte:

$$48 + 14 = 62 \quad ; \qquad \begin{array}{l|l} 48 & 14 \\ \cline{2-2} =6 & 3 \end{array} \quad ;$$

4) Metodo di Cramer o dei determinanti

Dopo aver ordinato il sistema di equazioni in modo che ogni riga, che costituisce una equazione, abbia, incolonnate in verticale con le altre righe, le stesse incognite, i simboli di "=" e gli elementi noti; riportiamo, nello stesso ordine, i soli coefficienti delle incognite; otterremo così una tabella (o quadro) che delimiteremo con due barre verticali. Questa tabella (o quadro o prospetto) si chiama: "*determinante dei coefficienti*" (detta anche matrice incompleta) ed è costituita da tante righe quante sono le equazioni e da tante colonne quante sono le incognite, perciò, nel caso risolutivo, è un prospetto quadrato. (Matrice quadrata = determinante)

$$\begin{cases} x + y = 62 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{cc} (x) & (y) \\ 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{array}\right| \quad \text{determinante dei coefficienti}$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 62 \\ 1 & -3 & 6 \end{array}\right| \quad \text{matrice completa}$$

Se al prospetto aggiungiamo la colonna dei termini noti si ottiene la cosiddetta *Matrice completa*.

Nei determinanti occorre considerare le diagonali del prospetto quadrato. La diagonale che dal punto in alto a sinistra scende al punto in basso a destra |⋱| si chiama diagonale *principale* (prodotti positivi degli elementi). L'altra |⋰| è detta *seconda* diagonale (prodotti negativi degli elementi).

Il valore di un determinante di due sole righe e colonne, è dato dalla somma algebrica dei prodotti degli elementi diagonali, presi col segno che compete alla diagonale cioé:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = +[(1)(-3)] - [(1)(1)] = -3-1 = \Delta = -4 \qquad \boxed{\Delta = -4}$$

Se facciamo un nuovo determinante sostituendo alla colonna di una incognita la colonna dei termini noti, il valore di questo determinante diviso Δ è il valore dell'incognita.

$$\begin{vmatrix} 62 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = \Delta x = [(62)(-3)] - [(6)(1)] = -192 \qquad x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-192}{-4} = +48$$

$$\boxed{X = +48}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 62 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = \Delta y = [(1)(6)] - [(62)(1)] = -56 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-56}{-4} = +14$$

$$\boxed{y = +14}$$

Qualora si abbiano tre equazioni in tre incognite, si usa la regola di <u>Sarrus</u> la quale dice di affiancare a destra del determinante le prime due colonne a sinistra e quindi fare la somma dei prodotti diagonale col segno previsto.

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y - 5z = 7 \\ 2x - 5y + 7z = 0 \\ 4x - 3y + 2z = 4 \end{array}\right\}$$ sistema di equazioni da risolvere col metodo di Sarrus.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -3 & +2 \end{vmatrix} = \Delta = \left\vdots\begin{array}{ccc:cc} 3 & 2 & -5 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 7 & 2 & -5 \\ 4 & -3 & +2 & 4 & -3 \end{array}\right\vdots = +[(3)(-5)(2)] + [(2)(7)(4)] + [(-5)(2)(-3)] - [(-5)(-5)(4)]$$

$$-[(3)(7)(-3)] - [(2)(2)(2)] = \cancel{(-30)} + (56) + \cancel{(+30)}$$

$$-(100) - (-63) - (8) = \boxed{\Delta = 11}$$

Sostituendo la colonna dei termini noti alla colonna di una incognita:

$$\begin{array}{ccc|cc} x & y & z & & \\ 7 & 2 & -5 & 7 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & 0 & -5 \\ 4 & -3 & -3 & 4 & -3 \end{array} = \Delta x = [(7)(-5)(2)] + [(2)(7)(4)] + [(-5)(0)(-3)] - [(-5)(-5)(4)] - [(7)(7)(-3)] - 0$$

$\Delta x = (-70)+(56)-(100)+(147) = +33$; $\quad x = \frac{\Delta x}{\Delta}$; $x = \frac{33}{11}$

$$\boxed{x = 3}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} & y & & & \\ 3 & 7 & -5 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & -3 & 4 & 4 \end{array} = \Delta y = +[0] + [(7)(7)(4)] + [(-5)(2)(4)] - [0] - [3(7)(4)] - [(7)(2)(2)]$$

$\Delta y = 196 - 40 - 84 - 28 = 44 \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{44}{11} = 4$

$$\boxed{y = 4}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} & & z & & \\ 3 & 2 & 7 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 0 & 2 & -5 \\ 4 & -3 & 4 & 4 & -3 \end{array} \quad \Delta z = +[(3)(-5)(4)] + [0] + [(7)(2)(-3)] - [(7)(-5)(4)] - [0] - [(2)(2)(4)]$$

$\Delta z = (-60) - (42) + (140) - (16) = +22$; $\quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{22}{11}$

$$\boxed{z = 2}$$

Questi procedimenti applicano la <u>regola di Cramer</u> la quale dice:

"Dato un sistema lineare di n equazioni in n incognite, col determinante dei coefficienti diverso da zero, il sistema ha una ed una sola soluzione, ed il valore di ciascuna incognita è il rapporto, fra il determinante che si ottiene sostituendo alla colonna dell'incognita la colonna dei termini noti, ed il determinante dei coefficienti."

C'è una osservazione da fare sul calcolo dei determinanti: "Se una o più righe (colonne) sono combinazioni lineari di più altre righe (colonne), (intendendo per combinazione lineare la somma o differenza di una o più righe (colonne) moltiplicate per coefficienti arbitrari), allora il determinante è identicamente nullo"

. In altre parole, le correlazioni espresse per righe (o per colonne) non sono indipendenti. Abbiamo visto che la combinazione lineare nei coefficienti (cioè la non indipendenza delle relazioni) porta a sistemi di equazioni indeterminati: $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 6x + 4y = 10 \end{cases}$ oppure impossibili: $\begin{cases} x+y=5 \\ x+y=7 \end{cases}$ Quindi se il determinante dei coefficienti è nullo ($\Delta = 0$) il sistema o è indeterminato, o è impossibile.

Se sono nulli anche i determinanti $\Delta x_i = 0$ allora $x_i = \frac{0}{0}$ indeterminato se invece $\Delta x_i \neq 0$ allora $x_i = \frac{N}{0}$ .. il sistema è impossibile

---

Nei sitemi di equazioni con numero di incognite superiore a tre, non è più applicabile il metodo di Sarrus, pur restando valida la regola di Cramer; si può usare il metodo di Gaus o per successive sostituzioni. Esso consiste nell'esplicitare una incognita in una equazione e sostituirla in tutte le altre, avremo $(n-1)$ equazioni in $(n-1)$ incognite. Quindi si ripete il procedimento fino ad arrivare ad una equazione in una incognita il cui valore sostituito a ritroso permette la risoluzione di tutte le incognite. Però il metodo classico resta quello dei determinanti. Vediamo quindi come si può risolvere un determinante con più di tre equazioni. Premettiamo alcune definizioni:

Chiamasi matrice rettangolare un quadro di m righe ed n colonne ($m \neq n$) ove l'elemento generico: $|a_{i,k}|$ è affetto da due indici: $i = 1, 2, 3 \cdots m$; $k = 1, 2, 3 \ldots n$

Dicesi determinante di ordine n una matrice quadrata di n righe ed n colonne: $|a_{i,k}|$; $i=1,2\ldots n$; $k=1,2\ldots n$.

Se in un determinante sopprimiamo la riga e la colonna dell'elemento $a_{i,k}$, otteniamo un nuovo determinante di ordine $(n-1)$ che è detto minore che indicheremo con $A_{i,k}$. Il prodotto di $A_{i,k}$ per $(-1)^{(i+k)}$ è detto Aggiunto o complemento algebrico dell'elemento $a_{i,k}$.

Si può dimostrare che lo sviluppo di un determinante è dato dalla somma dei prodotti ~~degli elementi~~ di una riga per i rispettivi complementi algebrici

(per esempio il determinante già calcolato con Sarrus)

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 7 \\ 4 & -3 & +2 \end{vmatrix} = +(7)\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -3 & +2 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 4 & +2 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = \underbrace{7(-10+21)}_{77} \underbrace{-2(-28)}_{+56} \underbrace{-5(20)}_{-100} = 33$$

Poiché sommando o sottraendo ~~ad una~~ riga una o più righe moltiplicate per coefficienti arbitrari il valore del determinante non cambia conviene ridurre una riga (o colonna) ad un solo elemento diverso da zero, in tal caso lo sviluppo per riga (colonna) si riduce ad un solo prodotto. Per esempio nel determinante svolto sopra, alla I riga sottraiamo la terza ed sommiamo la seconda avremo:

$$= \begin{vmatrix} 3 & +5 & -7 \\ 0 & -5 & 7 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 7 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 33$$

Questo metodo consente abbastanza spesso di semplificare notevolmente il calcolo di determinanti anche notevoli.

Se in un determinante si scambiano due righe o due colonne, cioè due linee parallele, il determinante cambia segno.

Due elementi $a_{i,K}$ ed $a_{K,i}$ simmetrici rispetto alla diagonale principale si dicono Coniugati

Se: $i_1, i_2 \dots i_K$ indicano le righe e: $J_1 . J_2 .. J_K$ le colonne, ed I°i due minori di ordine K.

$a_{i_1 i_2 \dots i_K, J_1 J_2 \dots J_K}$ e $a_{J_1 J_2 J_K, i_1 i_2 \dots i_K}$ si dicono coniugati

Diremo complemento algebrico o aggiunto di un minore il minore ottenuto sopprimendo le righe e le colonne occupate dal primo minore, moltiplicato per $(-1)^{i_1+i_2+\dots+i_K+J_1+J_2+\dots+J_K}$.

I° Teorema di Laplace

"Ogni determinante è uguale alla somma dei prodotti di tutti i minori di ordine K che si possono estrarre da K linee parallele moltiplicati per i rispettivi complementi algebrici"

Se $K = 1$ si ha lo sviluppo per riga (o colonna) che abbiamo già esposto.

Sistemi lineari in n incognite

Sistemi lineari – con numero di equazioni pari al numero delle incognite

Sia: Δ = determinante dei coefficienti delle incognite.

Δx_i = determinante in cui si è sostituita la colonna dei termini noti alla colonna dei coefficienti della x_i.

$\left(x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}\right.$; (Cramer)$\left.\right)$

Avremo:

- $\Delta = 0$; $\Delta x_i =$
  - $= 0 \rightarrow x_i = \frac{0}{0}$ (sistema indeterminato: almeno una equazione è combinazione lineare.)
  - $\neq 0 \rightarrow x_i = \frac{N}{0}$ (sistema impossibile: almeno una equazione è incompatibile)
- $\Delta \neq 0$; $\Delta x_i =$
  - $= 0 \rightarrow x_i = 0$
  - $\neq 0 \rightarrow x_i \neq 0$

  (Sistema possibile: determinato, equazioni compatibili e indipendenti radici reali.)

Se nel sistema figura un parametro (per es. K), risolviamo: $\Delta = f(K)$ e poniamo; $f(K) = 0$, da cui possiamo trovare i valori : $K = K_{01}, K_{02}, K_{03} \ldots K_{0n}$, che annullano: $f(K)$ e quindi Δ. Per $K \neq K_{01}, K_{02}, K_{03}, - K_{0n}$, cioè per $f(K) = \Delta \neq 0$, il sistema ammette soluzioni, e si ha un gruppo di radici per ogni valore di $K \neq K_{0_i}$. Tali radici sono in funzione di un parametro. I valori del parametro sono anche detti Autovalori, o valori caratteristici, o parametri.

Il concetto di Autovalore è più complesso e vedremo che discende dalle Equazioni Integrali (Vedi equazioni di Volterra e di Fredholm) ove gli eventuali valori del parametro per cui una equazione integrale è omogenea sono detti appunto autovalori, e le funzioni soluzione della equazione omogenea sono dette autofunzioni.

Sostituendo a K uno dei valori trovati che annullano $\Delta_i (K_{0_1}, K_{0_2}, \dots K_{0_n})$, avremo due casi:

$$x_i = \left.\begin{matrix} = 0 \\ \neq 0 \end{matrix}\right\} \text{che ci dicono: sistema} \begin{cases} \text{indeterminato} \\ \text{impossibile} \end{cases}$$

Sistemi lineari - con numero di equazioni minore del numero delle incognite.

Nel caso in esame, si portano al secondo membro, nella colonna dei termini noti, tante incognite quante sono le equazioni mancanti. Queste incognite si fanno funzionare come parametri (Autovalori).

Si risolve e si discute il sistema, come nel caso precedente.

Sistemi lineari - con numero di equazioni maggiore del numero delle incognite

È evidente che se le equazioni sono tutte compatibili, e si hanno tante equazioni indipendenti quante sono le incognite, cioé le equazioni eccedenti sono combinazione lineare delle altre, queste possono essere soppresse senza che muti il sistema. Peró si tratta di individuare quali siano le equazioni che possono essere soppresse. Se, per esempio si hanno: (n+1) equazioni in (n) incognite e l'equazione eccedente è combinazione lineare di una sola equazione, o comunque di un numero di equazioni minore di "n"; se sopprimiamo una qualsiasi delle equazioni coinvolte nella combinazione lineare, il sistema ammette soluzioni e non cambia, ma se sopprimiamo una equazione indipendente dalla combinazione lineare, avremo: $\Delta = 0$.

Occorre quindi molta attenzione per decidere quali equazioni possono essere soppresse.

Se invece il sistema contiene equazioni incompatibili, allora il sistema è impossibile, salvo individuare quali equazioni sono incompatibili e discutere su di esse il sistema.

Per trattare questi casi, ci si avvale del teorema di Rouché-Capelli.

Definizione: Dicesi caratteristica di una matrice l'ordine massimo dei minori non nulli estraibili da essa.

È evidente che in una matrice (per es) 4×7 l'ordine massimo dei minori non può superare 4 e se i minori di ordine 4 sono tutti nulli, si prova quelli di ordine 3, e così via.

Teorema di Rouché-Capelli

" Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare ammetta soluzioni è che la matrice incompleta (ottenuta dai soli coefficienti delle incognite) e la matrice completa (ottenuta aggiungendo alla precedente la colonna dei termini noti) abbiano la stessa caratteristica.

Nel caso semplice che l'equazione eccedente sia una sola (per es. 4 equaz. per tre incognite) l'aggiunta della colonna dei termini noti rende quadrata la matrice, e questa calcolata come determinante deve essere zero perché i minori estraibili dalla incompleta sono al massimo di ordine $(n-1)$. Se tale matrice fosse diversa da zero non potrebbe verificarsi la condizione posta dal teorema di Rouché-Capelli. Infatti tornando all'esempio di 4 equazioni in tre incognite, supponiamo che una sola equazione sia sopprimibile. Avremo che se questa equazione è combinazione lineare (e lo è anche nella colonna dei termini noti) la matrice (4×4) (completa) è nulla e l'ordine massimo dei minori decade a tre. Ma se l'equazione eccedente ha i coefficienti delle incognite combinazione lineare di altre, mentre non lo è il termine noto (cioè l'equazione è incompatibile) la matrice 4×4 sarà $\neq 0$ ed il sistema è impossibile.

Facciamo un esempio:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 7 \\ 2x - 5y + 7z = 0 \\ 4x - 3y + 2z = 4 \\ 9x - 6y + 4z = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y - 5z = 7 \\ 2x - 5y + 7z = 0 \\ 4x - 3y + 2z = 4 \\ 9x - 6y + 4z = 9 \end{cases}$$

l'ultima riga è la somma delle altre salvo i termini noti nel secondo sistema.

La prima matrice completa è: (di ordine 3)

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & 7 \\ 2 & -5 & 7 & 0 \\ 4 & -3 & +2 & 4 \\ 9 & -6 & +4 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

perchè se si sottrae le prime tre righe dall'ultima, questa riga diventa di elementi tutti nulli per le prime tre righe si è già risolto il sistema (Sarrus): $x = \frac{33}{11} = 3$; $y = \frac{44}{11} = 4$; $z = \frac{22}{11} = 2$.

Se invece sopprimiamo una qualsiasi delle prime tre righe (per esempio la I^a) abbiamo:

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -5 & 7 & 2 & -5 \\ 4 & -3 & 2 & 4 & -3 \\ 9 & -6 & 4 & 9 & -6 \end{array}\right. = \begin{array}{rr} -34 & +80 \\ -90 & +189 \\ -168 & +24 \\ \hline -282 & +293 \end{array} \qquad (293-282) = \Delta = 11$$

$$\Delta_x = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & -5 & 7 & 0 & -5 \\ 4 & -3 & 2 & 4 & -3 \\ 11 & -6 & 4 & 11 & -6 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{rr} 0 & +231 \\ -110 & 0 \\ -168 & +80 \\ \hline -278 & +311 \end{array} \qquad (311-278) = \Delta_x = 33 ;\ x = \frac{33}{11} = 3$$

$$\Delta y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 9 & 11 & 4 & 9 & 11 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{rr} +32 & -252 \\ 0 & -44 \\ +308 & 0 \\ \hline 340 & -296 \end{array} \qquad (340-296) = \Delta y = 44 ;\ y = \frac{44}{11} = 4$$

$$\Delta z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -5 & 0 & 2 & -5 \\ 4 & -3 & 4 & 4 & -3 \\ 9 & -6 & 11 & 9 & -6 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{rr} -66 & 0 \\ -180 & +48 \\ 0 & +220 \\ \hline -246 & +268 \end{array} \qquad (+268-246) = \Delta z = 22 ;\ z = \frac{22}{11} = 2$$

come si vede il sistema da sèmpre gli stessi valori qualunque siano le equazioni scelte.

La seconda matrice completa è:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & 7 \\ 2 & -5 & 7 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 4 \\ 9 & -6 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

se togliamo all'ultima riga le prime tre righe otteniamo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & 7 \\ 2 & -5 & 7 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(11) = (-22) \neq 0$$

Se sopprimiamo l'ultima riga si ottengono i risultati già calcolati: $x=3$; $y=4$; $z=2$.

Se sopprimiamo la primo riga si ha:

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -5 & 7 & 2 & -5 \\ 4 & -3 & 2 & 4 & -3 \\ 9 & -6 & 4 & 9 & -6 \end{array}\right| = \begin{array}{r} -24 \\ -90 \\ -168 \\ \hline -282 \end{array} \quad \begin{array}{r} +189 \\ +24 \\ +80 \\ \hline 293 \end{array} ; \quad \Delta = 11$$

$$\Delta_x = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & -5 & 7 & 0 & -5 \\ 4 & -3 & 2 & 4 & -3 \\ 9 & -6 & 4 & 9 & -6 \end{array}\right| \quad \begin{array}{r} 0 \\ -90 \\ -168 \\ \hline -258 \end{array} \quad \begin{array}{r} 189 \\ 0 \\ 80 \\ \hline 269 \end{array} \qquad \Delta x = 11 \qquad x = \frac{11}{11} = 1$$

$$\Delta_y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 9 & 9 & 4 & 9 & 9 \end{array}\right| \quad \begin{array}{r} 32 \\ 0 \\ 252 \\ \hline 284 \end{array} \quad \begin{array}{r} -252 \\ -36 \\ 0 \\ \hline -288 \end{array} \qquad \Delta y = -4 \qquad y = \frac{-4}{11}$$

$$\Delta_z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -5 & 0 & 2 & -5 \\ 4 & -3 & 4 & 4 & -3 \\ 9 & -6 & 9 & 9 & -6 \end{array}\right| \quad \begin{array}{r} -54 \\ -180 \\ 0 \\ \hline -234 \end{array} \quad \begin{array}{r} -0 \\ +48 \\ +180 \\ \hline +228 \end{array} \qquad \Delta z = -6 \qquad z = \frac{-6}{11}$$

Si possono avere 4 sistemi di tre equazioni rispettivamente sopprimendo, la quarta, la terza, la seconda, e la prima riga; otterremo quattro gruppi di tre risultati:

sopprimendo la 4ª riga: $x = \frac{33}{11} = 3$; $y = \frac{44}{11} = 4$; $z = \frac{22}{11} = 2$

" 3ª " $x = \frac{55}{11} = 5$; $y = \frac{106}{11} = 9,\overline{63}$; $z = \frac{60}{11} = 5,\overline{45}$

" 2ª " $x = \frac{11}{11} = 1$; $y = \frac{-8}{11} = -0,\overline{72}$; $z = \frac{-12}{11} = -1,\overline{09}$

" 1ª " $x = \frac{11}{11} = 1$; $y = \frac{-4}{11} = -0,\overline{36}$; $z = \frac{-6}{11} = -0,\overline{54}$

Tutti diversi, si noti che il determinante dei coefficiente è costante, poiché la quarta riga è composta dalla somma delle altre tre, salvo il termine noto ciò implica che la quarta riga è incompatibile con l'insieme delle altre tre, ma non con ciascuna di esse, per cui sono possibili gruppi di risultati diversi.

Consideriamo ora che solo due righe sono incompatibili (per esempio la III e la IV)

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & 7 \\ 2 & -5 & 7 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 4 \\ 8 & -6 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

togliendo all'ultima riga la 3ª moltiplicata per due otteniamo:

$$(-1)\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(11) = -11 \neq 0$$

Se sopprimiamo l'ultima riga otteniamo i soliti risultati: $x = 3$; $y = 4$; $z = 2$

Se sopprimiamo la penultima riga otteniamo:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -5 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 7 & 2 & -5 \\ 8 & -6 & 4 & 8 & -6 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{rrr} \cancel{-60} & +112 & -200 \\ \cancel{+60} & +126 & -16 \\ \hline & +238 & -216 \end{array} = \Delta = 22$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 7 & 2 & -5 & 7 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & 0 & -5 \\ 7 & -6 & 4 & 7 & -6 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{rr} -140 & +98 \\ -175 & +294 \\ \hline -315 & +392 \end{array} \quad \Delta_x = 77 \qquad x = \frac{77}{22} = 3,5$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 7 & -5 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ 8 & 7 & 4 & 8 & 7 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{rr} 392 & -70 \\ & -147 \\ & -56 \\ \hline & -273 \end{array} \quad \Delta_y = 119 \qquad y = \frac{119}{22} = 5,4\overline{09}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 7 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 0 & 2 & -5 \\ 8 & -6 & 7 & 8 & -6 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{rr} -105 & +280 \\ -84 & \\ -28 & \\ \hline -217 & \end{array} \quad \Delta_z = 63 \qquad z = \frac{63}{22} = 2,8\overline{63}$$

Le altre due possibili combinazioni di equazioni avranno $\Delta = 0$ mentre Δ_x ; Δ_y ; Δ_z saranno diversi da zero, ciò indica che vi sono equazioni incompatibili cioè che il sistema è impossibile, Cosa che già sapevamo per Rouché Capelli in quanto la matrice completa ha caratteristica 4 e l'incompleta caratteristica 3.

Si noti che nel caso di una sola equazione eccedente, che sia combinazione lineare di tutte le altre, avremo "n" gruppi di risoluzioni invariate. Se

Se invece una equazione è combinazione lineare solo di alcune, o addirittura di una sola, quando queste equazioni che esprimono uguali correlazioni si trovano nello stesso determinante esso sarà identicamente nullo. Cioè i gruppi di risoluzioni si ottengono se nel determinante non figurano equazioni esprimenti uguali correlazioni. Per esempio tre incognite e quattro equazioni di cui la IV è la somma della II e della III. Si hanno i seguenti gruppi:

I, II, III → ammette le radici
I II IV → " " "
I III IV → " " "
(stesse radici)
II III IV → non ammette radici (sistema indeterminato)

Se invece, dopo aver sommato, i coefficienti delle incognite fra la II e III equazione, poniamo nella IV un termine noto diverso dalla somma dei termini noti della III e II equazione, si ha che la matrice completa $\neq 0$; i primi tre gruppi forniscono, come abbiamo visto, radici diverse da gruppo a gruppo, l'ultimo gruppo non ammette radici $\Delta = 0$, ma $\Delta x_i \neq 0$ cioè: (sistema impossibile). Cioè la II^a e III^a equazione sono contraddittorie alla IV^a, ma potremmo meglio dire: "due delle tre equazioni II, III, IV, sono contradditore alla restante".

Ovviamente la matrice completa non può avere caratteristica inferiore della incompleta, avendosi "m" equazioni in "n" incognite, la matrice completa sarà: $[(n+1) \times m]$, mentre l'incompleta sarà $[n \times m]$. Si hanno i tre casi esaminati:

$(n = m)$; sistema possibile per equazioni indipendenti

$n > m$; (autovalori) " "

$n < m$; < impossibile per equazioni contradditorie
possibile se le equazioni eccedenti sono combinazione lineare.

Qualora le equazioni presentino parametri "K" cercheremo i valori di K che soddisfano il Teorema di Rouché-Capelli e discuteremo il sistema al variare di K.

Comunque, ammesso di aver trovato   radici, se questi valori soddisfano tutte le equazioni si possono sopprimere $(m-n)$ equazioni e qualunque siano il sistema (e le radici) resta invariato. Se invece queste radici non soddisfano tutte le equazioni, il sistema è impossibile, vi sono cioè equazioni incompatibili, la caratteristica della matrice completa è diversa (maggiore) di quella della matrice incompleta.

Equazioni di grado superiore al primo

Premesso che la risoluzione di una equazione di grado superiore al primo comporta tante radici (o valori risolutivi dell'incognita) quant'e' il grado dell'equazione.

Infatti se poniamo:

$$x=\alpha_1\ ;\quad x=\alpha_2\ ;\quad x=\alpha_3\ ;\ \dots\dots\ x=\alpha_n$$

possiamo scrivere:

$$(x-\alpha_1)=0\ ;\ (x-\alpha_2)=0;\ (x-\alpha_3)=0\ ;\dots(x-\alpha_n)=0$$

ed anche:

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots\dots(x-\alpha_n)=0$$

e sviluppando i prodotti avremo:

$$x^n-(\alpha_1+\alpha_2+\dots\alpha_n)x^{n-1}+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdot\alpha_i\alpha_j+\cdot)x^{n-2}-\dots\pm(\alpha_1\alpha_2\cdot\alpha_n)=0$$

equazione di grado "n" a segni alterni ove i coefficienti della x^{n-k}, con: $k=0,1,2,\dots n$ sono la somma dei prodotti delle radici prese in tutte le possibili combinazioni di k fattori.

Cio' premesso, se il polinomio al primo membro dell'equazione riusciamo a scomporlo nel prodotto di monomi $(x-\alpha_i)$ abbiamo risolto l'equazione.

Equazioni di 2° grado

Siano α e β le radici reali o immaginarie di una equazione di secondo grado, avremo:

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

cioè

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\cdot\beta=0$$

posto: S = somma delle radici = $(\alpha+\beta)$

P = prodotto delle radici = $\alpha\cdot\beta$

sostituendo: $\boxed{x^2-Sx+P=0}$ (è la forma ridotta dell'equazione di 2° grado)

La forma classica dell'equazione di 2° grado è:

$$\boxed{ax^2+bx+c=0}$$

ove: $\boxed{S=-b/a\ ;}$ $\boxed{P=c/a}$

Cerchiamo di trasformare l'equazione: $ax^2+bx+c=0$ in un quadrato perfetto.

Moltiplicando per $4a$ abbiamo: $4a^2x^2+4abx+4ac=0$

aggiungiamo e togliamo b^2: $4a^2x^2+4abx+b^2-b^2+4ac=0$

che può scriversi: $4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$

cioè: $(2ax+b)^2=b^2-4ac$ da cui:

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Formula risolutiva generale delle equazioni di 2° grado. Ove: $(b^2-4ac)=\Delta$ è detto discriminante dell'equazione.

La formula generale può scriversi:

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

cioè:

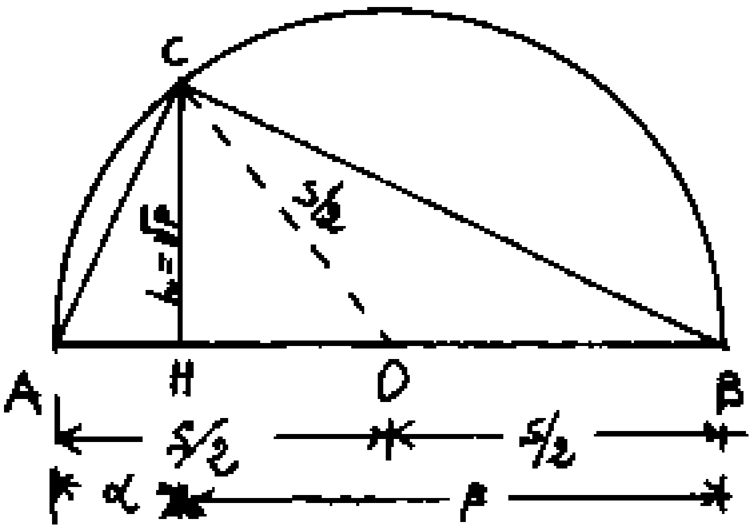
$$\boxed{x = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}}$$

<u>formula risolutiva in forma ridotta dell'equazione di 2° grado.</u>

Consideriamo il seguente problema:

"Di un triangolo rettangolo conosciamo l'ipotenusa S e l'altezza relativa all'ipotenusa $h = \sqrt{P}$, trovare una formula che esprima i valori delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa"

<u>Risoluzione</u>



Tracciata la semicirconferenza di centro "O" e raggio $S/2$, luogo geometrico di tutti i vertici retti dei triangoli rettangoli aventi per ipotenusa $\overline{AB} = S$, si individua il vertice distante $h = \sqrt{P}$ da $\overline{AB}$ avremo: $\overline{CH} = h = \sqrt{P}$; $\overline{OH} = \sqrt{(S/2)^2 - (\sqrt{P})^2}$; $\overline{AH} = S/2 - \overline{OH} = \alpha$

$\overline{BH} = S/2 + \overline{OH} = \beta$ cioè:

$$\boxed{\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}}$$

che è la formula risolutiva delle equazioni di 2° grado in forma ridotta.

Si può anche dire: Data la somma e il prodotto di due numeri essi si scosteranno dalla loro media aritmetica $S/2$ di un valore che è dato dalla radice della differenza fra il quadrato della media aritmetica $(S/2)^2$ e il quadrato della media geometrica $(\sqrt{P})^2$. Se i due numeri sono: $(\alpha \text{ e } \beta)$; $\frac{S}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$; $\sqrt{P} = \sqrt{\alpha\beta}$;

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\rangle = \frac{\alpha+\beta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \alpha\beta}$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\rangle = \frac{\alpha+\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-4\alpha\beta}{4}}$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\rangle = \frac{\alpha+\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{4}}$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\rangle = \frac{\alpha+\beta}{2} \pm \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\alpha = \frac{\alpha+\cancel{\beta}+\alpha-\cancel{\beta}}{2} \quad ; \quad \beta = \frac{\cancel{\alpha}+\beta-\cancel{\alpha}+\beta}{2}$$

Il discriminante dell'equazione di 2° grado: $\Delta=(b^2-4ac)$ che nella ridotta figura come $:\left(\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P\right)$ può essere: $\Delta \gtreqless 0$. Se maggiore di zero si hanno due radici reali, se uguale a zero le due radici assumono lo stesso valore: $S/2$, se minore di zero si hanno due radici immaginarie coniugate. Torneremo sulla discussione delle equazioni di 2° grado.

Equazioni Reciproche

Le equazioni reciproche, sono una particolare classe di equazioni di grado superiore al primo, che consentono particolari forme risolutive. Esse si distinguono in due specie:

Di prima specie

Una equazione si dice: "Reciproca di prima specie", quando i coefficienti equidistanti dagli estremi sono reali ed uguali. (Le equazioni si intendono ordinate secondo le potenze decrescenti della x ed uguagliate a zero)

esempi:

$$ax^2 + bx + a = 0 \qquad (2° \text{ grado})$$

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \qquad (3° \text{ grado})$$

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \qquad (4° \text{ grado})$$

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \qquad (5° \text{ grado}) \text{ ecc.}$$

Di seconda specie

Una equazione si dice: "Reciproca di seconda specie", quando i coefficienti equidistanti dagli estremi sono reali, uguali in valore assoluto, ma di segno opposto. Per le equazioni di grado pari manca il termine medio (è zero)

Esempi:

$$ax^2 \quad - a = 0 \qquad (2° \text{ grado})$$

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0 \qquad (3° \text{ grado})$$

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0 \qquad (4° \text{ grado})$$

$$ax^5 + bx^4 \underline{+ cx^3 - cx^2} - bx - a = 0 \qquad (5° \text{ grado}) \text{ ecc.}$$

Equazioni reciproche di 2° grado

Di prima specie :

$$\boxed{ax^2 + bx + a = 0}$$

può scriversi :

$$x + \frac{b}{a} + \frac{1}{x} = 0 \; ; \quad \boxed{\left(x + \frac{1}{x}\right) = -\frac{b}{a}}$$

Dalle equazioni di 2° grado sappiamo che: $-\frac{b}{a} = S =$ = somma delle radici, perciò $X = X_1$ ed $\frac{1}{X} = X_2$ sono le due radici.

Posto: $\left(\frac{-b}{2a}\right) = M = \frac{S}{2}$ avremo: $\boxed{\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix} = M \pm \sqrt{M^2 - 1}}$

ove: $x_1 = M + \sqrt{M^2-1}$; $x_2 = M - \sqrt{M^2+1}$ se moltiplichiamo e dividiamo il valore di x_2 per: $(M + \sqrt{M^2-1})$ otteniamo:

$$\left(M - \sqrt{M^2-1}\right) \cdot \frac{M + \sqrt{M^2-1}}{M + \sqrt{M^2-1}} = \frac{\cancel{M^2} - \cancel{M^2} + 1}{M + \sqrt{M^2+1}} = \frac{1}{M + \sqrt{M^2-1}} = \frac{1}{x_1}$$

ciò dimostra: $\boxed{x_2 = \frac{1}{x_1}}$ (<u>radici reciproche</u>)

Notiamo che: $x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x} = S = -b/a$.

Cioè S è riducibile ad una frazione che ha per numeratore il quadrato del denominatore maggiorato di 1. Per esempio: $-34/8 = -17/4 = -\left(\frac{16+1}{4}\right) < \begin{matrix} x_1 = 4 \\ x_2 = \frac{1}{4} \end{matrix}$

Quindi, riducendo ai minimi termini la frazione può e non può avvenire che x_1 sia intero e $x_2 = 1/x_1$, o viceversa però: $\frac{x^2+1}{x} = S$ vale anche per numeri decimali.

Se $b > 0$; oppure $b < 0$ abbiamo:

$\frac{b}{a} < 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{x_2} > 0$; $\frac{b}{a} > 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{x_2} < 0$

esempio: $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$; $x_2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0$

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\rangle = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \left\langle\begin{matrix} +2 \\ +\frac{1}{2} \end{matrix}\right. \quad ; \quad \left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\rangle = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \left\langle\begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \end{matrix}\right.$$

Equazioni reciproche di 2° grado

di seconda specie:

$$\boxed{ax^2 - a = 0}$$

$$\boxed{X = \pm 1}$$

Vedremo l'utilità dell'espressione: $\left(X + \frac{1}{x}\right) = -\frac{b}{a}$ ricavata per le equazioni reciproche di 2° grado di prima specie.

Elevando a quadrato si ha: $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = b^2/a^2$

che può scriversi: $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = \left(\frac{b^2}{a^2} - 2\right)$,

cioè: $\boxed{a^2x^4 + (2a^2 - b^2)x^2 + a^2 = 0}$

Elevando al cubo si ha:

$$x^3 + 3X + 3\frac{1}{X} + \frac{1}{X^3} = -b^3/a^3$$

cioè: $\boxed{a^3X^6 + 3a^3X^4 + b^3X^3 + 3a^3X^2 + a^3 = 0}$.

simmetrica di 6° grado, (X^5 ed x hanno coeff. zero).

Equazioni reciproche di 3° grado

di prima specie :

$$\boxed{a x^3 + b x^2 + b x + a = 0}$$

Poiché: $(x = -1)$ annulla il primo membro, e ciò avverrà sempre per le reciproche di prima specie di ordine dispari; il polinomio può scomporsi:

$$(x+1)\left(ax^2 + (b-a)x + a\right) = 0$$

cioè si ha:

$$\boxed{x_1 = -1}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix} = \frac{-(b-a)}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b-a}{2a}\right)^2 - 1}}$$

Equazioni reciproche di 3° grado

di seconda specie

$$\boxed{a x^3 + b x^2 - b x - a = 0}$$

poiché: $(x = +1)$ annulla il primo membro, è ciò avverrà sempre per le reciproche di seconda specie di ordine dispari; il polinomio può scomporsi:

$$(x-1)\left(ax^2 + (b+a)x + a\right) = 0 \quad ; \quad \text{avremo:}$$

$$\boxed{x_1 = +1}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix} = -\left(\frac{a+b}{2a}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{a+b}{2a}\right)^2 - 1}}$$

Equazioni reciproche di 4° grado

di prima specie:

$$\boxed{ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0}$$

dividendo per x^2 si ha:

$$ax^2+bx+c+b\frac{1}{x}+a\frac{1}{x^2}=0$$

cioè:

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

se poniamo:

$$y=\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

elevando a quadrato possiamo scrivere:

$$\left(y^2-2\right)=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$$

e sostituendo:

$$\boxed{ay^2+by+(c-2a)=0}$$

equazione ausiliaria di 2° grado

ove:

$$\begin{matrix}y_1\\y_2\end{matrix}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}+2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\Big\rangle=+\left(\frac{y_1}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2-1}\\[2em]\begin{matrix}x_3\\x_4\end{matrix}\Big\rangle=+\left(\frac{y_2}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{y_2}{2}\right)^2-1}\end{array}}$$

Equazioni reciproche di 4° grado

di seconda specie :

$$\boxed{ax^4+bx^3-bx-a=0}$$

si annulla per : $(x=-1)$ e per : $(x=+1)$ cioè il polinomio è divisibile per : (x^2-1) :

$$\boxed{(x^2-1)(ax^2+bx+a)=0}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array}\right\rangle = \pm 1 \\[2ex] \left.\begin{array}{l} x_3 \\ x_4 \end{array}\right\rangle = -\left(\frac{b}{2a}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - 1} \end{array}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{vedi reciproche} \\ \text{di 2° grado} \end{array} \right\}$$

Si noti che se : $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 < 1$, cioè : $(b<2a)$, si hanno radici immaginarie. Poichè le radici immaginarie sono sempre a coppie, (immaginarie coniugate : $(H+iK)$; $(H-iK)$) avremo che, per equazioni di ordine dispari almeno una radice è reale. Ciò vale in generale. Nelle equazioni di ordine dispari, se il termine noto è >0, si ha almeno una radice reale <0, inversamente, se il termine noto <0, si ha almeno una radice reale >0.

Equazioni di 4° grado biquadratiche

Sono del tipo:

$$\boxed{ax^4 + bx^2 + c = 0}$$

ove posto: $(x^2 = y)$ avremo:

$$\boxed{ay^2 + by + c = 0}$$

equazione di 2° grado che sappiamo risolvere.

$$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right> = \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$\boxed{\begin{matrix} \left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right> = \pm\sqrt{y_1} \\ \\ \left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right> = \pm\sqrt{y_2} \end{matrix}}$$

Si hanno i seguenti casi:

$y_1 ; y_2$ reali > 0 → quattro radici reali

$y_1 ; y_2$ reali < 0 → " " immaginarie

y_1 reale > 0 ; y_2 reale < 0 → due radici reali, due immaginarie

y_1 ed y_2 immaginarie → quattro radici immaginarie

Sui vari modi di considerare una espressione algebrica.

Ogni espressione algebrica rappresenta: SEMPRE! un certo fenomeno che può essere: "fisico", "economico", "statistico", ecc. Anzi spessissimo esprime una: "Legge" che regola una molteplicità di fenomeni. (Abbiamo già visto come una espressione del tipo: $y=mx$, sia comune ad una molteplicità di fenomeni della fisica classica. "Legge della linearizzazione").

La sintesi espressiva delle "formule algebriche" è di gran lungo più efficiente di qualunque altro linguaggio, perciò è necessario: SAPER "LEGGERE" LE FORMULE ALGEBRICHE.

Una espressione algebrica è generalmente composta di numeri (coefficienti, addendi, esponenti, indici, ecc); di lettere indicanti quantità costanti, di lettere indicanti quantità variabili. Le variabili potranno essere dipendenti o indipendenti. Se consideriamo mutevoli anche certe costanti, al fine di ottenere certi risultati, queste le diremo parametri.

Se per esempio "t" indica il tempo decorso a partire da un certo istante, in una espressione algebrica in cui figura "t" si può vedere cosa succede al crescere di "t". Gli altri simboli che rappresentano "grandezze dimensionali" del fenomeno che ci interessa, potranno essere riguardate come costanti e come variabili, ed avremo dalla formula la visione del fenomeno.

Tal volta conviene, la stessa formula scriverla in forma diversa, per avere una visione più specifica di ciò che ci interessa.

Per esempio: $y = mx$, può essere scritta:

$y = mx$; ($S = Vt$) ; la y cresce con m e con x

$x = \frac{1}{m} y$; ($t = S/V$) ; la x cresce con y ma decresce con m,

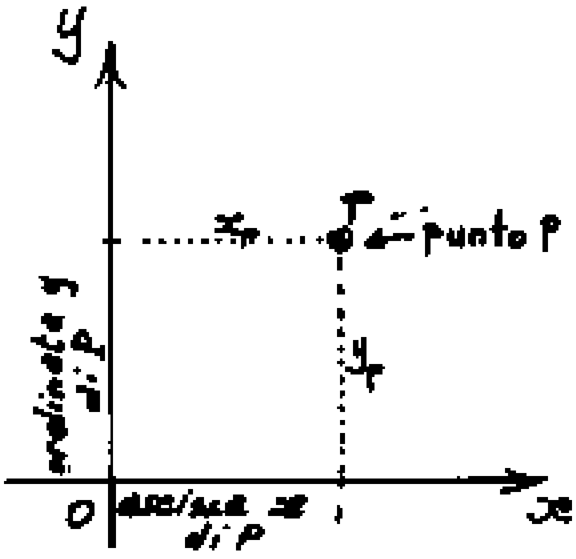
$m = \frac{y}{x}$; ($V = S/t$) ; m è il rapporto.

Se, "t", è il tempo ; "S", lo spazio ; "V", la velocità,

Cercate di tradurre in parole cosa dicono le tre formule. Ogniuno di noi può leggerle secondo il proprio problema. Può scrivere: $a = bc$; $b = a/c$; $c = a/b$ ed attribuire ad "a", "b", "c", le grandezze che interessano.

Luoghi geometrici

Ricordando che ogni coppia di valori $(x;y)$, nella sequenza esposta, rappresenta le coordinate: (ascissa; ordinata) di un punto e permette di rappresentarlo.



L'insieme di tutti i punti del piano sarà anche *l'insieme di tutte le coppie ordinate: (x,y), per ogni x appartenente ad X, ed ogni y appartenente ad Y*: tale insieme è detto *prodotto cartesiano*.

Ogni linea del piano sarà un sottoinsieme del prodotto cartesiano. Se riusciamo a definire tali linee come "*luoghi geometrici*" ne possiamo scrivere l'espressione, (o leggendo la formula matematica "*vederne mentalmente*" la rappresentazione grafica). Per esempio: *l'asse x* come *luogo geometrico* dei punti ad ordinata nulla è rappresentabile con: *$y=0$*; mentre *l'asse y* come *luogo geometrico* dei punti ad ascissa nulla è rappresentabile con *$x=0$*.

Una retta parallela all'asse X, sarà il luogo geometrico dei punti aventi ordinata costante. Se indichiamo con "q" l'ordinata costante, comune a tutti i punti appartenenti a tale retta, questa sarà rappresentata da: $\underline{\underline{y = q}}$.

Analogamente una <u>retta parallela all' asse y</u> sarà rappresentata da: $\underline{\underline{x = p}}$ ove "p" è l'ascissa costante, comune a tutti i punti della retta.

Torniamo alla formula: $\underline{y = mx}$ (con m = costante), possiamo dire che $y = mx$ rappresenta <u>il "luogo geometrico dei punti aventi coordinate direttamente proporzionali con m = coeff. di proporzionalità"</u>

Se scriviamo la stessa formula nella forma: $\underline{\underline{y/x = m}}$, potremmo dire che: $\frac{y}{x} = m$ rappresenta il "<u>luogo geometrico di tutti i punti aventi il rapporto delle coordinate costante e pari ad m.</u>"

– Si noti come una stessa correlazione matematica, scritta in forma diversa, corrisponda allo stesso concetto espresso con parole diverse.

Abbiamo già visto, al capitolo "Le equazioni", l'equazione della retta:

$y = mx + q$ (in forma esplicita)

$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ (in forma segmentaria)

$ax + by + c = 0$ (in forma implicita)

Consideriamo la forma esplicita: $y = mx + q$, "Luogo dei punti la cui ordinata è data dalla somma di un valore proporzionale all'ascissa e di una costante q". Questa espressione è un po' farraginosa, se invece scriviamo gli stessi simboli correlati nella forma: $\frac{(y-q)}{m} = x$; oppure: $(y-q) = mx$; oppure: $\frac{y-q}{x} = m$; oppure: $q = y - mx$; a ciascuna di esse corrisponde una dizione di "luogo geometrico" Lo stesso può farsi con la forma segmentaria o con la forma implicita, e le apparenti diverse formule e diverse dizioni di "luogo geometrico" corrispondono ad una stessa retta quando i simboli m, q, p, a, b, c siano correlati.

Ma oltre queste ve ne sono altre, per esempio: "luogo geometrico di tutti i punti ove è costante il rapporto fra l'incremento delle ordinate e quello delle ascisse per passare da un qualsiasi punto A ad un qualsiasi punto B"

si scrive:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m}$$

(con m = costante di proporzionalità.)

Se, date le coordinate di due punti:

$$A \equiv (x_A, y_A) \quad ; \quad B \equiv (x_B, y_B)$$

le riportiamo nella espressione ora scritta, essa ci fornisce il coefficiente angolare della retta passante per A e per B, perciò l'equazione della retta passante per due punti sarà:

$$\boxed{\frac{y-y_A}{x-x_A} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}}$$

mentre l'equazione della stella di rette passanti per un solo punto A sarà:

$$\boxed{\frac{y-y_A}{x-x_A} = m}$$

ove "m" è un parametro (ad ogni valore di m corrisponde una retta della stella passante per A)

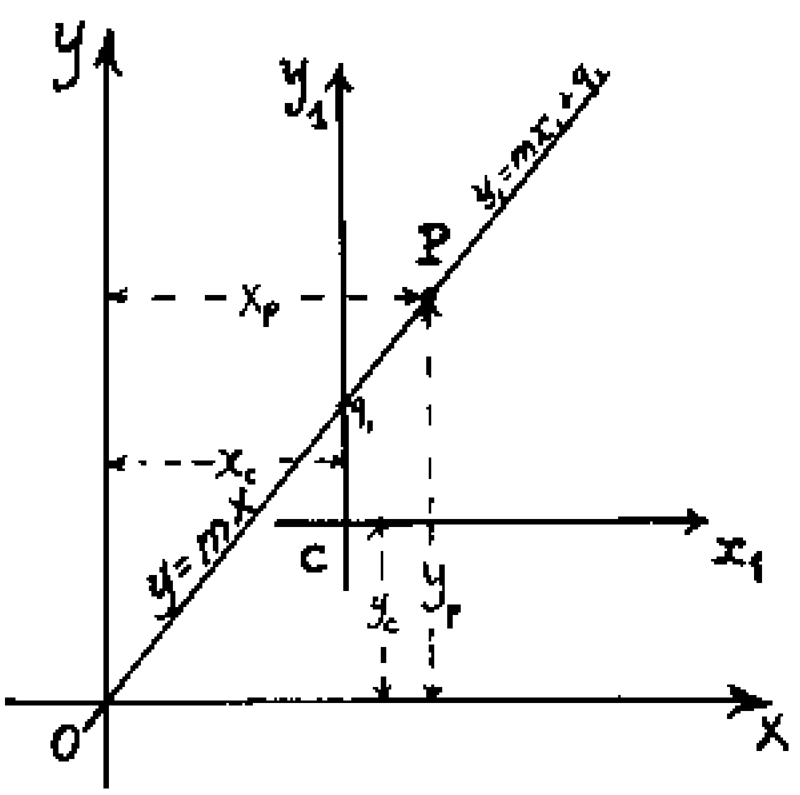
Si noti che la distanza $\overline{AB} = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

e la distanza generica da A ; $t_A = \sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}$

La traslazione di assi

Data l'equazione di una retta per l'origine O degli assi x, y, e sia: $y = mx$; consideriamo, sullo stesso piano, un'altro sistema di assi parallelo al primo, e sia x_1, y_1 di centro C.

Notiamo che preso un punto P sulla retta



le sue coordinate rispetto al sistema x_1, y_1 sono date da: $\boxed{x_{1p} = (X_p - X_c)}$; $\boxed{y_{1p} = (y_p - y_c)}$ ove x_c ed y_c sono le coordinate di C rispetto al primitivo sistema o,x,y. Essendo P qualsiasi poniamo: $X = X_p$; $y = y_p$; $x_{1p} = x_1$; $y_{1p} = y_1$, avremo:

$$\boxed{X = X_1 + X_c} \quad ; \quad \boxed{y = y_1 + y_c}$$

sostituendo nell'espressione: $y = mX$ si ha:

$$(y_1 + y_c) = m(X_1 + X_c)$$

ed esplicitando y_1:

$$\boxed{y_1 = mX_1 + [mX_c - y_c]}$$

ove la parte in parentesi quadra: $mx_c - y_c = q_1$ è il coefficiente di traslazione lineare rispetto ai nuovi assi. Il coefficiente angolare "m" è rimasto invariato trattandosi di sistemi paralleli di assi.

In generale per passare da un sistema: o,x,y, ad un sistema di assi paralleli: c, x_1, y_1 le formule per la traslazione degli assi sono:

$$\boxed{y_1 = y - y_c} \quad ; \quad \boxed{x_1 = x - x_c}$$

data l'espressione: $y_1 = f_{(x_1)}$ avremo: $\boxed{(y - y_c) = f_{(x - x_c)}}$

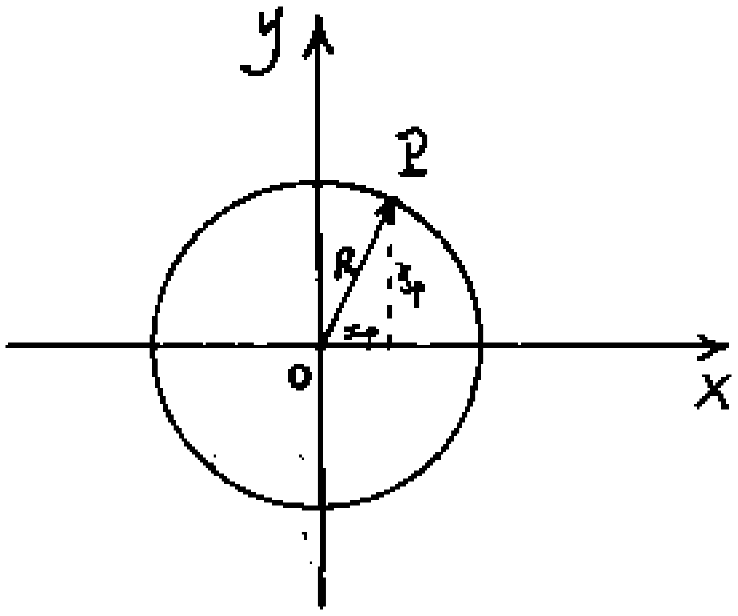
Il cerchio

Tornando ai luoghi geometrici si vuol rappresentare:

"Il luogo geometrico di tutti i punti equidistanti da un punto detto centro"

(è la definizione della circonferenza)

Sia R il raggio (o equidistanza), e poniamo il centro del cerchio nel centro degli assi.



Preso un qualsiasi punto P sulla circonferenza, avremo per il teorema di Pitagora:

$$x_p^2 + y_p^2 = R^2$$

e per la generalità di P:

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$$

È questa l'equazione della circonferenza con centro al centro assi, ordinariamente chiamata "equazione del cerchio", mentre, per quest'ultima sarebbe più proprio scrivere: $\boxed{x^2 + y^2 \leq R^2}$

Esplicitando la y si ha:

$$\boxed{y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Si notano due fatti:

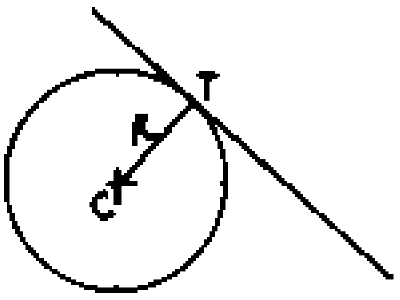
1) Le radici sono due, una positiva, una negativa; cioè vi sono due valori simmetrici di y per ogni valore di x

II) Quando x supera, in valore assoluto, il valore di R, cioè quando $|X|>|R|$, il radicando diventa minore di zero, cioè negativo, e non esiste nessun valore reale di y. Infatti il cerchio al centro assi, ha per <u>campo di esistenza</u> i valori:

$$\boxed{-R \leq X \leq +R}$$

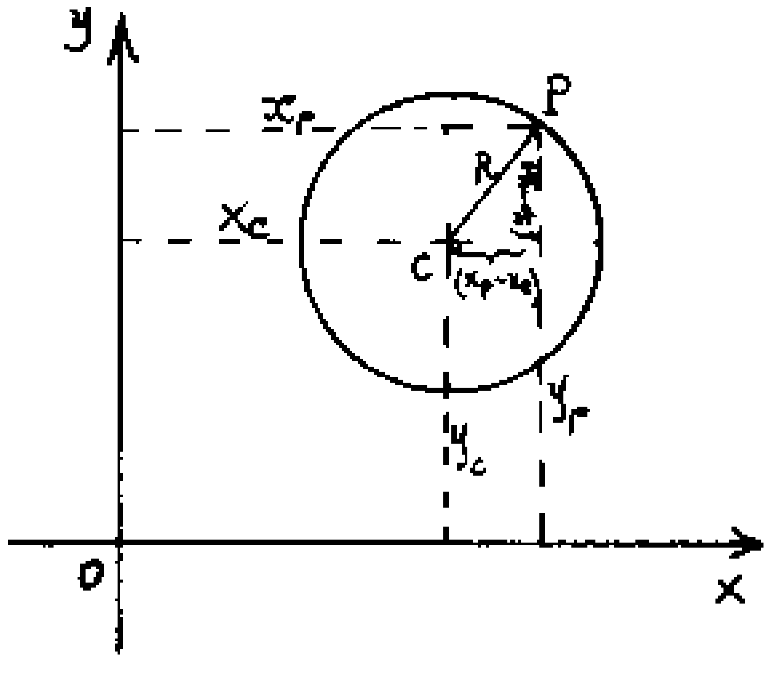
e non esiste per <u>$x<-R$</u> e per <u>$x>+R$</u>.

Si noti che la distanza di un punto C da una retta è anche il raggio del cerchio di centro C



tangente alla retta nel punto T, cioè $\overline{CT} = R$; ciò perchè la distanza di un punto da una retta si misura sulla normale alla retta tracciata per C.

<u>Facciamo ora una traslazione di assi</u>, cioè supponiamo che il centro C del cerchio sia un punto qualsiasi del piano: $C \equiv (x_c, y_c)$



e cerchiamo l'equazione generale del cerchio. Data la genericità di P poniamo $x=x_P$; $y=y_P$ e per Pitagora abbiamo:

$$\boxed{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2 = R^2}$$

ed è "l'equazione della circonferenza in funzione del raggio R e delle coordinate x_c, y_c del suo centro C"

Sviluppiamo ora i quadrati in parentesi ed otteniamo:

$$\boxed{x^2+y^2-(2x_c)x-(2y_c)y+[x_c^2+y_c^2-R^2]=0}$$

questa equazione, che è l'equazione generale del cerchio, ordinariamente si presenta:

$$\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0}$$

(Talvolta anche x^2 ed y^2 presentano uno stesso coefficiente diverso da 1, ma dividendo per tale coefficiente abbiamo la forma di cui sopra) ove:

$a=-2x_c$ da cui: $\boxed{x_c=-a/2}$

$b=-2y_c$ " " : $\boxed{y_c=-b/2}$

$c=x_c^2+y_c^2-R^2$ " " $R=\sqrt{x_c^2+y_c^2-c}$

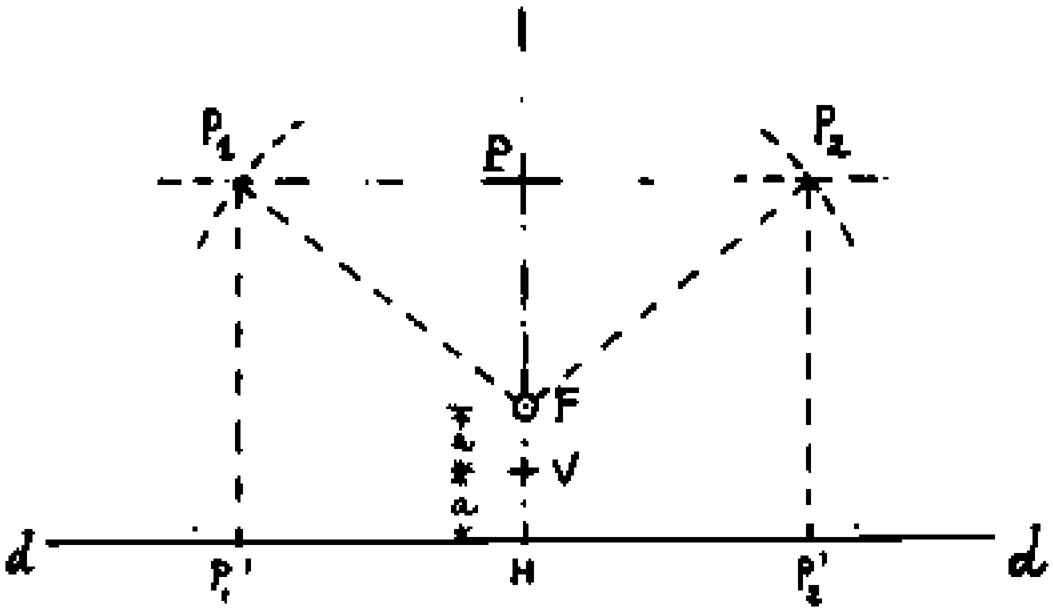
$$\boxed{R=\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}}$$

Come si vede, i coefficienti a, b, c della equazione generale del cerchio, hanno precisi significati che consentono di calcolare facilmente le coordinate del centro ed il raggio del cerchio.

La Parabola

(un importantissimo luogo geometrico)

"Luogo geometrico di tutti i punti equidistanti da un punto "F" detto fuoco e da una retta "d" detta direttrice"



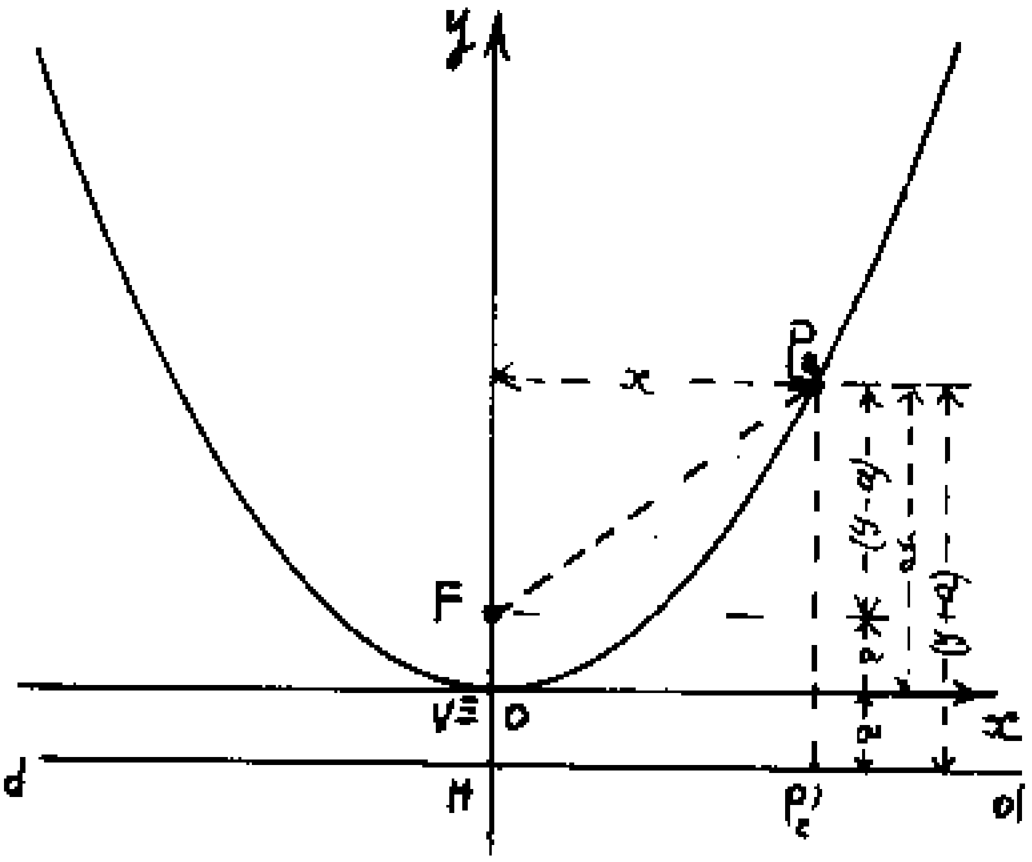
Sia "F" il fuoco e "dd" la direttrice. Se da F tracciamo la perpendicolare alla "dd", abbiamo che il punto "V" medio del segmento $\overline{FH} = 2a$, è un punto del nostro luogo geometrico perchè: $\underline{\overline{VF} = \overline{VH} = a}$

Prendiamo sulla retta passante per $\overline{HF}$ un segmento: $\overline{HP} > a$, ("a" è il segmento di minima equidistanza da F e da "dd") e tracciamo per P la parallela a "dd" quindi con raggio pari ad $\overline{HP}$ e centro in F tracciamo gli archi che intercettano la parallela alla "dd" per P, nei punti P_1 e P_2. Anche i punti P_1 e P_2 fanno parte del luogo geometrico perchè:

$\underline{\overline{PH} = (\overline{P_2P_2'} = \overline{P_2F}) = (\overline{P_1F} = \overline{P_1P_1'})}$. Variando a piacimento il segmento: $\overline{PH} \geq a$, si può costruire per punti, il nostro luogo geometrico.

Rileviamo che questo luogo geometrico è simmetrico rispetto alla retta HF e che ammette un vertice "V" di minima distanza quando $\overline{HP}=\overline{HV}=\frac{1}{2}\overline{HF}=a$. data "a" è identificabile il luogo geometrico.

Vogliamo ora vedere come si può esprimere matematicamente questo luogo geometrico in funzione di un sistema di riferimento cartesiano costituito dagli assi: x, y, di centro O.



Fra tutti i possibili assi x; y, scegliamo quelli che hanno l'asse y coincidente con l'asse di simmetria per $\overline{HF}$, ed x passante per "V" quindi con origine degli assi in "V", (cioè: $O\equiv V$) (o coincidente con V).

Supponiamo di aver tracciato il nostro luogo geometrico "parabola" (che, in questo caso, sarà detta al centro assi). Per l'enunciato deve essere:

$$\overline{P_2F} = \overline{P'_2P_2} \qquad \text{ed anche: } (\overline{P_2F})^2=(\overline{P_2P'_2})^2$$

sostituendo in funzione di x, y, a (vedi figura) ed applicando Pitagora otteniamo:

$$\boxed{x^2+(y-a)^2=(y+a)^2}$$

sviluppando i quadrati e semplificando:

$$x^2 + \cancel{y^2} - 2ay + \cancel{a^2} = \cancel{y^2} + 2ay + \cancel{a^2}$$

$$x^2 = 4ay$$

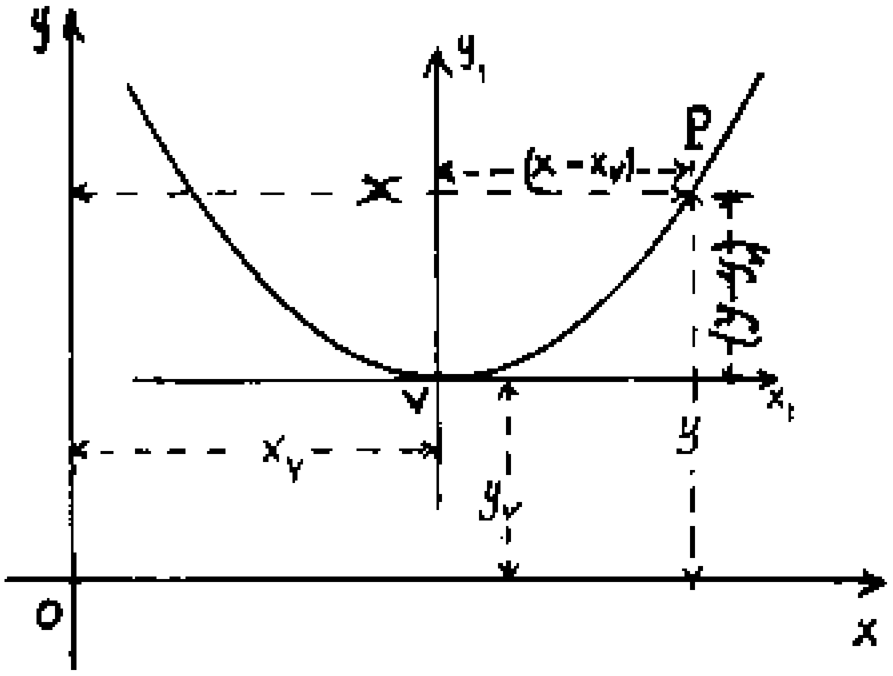
$$\boxed{y = \frac{1}{4a} x^2}$$

ove ponendo: $m = 1/4a$

$$\boxed{y = m x^2}$$

<u>è questa l'equazione della parabola al centro assi</u>

Facciamo ora la solita traslazione di assi ove il e tice "V" non sia più coincidente con l'origine "O" degli assi, ma abbia coordinate: $V \equiv (X_V ; Y_V)$.



Sostituendo nella: <u>$y = mx^2$</u> abbiamo:

$$\left(y - y_V\right) = m\left(x - x_V\right)^2$$

equazione generica di <u>parabola ad asse verticale</u> espressa in funzione delle coordinate del vertice $V \equiv (x_V ; y_V)$ e del parametro $\left(m = \frac{1}{4a}\right)$.

Sviluppando il quadrato otteniamo:

$$y - y_V = m\left(x^2 - 2x_V x + x_V^2\right)$$

$$\boxed{y = (m)x^2 - (2mx_V)\, x + \left(mx_V^2 + y_V\right)} \quad (1)$$

espressione che ordinariamente viene scritta nella forma:

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c} \quad (2)$$

ove se poniamo $y = 0$ (zero) otteniamo l'espressione classica delle *equazioni di secondo grado*, di cui già sappiamo calcolare le radici. *Le radici reali* saranno le ascisse dei punti comuni alla parabola e all'asse x, $(y=0)$. *Se la parabola ha il vertice nel campo delle $y > 0$ non avremo radici reali.*

Il confronto fra le due espressioni: (1) e (2) porta: $\boxed{a = m}$; $\boxed{-b = 2mx_v}$; $\boxed{c = mx_v^2 + y_v}$

Si noti che col simbolo "a" vengono indicate due cose molto diverse fra loro: *$a = m$ è il coefficiente delle x^2 nelle equazioni di secondo grado.* *$a = \frac{1}{4m}$ è il segmento di equidistanza del vertice della parabola dal fuoco "F" e dalla direttrice "dd".* E' quindi opportuno non confondere.

Scriviamo l'espressione (1) nella forma:

$$y = m\left[\ x^2 - (2x_v)x + \left(x_v^2 + y_v/m\right)\right]$$

L'espressione in parentesi quadre può essere confrontata con:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

forma ridotta delle equazioni di 2° grado.

avremo:

$$(2X_v) = S \quad ; \quad (X_v^2 + y_v/m) = P$$

sostituendo nella formula ridotta per il calcolo delle radici di una equazione di 2° grado, si ha:

$$\left(\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\rangle = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}\right) \quad ; \quad \left.\begin{matrix}X_1\\X_2\end{matrix}\right\rangle = X_v \pm \sqrt{(X_v)^2 - (X_v^2 + y_v/m)}$$

cioè:

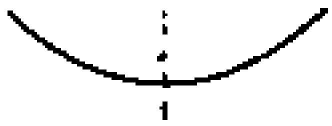
$$\boxed{\left.\begin{matrix}X_1\\X_2\end{matrix}\right\rangle = X_v \pm \sqrt{\frac{-y_v}{m}}}$$

Ciò conferma che, per radici reali, occorre: $\underline{y_v < 0}$. (essendo m sempre maggiore di zero). Cioè il vertice V della parabola deve stare al disotto dell'asse x quando il coefficiente di X^2 è positivo.

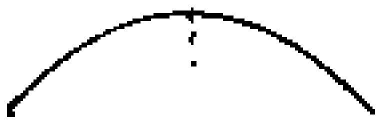
Mentre nelle equazioni di 2° grado, essendo uguagliate a zero, si può sempre rendere posito il coefficiente delle X^2; (basta, eventualmente, moltiplicare per -1) Quando l'espressione è uguagliata ad y, cioè quando l'espressione è l'equazione di una parabola:

$$ax^2 + bx + c = y$$

per: $\underline{a > 0}$, la parabola volge la concavità verso l'alto.



per $\underline{a < 0}$, la parabola volge la concavità verso il basso.



dalle formule:

$$a = m$$
$$-b = 2mx_v$$
$$c = mx_v^2 + y_v$$

possiamo ricavare le coordinate del vertice $V \equiv (x_v ; y_v)$ della parabola e quindi la posizione del suo asse, che per equazioni del tipo: $ax^2 + bx + c = y$, sarà sempre verticale.

$$x_v = -b/2m \quad ; \quad \boxed{x_v = -\frac{b}{2a}} \quad ; \quad \left(x_v = S/2\right)$$

$$y_v = c - mx_v^2 = c - a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 = \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) = -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

ma: $(b^2 - 4ac) = \Delta$; $\boxed{y_v = \frac{-\Delta}{4a}}$; $\left(y_v = P - (S/2)^2\right)$

Facciamo alcune considerazioni:

1) Nel caso: $a > 0$

La posizione dell'asse della parabola, avente per equazione: $\boxed{x = x_v}$ cioè $\boxed{x = -b/2a}$ dipende dal segno di b. L'asse passerà per il I e IV quadrante se: $b < 0$

per il II e III quadrante se $b > 0$

Si possono fare le seguenti osservazioni:

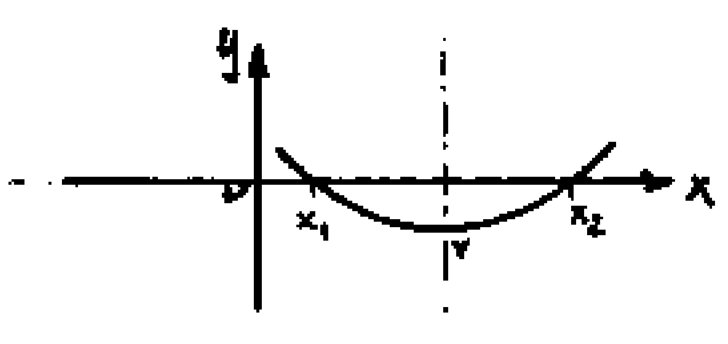
Se l'asse passa per il I e IV quadrante, cioè taglia il semiasse positivo delle ascisse, Poiché le radici x_1 ed x_2 sono simmetriche rispetto all'asse: $\boxed{\begin{matrix}x_1\\ x_2\end{matrix} = x_V \pm \sqrt{\Delta^*}}$ avremo

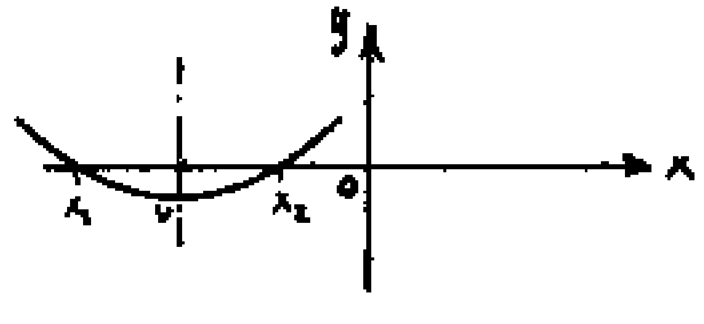
che almeno una radice è positiva, l'altra può essere; positiva, nulla, o negativa a seconda che: $\sqrt{\Delta^*} \lesseqgtr x_V$.

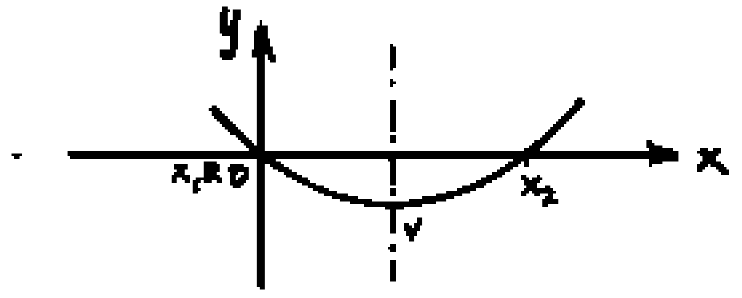
Se invece l'asse passa per il secondo e terzo (II e III) quadrante, cioè taglia il semiasse negativo delle ascisse avremo che almeno una radice è negativa, l'altra può essere: negativa, nulla, o, positiva, a seconda che

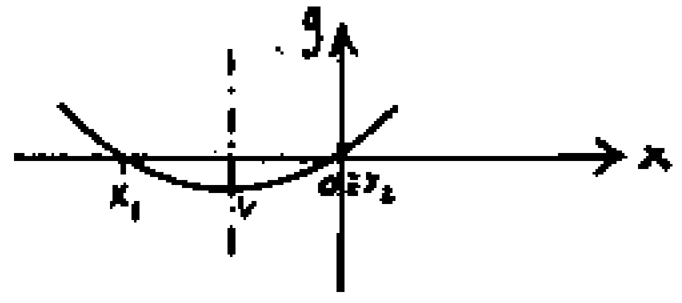
$$|\sqrt{\Delta}| \lesseqgtr |x_V| .$$

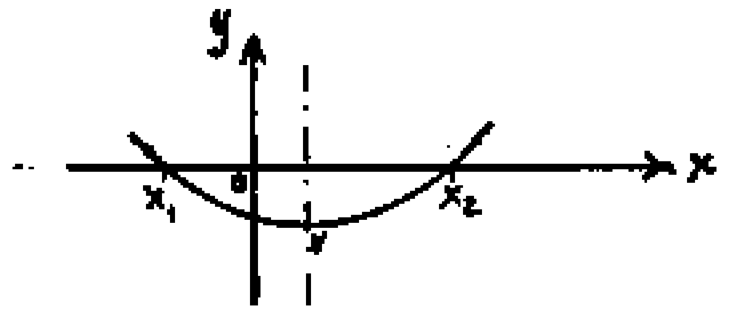
Queste osservazioni, che graficiziamo:

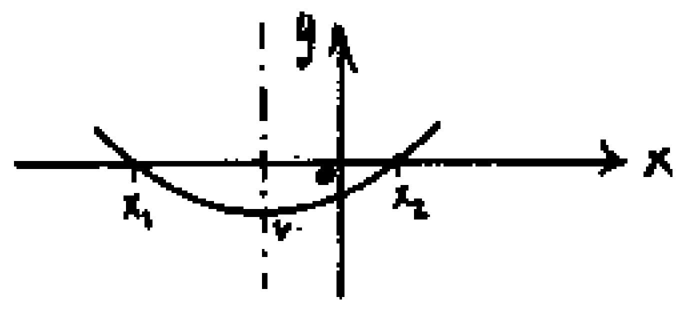












portarono alla regola dei segni di Cartesio.

Regola dei segni di Cartesio

Vediamo ora l'influenza dei segni sull'equazione:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dato che l'equazione è uguagliata a zero, possiamo sempre fare in modo che "a" sia positivo. In tal caso, poiché per grandi valori di $|\pm x|$, $x^2 > 0$ prevarrà su: $(bx + c)$. e la parabola crescerà al crescere delle $|\pm x|$.

La regola dei segni di Cartesio dice:

"Tante radici positive quante sono le variazioni, Tante radici negative quante sono le permanenze. In valore assoluto maggiore la radice positiva se precede la variazione; maggiore la radice negativa se precede la permanenza."

Si intende: "permanenza" quando due segni consecutivi sono uguali. Si intende "variazione" quando due segni consecutivi sono opposti.

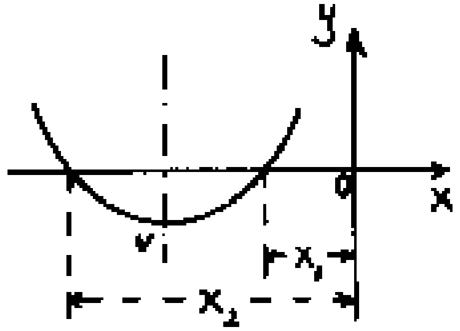
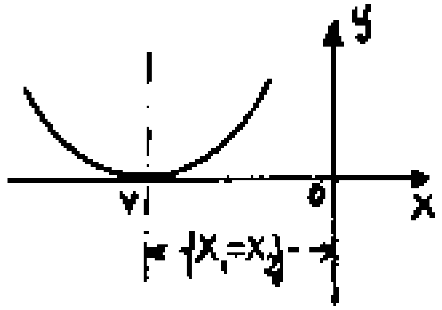
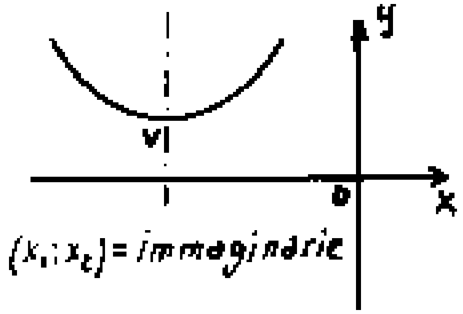
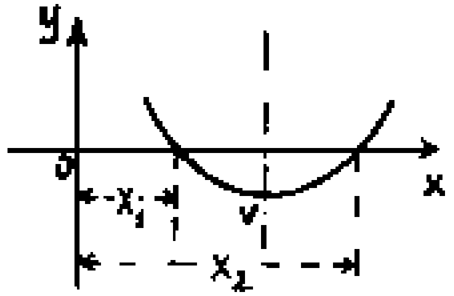
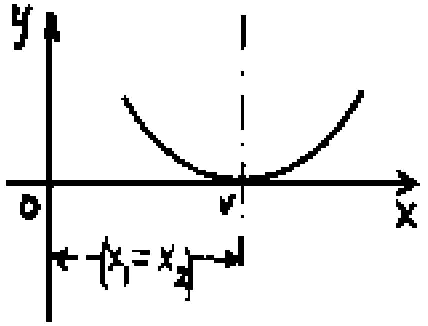
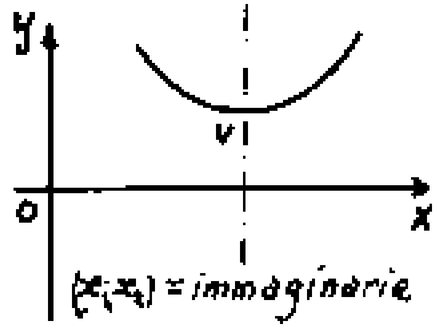
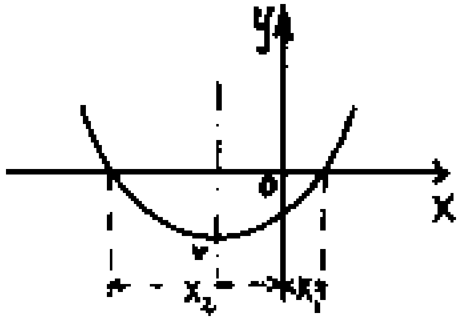
Si hanno radici reali se il discriminante della equazione: $\Delta = b^2 - 4ac$ è maggiore di zero.

Se $\Delta = 0$, si hanno due radici reali coincidenti

Se $\Delta < 0$, si hanno due radici immaginarie coniugate.

Riepiloghiamo in una tabella riportando anche la posizione della parabola.

TAVOLA riepilogativa della regola dei segni di Cartesio

<table>
<tr><th>nº</th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>N O T E</th><th>$\Delta > 0$</th><th>$\Delta = 0$</th><th>$\Delta < 0$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>+</td><td>$\overset{p}{\curvearrowright}$ +</td><td>$\overset{p}{\curvearrowright}$ +</td><td>due permanenze (2 radici $<$ 0)
(asse sulle x negative)</td><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
<tr><td>2</td><td>+</td><td>$\overset{v}{\curvearrowright}$ −</td><td>$\overset{v}{\curvearrowright}$ +</td><td>due variazioni (2 radici > 0)
(asse sulle X positive)</td><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
<tr><td>3</td><td>+</td><td>$\overset{p}{\curvearrowright}$ +</td><td>$\overset{v}{\curvearrowright}$ −</td><td>Una permanenza ed una variazione, precede la permanenza, due radici di segno opposto, maggiore la negativa</td><td> </td><td colspan="2" rowspan="2">Per $c<0$ il discriminante $\Delta > 0$ per cui non possono aversi radici coincidenti o immaginarie.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>+</td><td>$\overset{v}{\curvearrowright}$ −</td><td>$\overset{p}{\curvearrowright}$ −</td><td>Una variazione ed una permanenza, la variazione precede la permanenza, due radici di segno opposto, maggiore la radice positiva</td><td> </td></tr>
</table>

Si noti che il segno di "b" decide la posizione dell'asse della parabola : $(x = -b/2a) = S/2$

I passaggi algebrici e l'assurdo

Occorre fare molta attenzione ai passaggi algebrici e verificarne sempre il risultato. Infatti se per risolvere una equazione eleviamo a quadrato ambo i membri, introduciamo una radice che puó non verificare il nostro problema. Se due numeri diversi sono moltiplicati per zero o per infinito, il prodotto risulta uguale, ma i numeri sono diversi; esempio: $a = 0$ oppure $a = \infty$, avremo che: $50 \cdot \cancel{a} = 85 \cdot \cancel{a}$ semplificando: $50 = 85$ si ha un assurdo. Questo puó avvenire in certe equazioni che ammettono un valore nullo della x per cui in una espressione $x\left(f(x,a,b\ldots)\right) = x\left(\varphi(x,a,b\ldots)\right)$ non è lecito semplificare: $f(x,a,b\ldots) = \varphi(x,a,b..)$ perché il valore nullo della x porta all'assurdo.

Facciamo un giuoco.

Siano: $a \neq b$ vogliamo dimostrare che $(a = b)$.

Indichiamo con $C = \frac{a+b}{2}$, la semisomma; qualunque siano i due numeri "a" e "b" vale l'uguaglianza:

$$\boxed{a^2 - 2ac = b^2 - 2bc}$$

infatti sostituendo "c" si ha:

$$a^2 - 2a(a+b)/2 = b^2 - 2b(a+b)/2$$

$$-ab = -ab$$

a tale uguaglianza possiamo aggiungere c^2 ad ambo i membri; avremo:

$$a^2-2ac+c^2 = b^2-2bc+c^2$$

$$(a-c)^2 = (b-c)^2$$

$$\sqrt{(a-c)^2} = \sqrt{(b-c)^2}$$

$$(a-\cancel{c}) = (b-\cancel{c})$$

$$\underline{a = b}$$ (come volevasi dimostrare)

Chiariamo l'assurdo con un esempio numerico: $\underline{7\neq 3}$ cioè $\underline{a=7}$; $\underline{b=3}$

avremo: $c=\frac{7+3}{2}=5$; $2ac=70$; $2bc=30$

$7^2-70 = 3^2-30$ infatti $=-21$ entrambi.

$7^2-70+5^2 = 3^2-30+5^2$

$(7-5)^2 = (3-5)^2$ (qui è il trucco perché $(3-5)^2=(5-3)^2$

$\sqrt{(7-5)^2} = \sqrt{(3-5)^2}$ qui l'errore di un radicale negativo

$(7-\cancel{5}) = (3-\cancel{5})$ non era lecita la semplificazione

$$\underline{7 = 3}$$

Per fare il gioco ad amici (poco accorti) conviene scegliere due numeri dispari diversi in tal modo c risulta intero. ed i calcoli sono più semplici.

Si noti che: $\sqrt{x^2}=\pm x$ e che: $(\sqrt{x})^2=|x|$

$(\sqrt{-x})^2 = (i\sqrt{|x|})^2 = (-1)|x| = -x$.

Si noti l'importanza della sequenza operativa: $\sqrt{x^2}$; $(\sqrt{x})^2$.

Le disequazioni

Questo nostro studio permette ora di affrontare le disequazioni.

"Una disequazione è una espressione algebrica che anzichè essere posta uguale a zero, (o ad un'altra espressione) le viene richiesto di essere maggiore o minore di zero, (o di un'altra espressione). Cioè al posto di: (=) figura: (>) oppure: (<)"

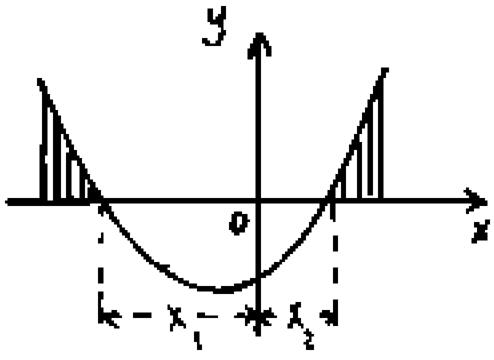
Si tratta di decidere per quali valori della x risulta soddisfatta.

Abbiamo già visto che l'equazione della circonferenza al centro: $x^2+y^2=R^2$; per diventare equazione di tutti i punti del cerchio si deve scrivere:

$$x^2+y^2 \leq R^2$$

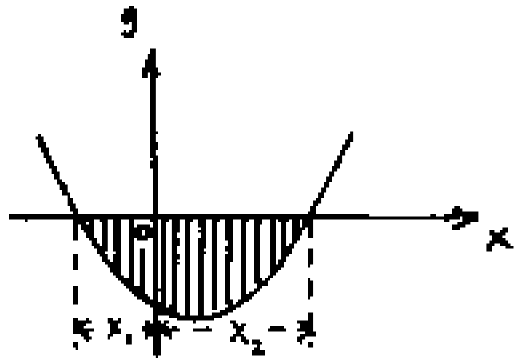
Se trattasi di una disequazione di 2° grado rappresentabile quindi mediante una parabola avremo: $(a > 0)$:

$$\underline{y = ax^2+bx+c > 0}$$



(vale per x esterno alle radici)
$(-\infty < x < x_1)$
$(x_2 < x < +\infty)$

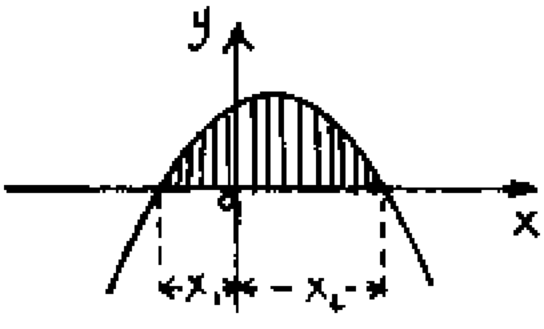
$$\underline{y = ax^2+bx+c < 0}$$



(vale per x interno alle radici)
$(x_1 < x < x_2)$

Se invece il primo coefficiente : $\underline{a < 0}$

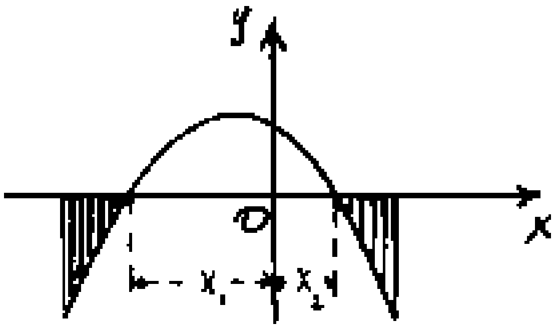
$y = \underline{ax^2 + bx + c > 0}$



(vale per x interno alle radici

($x_1 < x < x_2$)

$y = \underline{ax^2 + bx + c < 0}$



(vale per x esterno alle radici)

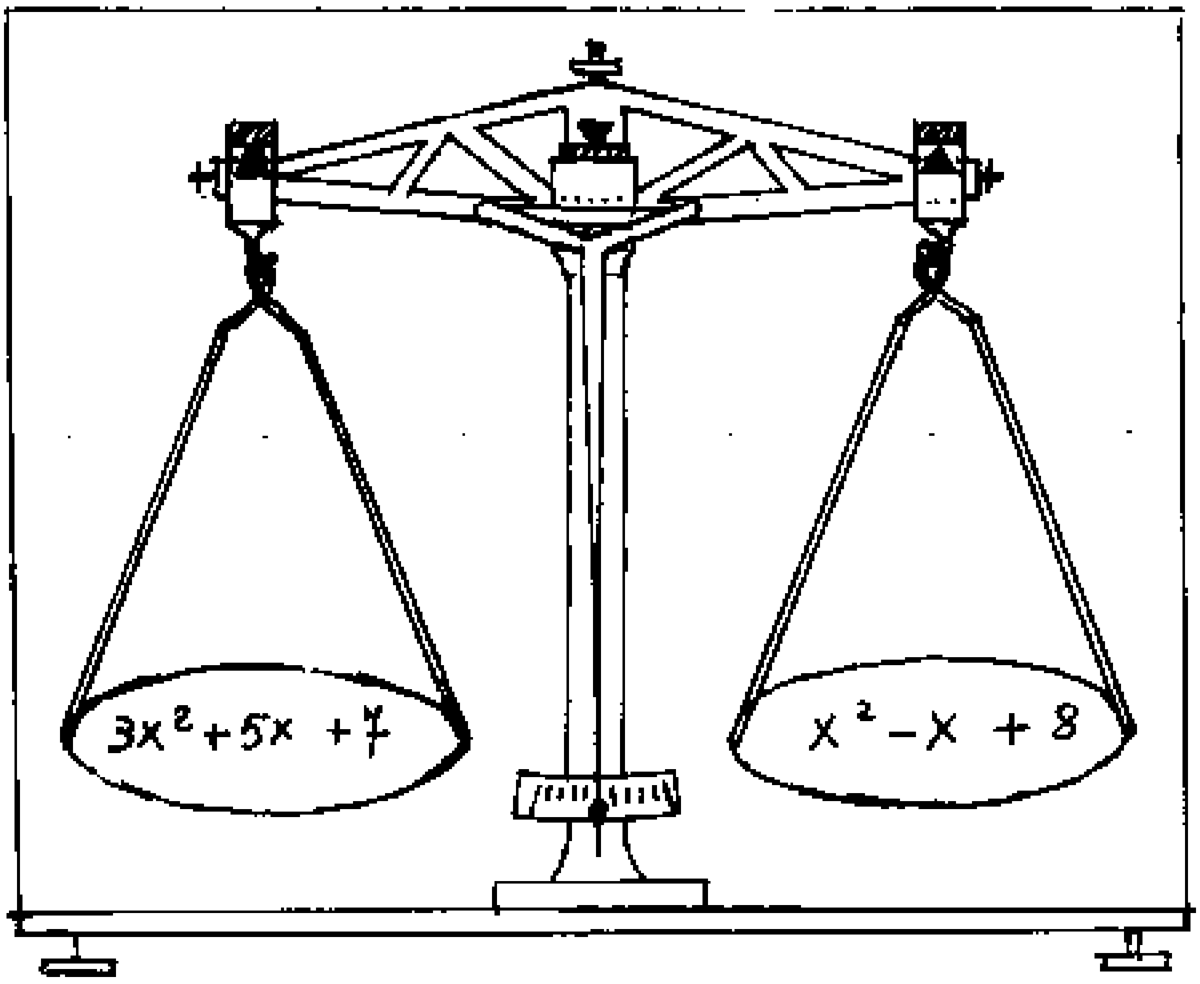
($-\infty < x < x_1$)

($x_2 < x < +\infty$)

Poiché, in funzioni continue, il passaggio da positive a negative e viceversa, avviene nei punti zero; la prima cosa da fare nelle disequazioni, dopo averle semplificate, è di trovare i punti zero, cioé uguagliarle a zero e trovare le radici che le soddisfano. (Gli schemi grafici, di cui sopra, sono utilissimi anche per la discussione delle equazioni di 2° grado)

Come un'uguaglianza fra due espressioni algebriche è equiparabile ad una bilancia a due piatti che sia in equilibrio, una disequazione puó ancora riguardarsi come una bilancia a due piatti che pieghi sempre dalla stessa parte.

Consideriamo l'uguaglianza di due espressioni algebriche, disposte sui piatti di una bilancia. Affinchè permanga l'equilibrio, tutto ciò che facciamo su un piatto, deve essere fatto anche sull'altro.



$2x^2+5x+7 = -x+8$ (Tolgo un x^2)

$2x^2+6x+7 = 8$ (aggiungo un x)

$2x^2+6x = 1$ (Tolgo 7)

$4x^2+12x = 2$ (raddoppio)

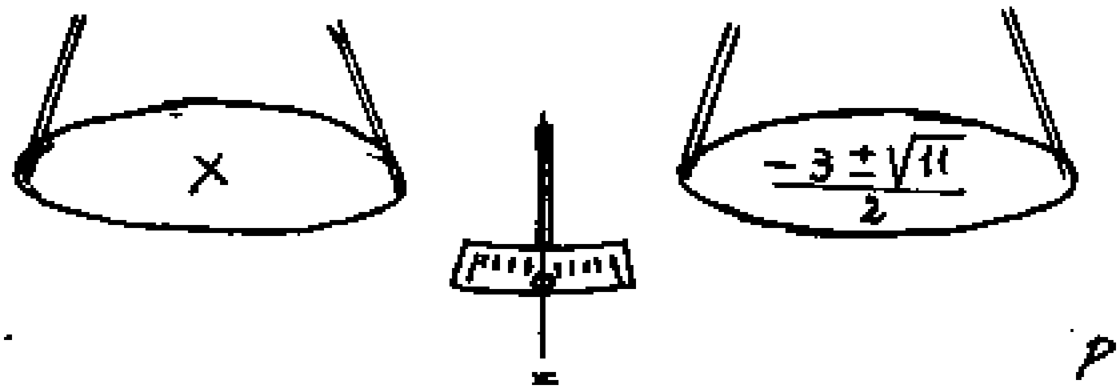
$4x^2+12x+9 = 11$ (aggiungo 9)

$(2x+3)^2 = 11$ (noto il quadrato perfetto)

$2x+3 = \pm\sqrt{11}$ (estraggo la radice)

$2x = -3\pm\sqrt{11}$ (tolgo 3)

(divido per 2)



Riusciamo così a pesare, stimare, valutare la x. <u>Questi passaggi algebrici che consentono di esplicitare un'incognita o ridurre a zero un membro, sono perfettamente leciti nelle disequazioni.</u>

(Si noti che nell'esempio si è risolta una equazione di 2° grado senza utilizzare la formula)

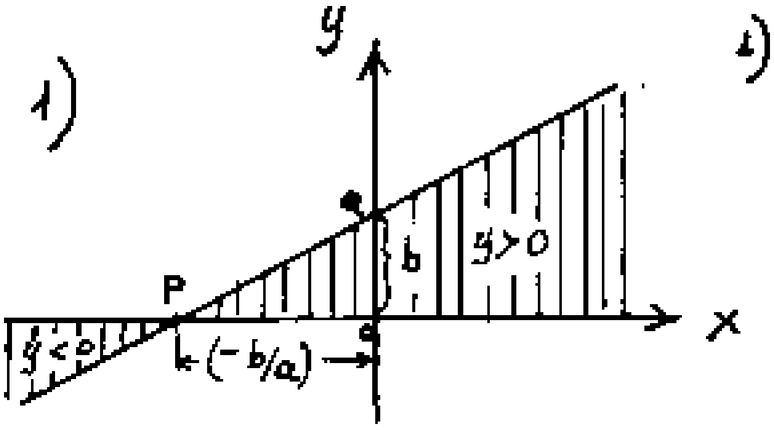
Disequazioni di primo grado

Sono del tipo: $\boxed{ax+b>0}$, oppure $\boxed{ax+b<0}$ con $a \neq 0$ sono dette normali.

Se poniamo: $\boxed{y = ax+b}$ notiamo che è l'equazione di una retta ove "a" = coeffic. angolare e "b" coeffic. di traslazione lineare. $y = 0$ per $\boxed{x = -b/a}$

Si hanno i seguenti casi:

1)

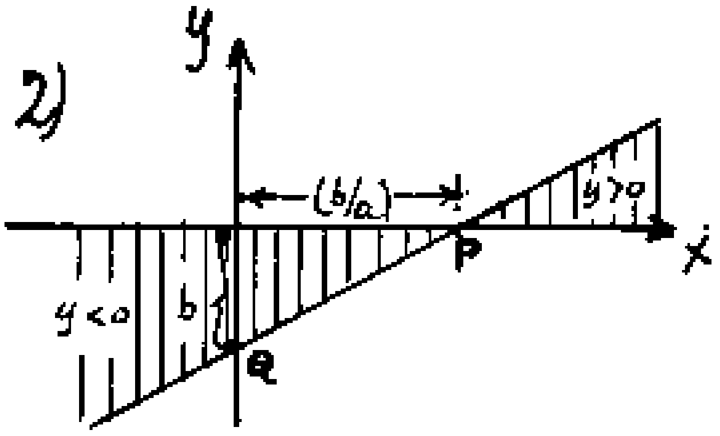


1) $(a>0)$; $(b>0)$; $y=0$ per $(x=-b/a)$

$\boxed{ax+b>0}$ si ha per $(x>-b/a)$

$\boxed{ax+b<0}$ si ha per $(x<-b/a)$

2)



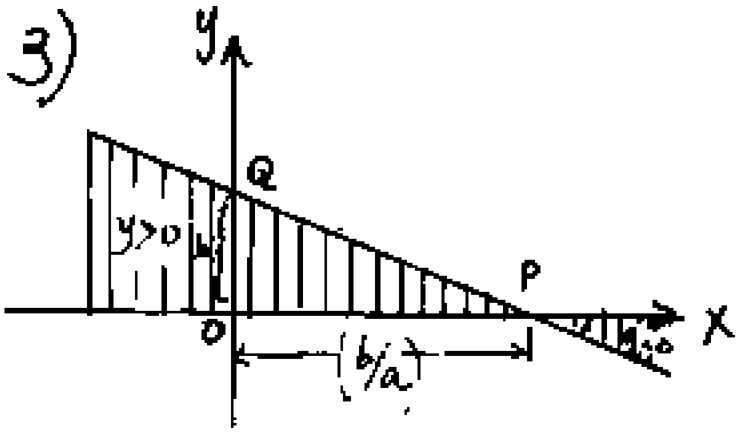
2) $(a>0)$; $(b<0)$ $y=0$ per $(x=+b/a)$

$\boxed{ax+b>0}$ si ha per $(x>b/a)$

$\boxed{ax+b<0}$ si ha per $(x<b/a)$

si noti le semirette che delimitano la disuguaglianza.

3)

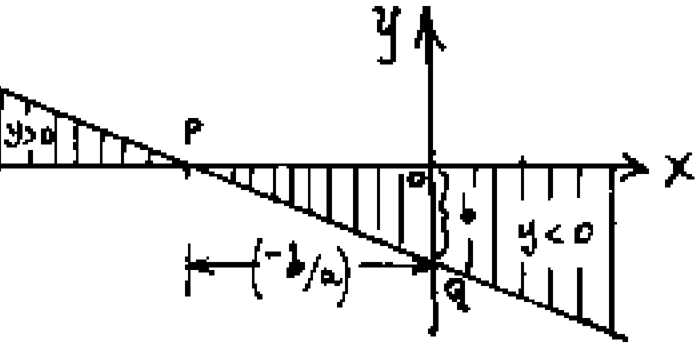


3) $(a<0)$; $(b>0)$; $y=0$ per $(x=+b/a)$

$\boxed{ax+b>0}$ si ha per $(x<b/a)$

$\boxed{ax+b<0}$ si ha per $(x>b/a)$

4)



4) $(a<0)$; $(b<0)$; $y=0$ per $(x=-b/a)$

$\boxed{ax+b>0}$ si ha per $(x<-b/a)$

$\boxed{ax+b<0}$ si ha per $(x>-b/a)$

Si noti l'importanza di porre $y=0$ e ricavare $(x=-b/a)$ punto di passaggio fra le $y<0$ e le $y>0$.

Dire: $(-)$, negativo o minore di zero (<0) è la stessa cosa; dire $(+)$, positivo o maggiore di zero (>0) è la stessa cosa.

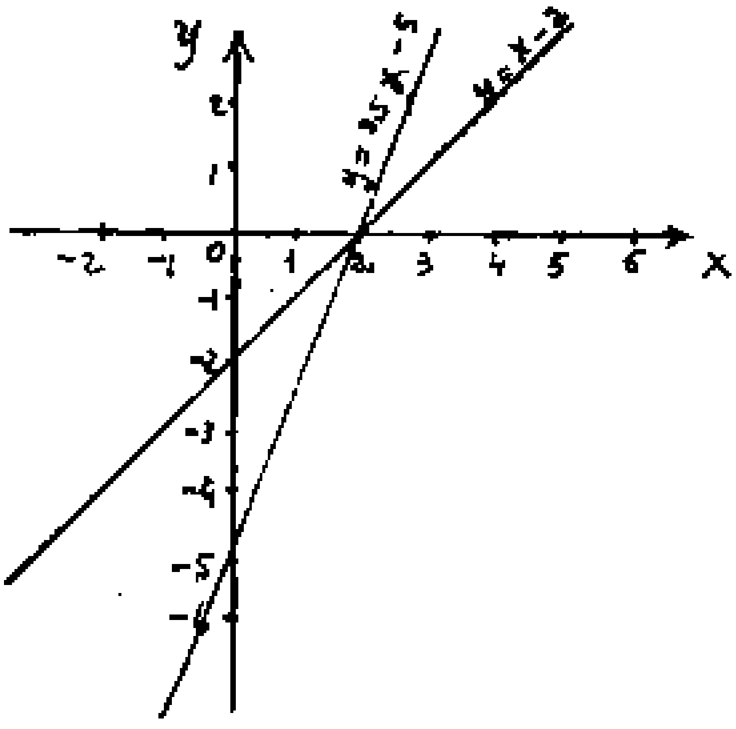
Si noti che, tracciata la retta, non vi sono dubbi in quale campo la disequazione risulta soddisfatta.

<u>Facciamo un esempio numerico.</u>

$$\underline{\frac{1}{2}x + 3x - 2 < x + 3}$$

$\frac{1}{2}x + 2x < 5$ da cui $2{,}5x < 5$; $\boxed{x < 2}$

avremmo potuto scrivere: $\boxed{2{,}5x - 5 < 0}$; oppure: $\boxed{x - 2 < 0}$ se poniamo $y = \underline{2{,}5x - 5}$ ed $\underline{y = x - 2}$ si hanno due rette diverse; ma, $\underline{y = 0}$ per $\underline{x = 2}$



per entrambe le rette e la disuguaglianza risulta soddisfatta per $\underline{x < 2}$

(per esempio per $x = 1$ si ha:

$\frac{1}{2}(1) + 3(1) - 2 < (1) + 3$

$\boxed{1{,}5 < 4}$

La verifica più semplice per $x=0$: $-2 < 3$

Per $x=2$ si ha: $\frac{1}{2}(2) + 3(2) - 2 = 2 + 3$; $5=5$, la disuguaglianza non è sodisfatta.

Si noti che la: $\boxed{y = x - 2}$ resta valida se viene moltiplicata per un qualsiasi "m": $\boxed{y = mx - 2m}$ e sarà ancora una retta passante per il punto :$(x=2; y=0)$, cioè verificherà la disequazione per: $x<2$.

Per capire bene il concetto dij "disequazione" consideriamo la disuguaglianza: $\boxed{a>b}$
si può dire: $\boxed{(a-b)>0}$ (cioè è positiva la differenza $(a-b)$)

oppure: $\boxed{\frac{a}{b}>1}$ (cioè il rapporto fra il maggiore e il minore è maggiore di 1)

Se ad ambo i membri della disuguaglianza: $\boxed{a>b}$ aggiungiamo (o togliamo) una costante K, la differenza $(a-b)$ non varia, varia invece il rapporto: $\boxed{\frac{a+K}{b+K}>1}$ pur restando maggiore di 1.

Invece se moltiplichiamo (o dividiamo.) ambo i membri della disuguaglianza: $\boxed{a>b}$ per un coefficiente "m" positivo, il rapporto :(a/b) non varia, varia invece la differenza : $\boxed{(ma-mb)=m(a-b)>0}$ cioè la validità della disuguaglianza è condizionata dall'essere $\boxed{m>0}$; perché, per $m<0$ si invertirebbe e si avrebbe: $(b<a)$. Esempio: $7>5$; $7-5>0$; $7|m|>5|m|$; ma: $7(-2) \not> 5(-2)$ perché $(-14)<(-10)$

Sarebbe errato :$(-14)<(-10)$ dividerlo per (-2).

Vi sono casi particolari per i quali è bene aver chiaro il concetto di infinitamente piccolo, ed infinitamente grande; il primo tende a zero, (0) il secondo tende ad infinito (∞). Non è lecito in generale usare questi simboli come grandezze reali, si debbono pensare come limiti o grandezze vicinissime o tendenti al limite. (Torneremo sul calcolo dei limiti). Sia N un numero finito, e vediamo le correlazioni con zero (0) e con infinito (∞).

$$\boxed{N \pm 0 = N} \; ; \; \boxed{N \pm \infty = \pm\infty} \; ; \; \boxed{0 \pm \infty = \pm\infty}$$

$$\boxed{\frac{N}{0} = \infty} \quad \boxed{\frac{N}{\infty} = 0} \quad \boxed{\frac{1}{\infty} = 0}$$

$$\boxed{N^0 = 1} \quad \boxed{N^\infty = \infty} \quad \boxed{\frac{1}{0} = \infty}$$

$$\boxed{(N)(0) = 0} \quad \boxed{(N)(\infty) = \infty} \quad \boxed{\underset{\text{(indefinito)}}{(0)(\infty)} = N}$$

Possiamo ora tornare alla nostra disuguaglianza:

$(a > b)$; $(a + K) > (b + K)$; $|m| a > |m| \cdot b$

Quando K tende a diventare infinitamente grande perde di rilevanza il segno $>$ che tende a ($\simeq$) circa uguale. Esempio $a = 2$; $b = 1$. $2 > 1$ sia: $K = (10^9 - 1)$

$1000\,000\,001 > 1000\,000\,000$; $\frac{a+k}{b+K} > 1 = \left(1 + \frac{1}{10^9}\right) \simeq 1$

Analogamente per "m" tendente a zero, oppure tendente ad infinito; la disuguaglianza nel caso di m tendente a zero, tende ad azzerare ambo i termini e la loro differenza. $(0)(a-b) > 0$ non è vera; mentre $\infty(a-b) > 0$ è vera.

Facciamo un altro esempio di disequazione :

$$\boxed{(a-b)x > ab}$$

cioè: $\boxed{x > \frac{ab}{a-b}}$ <u>Siano: $a>0$; $b>0$</u>

vi sono tre casi:

1) se : $\boxed{a>b}$ allora : $\boxed{(a-b)>0}$ $\boxed{x>\frac{ab}{(a-b)}}$

2) " $\boxed{a<b}$ " $\boxed{(a-b)<0}$ $\boxed{x<\frac{ab}{a-b}}$

3) " $\boxed{a=b}$ " $\boxed{(a-b)=0}$ $\boxed{x=\infty^*}$

<u>numericamente:</u>

1) $a=6$; $b=2$; $(a-b)=+4$ $x>\frac{12}{4}$; $\boxed{x>3}$

2) $a=2$; $b=6$; $(a-b)=-4$ $x<\frac{12}{-4}$; $\boxed{x<-3}$

3) $(a=b)$ $(a-b)=0$ $x^*=\frac{12}{0}$; $\underline{x=\infty^*}$

verifichiamo nell'espressione data: $(ab=12)$

$$(6-2)(>3) > 12$$

$$(2-6)(<-3) > 12$$

$$(0)(\infty^*) > 12$$

nel terzo caso, la forma indeterminata $(0)(\infty^*)$ deve essere tale da dare un numero >12. Se ciò è possibile potremo dirlo dopo aver fatto i limiti e le forme indeterminate.

Nel 1) caso facciamo crescere "b" fino a diventare uguale ad "a", ci si avvicina ad $(a-b)=0$ provenendo da valori positivi; $(x>+\infty^*)$. Nel 2° caso facciamo diminuire "b" fino a diventare uguale ad "a", ci si avvicina ad $(a-b)=0$ provenendo da valori negativi: $(x<-\infty)$

Come si vede i limiti a destra e a sinistra dello zero sono diversi.

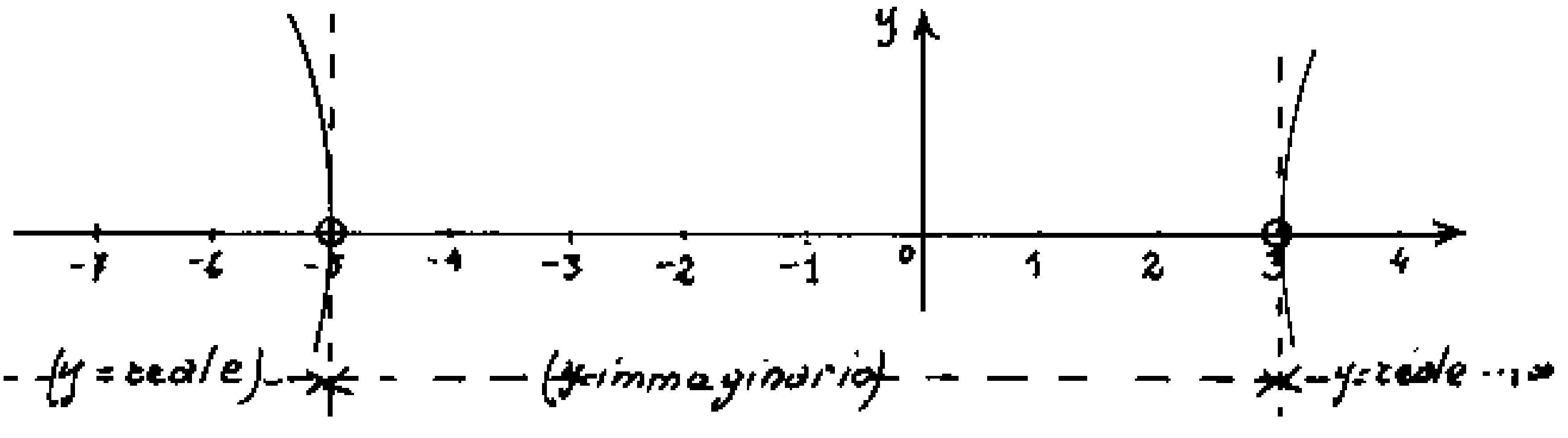
E molto importante rilevare quali sono <u>le condizioni di zero</u>, cioè vedere per quali valori o condizioni si azzera (si annulla) una certa parte o tutta l'espressione in esame. Per vedere meglio ciò, conviene (quando è possibile) ridurre l'espressione a prodotto di binomi. Per esempio: $y = \sqrt{x^2+2x-15} = \sqrt{(x-3)(x+5)}$, il radicando si azzera per $\boxed{x=+3}$ ad $\boxed{x=-5}$; conviene fare subito il grafico delle ascisse, i punti $x=+3$; ed $x=-5$ dividono il campo in tre zone. (Non essendoci altri valori o condizioni che azzerano il radicando. I punti $y=0$ sono i punti di passaggio da positivo a negativo e viceversa del radicando, e poiché per $x=0$; $y=\sqrt{-15}$ (immaginario) vuol dire che tutto il campo da $(x=-5)$ ad $(x=+3)$ il radicando è negativo, necessariamente i campi esterni sono con radicando posivivo, cioè:

$\boxed{-\infty < x \leq -5}$ y è <u>reale</u>

$\boxed{-5 < x < 3}$ y è <u>immaginario</u>

$\boxed{3 \leq x < \infty}$ y è <u>reale</u>

(si noti che la ricerca dei campi di esistenza di una funzione è ridotta al calcolo di una disequazione e viceversa.

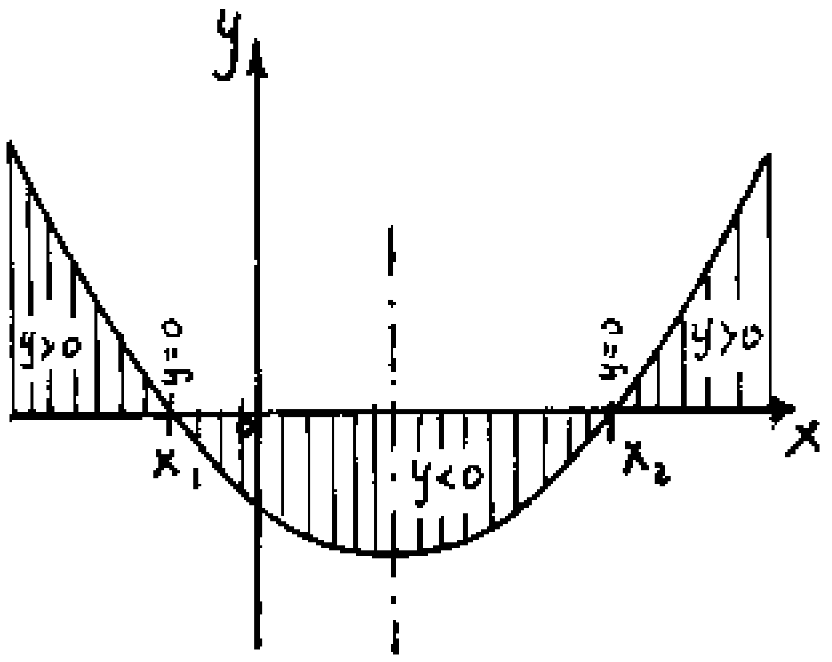


Disequazioni qualsiasi

Una espressione matematica $\underline{y = f(x)}$ si dice : "funzione della variabile x". Se poniamo: $\underline{f(x)=0}$, l'espressione si chiama: "equazione in x". Infine se poniamo: $\underline{f(x) > 0}$ oppure: $\underline{f(x) < 0}$ queste forme si dicono "disequazioni in x".

Abbiamo già posto in evidenza, nella: "$\underline{(a-b)x > ab}$" come valori diversi ad "a" e "b" portino a condizioni diverse nella risoluzione delle x, che in generale dettano soddisfare ad espressioni del tipo: $\underline{f(x) > \varphi(x)}$.

E abbastanza divertente rilevare come: $y = f(x)$ comprenda: $f(x)=0$; $f(x)>0$; $f(x)<0$. Basta fare il grafico della funzione. Per esempio: (vedi fig.)



$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

per $\underline{y=0} \rightarrow \underline{x} = \left\langle \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right.$

$\boxed{ax^2 + bx + c > 0}$ per: $\boxed{-\infty < x < x_1}$. $\boxed{x_2 < x < +\infty}$

$\boxed{ax^2 + bx + c < 0}$ per: $\boxed{x_1 < x < x_2}$

Tal volta l'espressione: $y = f(x)$ oltre a valori numerici ed operatori in (x), contiene una o più lettere: $(\kappa, \lambda, \ldots)$ dette "parametri". Poiché per $\kappa, \lambda, \ldots$ non viene specificato il valore numerico, avremo una $y = f(x)$ ogni volta che sostituiamo ai parametri: $K, \lambda, \ldots$ ecc, dei valori numerici.

In altre parole una espressione matematica: $y=f(x)$ che contenga dei parametri, rappresenta: "una famiglia di funzioni" (Una funzione per ogni valore numerico assegnato ai parametri)

In questi casi occorre quindi rilevare "i capisaldi" determinati dai parametri, per esempio nella: $(a-b)x > ab$ è caposaldo il fatto che $b = a$, determina, (per valori crescenti di b) l'inversione della disuguaglianza. (Caposaldi sono quei punti, o quei valori particolari, che determinano le condizioni base per lo sviluppo del problema. La parola caposaldo deriva dalla topografia, ove caposaldo è un punto del terreno, e può essere caposaldo di orientamento o di riferimento planimetrico o altimetrico.)

Facciamo un esempio:

Studiare la disequazione parametrica:

$$\boxed{y = (K-2)x^2 - 2Kx + 9 > 0}$$

Notiamo subito che: $\underline{K=2}$ annulla il coefficiente di x^2, e per: $\underline{K>2}$ la parabola è volta verso l'alto, mentre per $\underline{K<2}$ la parabola è volta verso il basso. Quindi $\underline{K=2}$ è un caposaldo della nostra disequazione.

Se poniamo la disequazione nella forma:

$$y = K(x^2-2x) - 2x^2 + 9 > 0$$

Si nota che per $(x^2-2x)=0$ sparisce il parametro K, cioè <u>per $x=0$</u> $\rightarrow y = 9 > 0$; e <u>per $x = 2$</u> $\rightarrow$ $y = 1 > 0$. <u>La disequazione è certamente soddisfatta</u> indipendente da K.

Poniamo ora: $\underline{(K-2)x^2 - 2Kx + 9 = 0}$

e risolviamo la x:

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = \frac{K \pm \sqrt{K^2-9K+18}}{(K-2)}$$

Vediamo per quali valori di K ammette radici reali:

$$\begin{matrix} K_1 \\ K_2 \end{matrix} = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2} = \begin{matrix} +6 \\ +3 \end{matrix}$$

Quindi $K=3$, e $K=6$ sono altri due capisaldi

Possiamo ora discutere la disequazione:

$\boxed{-\infty < K < 2}$ famiglia di parabole volte verso il basso passanti per $Q \equiv (0,9)$ ed $A \equiv (2,1)$; la disequazione risulta soddisfatta per $\boxed{x_1 < x < x_2}$ (cioè valori interni alle radici)

$\boxed{K=2}$ degenera in una retta $y = -4x + 9 > 0$ vale per $\boxed{x < 9/4}$

$\boxed{2 < K < 3}$ famiglia di parabole volte verso l'alto, $\Delta > 0$ che intersecano l'asse x; vale per $\boxed{x < x_1}$, e per $\boxed{x > x_2}$ (cioè valori esterni alle radici)

$\boxed{K=3}$ Parabola volta verso l'alto, ($\Delta=0$), tangente l'asse delle x nel punto: $x=3$; vale per: $\boxed{x<3}$ e per $\boxed{x>3}$ (escluso $x=3$)

$\boxed{3<K<6}$ Famiglia di parabole volte verso l'alto, ($\Delta<0$), non intersecano l'asse x, ($y>0$ sempre); vale per ogni valore di x: $\boxed{-\infty<x<+\infty}$.

$\boxed{K=6}$ Parabola volta verso l'alto, ($\Delta=0$) tangente l'asse delle x nel punto: $x=3/2$; vale per $\boxed{x<3/2}$ e per $\boxed{x>3/2}$ (escluso: $x=3/2$)

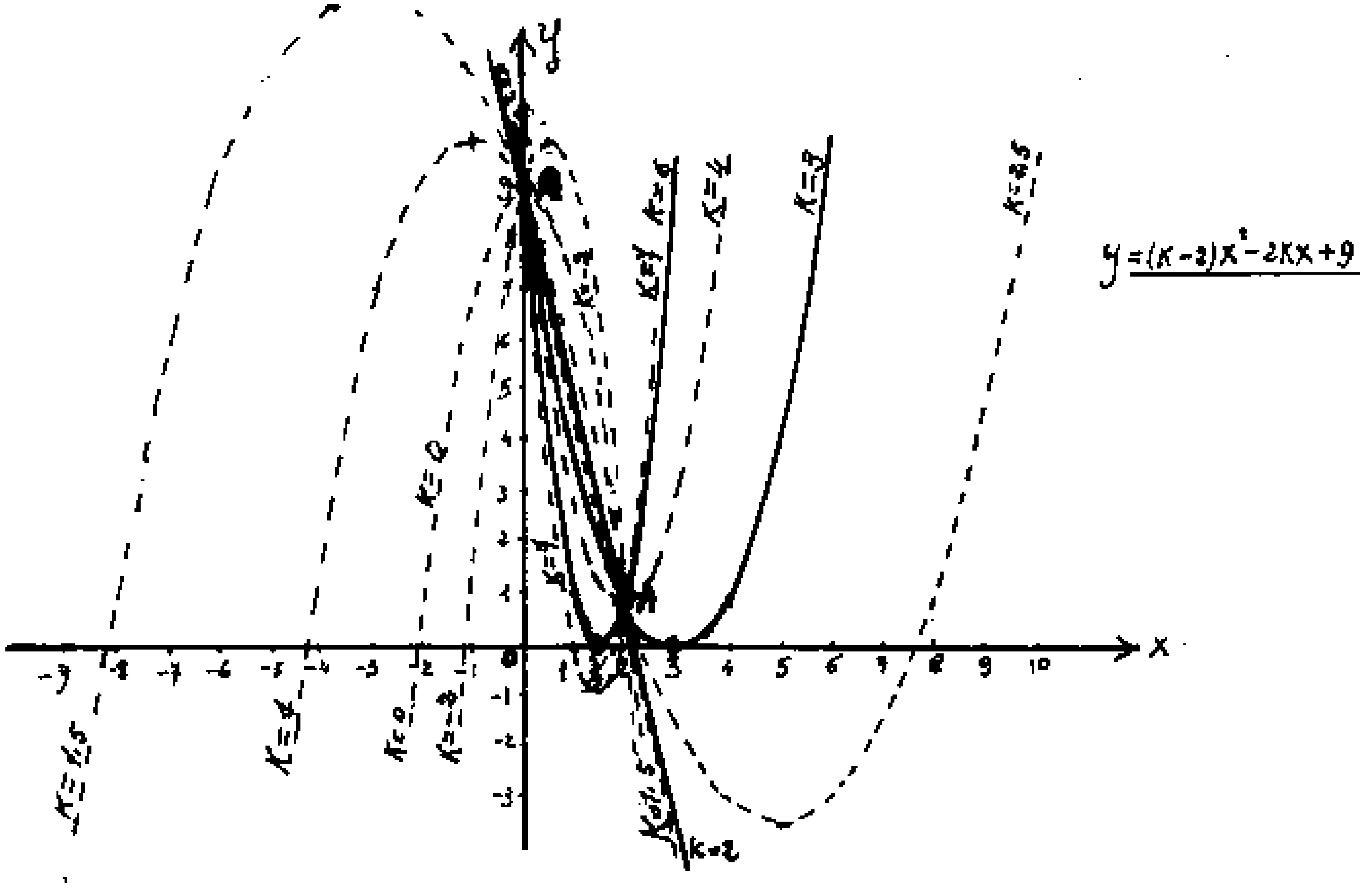
$\boxed{6<K<+\infty}$ Famiglia di parabole volte verso l'alto, $\Delta>0$, intersecano l'asse x; vale per $\boxed{x<x_1}$ e per $\boxed{x>x_2}$ (cioè valori esterni alle radici).

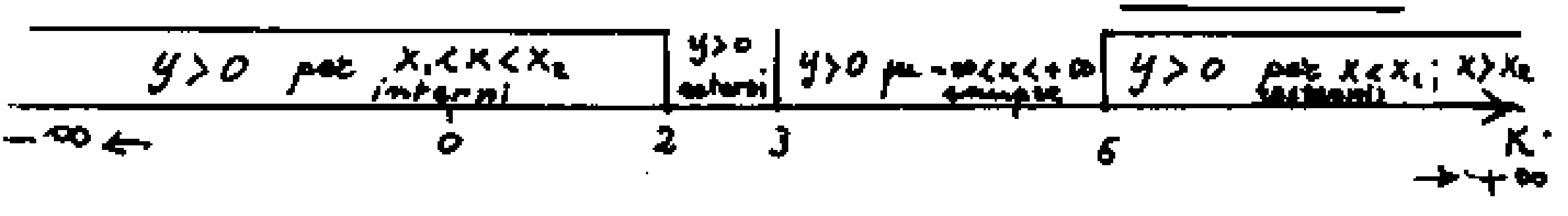
Vi sono tre condizioni limite e cioè K tendente a 2; K tendente a $-\infty$; K tendente a $+\infty$.

Per $K=2$ si ha una sola radice reale $x=9/4$, l'altra è $\pm\infty$ a seconda che K tenda a $2\pm\varepsilon$ con $\varepsilon\to$ zero.

Per $K>2$ si hanno parabole volte verso l'alto che degenerano nella retta $y=-4x+9$ per $K=2$; e nelle due rette: $x=0$ ed $x=2$ per $K\to+\infty$. Analogamente per $K\leq2$ degenera nelle stesse rette, le parabole volte verso il basso, quando K tende a 2 od a $-\infty$.

Inoltre dovendo tutte le linee parabole o rette, passare per i punti $Q \equiv (0;9)$ ed $A \equiv (2;1)$, e non avendosi quindi parabole volte verso il basso con vertice $y_V < 0$, (il vertice: $y_V \lesseqgtr 0$ si ha solo per le parabole volte verso l'alto), si ha che tutte le parabole hanno una radice compresa fra: $3/2$ e 3 o immaginaria, l'altra radice per $K \to -\infty$ (parabole verso il basso) tende a zero, e per $K \to (2-\varepsilon)$ (con: $\varepsilon \to$ zero) tende a $-\infty$. Invece per le parabole verso l'alto per $K \to +\infty$ l'altra radice tende a zero mentre per $K \to (2+\varepsilon)$; (con $\varepsilon \to$ zero) tende a $+\infty$.





La discussione delle equazioni di secondo grado

Ogni disequazione di 2° grado ad una incognita può sempre ridursi ad una delle forme:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$ax^2 + bx + c < 0$$

ove a, b, c possono essere funzioni di parametri, come abbiamo visto nell'esempio di disuguaglianza precedentemente trattato.

Indicando con y il trinomio ax^2+bx+c; e con x_1, x_2, le radici dell'equazione $y=0$; ove: $(x_1 < x_2)$, con $\Delta = b^2-4ac$ il discriminante dell'equazione: $y=0$, e ricordando che: $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$; cioé che un trinomio di 2° grado in x puó scomporsi nel prodotto delle differenze fra la variabile x e le radici, moltiplicato per il primo coefficiente "a"; tenendo presente la regola dei segni di Cartesio, possiamo riunire in un prospetto tutti i casi possibili di disequazioni di secondo grado. Cercando di visualizzare il grafico delle rispettive parabole.

Disequazione			valori di x che la verificano	
$\Delta > 0$	$a > 0$	$y > 0$	$(x_1 > x > x_2)$	esterni alle radici
		$y < 0$	$(x_1 < x < x_2)$	interni alle radici
	$a < 0$	$y > 0$	$(x_1 < x < x_2)$	interni alle radici
		$y < 0$	$(x_1 > x > x_2)$	esterni alle radici
$\Delta = 0$	$a > 0$	$y > 0$	$(x > (x_1 = x_2) > x)$	escluso $(x = x_1 = x_2)$
		$y < 0$	—	nessun valore di x
	$a < 0$	$y > 0$	—	nessun valore di x
		$y < 0$	$(x > (x_1 = x_2) > x)$	escluso $(x = x_1 = x_2)$
$\Delta < 0$	$a > 0$	$y > 0$	$(-\infty < x < +\infty)$	per ogni valore di x
		$y < 0$	—	nessun valore di x
	$a < 0$	$y > 0$	—	nessun valore di x
		$y < 0$	$(-\infty < x < +\infty)$	per ogni valore di x

Consideriamo ora una equazione di secondo grado i cui coefficienti contengono dei parametri. (Per esempio l'equazione che abbiamo già studiato come disequazione, cioè: $(K-2)x^2 + 2Kx + 3 = 0$)

Conviene, anche in questo caso fare un prospetto:

Prospetto di : $(K-2)X^2 - 2KX + 9 = 0$

parametro	Δ	a	b	c	X_1	X_2	Conclusioni
$K \to -\infty$	$\mp\infty$	$-\infty$	$+\infty$	+	0	+	due radici : $x_1 \to 0_-$; $x_2 \to 2_-$
$-\infty < K < 0$	+	−	+	+	−	+	due radici : $\lvert X_1 \rvert < \lvert X_2 \rvert$
$K = 0$	+	−	0	+	−	+	due radici : $\lvert X_1 \rvert = \lvert X_2 \rvert = \sqrt{9/2} = \pm 2{,}12$
$0 < K < 2$	+	−	−	+	−	+	due radici $\lvert X_1 \rvert > \lvert X_2 \rvert$
$K = 2$	+	0	−	+	$\mp\infty$	+	una radice reale : $X_1 = \mp\infty$; $X_2 = 2{,}25$
$2 < K < 3$	+	+	−	+	+	+	due radici >0 : $X_1 < X_2$
$K = 3$	0	+	−	+	+	+	due radici coincidenti $x_1 = x_2 = 3$
$3 < K < 6$	−	+	−	+	*	*	due radici immaginarie
$K = 6$	0	+	−	+	+	+	due radici coincidenti $x_1 = x_2 = 1{,}5$
$6 < K < +\infty$	+	+	−	+	+	+	due radici > 0 $X_1 < X_2$
$K \to +\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	+	0	+	due radici $X_1 \to 0_+$; $X_2 \to 2_+$

È opportuno confrontare il presente prospetto col disegno della famiglia di parabole data da: $y = (K-2)X^2 - 2KX + 9$

La discussione dei problemi di 2° grado ad una incognita fà perno su due condizioni:

1) Che le radici siano reali : $(\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0)$

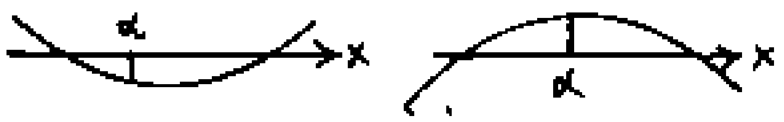
2) che le radici soddisfino il problema. (può accadere infatti che una sola radice o nessuna soddisfi il problema).

In questi casi si tratterà di condizionare i coefficienti a, b, c, cioè porli in funzione di un parametro K in tal caso le variazioni di K permetteranno di soddisfare il nostro problema.

Un altro tipo di problema di 2° grado è il confronto delle radici dell'equazione di 2° grado con un numero dato α. Questo problema sorge quando le radici dell'equazione debbono essere maggiori o minori di α. Considerato $\Delta > 0$ si ha:

1) Se: $f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$ è di segno opposto ad "a", cioè se: $\boxed{a f(\alpha) < 0}$

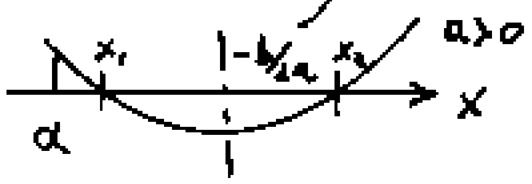
si hanno due radici reali ed α è interno all'intervallo: $\boxed{X_1 < \alpha < X_2}$



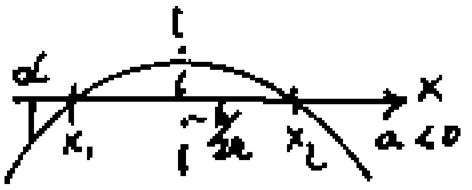
2) Se $f(\alpha)$ è dello stesso segno di "a" cioè se:

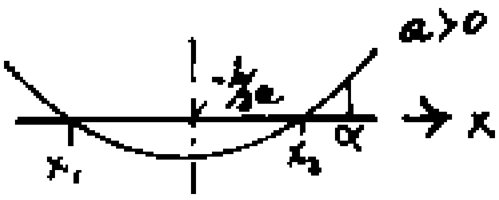
$$\boxed{a f(\alpha) > 0}$$

α risulta esterno alle radici e per decidere se: $\alpha < x_1$ oppure $\alpha > x_2$ si confronta con: $\frac{-b}{2a}$ (semisomma delle radici o posizione dell'asse della parabola), ed avremo: $\ldots < x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2 < \ldots$

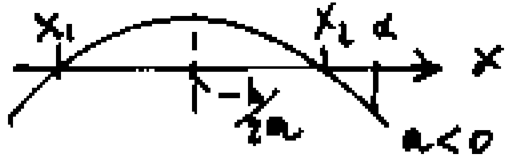


$\left(\alpha < x_1 < -b/2a\right)$





$\left(\frac{-b}{2a} < x_2 < \alpha\right)$



3) Se $f(\alpha) = 0$ vuol dire che α coincide con una delle due radici e per sapere quale confronteremo ancora α con $-\frac{b}{2a} = \frac{x_1+x_2}{2}$

Accertato che $\Delta > 0$ cioè si abbiano radici reali, la discussione può sintetizzarsi nel seguente prospetto:

$$\Delta > 0 \begin{cases} f(\alpha) < 0 \quad \longrightarrow & (x_1 < \alpha < x_2) \\ f(\alpha) > 0 \begin{cases} \alpha > -b/2a \\ \alpha < -b/2a \end{cases} & \begin{matrix} (x_1 < x_2 < \alpha) \\ (\alpha < x_1 < x_2) \end{matrix} \\ f(\alpha) = 0 \begin{cases} \alpha > -b/2a \\ \alpha < -b/2a \end{cases} & \begin{matrix} (x_1 < \alpha = x_2) \\ (x_1 = \alpha < x_2) \end{matrix} \end{cases}$$

Si ha la seguente <u>regola</u>:

"Per confrontare le radici di una equazione di secondo grado con un numero dato α, si sostituisce questo numero alla x dell'equazione, e si ottiene numericamente $f(\alpha)$. Se $f(\alpha)$ è di segno opposto ad "a"; α è intermedio alle radici. Se $f(\alpha)$ è di segno concorde con "a", ed α è maggiore di $(-b/2a)$. è anche maggiore delle radici, se α è minore di $-b/2a$, α è anche minore delle radici. Se $f(\alpha) = 0$ allora α coincide con una radice: con x_1, se $\alpha < -b/2a$. Con x_2 se $\alpha > -b/2a$"

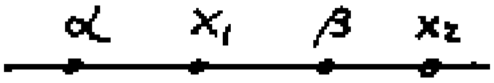
Confronto delle radici di una equazione con due numeri dati α e β. (Metodo di Tartinville - Girod) con $\alpha < \beta$ e $\Delta > 0$ nella

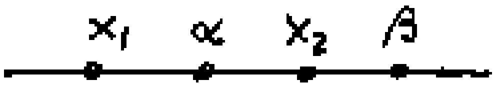
$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Supponiamo inoltre che a, b, c siano funzioni di un parametro k,

Quindi si procede esattamente come per il confronto con un solo numero dato α.

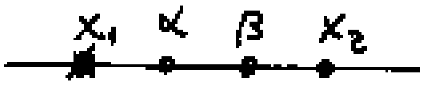
Si verificherà che se $f(\alpha)$ ed $f(\beta)$ hanno segni discordi ed $\alpha < \beta$ avremo che un valore sarà interno alle radici, l'altro esterno, cioè una radice è compresa nell'intervallo: $(\alpha, \div \beta)$. Si hanno due casi:





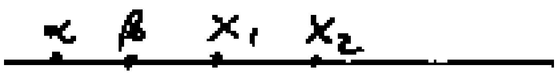
il primo: con $a f(\alpha) > 0$; il secondo: con $a f(\alpha) < 0$.

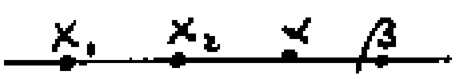
Se invece: $f(\alpha) < 0$ ed $f(\beta) < 0$ ed $a > 0$ avremo che sia α che β sono interni alle radici



Se $f(\alpha) > 0$ ed $f(\beta) > 0$ ed $a > 0$ avremo che le radici x_1 ed x_2 cadono entrambe nell'intervallo $(\alpha, \div \beta)$

Infine confrontando α e β con $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ possiamo avere:

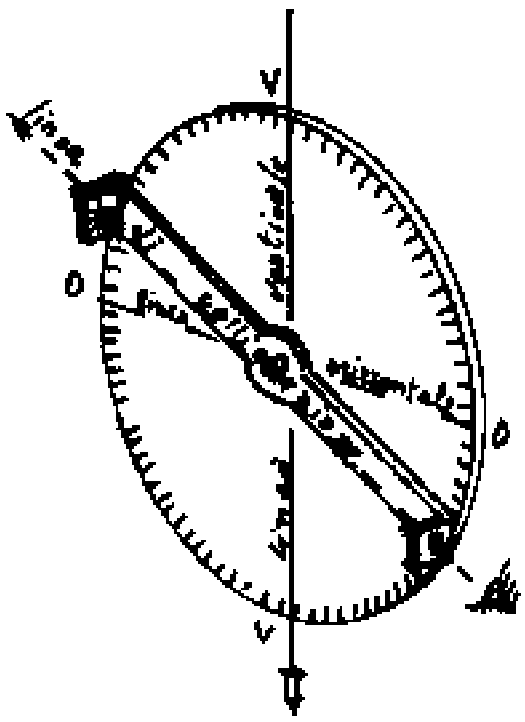




Resta valido il prospetto fatto per il solo dato α.

La trigonometria

TRIGONOMETRIA é una parola che deriva dal Greco: τρι-γωνία-μέτρον = tre-angolo-misura. In effetti gli antichi erano riusciti a trovare praticamente tutte le correlazioni che oggi conosciamo sulle grandezze lineari e di superficie dei triangoli e quindi di tutte le figure scomponibili in triangoli; la similitudine era la base, e da ciò i teoremi di Pitagora, di Euclide, di Erone, ecc.; ma non riuscivano a trovare correlazioni fra angoli e misure lineari. Pure le misure del terreno per determinare confini, ma soprattuto misure astronomiche, ove con uno strumento chiamato: "Astrolabio", costituito da un grosso cerchio graduato, e da un diametro mobile detto collimatore, col quale puntavano alle stelle ed ai pianeti, misurando angoli, aveva fatto emergere la necessitá di correlare angoli e misure lineari. Del resto, la varia configurazione dei triangoli rettangoli, era evidentemente connesso alle



misure angolari. Notavano che se il rapporto dei cateti (o di un cateto e l'ipotenusa) era lo stesso, i due triangoli rettangoli avevano angoli uguali. indipendentemente dalla grandezza lineare degli stessi. Era il principio di similitudine ...

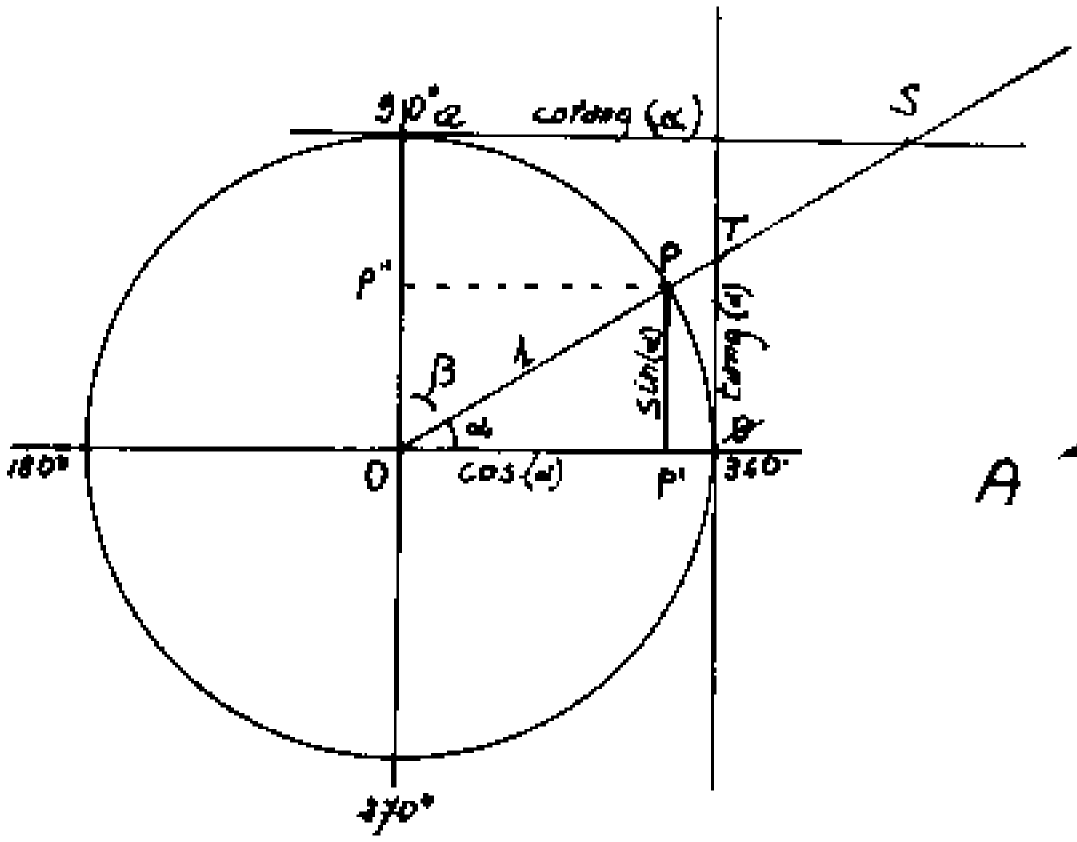
Il problema era avvincente e dobbiamo dire che nella sostanza non è mai stato risolto (e non lo è a tuttóggi). Però i calcoli dovevano pure essere fatti, perciò sulla base di triangoli rettangoli noti, furono approntate delle tavole di conti fatti. Per esempio il triangolo rettangolo, metà di un equilatero, cioè di angoli 90°, 60°, 30°. ha il cateto minore: (opposto a 30°) metà dell'ipotenusa; il cateto maggiore $\sqrt{3}$ volte il cateto minore. È evidente che un qualsiasi triangolo rettangolo che abbia per angoli 90°, 60°, 30° e di cui si conosca una misura lineare, sulla base dei rapporti suddetti si conoscono anche le altre misure lineari. Se sappiamo che il cateto minore è 5, l'ipotenusa sarà $2 \cdot 5 = 10$ ed il cateto maggiore sarà $5 \cdot \sqrt{3} = 8,66025$.

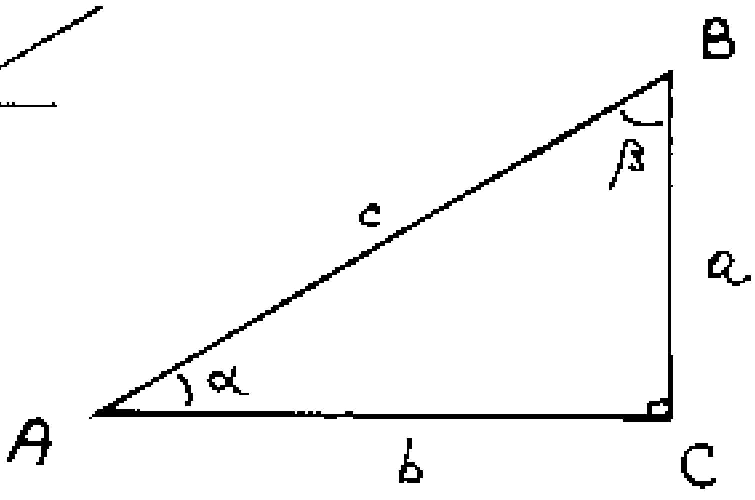
Ipparco di Nicea (II sec a.C.) calcoló le corde di archi varianti di mezzo grado in mezzo grado. Diciamo: "seno" = "la semicorda sottesa all'arco doppio". Le prime tavole che calcolano "seni" anziché "corde" sarebbero dovute all'indiano Aryabhatta (476 d.C).

Vediamo com'è possibile eseguire una simile tabella e come da ció sia possibile dedurne quelle correlazioni pomposamente chiamate calcoli e formule trigonometriche.

Consideriamo un cerchio di raggio = 1 (cerchio trigonometrico), fissato un raggio origine: $\overline{O\text{Ø}}$,= 1, ed un verso di ruotazione, (poniamo antiorario), un raggio mobile: $\overline{OP} = 1$ puó assumere tutte le posizioni possibili tali che possano, rispetto al raggio origine, rappresentare tutti gli angoli piani possibili, nessuno eccettuato.

Dividiamo il cerchio in quattro quadranti, consideriamo P sulla circonferenza del I° quadrante e chiamiamo α l'angolo $P\hat{O}\text{Ø}$. e β il suo complementare.





Proiettiamo P su $\overline{O\emptyset}$ e su $\overline{OQ}$ in P' e P'', avremo

$\overline{PP'}$ = seno dell'angolo (α) = sin(α) = sen(α)

$\overline{PP''}$ = seno dell'angolo (β) complementare di α

(le funzioni dell'angolo complementare sono le cofunzioni)

perciò: $\overline{PP''}$ = coseno dell'angolo (α) = cos(α) = $\overline{OP'}$

tracciate le tangenti al cerchio in Ø e Q si ha: $\overline{\emptyset T}$ = tangente di (α) = tang(α) = tg(α)

$\overline{QS}$ = cotangente di (α) = cotg(α) = 1/tg(α)

$\overline{OT}$ = secante di (α) = sec(α) = $\frac{1}{\cos(\alpha)}$

$\overline{OS}$ = cosecante di (α) = cosec(α) = 1/sin(α).

infatti: $\overline{OT} : \overline{O\emptyset} = \overline{OP} : \overline{OP'}$, cioè: $\overline{OT} : 1 = 1 : \overline{OP'}$, cioè: sec α : 1 = 1 : cos α ; analogamente: cosec α = 1/sen(α).

Al triangolo OPP' possiamo applicare il teorema di Pitagora:

$$\boxed{\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$$ (fondamentale)

Si noti che: $\text{sen}^2(\alpha) = (\text{sen}(\alpha))^2$; $\cos^2(\alpha) = (\cos(\alpha))^2$.

inoltre: $\overline{T0} : \overline{O0} = \overline{PP'} : \overline{OP'}$ cioé:

$$\text{tang}(\alpha) : 1 = \text{sen}(\alpha) : \cos(\alpha)$$

$$\boxed{\frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{Cos}(\alpha)} = \text{tang}(\alpha)} \quad \text{(fondamentale)}$$

Consideriamo ora il triangolo ACB, simile e similmente disposto al triangolo OP'P, possiamo scrivere le seguenti proporzioni:

$a : c = \text{sen}(\alpha) : 1 \longrightarrow \boxed{a = c\,\text{sen}(\alpha)}$

$b : c = \cos(\alpha) : 1 \longrightarrow \boxed{b = c\cos(\alpha)}$

$a : b = \text{tang}(\alpha) : 1 \longrightarrow \boxed{a = b\,\text{tg}(\alpha)}$

Se del triangolo ACB conosciamo l'ipotenusa "c" ed un angolo (oltre l'angolo retto), possiamo dire:

"Un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto o per il coseno dell'angolo adiacente"

Se invece conosciamo un cateto ed un angolo, possiamo dire:

"L'ipotenusa è uguale ad un cateto diviso per il seno dell'angolo opposto o diviso per il coseno dell'angolo adiacente"

"Un cateto è uguale all'altro per la tangente dell'angolo opposto o la cotangente dell'angolo adiacente"

Queste tre regole sottolineate (che un Professore di Topografia pretendeva a memoria immediata) consentono di risolvere i triangoli rettangoli e quindi tutte le altre figure poligonali.

Si noti che le funzioni angolari: $sen(\alpha)$, $cos(\alpha)$, $tang(\alpha)$, ecc., sono dei <u>coefficienti di proporzionalità</u> fra gli elementi di triangoli rettangoli simili.

I valori del seno, del coseno, della tangente, si trovano affiancati al valore dell'angolo nelle <u>tavole trigonometriche</u>.

Correlazioni fra le funzioni trigonometriche

Dalla: $\boxed{sen^2(\alpha) + cos^2\alpha = 1}$ ricaviamo:

$$sen^2\alpha = 1 - cos^2\alpha \quad \text{ed} \quad cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$$

$$sen\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha} \quad ; \quad cos\alpha = \sqrt{1 - sen^2\alpha}$$

Dalla: $\boxed{\dfrac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)} = tg(\alpha)}$; $\dfrac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} = tg^2(\alpha)$;

$$\frac{1 - cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = tg^2\alpha \; > \; 1 - cos^2\alpha = (cos^2\alpha)(tg^2\alpha) \; > \; cos^2\alpha(1 + tg^2\alpha) = 1$$

$$\boxed{cos(\alpha) = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + tg^2(\alpha)}}} \quad \text{(col segno di } tg(\alpha)\text{)}$$

analogamente: $\boxed{sec(\alpha) = \dfrac{tg(\alpha)}{\sqrt{1+tg^2(\alpha)}}}$

Possiamo quindi, nota una funzione di un angolo, ricavarne tutte le altre.

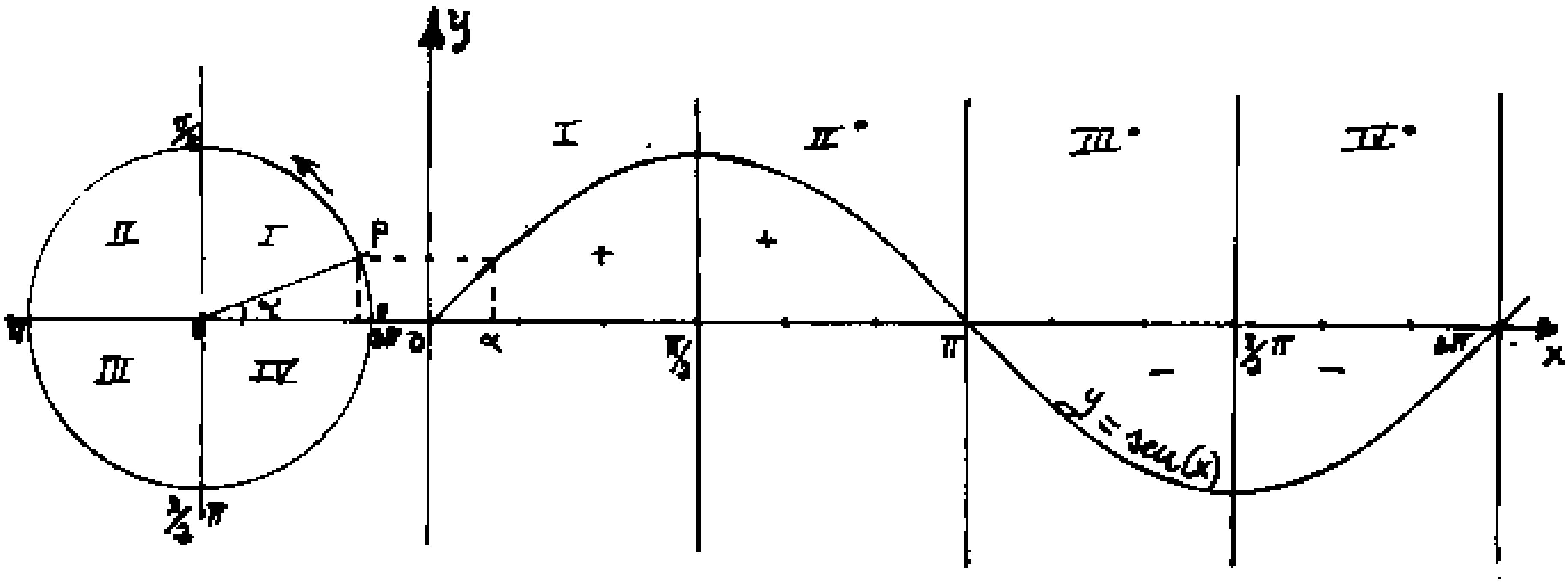
TABELLA

nota / incognita	$sin(\alpha)$	$cos(\alpha)$	$tang(\alpha)$	$cotg(\alpha)$	$sec(\alpha)$	$cosec(\alpha)$
$sin(\alpha)=$	$sen(\alpha)$	$\sqrt{1-cos^2(\alpha)}$	$\dfrac{tg(\alpha)}{\sqrt{1+tg^2(\alpha)}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{cotg^2(\alpha)+1}}$	$\dfrac{\sqrt{sec^2(\alpha)-1}}{sec(\alpha)}$	$\dfrac{1}{cosec(\alpha)}$
$cos(\alpha)=$	$\sqrt{1-sin^2(\alpha)}$	$cos(\alpha)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2(\alpha)}}$	$\dfrac{cotg(\alpha)}{\sqrt{cotg^2(\alpha)+1}}$	$\dfrac{1}{sec(\alpha)}$	$\dfrac{\sqrt{cosec^2(\alpha)-1}}{cosec(\alpha)}$
$tang(\alpha)=$	$\dfrac{sin(\alpha)}{\sqrt{1-sin^2(\alpha)}}$	$\dfrac{\sqrt{1-cos^2(\alpha)}}{cos(\alpha)}$	$tg(\alpha)$	$\dfrac{1}{Cotg(\alpha)}$	$\sqrt{sec^2(\alpha)-1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{cosec^2(\alpha)-1}}$
$cotg(\alpha)=$	$\dfrac{\sqrt{1-sin^2(\alpha)}}{sen(\alpha)}$	$\dfrac{cos(\alpha)}{\sqrt{1-cos^2(\alpha)}}$	$\dfrac{1}{tg(\alpha)}$	$cotg(\alpha)$	$\dfrac{1}{\sqrt{sec^2(\alpha)-1}}$	$\sqrt{cosec^2(\alpha)-1}$
$sec(\alpha)=$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-sen^2(\alpha)}}$	$\dfrac{1}{cos(\alpha)}$	$\sqrt{1+tg^2\alpha}$	$\dfrac{\sqrt{cotg^2(\alpha)+1}}{cotg(\alpha)}$	$sec(\alpha)$	$\dfrac{cosec(\alpha)}{\sqrt{cosec^2(\alpha)-1}}$
$cosec(\alpha)=$	$\dfrac{1}{sin(\alpha)}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-cos^2(\alpha)}}$	$\dfrac{\sqrt{1+tg^2(\alpha)}}{tg(\alpha)}$	$\sqrt{cotg^2(\alpha)+1}$	$\dfrac{sec(\alpha)}{\sqrt{sec^2(\alpha)-1}}$	$cosec(\alpha)$

Rappresentazioni grafiche.

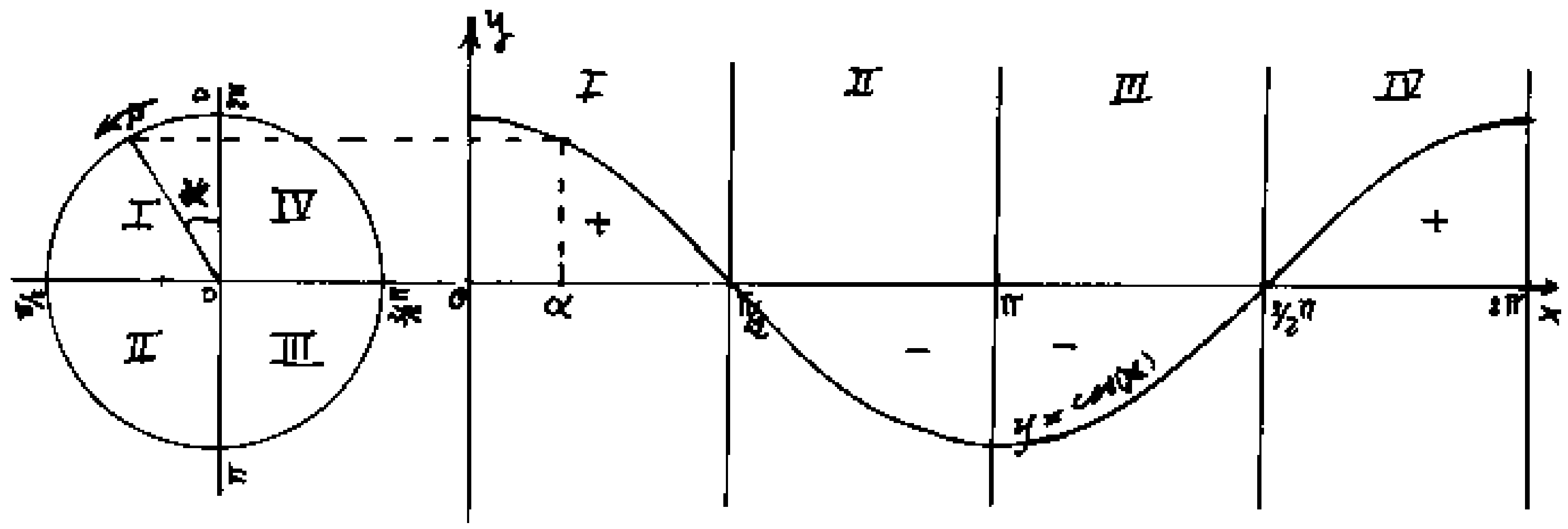
Possiamo ora tracciare i grafici delle funzioni trigonometriche. A tal fine basterà dividere il cerchio trigonometrico in un numero abbastanza grande di divisioni e riportare in y il segmento corrispondente alla funzione; mentre in ascisse è riportata la circonferenza rettificata, cioè l'angolo in radianti (se consideriamo il raggio del cerchio = 1 modulo unitario della scala grafica). È questa una delle ragioni per cui, in analisi matematica, gli angoli si misurano in radianti.

Sinusoide



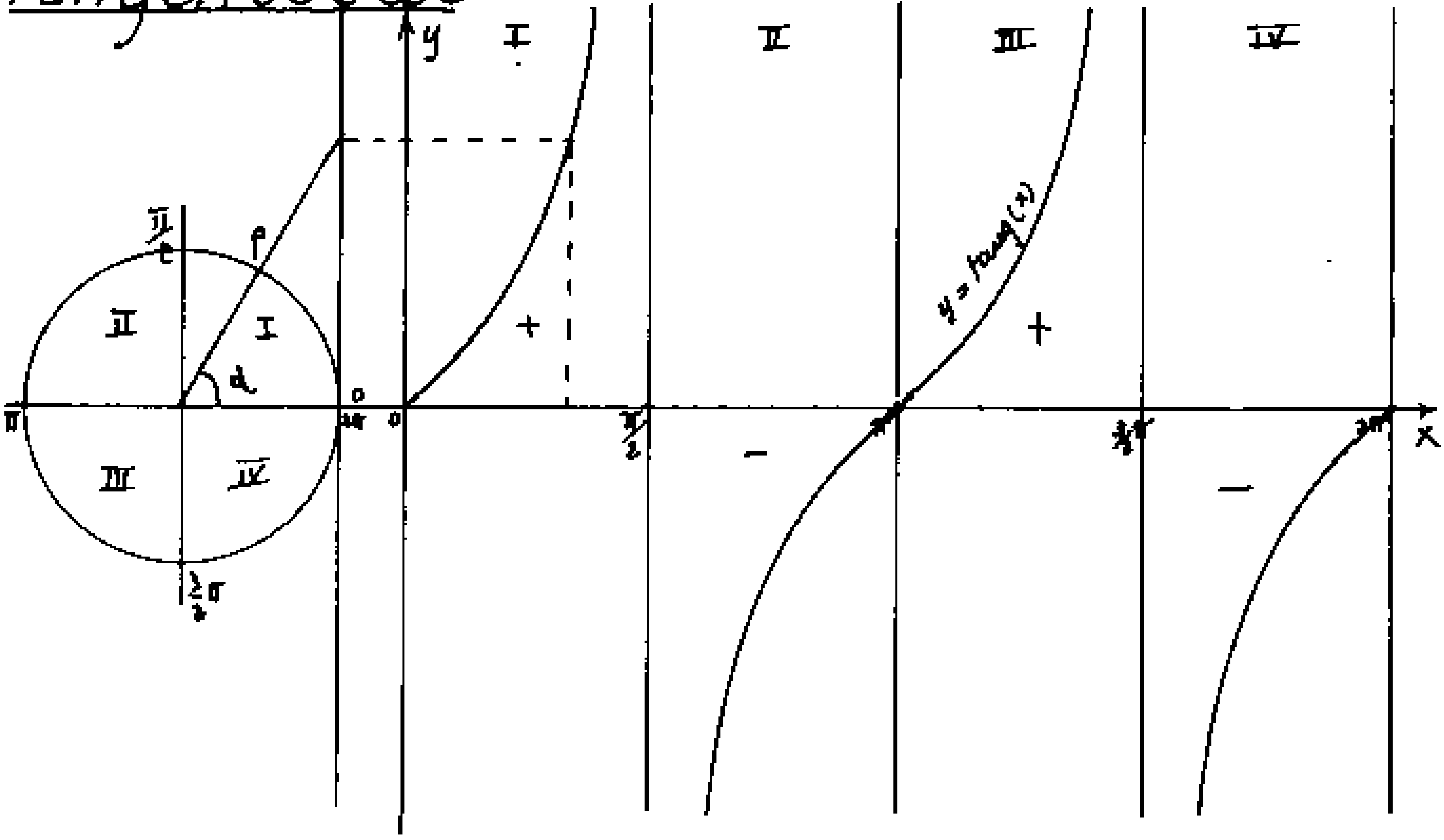
Notiamo che in valore assoluto i valori del seno si ripetono nei 4 quadranti: $\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(180 - \alpha) = -\text{sen}(180 + \alpha) = -\text{sen}(-\alpha)$. Il seno è positivo nel I e II quadrante, negativo nel III° e IV quadrante.

cosinusoide



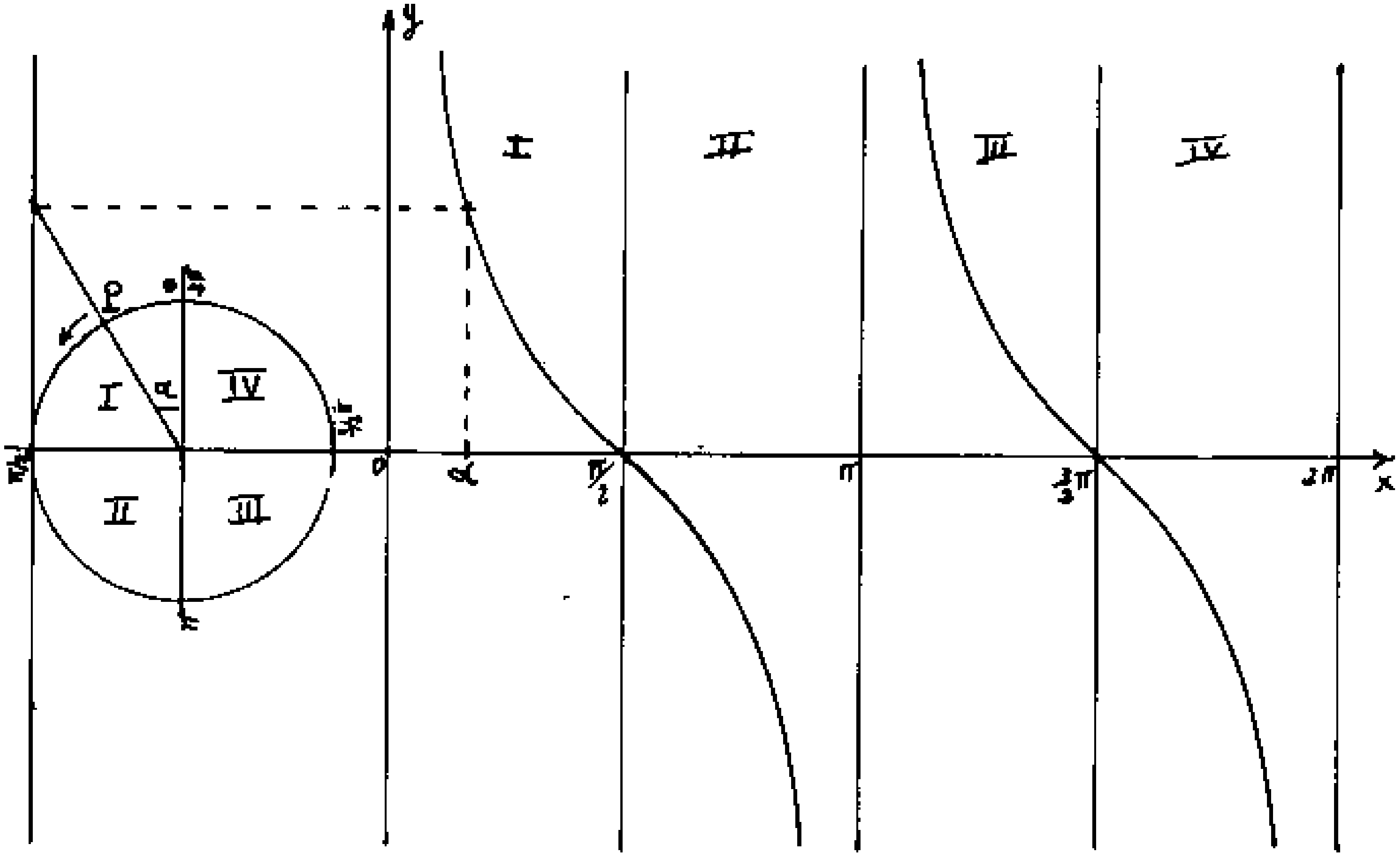
Si noti che per far corrispondere il grafico, abbiamo ruotato il cerchio di $90° = \pi/2$; infatti il coseno (co-funzione) ovvero seno dell'angolo complementare : $\cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha)$, si ripete anch'esso per valori assoluti nei quattro quadranti : $\cos(\alpha) = -\cos(180-\alpha) = -\cos(180+\alpha) = +\cos(-\alpha)$, cioè il coseno è positivo nel I e IV quadrante, negativo nel II e III. quadrante

Tangentoide



La tangente è positiva nel I e III quadrante, negativa nel II e IV. Abbiamo: $tg(\alpha) = -tg(180-\alpha) = +tg(180+\alpha) = -tg(-\alpha)$.

cotangentoide

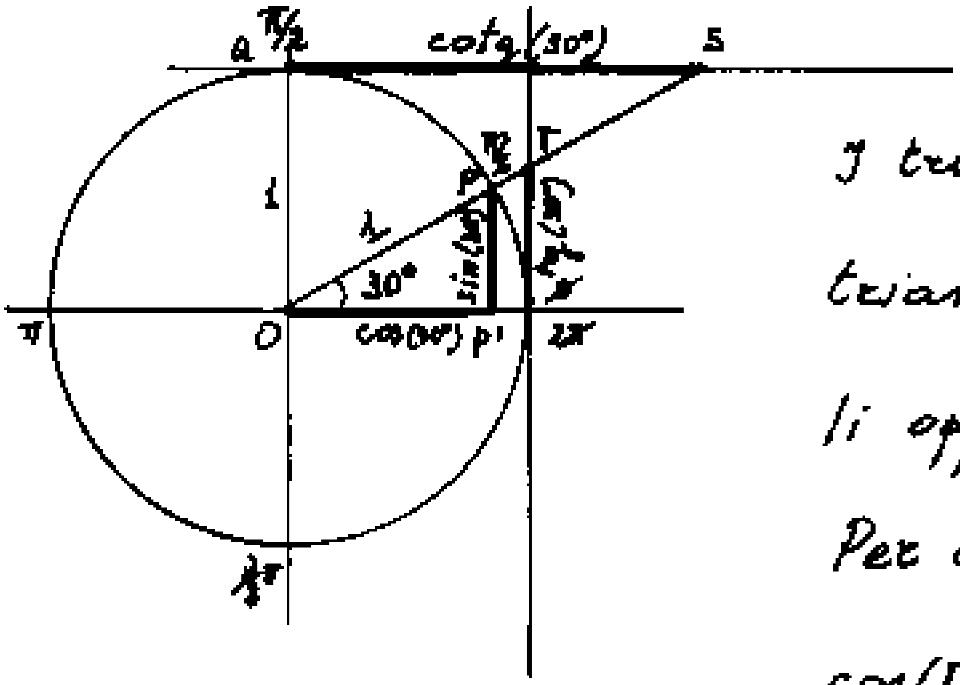


Attenzione la cotangentoide non si ottiene slittando la tangentoide.

Anche per la cotangentoide, si è ruotato il cerchio di 90° (essendo la cofunzione) cioè $cotg(\alpha) = tang(90-\alpha)$. Però è necessaria una osservazione sui segni. Gli angoli α e β si accrescono rotando in verso opposto. Mentre $sen(\alpha)$ e $cos(\alpha) = sen(\beta)$, nel secondo quadrante hanno segni opposti, $cotang(\alpha) = \frac{1}{tg(\alpha)} = tang(\beta)$ in tutti i quadranti hanno lo stesso segno: $cotg(\alpha) = -cotg(180-\alpha) = cotg(180+\alpha) = -cotg(-\alpha)$

Angoli notevoli

Vediamo ora come si calcolano numericamente le funzioni trigonometriche degli angoli notevoli. Per: 0°, 90°, 180°, 270°, 360°; i valori si vedono direttamente dai grafici.



Per: $30° = (\pi/6)$ rad.

I triangoli rettangoli metà di triangoli equilateri, hanno angoli opposti ai cateti di 30° e 60°.

Per cui: $\sin(30°) = \sin(\pi/6\,\text{rad}) = \cos(60°) = \cos(\pi/3) = \frac{1}{2} = 0,5000000 = \overline{PP'}$

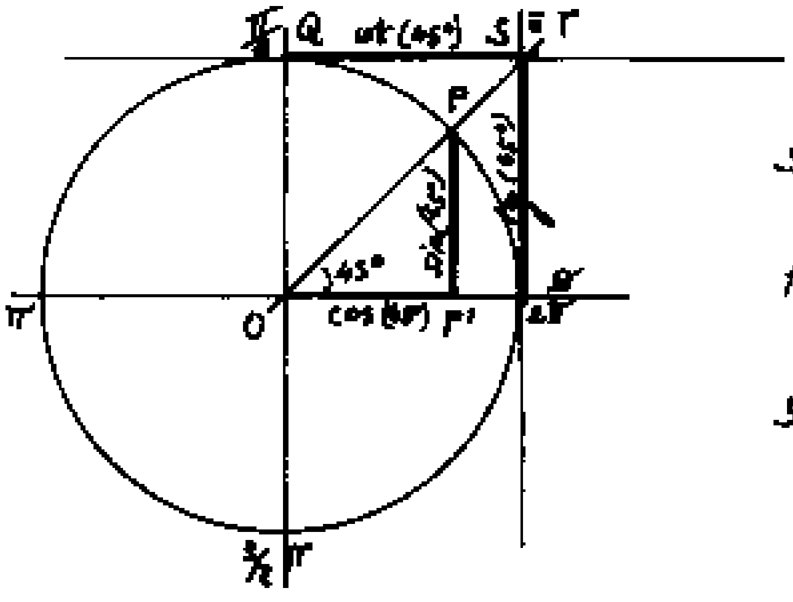
$\cos(30°) = (\text{sen}(60°)) = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,866025 = \overline{OP'}$

$\text{tang}(30°) = (\text{cotg}(60°)) = 1/\sqrt{3} = 0,577350 = \overline{OT}$

$\text{cotg}(30°) = (\text{tg}(60°)) = \sqrt{3} = 1,732051 = \overline{QS}$

$\sec(30°) = (\text{cosec}(60°)) = 3/\sqrt{3} = 1,154701 = \overline{OT}$

$\text{cosec}(30°) = (\sec(60°)) = 2 = 2,000000 = \overline{OS}$



Per $45° = (\pi/4)$ rad

$\sin(45°) = \cos(45°) = 1/\sqrt{2} = 0,707107$

$\text{tg}(45°) = \text{ctg}(45°) = 1 = 1,000000$

$\sec(45°) = \text{cosec}(45°) = \sqrt{2} = 1,414214$

Le tavole trigonometriche

Come abbiamo visto è facile calcolare i valori numerici delle funzioni trigonometriche per gli angoli notevoli. Se poi consideriamo che questi valori calcolati per il primo quadrante si ripetono negli altri tre quadranti, al piú, variando di segno, operando quella che viene chiamata la: "riduzione al primo quadrante", si può costruire la seguente tabella.

angolo α	ridotto al I° q.	sin(α)	cos(α)	tg(α)	ctg(α)	sec(α)	cosec(α)
0	primo quadrante	∓ 0	1	∓ 0	∓ ∞	1	∓ ∞
30°		0.500000	0,866025	0,577350	1,732051	1,154701	2
45°		0.707107	0.707107	1	1	1,414214	1,414214
60°		0,866025	0,500000	1,732051	0,577350	2	1,154701
90°		1	± 0	± ∞	± 0	± ∞	1
120°	60°	0,866025	-0,500000	-1,732051	-0,577350	-2	1,154701
135°	45°	0.707107	-0,707107	-1	-1	-1,414214	1,414214
150°	30° II	0.500000	-0,866025	-0,577350	-1,732051	-1,154701	2
180°	0°	± 0	-1	∓ 0	∓ ∞	-1	± ∞
210°	30°	-0,500000	-0,866025	0,577350	+1,732051	-1,154701	-2
235°	45° III	-0,707107	-0,707107	1	1	-1,414214	-1,414214
240°	60°	-0,866025	-0,500000	1,732051	0,577350	-2	-1,154701
270°	90°	-1	∓ 0	± ∞	± 0	∓ ∞	-1
300°	60°	-0,866025	0,500000	-1,732051	-0,577350	2	-1,154701
315°	45° IV	-0,707107	0,707107	-1	-1	1,414214	-1,414214
330°	30°	-0,500000	0,866025	-0,577350	-1,732051	1,154701	-2
360°	0	∓ 0	1	∓ 0	∓ ∞	1	∓ ∞

Si noti come lo zero e l'infinito (∞) siano i termini di passaggio da valori positivi a negativi e viceversa.

Si nota che i numeri diversi fra loro sono pochi, e per fare la tabella li abbiamo ripetuti molte volte. Perciò le tavole trigonometriche pubblicate, riportano solo gli angoli del I quadrante; poi tenendo conto delle cofunzioni, presentano tavole a doppia lettura: dall'alto verso il basso, e dal basso verso l'alto, rispettivamente per la colonna di sinistra e di destra. Cioè si presentano:

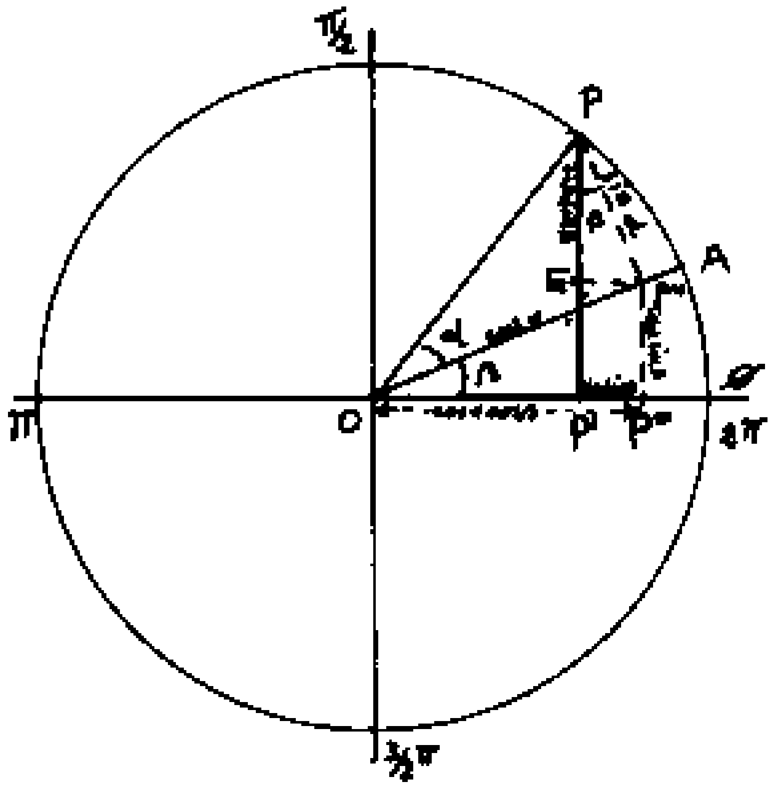
α	sin.	cos.	tang.	cotg.	sec	cosec	/
0	0	1	0	∞	1	∞	90°
30°	0,500000	0,866025	0,577350	1,732051	1,154701	2	60°
45°	0,707107	0,707107	1	1	1,414214	1,414214	45°
/	cos.	sin	cotg.	tang.	cosec.	sec.	α

Con ciò si evita di ripetere gli stessi valori.

Però i valori così calcolati erano uno po' pochini, mentre nell'ordinarietà dei calcoli occorreva avere valori delle funzioni angolari precise almeno al primo sessagesimale. Occorreva quindi incrementare la tavola trigonometrica di valori intermedi. Per far ciò occorrevano relazioni per le funzioni trigonometriche relative alla somma e differenza di angoli.

Le funzioni somma e differenza di angoli

sia: $\alpha = P\widehat{O}A$; $\beta = A\widehat{O}0$; $(\alpha+\beta) = P\widehat{O}0$; si noti inoltre che: $P'''\widehat{O}P'' = \beta = P'\widehat{P}P''$.



$$\operatorname{Sen}(\alpha+\beta) = \overline{PE} + \overline{EP'}$$

Ricordando la regola: " Un cateto = = l'ipotenusa nel seno dell'angolo opposto o nel coseno dell'angolo adiacente", si ha:

$$\overline{PE} = \overline{PP''}\cos(\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)$$

$$\overline{EP'} = \overline{P''P'''} = \overline{OP''}\operatorname{sen}(\beta) = \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

per cui avremo:

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}$$

analogamente:

$$\cos(\alpha+\beta) = \overline{OP'} = \overline{OP'''} - \overline{P'P'''} = \overline{OP''}\cos(\beta) - \overline{PP''}\operatorname{sen}(\beta) \quad \text{cioè:}$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}$$

poiché: $\cos(-\beta) = \cos(\beta)$ e $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}(\beta)$

sostituendo:

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}$$

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}$$

e da queste:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \operatorname{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}$$

da cui dividendo i termini della frazione per

$\cos(\alpha)\cos(\beta)$, abbiamo:

$$\boxed{\tan g(\alpha+\beta) = \frac{tg(\alpha) + tg(\beta)}{1 - tg(\alpha)\, tg(\beta)}}$$

analogamente:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \boxed{\tan g(\alpha-\beta) = \frac{tg(\alpha) - tg(\beta)}{1 + tg(\alpha)\cdot tg(\beta)}}$$

$\cot g(\alpha) = 1/tg(\alpha)$ per cui:

$$\boxed{\cot g(\alpha+\beta) = \frac{\cot g(\alpha)\cdot \cot g(\beta) - 1}{\cot g\,\alpha + \cot g\,\beta}}$$

$$\boxed{\cot g(\alpha-\beta) = \frac{\cot g(\alpha)\cot g(\beta) + 1}{\cot g(\beta) - \cot g(\alpha)}}$$

Le formule:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{aligned}}$$

Fondamentali di somma e sottrazione sono dette da alcuni formule di Werner, mentre altri chiamano formule di Werner le seguenti:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\cos\beta \\ \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) &= -2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{aligned}}$$

dedotte dalle precedenti sommando e sottraendo membro a membro.

Formule di duplicazione

Se nelle formule di somma di due angoli poniamo $\alpha = \beta$ si ha:

$$\boxed{\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}$$

$$\boxed{\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}$$

$$\boxed{tg(2\alpha) = \frac{2\,tg(\alpha)}{1 - tg^2(\alpha)}}$$

$$\boxed{cotg(2\alpha) = \frac{cotg^2\alpha - 1}{2\,cotg\,\alpha}}$$

Formule di bisezione

Dalla formula di duplicazione: $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)$

sostituendo: $\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$, oppure $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

si hanno le due espressioni:

$$\boxed{\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1}$$

$$\boxed{\cos(2\alpha) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha}$$

dalle quali:

$$\boxed{\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}}}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}}}$$

e sostituendo ad α il valore $\alpha/2$ si ha:

$$\boxed{\operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}}$$

$$\boxed{\cos\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}}$$

Fondamentali di bisezione

Dividendo membro a membro:

$$\frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\alpha)}{\cos(\frac{1}{2}\alpha)} = tg(\tfrac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}$$ ove moltiplicando ambo i termini della frazione sotto radice per $(1-\cos\alpha)$ oppure: $(1+\cos\alpha)$ otteniamo:

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}} = \boxed{tg(\tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}$$

$$tg(\tfrac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} = \boxed{tg(\tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Vediamo cosa succede se esprimiamo le formule di bisezione in radicale doppio:

$$\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}} =$$

$$\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\alpha) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left[\sqrt{\frac{1+\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha}}{2}} - \sqrt{\frac{1-\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha}}{2}}\right]$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} - \sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}\right)}$$

E' evidente che con le formule di bisezione possiamo incrementare le nostre <u>tavole trigonometriche</u> (tavole di conti fatti).

$$\operatorname{sen}(15°) = \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}30°) = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} =$$

$$\operatorname{sen} 15° = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{2+1}{2}} - \sqrt{\frac{2-1}{2}}\right] = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(15°) = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}}$$ perciò:

$$\boxed{\operatorname{sen}(15°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \; ; \; \boxed{\cos(15°) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

Formule parametriche

Sono dette formule parametriche le formule che esprimono il valore del seno, del coseno, della tangente di un angolo α, in funzione del parametro $t = tg(\alpha/2)$.
(In genere funzioni razionali di t)

Essendo: $tang\left(\frac{\alpha}{2}\right) = t = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{sen\,\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{sen\,\alpha}$

$$t^2 = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} > t^2 + \cos\alpha\, t^2 = 1 - \cos\alpha$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}} \qquad \left(t = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right)$$

$$sen\,\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+2t^2+t^4-1+2t^2-t^4}{(1+t^2)^2}}$$

$$\boxed{sen\,\alpha = \frac{2t}{1+t^2}} \qquad \left(t = \frac{1}{sen\,\alpha} - \sqrt{\frac{1}{sen^2\alpha} - 1}\right)$$

$$\left(tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$\boxed{tang(\alpha) = \frac{2t}{1-t^2}} \qquad \left(t = \frac{-1}{tg\,\alpha} + \sqrt{\frac{1}{tg^2\alpha} + 1}\right)$$

Queste formule sono utili sia per ridurre una espressione alla stessa funzione trigonometrica, sia per certe sostituzioni che permettono di trasformare espressioni irrazionali in razionali.

$$\boxed{\alpha = 2\,arctg(t)}$$

Le formule di prostaferesi

La parola "*prostaferesi*" significa: sommare e sottrarre. dal greco προσ-θεσις = addizione e ἀφαιρεσις = sottrazione, ricorda come sono ricavate queste formule. Infatti:

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta&=P\\ \alpha-\beta&=Q\end{aligned}\right\}$$

sommando e sottraendo

abbiamo: $\boxed{\alpha = \dfrac{P+Q}{2}}$; $\boxed{\beta = \dfrac{P-Q}{2}}$

Anche le formule di Werner si sono ottenute sommando e sottraendo le formule di somma e sottrazione. Sostituendo P e Q nelle formule di Werner si ha le formule:

Fondamentali dette di prostaferesi

$$\boxed{\begin{aligned}
\text{sen}(p)+\text{sen}(q)&=2\,\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\text{sen}(p)-\text{sen}(q)&=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\cos(p)+\cos(q)&=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\cos(p)-\cos(q)&=-2\,\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)
\end{aligned}}$$

Dalle quali dividendo membro a membro le prime due abbiamo le:

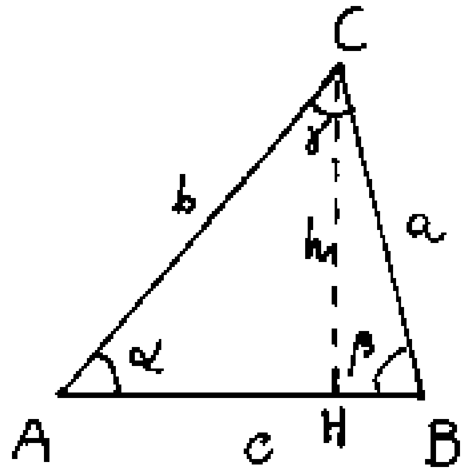
conseguenti di prostaferesi

$$\boxed{\frac{\text{sen}(p)+\text{sen}(q)}{\text{sen}(p)-\text{sen}(q)}=\frac{\text{tg}\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{p-q}{2}\right)}}$$

I teoremi per la risoluzione di triangoli

Ricordiamo che per risolvere un triangolo occorrono tre elementi noti di cui almeno una misura lineare.

Teorema dei seni



Dato il triangolo ABC, risolviamo "h" come cateto dei triangoli rettangoli AHC e BHC.

$h = a\ \text{sen}(\beta) \qquad h = b\ \text{sen}(\alpha)$

uguagliando:

$$a\ \text{sen}(\beta) = b\ \text{sen}(\alpha)$$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\beta)}} \qquad \boxed{a : b = \text{sen}(\alpha) : \text{sen}(\beta)}$$

"In un triangolo, i lati stanno fra loro come i seni degli angoli opposti" (vedi anche circocentro p.270)

$$\boxed{a = b\ \frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta}}$$

Un lato è uguale all'altro nel rapporto dei seni degli angoli opposti.

Area del triangolo

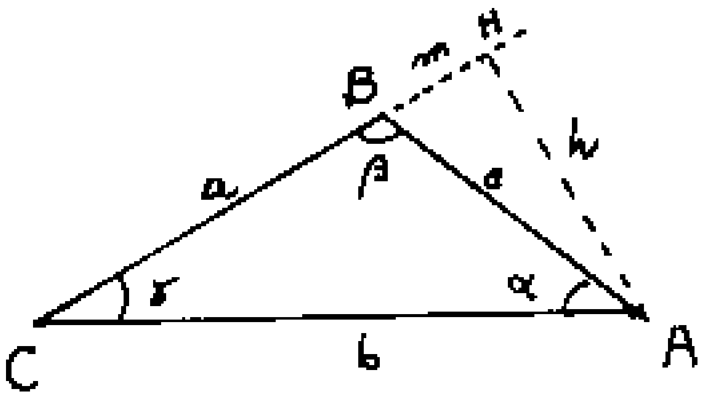
$S = \frac{1}{2} c h$ sostituendo h:

$$\boxed{S = \frac{ac\ \text{sen}(\beta)}{2} = \frac{bc\ \text{sen}(\alpha)}{2} = \frac{ab\ \text{sen}(\gamma)}{2}}$$

"L'area di un triangolo è data dal semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo fra essi compreso"

Il teorema di Carnot

Dal triangolo in figura abbiamo:



$h = b\,sen(\gamma)$; $(m+a) = b\cos(\gamma)$

$m = b\cos(\gamma) - a$

$c^2 = m^2 + h^2$ sostituendo:

$$c^2 = [b\cos(\gamma) - a]^2 + [b\,sen(\gamma)]^2$$

$$c^2 = b^2\cos^2(\gamma) - 2ab\cos\gamma + a^2 + b^2 sen^2(\gamma)$$

poiché: $sen^2(\gamma) + \cos^2(\gamma) = 1$ si ha:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

Si noti che il teorema di Carnot è la generalizzazione del teorema di Pitagora.

"Il quadrato di un lato equivale la somma dei quadrati degli altri due diminuita del doppio prodotto di essi nel coseno dell'angolo compreso"

Quando l'angolo compreso $\gamma = 90°$, $\cos(\gamma) = \cos(90°) = 0$ si ha Pitagora: $c^2 = a^2 + b^2$.

Se: $\gamma < 90°$ $\cos(\gamma) > 0$ il lato c è minore dell'ipotenusa

Se $\gamma > 90°$ $\cos(\gamma) < 0$ il lato $c > \sqrt{a^2+b^2}$ (ottusangolo)

Il teorema può essere scritto nella forma:

$$\boxed{\cos(\gamma) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}} \; ; \; \boxed{\cos(\beta) = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}} \quad \boxed{\cos(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

Teorema di Neper

Dal teorema dei seni : $\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)}$

per il componendo - scomponendo :

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta)}$$

per le conseguenti di prostaferesi :

$$\boxed{\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{tg\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}}$$

$$\boxed{tang\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = tang\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left[\frac{a-b}{a+b}\right]}$$

formula di Neper

Se in un triangolo sono noti due lati e l'angolo compreso : a, b, γ ; La risoluzione può effettuarsi sia col teorema di Carnot, sia con la formula di Neper, però mentre nella formula di Carnot non sono convenientemente applicabili i logaritmi, la formula di Neper si presta al calcolo logaritmico, per cui è stata molto usata prima dell'avvento dei calcolatori elettronici.

Si pensi che le tavole logaritmiche ordinarie erano a 5 cifre decimali, quelle di precisione a 7, e per certi numeri primi di base le tavole arrivavano ad 11 cifre decimali. Oggi 8÷10 cifre decimali sono sui calcolatori tascabili; nei computer si arriva facilmente alle 16÷20 cifre decimali. —

Formule di Briggs

Dalle formule di bisezione : $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

dal teorema di Carnot: $\cos(\alpha)=\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$

sostituendo:

$$\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}$$

$$\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{a^2-(b^2+c^2-2bc)}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

scomponiamo il prodotto notevole:

$\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}$, ove posto: $\frac{a+b+c}{2}=P$

avremo: $2(P-c)=(a+b-c)$; $2(P-b)=(a-b+c)$

sostituendo e semplificando:

$$\boxed{\text{sen}\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right)=\sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{(bc)}}}$$

ed anche:

$$\boxed{\text{sen}\left(\tfrac{1}{2}\beta\right)=\sqrt{\frac{(P-a)(P-c)}{(ac)}}}$$

$$\boxed{\text{sen}\left(\tfrac{1}{2}\gamma\right)=\sqrt{\frac{(P-a)(P-b)}{(ab)}}}$$

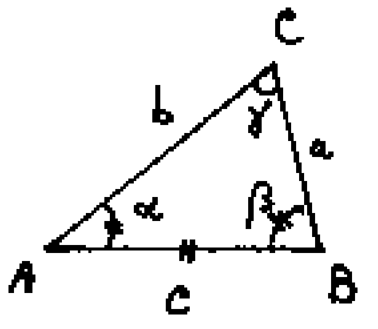
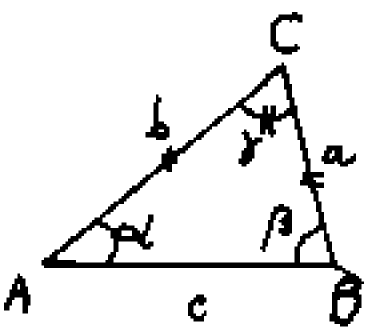
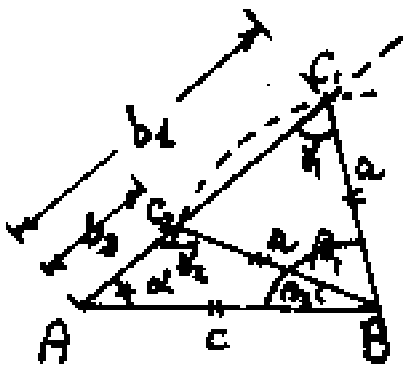
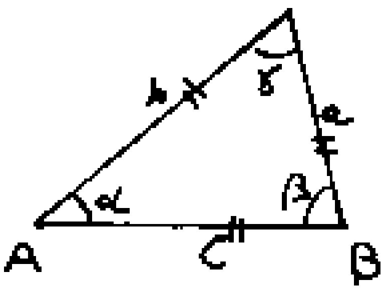
analogamente:

$$\boxed{\cos\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right)=\sqrt{\frac{P(P-a)}{(bc)}}} \qquad \boxed{\text{tg}\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right)=\sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{P(P-a)}}}$$

$$\boxed{\cos\left(\tfrac{1}{2}\beta\right)=\sqrt{\frac{P(P-b)}{(ac)}}} \qquad \boxed{\text{tg}\left(\tfrac{1}{2}\beta\right)=\sqrt{\frac{(P-a)(P-c)}{P(P-b)}}}$$

$$\boxed{\cos\left(\tfrac{1}{2}\gamma\right)=\sqrt{\frac{P(P-c)}{(ab)}}} \qquad \boxed{\text{tg}\left(\tfrac{1}{2}\gamma\right)=\sqrt{\frac{(P-a)(P-b)}{P(P-c)}}}$$

Risoluzione di triangoli
tavola riepilogativa

Figura	noti	formule risolutive	osservazioni
	c, α, β. un lato e due angoli	$\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$ $a = c\,\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\gamma}$; $b = c\,\frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\gamma}$	teorema dei seni
	a, b, γ. due lati e l'angolo compreso	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 90° - \frac{1}{2}\gamma$ $\text{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \text{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\frac{a-b}{a+b}$ $\alpha = \frac{(\alpha-\beta)}{2} + \frac{(\alpha+\beta)}{2}$; $\beta = \frac{(\alpha+\beta)}{2} - \frac{(\alpha-\beta)}{2}$ $c = a\,\frac{\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\alpha}$	I° metodo (Carnot) II° metodo (Neper)
	a, c, α due lati e l'angolo non compreso	$\left.\begin{array}{l}\text{sen}(\gamma)\\ \text{sen}(180°-\gamma)\end{array}\right\rangle = \frac{c}{a}\,\text{sen}(\alpha)$ $\beta = 180° - (\alpha+\gamma)$ $b = a\,\frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\alpha)}$	si hanno due risoluzioni: γ_1 (acutangolo) γ_2 (ottusangolo)
	a, b, c i tre lati	$\text{sen}(\frac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ $\text{sen}(\frac{1}{2}\beta) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$ $\text{sen}(\frac{1}{2}\gamma) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$ $\cos(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\cos(\beta) = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ $\cos(\gamma) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$	I° metodo: formule di Briggs si verificano con: $(\alpha+\beta+\gamma) = 180°$ II° metodo: Carnot stessa verifica $(\alpha+\beta+\gamma = 180°)$

Funzioni trigonometriche inverse

Data una funzione: $y = f(x)$, dicesi funzione inversa, un'altra funzione tale che: $x = \varphi(y)$. Molti testi usano scrivere: $x = f^{-1}(y)$, però questa notazione è ambigua nel senso che: $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$.
Abbiamo già visto che: $y = \ln|x|$ l'inversa è $x = \exp(y)$
Per le funzioni trigonometriche:

$y = sen(x)$ l'inversa è: $x = arcsen(y)$ talvolta indicata: (sen^{-1})
$y = cos(x)$ " $x = arccos(y)$ " " : (cos^{-1})
$y = tg(x)$ " $x = arctg(y)$ " " Tan^{-1}
$y = ctg(x)$ " $x = arccotg(y)$ " " cot^{-1}

Se consideriamo che $sen(30°) = 0{,}5$ avremo che l'arco (di raggio 1) cioè l'angolo in radianti, il cui seno è 0,5, è: $\pi/6$ rad $= 30°$. si scrive: $arcsen(0{,}5) = 30°$
analogamente: $arccos(0{,}5) = 60°$ (l'arco il cui coseno è 0,5, è: $\pi/3 = 60°$); $arctg(1) = 45°$.

Queste funzioni consentono, essendo note le funzioni angolari, di risalire all'angolo.

Ma anche queste funzioni ammettono delle correlazioni, solo apparentemente difficili.

Provate a chiedere ad un amico: "chi è il padre della figlia di Sorio" e, se non conosce il gioco, nove casi su dieci dirà: "non lo so!" e rimangono quando dite: "è Sorio"!

Giochetti sulle funzioni inverse trigonometriche

$$\operatorname{sen}\operatorname{arcsen}(m) = m$$
$$\cos\operatorname{arcsen}(m) = \sqrt{1-m^2}$$
$$\operatorname{tang}\operatorname{arcsen}(m) = m/\sqrt{1-m^2}$$

$$\cos\arccos(n) = n$$
$$\operatorname{sen}\arccos(n) = \sqrt{1-n^2}$$
$$\operatorname{tang}\arccos(n) = \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n^2}-1}$$

$$\operatorname{tang}\operatorname{arctg}(p) = p$$
$$\operatorname{sen}\operatorname{arctg}(p) = p/\sqrt{1+p^2}$$
$$\cos\operatorname{arctg}(P) = 1/\sqrt{1+p^2}$$

$$\operatorname{sen}\arccos\left(\sqrt{1-m^2}\right) = m$$
$$\operatorname{sen}\operatorname{arctang}\left(m/\sqrt{1-m^2}\right) = m$$
$$\cos\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{1-m^2}\right) = n$$
$$\cos\operatorname{arctang}\left(\frac{\sqrt{1-m^2}}{n}\right) = n$$
$$\operatorname{tang}\operatorname{arcsen}\left(P/\sqrt{1+p^2}\right) = p$$
$$\operatorname{tang}\arccos\left(1/\sqrt{1+p^2}\right) = p$$

Per risolvere per es. $\operatorname{tg}\arccos\left(1/\sqrt{1+p^2}\right)$ occorre dire: "c'è un angolo α il cui coseno è:" $\left(\cos\alpha = 1/\sqrt{1+p^2}\right)$, trasformiamo $\cos\alpha$ in

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1-1/(1+p^2)}}{1/\sqrt{1+p^2}} = \sqrt{\frac{1+p^2-1}{(1+p^2)}}\cdot\sqrt{(1+p^2)} = p$$

Nel prospetto precedente era nota una funzione dell'angolo α, cioè: $\text{sen}\alpha = m$; $\cos\alpha = n$; $\text{tg}\alpha = p$ e veniva richiesta un'altra funzione. Il problema consisteva quindi nell'esprimere una funzione con l'altra.

Vediamo ora un'altro tipo di problemi:

$\text{arcsen}(\cos\alpha)$ quindi noi cerchiamo un angolo β tale che il suo seno uguagli il $\cos\alpha$.

$$\text{sen}\,\beta = \cos\alpha = \text{sen}\,(90-\alpha)$$

$$\beta = 90-\alpha$$

$\text{arcsen}(\text{sen}\alpha) = \alpha$ $\qquad$ $\text{arccos}(\cos\alpha) = \alpha$

$\text{arccos}(\text{sen}\alpha) = (90-\alpha)$ $\qquad$ $\text{arcsen}(\cos\alpha) = (90-\alpha)$

$\text{arctg}(\text{sen}\alpha)$ questo problema è possibile perchè $\text{sen}\alpha$ varia da $+1$ a -1 perciò: $\text{tg}\beta = \text{sen}\alpha$ il nostro β varierà da $+45°$ a $-45°$. possiamo porre:

$$\text{tang}\,\beta = \frac{\text{sen}\beta}{\sqrt{1-\text{sen}^2\beta}} = \text{sen}\alpha \qquad \text{sen}^2\beta = \text{sen}^2\alpha(1-\text{sen}^2\beta)$$

$$\text{sen}^2\beta\,(1+\text{sen}^2\alpha) = \text{sen}^2\alpha \qquad \text{sen}\,\beta = \frac{\text{sen}\alpha}{\sqrt{1+\text{sen}\alpha}}$$ oppure:

$\text{sen}\,\alpha = \text{tg}\alpha/\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha} = \text{tg}\beta$. Meglio: $\underline{\text{tg}\beta = \text{sen}\alpha}$

Il problema inverso: $\underline{\text{arcsen}(\text{tg}\alpha)}$ non è sempre possibile perchè la $\text{tg}\alpha$ varia da $\pm\infty$ quindi: $\text{sen}\beta = \text{tang}\,\alpha$ con β incognita è possibile solo se α. $-45° \leq \alpha \leq 45°$

La simmetria

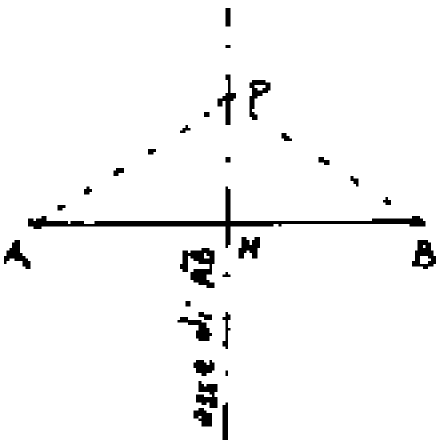
Un'altro concetto fondamentale è il concetto di simmetria. La parola deriva dal Greco: συμμετρια notate il prefisso: συν = (con) (opposto di: αντι), diverso da (iso). simpatia - antipatia ; sincronismo - isocronismo ; isometria - simmetria. Dobbiamo considerare una specie di legame speculare. In geometria avremo un centro di simmetria, uno o piu assi di simmetria, uno o più piani di simmetria.

Due punti si dicono simmetrici, rispetto ad un centro di simmetria, quando sono gli estremi di un segmento di cui il punto medio è il centro di simmetria. come si vede non basta dire: "quando sono equidistanti da tale centro", ma, occorre aggiungere: "ubicati da banda opposta".

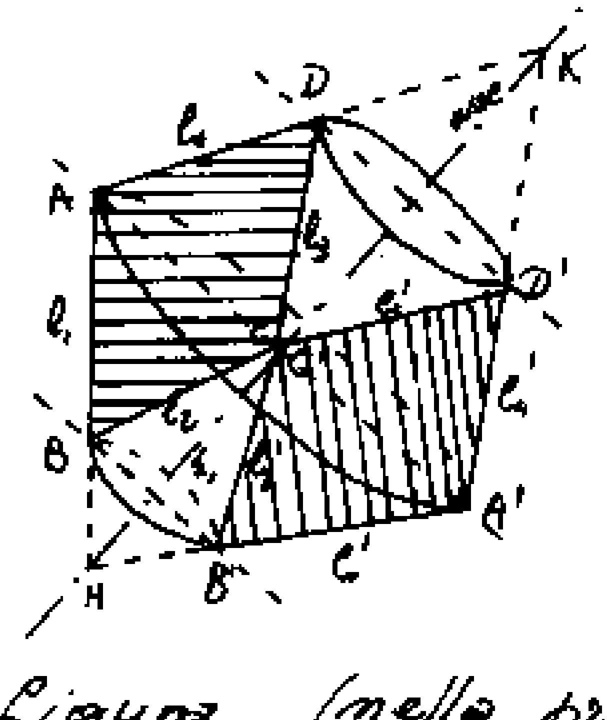
Due punti sono simmetrici, rispetto ad un asse di simmetria, quando si trovano, da banda opposta, sulla stessa perpendicolare a tale asse ed equidistanti dall'asse stesso.

Due figure piane, sono simmetriche rispetto ad un asse, quando, complanari con l'asse e fra loro, ribaltando il piano di 180° intorno all'asse, ogni figura sovrappone la precedente dell'altra.

L'asse di un segmento (retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio) è anche asse di simmetria per il segmento stesso; infatti ogni punto P dell'asse è equidistante dagli estremi del segmento $\overline{AB}$ se M è il punto medio di $\overline{AB}$, $\overline{AM} = \overline{MB}$ ed anche $\overline{PA} = \overline{PB}$. L'asse di un segmento è anche il luogo geometrico di tutti i vertici dei triangoli isosceli aventi per base il segmento stesso.

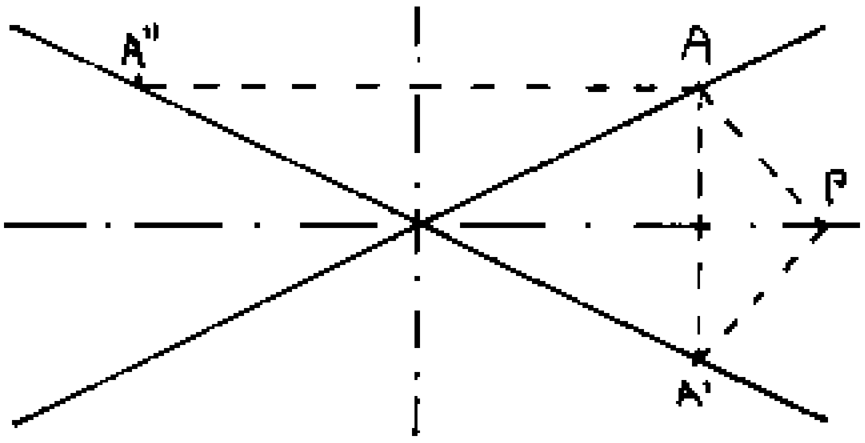


In particolare, per disegnare la figura simmetrica rispetto ad un asse, di una figura data, basta, punto per punto tracciare la perpendicolare all'asse e disegnare l'equidistante punto simmetrico da banda opposta all'asse. Si noti che i segmenti simmetrici, prolungati si incontrano sull'asse. (Ciò controlla la precisione del disegno).



Abbiamo disegnato le traettorie circolari dei punti ABCD della figura, (nella proiezione ellissi), per evidenziare la simmetria dei "solidi di rotazione"; in figura il quadrilatero ABCD ruotante intorno all'asse HK genera due tronchi di cono "cavi" cioè detratti due coni interni.

Le due bisettrici degli angoli formati da due rette che si incontrano, sono perpendicolari fra loro,

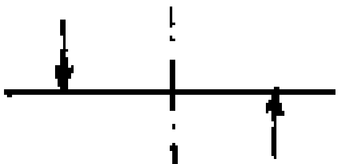


e sono il luogo geometrico dei punti equidistanti dalle due rette; cioè sono: assi di simmetria delle due rette.

Infatti ribaltando il piano della figura, intorno ad una bisettrice, ognuna delle due rette assume la posizione dell'altra.

Ogni diametro di un cerchio è asse di simmetria per il cerchio.

Ogni piano diametrale di una sfera è piano di simmetria per la sfera.

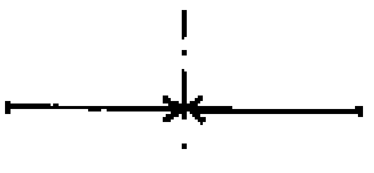
Le diagonali di un rettangolo non sono assi di simmetria per il rettangolo. (Dicesi antisimmetria la simmetria di segno opposto. Per esempio le due frecce:  sono antisimmetriche. Noi considereremo antisimmetrici i due triangoli rettangoli, in cui una diagonale separa le due parti del rettangolo. )

Notiamo che si trovano tanti più assi (o piani) di simmetria quanto più la figura è regolare. (Un triangolo scaleno non ha assi di simmetria). Spesso individuare una simmetria permette di ridurre i n° delle incognite del problema.

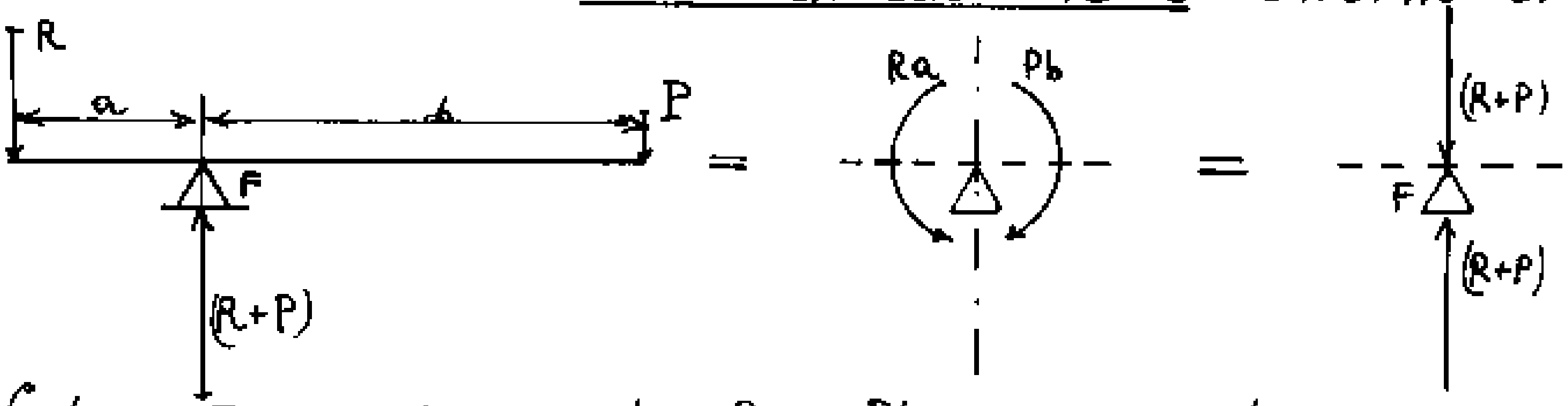
La simmetria non è solo geometrica, vi è anche una simmetria algebrica, per esempio nella: $x^2+y^2=R^2$ la x e la y possono scambiarsi senza che muti la formula. (La x e la y sono simmetriche in quella formula). Analogamente: $x \cdot y = K$. Cosa comporta ció? ($x = K/y$; $y = K/x$). Per esempio, se K=12 ed attribuiamo alla x il valore 2, la y = 6; inversamente se poniamo: y=2 allora x=6.

Oltre che geometrica ed algebrica, la simmetria è fondamentale nelle varie branche della scienza.

In fisica, legato alla simmetria è il *problema dell'equilibrio*. (Due azioni uguali ed opposte)

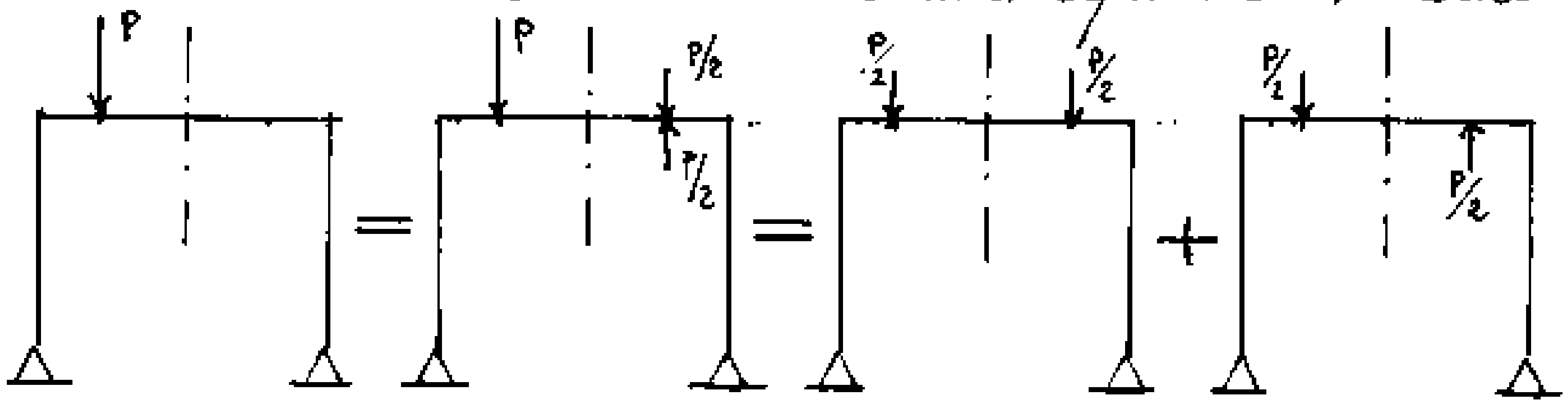


Se in una leva di fulcro F si ha una azione P ed una reazione R, in equilibrio, dov'é la simmetria? Evidentemente nelle *azioni di rotazione* attorno al fulcro F, ove *i momenti*: Ra = Pb sono uguali e contrari. (Alla parola *"momento"* associare sempre il pensiero *"rotazione"*).



Si noti che proprio la simmetria dei momenti, che consente l'equilibrio alla rotazione, consente anche che la risultante dei carichi sia sulla stessa retta dell'equilibrante che li sostiene: (P+R)=(P+R) uguali ed opposte perció in equilibrio, perció *simmetriche*.

Due forze "antisimmetriche" generano un momento. Perciò una forza generica su una struttura simmetrica, spesso si può scomporre in due sistemi: uno simmetrico ed uno antisimmetrico la cui somma equivale al carico dato.



Nello spazio tridimensionale, tutti i possibili assi di un segmento $\overline{AB}$ formano il piano di simmetria passante per il punto medio M del segmento e perpendicolare al segmento stesso: luogo geometrico di tutti i punti equidistanti da A e da B.

Se consideriamo materializzato il segmento $\overline{AB}$, cioè se lo consideriamo costituito da elementi pesanti infinitesimi, con peso uniformemente distribuito lungo $\overline{AB}$, in modo che frazioni di uguale lunghezza abbiano lo stesso peso, il segmento sta in equilibrio se viene sostenuto nel suo punto di mezzo. Cioè all'insieme dei pesini diretti verso il basso, corrisponde una unica azione di sostegno pari al peso dell'intero segmento, diretta verso l'alto, applicata in un punto "G" detto "baricentro" =(centro di pressione) che, nel caso del segmento di peso uniformemente distribuito, G coincide col punto medio M.

Comunemente diciamo: "aver peso", di cose o persone, per esprimere che la cosa o la persona "ha importanza".

In questi casi la parola: "peso" non ha alcun riferimento all'attrazione gravitazionale.

Il "peso" di un segmento o di una linea è la sua lunghezza, il peso di una superficie è la sua area; di un solido geometrico, il suo volume; di un corpo materiale la sua massa.

Premesso ciò possiamo considerare il baricentro di una linea, o di una superficie definita, o di un solido geometrico, o di un corpo materiale, o più in generale di un qualsiasi fenomeno ove attribuiamo importanza a certe grandezze. Se esistono assi di simmetria il baricentro è su di essi.

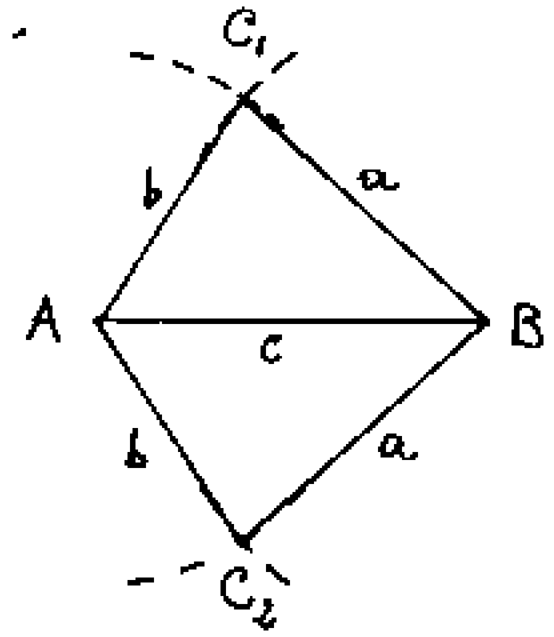
Nell'esempio della leva, F≡G, è anche il baricentro dei "Pesi": P ed R.

Ma se le grandezze di P e di R rappresentano i "consumi" di due centri abitati, allora F≡G è la più conveniente ubicazione del "centro distribuzione" per quei "consumi"

Abbiamo usato la parola "Peso" perché di uso comune, ma il peso è l'azione di una massa inerte, in campo gravitazionale, "massa" che in fisica è la quantità di materia, per noi massa sarà l'entità delle grandezze in calcolo, cioè lunghezze, aree, volumi, massa di gente, ecc. Approfondiremo in geometria delle masse.

Il triangolo

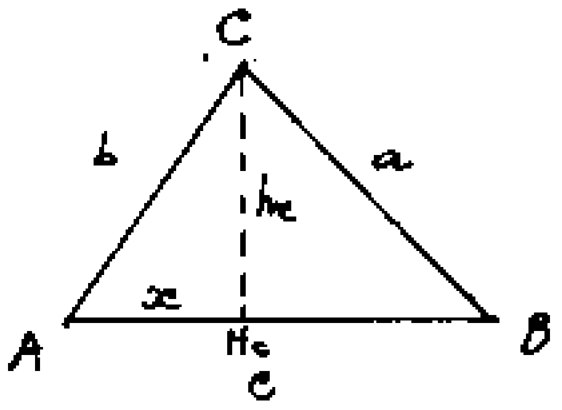
Ripartiamo da zero e consideriamo tre segmenti di lunghezze a, b, c, che per ora consideriamo diversi. Tracciato in una certa scala un segmento, per esempio $c = \overline{AB}$, col compasso facciamo centro in A con raggio = b, e centro in B con raggio = a; si ottengono due punti di intersezione: C_1 e C_2, cioè si hanno due triangoli: ABC_1 ed ABC_2, congruenti, aventi gli stessi angoli e gli stessi lati, ma in uno disposti in senso orario, nell'altro antiorario, potremmo dirli: uno "destro", l'altro "sinistro". Sono simmetrici rispetto ad $\overline{AB}$, per cui sono sovrapponibili per ruotazione intorno ad $\overline{AB}$. Quindi dato un foglio (piano) orientato, non basta dare la lunghezza di tre segmenti e l'orientamento di un lato (AB), per disegnare quel triangolo, infatti per ruotazione e slittamento nel piano del disegno i due triangoli non sono sovrapponibili.



Notiamo che se: $(a+b) \leqslant c$ e se: $(a-b) \geqslant c$ non è possibile disegnare alcun triangolo; perciò:

"In un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due, e maggiore della loro differenza"

Supponiamo dato il triangolo ABC, di lati a,b,c, proponiamoci, senza ricorrere alla trigonometria, di calcolare l'area in funzione di a,b,c, e del semi=perimetro $P=(a+b+c)/2$.



Sia: $\overline{AH_c} = x$; avremo: $h_c^2 = (b^2 - x^2) = a^2 - (c-x)^2$;

$$b^2 - \cancel{x^2} = a^2 - \cancel{x^2} - c^2 + 2xc \qquad x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c} \qquad = (b\cos\alpha)$$

$$h_c^2 = b^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2 = \left[b - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\right]\left[b + \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\right] =$$

$$h_c^2 = \left[\frac{a^2-(b-c)^2}{2c}\right]\cdot\left[\frac{(b+c)^2-a^2}{2c}\right] = \left[\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2c}\right]\left[\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2c}\right]$$

$$h_c^2 = \left[\frac{2(P-b)\cdot 2(P-c)}{2c}\right]\cdot\left[\frac{2(P-a)\cdot 2P}{2c}\right] = \frac{4P(P-a)(P-b)(P-c)}{c^2}$$

$$\boxed{h_c = \frac{2}{c}\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}}$$ ed essendo: $S = \frac{c h_c}{2}$

avremo: l'area: $$\boxed{S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}}$$ formula di Erone

$$\boxed{h_b = \frac{2}{b}\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}}$$

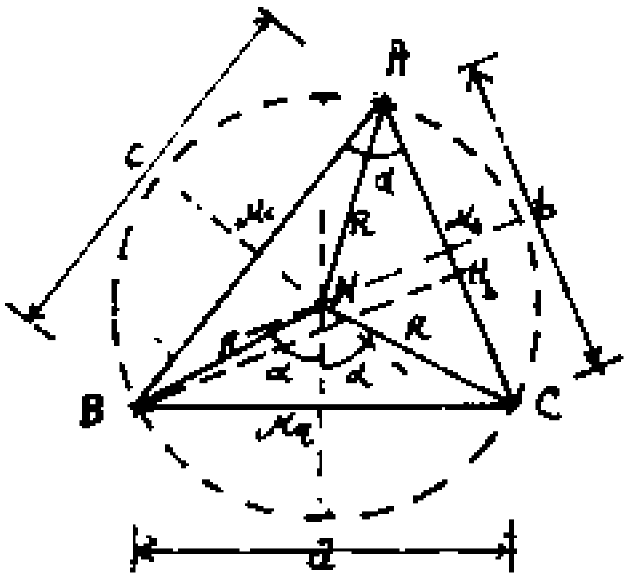
$$\boxed{h_a = \frac{2}{a}\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}}$$

Si noti, nello sviluppo algebrico, il costante utilizzo dei prodotti notevoli.

I punti notevoli di un triangolo
circocentro

Si chiama circocentro il centro del cerchio circoscritto, punto equidistante dai vertici del triangolo, si indica con la lettera N, ed è determinato dal punto comune agli assi dei lati del triangolo, ove ogni asse è il luogo dei punti equidistanti da due vertici.

Dato il triangolo ABC di lati a,b,c, tracciamo gli assi dei lati, cioè le normali per i punti mediani M_a, M_b, M_c. Se gli assi per M_a ed M_b si incontrano in N avremo che i triangoli rettangoli $BM_aN = CM_aN$ sono uguali, perciò: $\overline{NB} = \overline{NC}$; ma anche i triangoli rettangoli $CM_bN = AM_bN$ e quindi: $\overline{NB} = \overline{NC} = \overline{NA} = R$, chè il raggio del cerchio circoscritto.



Se da B tracciamo l'altezza $\overline{BH_b}$ i triangoli rettangoli NM_aC e BH_bA sono simili perché l'angolo $\alpha = B\hat{A}H_b$ = angolo alla circonferenza $= M_a\hat{N}C$ = metà angolo al centro.

Perciò: $\overline{NC} : c = a/2 : \overline{BH_b}$; ma: $\overline{NC} = R$; $\overline{BH_b} = 2S/b$ (ove: S = area)

sostituendo: $R : c = \frac{a}{2} : \frac{2S}{b}$; $R = c\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2S}$; $\boxed{R = \frac{abc}{4S}}$

<u>Il raggio del cerchio circoscritto è un quarto del rapporto fra il prodotto dei lati e l'area del triangolo.</u>

Si noti che: $R = \frac{a}{2}\frac{1}{\text{sen}\,\alpha}$ cioè per il teorema dei seni:

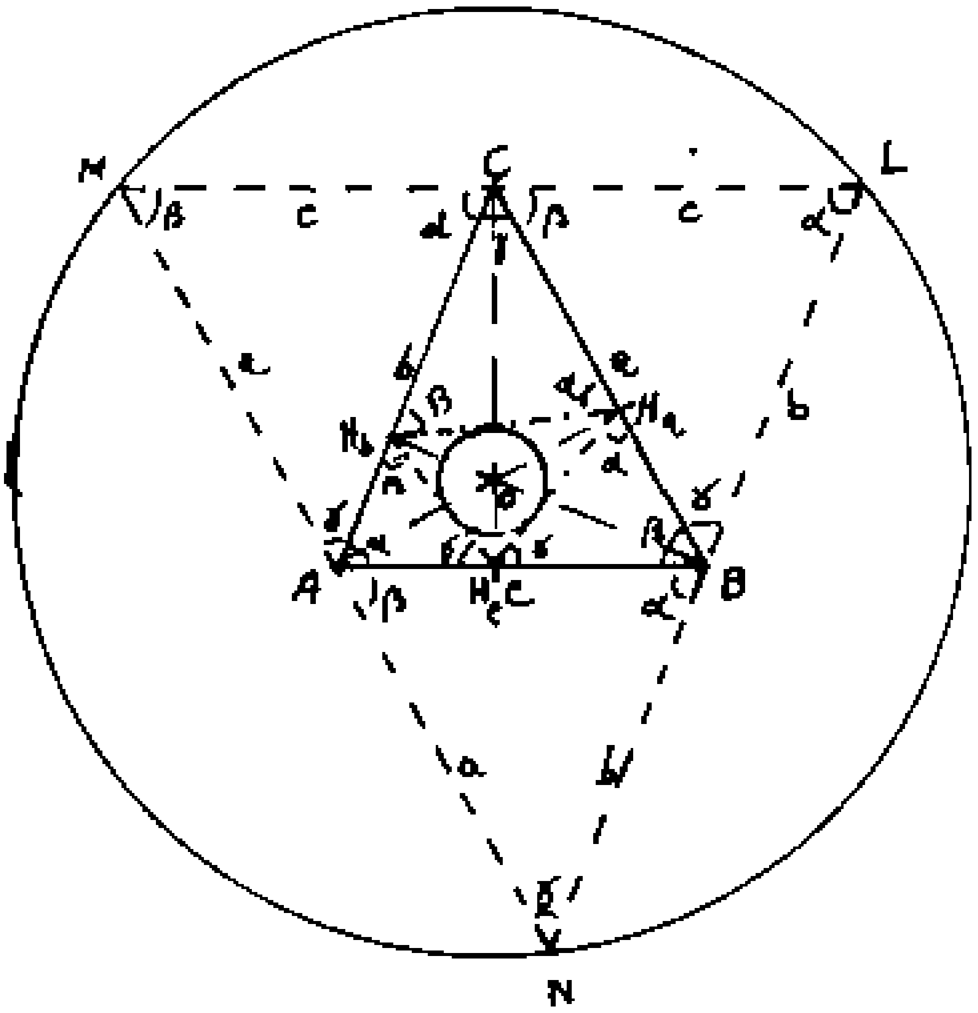
$$\boxed{\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma} = \frac{abc}{2S} = 2R}$$

<u>Il rapporto costante fra un lato ed il seno dell'angolo opposto è il diametro del cerchio circoscritto</u>

Ortocentro

Dicesi: "ortocentro", il punto comune alle altezze relative ai lati di un triangolo. Si indica con la lettera "O".

L'ortocentro ha varie proprietà interessanti.



Dato il triangolo ABC, dai vertici si tracci le parallele ai lati opposti, otterremo il triangolo LMN, avente gli stessi angoli del triangolo dato, e costituito da quattro triangoli congruenti di cui uno è il triangolo dato ABC. Perciò considerati i parallelogrammi ABCM; ABLC; ACBN; rileviamo che: $\overline{ML}=2c$, $\overline{MN}=2a$; $\overline{NL}=2b$; cioè i vertici A, B, C sono mediani ai lati del triangolo LMN, cioè le altezze uscenti dai vertici A, B, C corrispondono agli assi dei lati del triangolo LMN.

L'ortocentro del triangolo ABC corrisponde al circocentro del triangolo LMN.

Calcoliamo ora i segmenti in cui le altezze dividono i lati del triangolo: ABC..

$$\begin{cases} \overline{AH_c} = b\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}; & \overline{H_cB} = a\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c} \\ \overline{AH_b} = c\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2b}; & \overline{H_bC} = c\cos\alpha = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b} \\ \overline{BH_a} = c\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}; & \overline{H_aC} = b\cos\beta = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a} \end{cases}$$

Uniamo i piedi delle altezze ed otteniamo i triangoli: $H_aH_bH_c$; ed H_aCH_b ; H_aBH_c ; H_bAH_c. Notiamo che i rapporti: $\frac{\overline{H_bC}}{\overline{H_aC}} = \frac{a}{b}$; ecc. cioè i lati del triangolo H_aCH_b stanno tra loro come i lati del triangolo dato e comprendono lo stesso angolo γ; perciò il triangolo H_aCH_b è simile al triangolo dato; cioè: $C\widehat{H_aH_b} = \alpha$ e $C\widehat{H_bH_a} = \beta$.

Lo stesso discorso vale per i triangoli: H_aBH_c e H_bAH_c, però con diverso rapporto di similitudine, per cui in genere il triangolo $H_aH_bH_c$ non è simile al triangolo dato, però (vedi figura) i suoi angoli sono: $H_b\widehat{H_a}H_c = (180° - 2\alpha)$; $H_a\widehat{H_c}H_b = (180° - 2\gamma)$; $H_a\widehat{H_b}H_c = (180° - 2\beta)$, e poiché le altezze del triangolo ABC sono le bisettrici del triangolo $H_aH_bH_c$ si ha: L'ortocentro del triangolo ABC corrisponde all'incentro del triangolo $H_aH_bH_c$ ottenuto collegando i piedi delle altezze di ABC. ($H_aH_bH_c$ = triangolo ortico)

Calcoliamo ora le distanze dell'ortocentro dai vertici del triangolo. Per similitudine dei triangoli rettangoli CH_cB e CH_aO, si ha: $\overline{OC} : \overline{CH_a} = a : h_c$ da cui: $\overline{OC} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2h_c} =$

$$\overline{OC} = \frac{ab\cos\gamma}{h_c} = \frac{2S\cos\gamma}{h_c \operatorname{sen}\gamma} = \boxed{\overline{OC} = c/\operatorname{tg}\gamma}$$ analogamente si ha

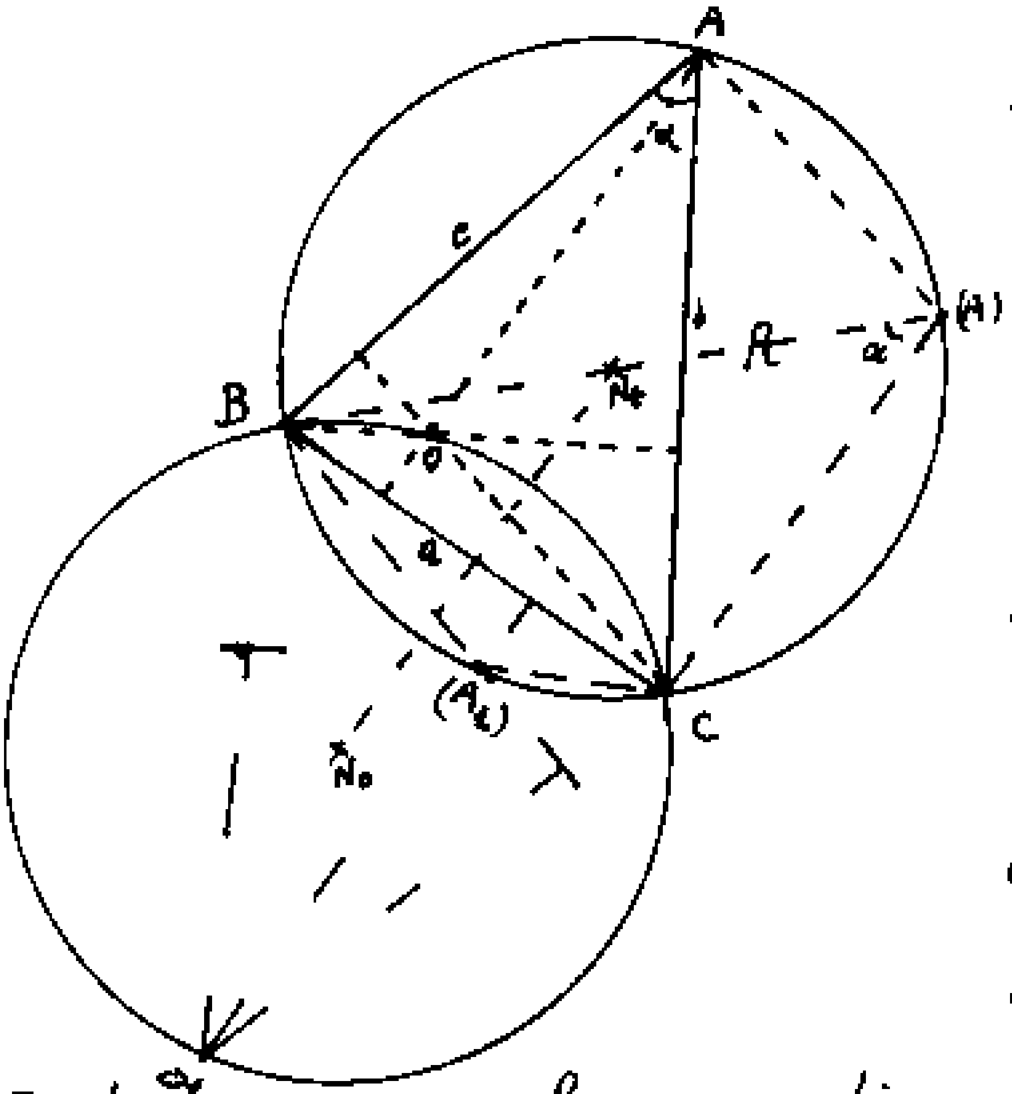
$$\boxed{\overline{OA} = a/\operatorname{tg}\alpha} \;;\; \boxed{\overline{OB} = b/\operatorname{tg}\beta}$$ ed essendo: $\dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta} = 2R$

$$\boxed{\overline{OA} = 2R\cos\alpha} \;;\; \boxed{\overline{OB} = 3R\cos\beta} \;;\; \boxed{\overline{OC} = 2R\cos\gamma}$$

Le distanze dell'ortocentro dai vertici del triangolo sono proporzionali ai coseni degli angoli nei vertici

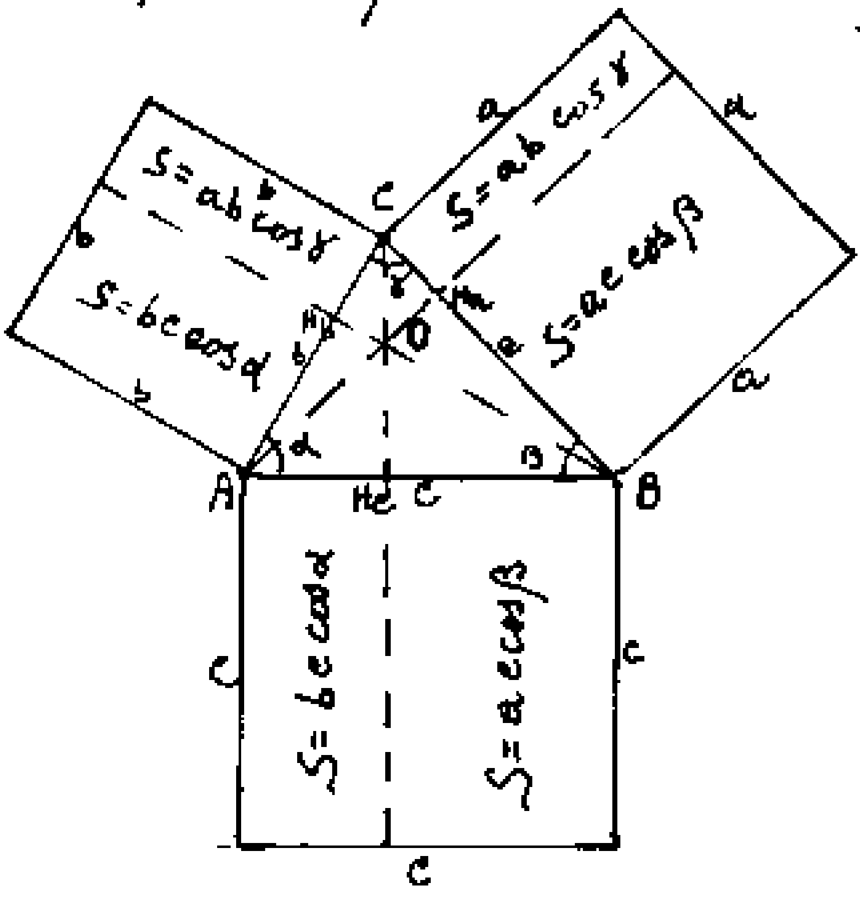
$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{\overline{OA}}{\cos\alpha} = \frac{\overline{OD}}{\cos\beta} = \frac{\overline{OC}}{\cos\gamma} = 2R}$$

Le distanze stanno fra loro come i coseni nei vertici.



Se consideriamo il triangolo ABC inscritto in una circonferenza e tenendo fissa la base $\overline{BC}$ spostiamo il vertice A in (A), si ha che $\overline{OA} = 2R\cos\alpha = \overline{(A)C}$, per cui mentre (A) percorre la circonferenza "O" percorre un'altra circonferenza; cioè

Date due circonferenze di uguale raggio e corda comune $\overline{BC}$ una è il luogo geometrico degli ortocentri dei triangoli di base $\overline{BC}$, l'altra il luogo geometrico dei vertici (A) e vale per l'intera circonferenza perchè sen α = sen(180°−α).



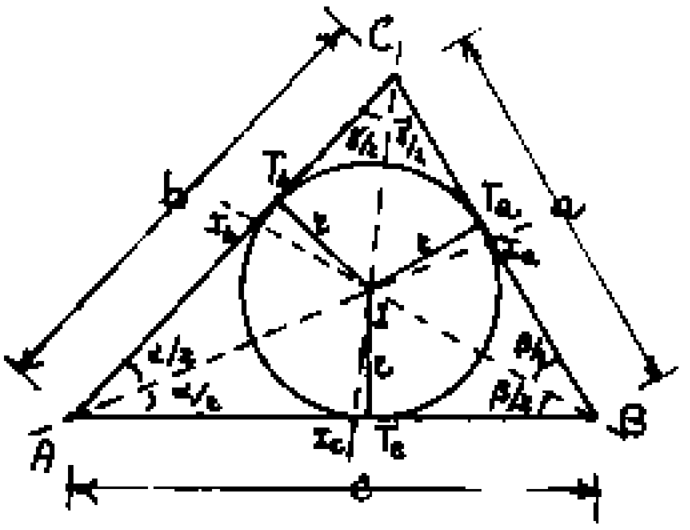
Un'altra proprietà delle altezze è che i loro prolungamenti dividono i quadrati dei lati in modo tale che le parti adiacenti lo stesso vertice sono equivalenti.

La dimostrazione è immediata infatti nel vertice A concorrono le parti: $b\,\overline{AH_b} = c\,\overline{AH_c}$ cioè $b(c\cos\alpha) = c(b\cos\alpha)$.

Tuttociò è una conferma immediata del teorema di Carnot: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$

Incentro

Dicesi: "incentro" il centro del cerchio inscritto in un triangolo, si indica con la lettera I ed è il punto comune delle bisettrici interne al triangolo.



Poiché ogni punto di una bisettrice è equidistante dai lati che formano l'angolo di cui e bisettrice, l'incentro è equidistante dai lati, per cui, $\overline{IT_a} = \overline{IT_b} = \overline{IT_c} = r_i$ = raggio del cerchio inscritto nel triangolo.

Consideriamo il triangolo ABC scomposto nei tre triangoli: AIB; AIC; BIC. Le cui aree saranno:

$S_{AIB} = \frac{c r_i}{2}$; $S_{AIC} = \frac{b r_i}{2}$; $S_{BIC} = \frac{a r_i}{2}$ sommando tali aree otteniamo l'area S del triangolo: ABC cioè,

$$r_i \left(\frac{a+b+c}{2} \right) = r_i p = S \quad . \quad \text{da cui:}$$

$$\boxed{r_i = \frac{S}{p}}$$

$$\boxed{r_i = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}}$$

"Il raggio del cerchio inscritto in un triangolo è dato dal rapporto fra l'area e il semiperimetro del triangolo stesso."

Si noti che: $\overline{AT_b} = \overline{AT_c} = (p-a)$

$$\overline{BT_c} = \overline{BT_a} = (p-b)$$

$$\overline{CT_a} = \overline{CT_b} = (p-c)$$

Calcoliamo le distanze dell'incentro dai vertici:

$$\overline{AI}^2 = (\overline{AT_c}^2 + r_i^2)\ ; \quad \overline{BI}^2 = (\overline{BT_a}^2 + r_i^2)\ ; \quad \overline{CI}^2 = \overline{CT_a}^2 + r_i^2$$

sostituendo:

$$\overline{AI}^2 = (p-a)^2 + \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = \frac{(p-a)[p^2 - pa + p^2 - pb - pc + bc]}{p}$$

$$\overline{AI}^2 = \frac{(p-a)(\cancel{2p^2} - \cancel{p(a+b+c)} + bc)}{p} = \frac{(p-a)bc}{p} \quad \text{per cui:}$$

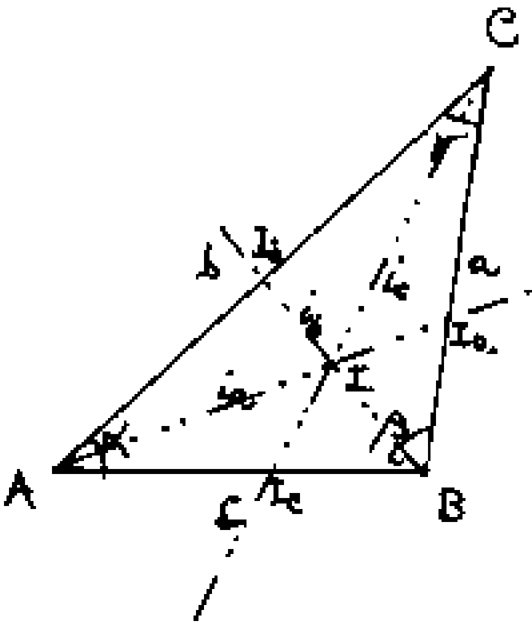
$$\boxed{\overline{AI} = \sqrt{\frac{(p-a)bc}{p}}} \quad \boxed{\overline{BI} = \sqrt{\frac{(p-b)ac}{p}}} \quad \boxed{\overline{CI} = \sqrt{\frac{(p-c)ab}{p}}}$$

Indichiamo rispettivamente con I_a, I_b, I_c i punti in cui le bisettrici incontrano i lati a, b, c. (diversi in generale da: T_a, T_b, T_c). Abbiamo già dimostrato che <u>la bisettrice divide il lato opposto in parti proporzionali ai lati adiacenti: (Teorema della bisettrice)</u> per cui:

$$\boxed{\overline{AI_c} = b\frac{c}{(a+b)}}\ ; \quad \boxed{\overline{BI_c} = a\frac{c}{(a+b)}} \quad (\text{lato } c)$$

$$\boxed{\overline{BI_a} = c\frac{a}{(c+b)}}\ ; \quad \boxed{\overline{CI_a} = b\frac{a}{(c+b)}} \quad (\text{lato } a)$$

$$\boxed{\overline{AI_b} = c\frac{b}{(a+c)}}\ ; \quad \boxed{\overline{CI_b} = a\frac{b}{(a+c)}} \quad (\text{lato } b)$$



Lunghezza delle bisettrici

Siano:

$i_a = \overline{AI_a}$; $i_b = \overline{BI_b}$; $i_c = \overline{CI_c}$ rispettivamente le bisettrici degli angoli α, β, γ;

Per il teorema di Carnot si ha: (vedi figura)

$$i_c^3 = b^2 + \overline{AI_c}^2 - 2b \cdot \overline{AI_c} \cos\alpha$$

sostituendo ($\cos\alpha$) ed $\overline{AI_c}$;

$$i_c^2 = b^2 + b^2\frac{c^2}{(a+b)^2} - 2\cancel{b}\frac{\cancel{c}}{(a+b)}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{\cancel{2bc}}\right)$$

semplificando e sviluppando

$$i_c^2 = \frac{a^2b^2 \cancel{+b^4} + 2ab^3 \cancel{+b^2c^2} - ab^3 \cancel{-b^4} - abc^2 \cancel{-b^2c^2} + a^3b + a^2b^2}{(a+b)^2}$$

$$i_c^2 = \frac{2a^2b^2 + ab^3 + a^3b - abc^2}{(a+b)^2} = \frac{ab(2ab+b^2+a^2-c^2)}{(a+b)^2}$$

$$i_c^2 = \frac{ab[(a+b)^2-c^2]}{(a+b)^2} = \frac{ab(2p)(2p-2c)}{(2p-c)^2}$$ per cui:

$$\boxed{i_a = \frac{1}{b+c}\sqrt{[(b+c)^2-a^2]\,bc}}$$

$$\boxed{i_a = \sqrt{\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]bc}}$$

$$\boxed{i_b = \frac{1}{a+c}\sqrt{[(a+c)^2-b^2]\,ac}}$$

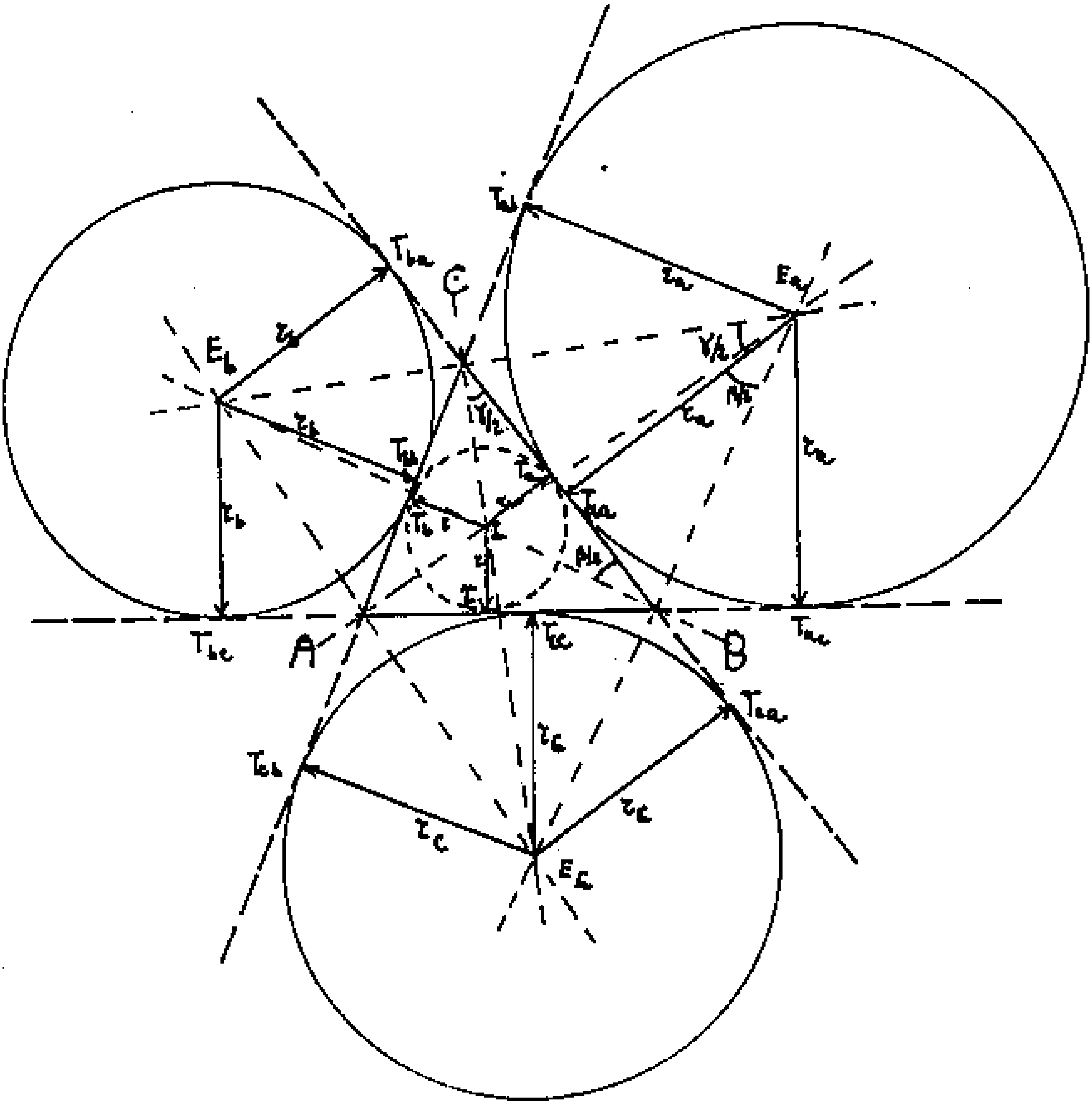
$$\boxed{i_b = \sqrt{\left[1-\left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right]ac}}$$

$$\boxed{i_c = \frac{1}{a+b}\sqrt{[(a+b)^2-c^2]\,ab}}$$

$$\boxed{i_c = \sqrt{\left[1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]\cdot ab}}$$

Exincentri

Dicesi exincentri i punti comuni alle bisettrici esterne al triangolo e sono centri dei cerchi exinscritti.



Siano quindi E_a, E_b, E_c; i centri dei cerchi exinscritti, rispettivamente giacenti sul prolungamento di i_a, i_b, i_c cioè negli spazi angolari α, β, γ. Indichiamo con T_a, T_b, T_c i punti di tangenza del cerchio inscritto, mentre indichiamo con T_{aa}, T_{ab}, T_{ac}; i punti di tangenza del cerchio exinscritto di centro E_a. Analogamente T_{ba}, T_{bb}, T_{bc}; se di centro E_b; ed T_{ca}, T_{cb}, T_{cc} se di centro E_c; infine con r_α, r_β, r_γ i rispettivi raggi dei archi exinscritti.

Le bisettrici esterne sono perpendicolari alle bisettrici interne, (nei vertici), quindi i lati del triangolo dividono l'angolo retto in due angoli complementari, da ciò i triangoli rettangoli simili:

$$CT_aI \equiv E_aT_{aa}C \quad ; \quad BT_aI \equiv E_aT_{aa}B$$

(hanno l'angolo complementare in comune) perciò:

$$\overline{CT_a} : r = r_\alpha : \overline{CT_{aa}} \quad ; \quad \overline{BT_a} : r = r_\alpha : \overline{BT_{aa}}$$

$$r \cdot r\alpha = (\overline{CT_a})(\overline{CT_{aa}}) = (\overline{BT_a})(\overline{BT_{aa}})$$

da cui:

$$\overline{CT_{aa}} : \overline{BT_{aa}} = \overline{BT_a} : \overline{CT_a}$$

per il componendo:

$$\frac{\overline{CT_{aa}} + \overline{BT_{aa}}}{\overline{BT_{aa}}} = \frac{\overline{BT_a} + \overline{CT_a}}{\overline{CT_a}}$$

cioè:

$$\frac{a}{\overline{BT_{aa}}} = \frac{a}{CT_a}$$

$$\boxed{\overline{BT_{aa}} = \overline{CT_a}}$$

Il discorso può ripetersi per i tre lati:

ed anche:

$$\boxed{\overline{BT_a} = \overline{CT_{aa}}}$$

per cui:

I punti di tangenza del cerchio inscritto dividono i lati del triangolo in due parti tali da essere uguali a quelle delimitate dai punti di tangenza dei cerchi exinscritti, peró misurate dall'altro vertice. (vedi figura)

Poiché i segmenti di tangente delimitati dai punti di tangenza allo stesso cerchio e dal punto comune alle due tangenti (vertice del triangolo) sono uguali; si ha:

$$\overline{CT_a} = \overline{CT_b} = \overline{BT_{aa}} = \overline{AT_{bb}} = \overline{BT_{ac}} = \overline{AT_{bc}} \text{ ; poniamo } = \ell$$

$$\overline{BT_a} = \overline{BT_c} = \overline{CT_{aa}} = \overline{AT_{cc}} = \overline{CT_{ab}} = \overline{AT_{cb}} \text{ ; '' } = m$$

$$\overline{AT_b} = \overline{AT_c} = \overline{CT_{bb}} = \overline{BT_{cc}} = \overline{CT_{ba}} = \overline{BT_{ca}} \text{ ; '' } = n$$

$$\boxed{(m+\ell) = a} \quad ; \quad \boxed{(n+\ell) = b} \quad ; \quad \boxed{(m+n) = c}$$

$$\text{ed} \quad \boxed{m+n+\ell = p}$$

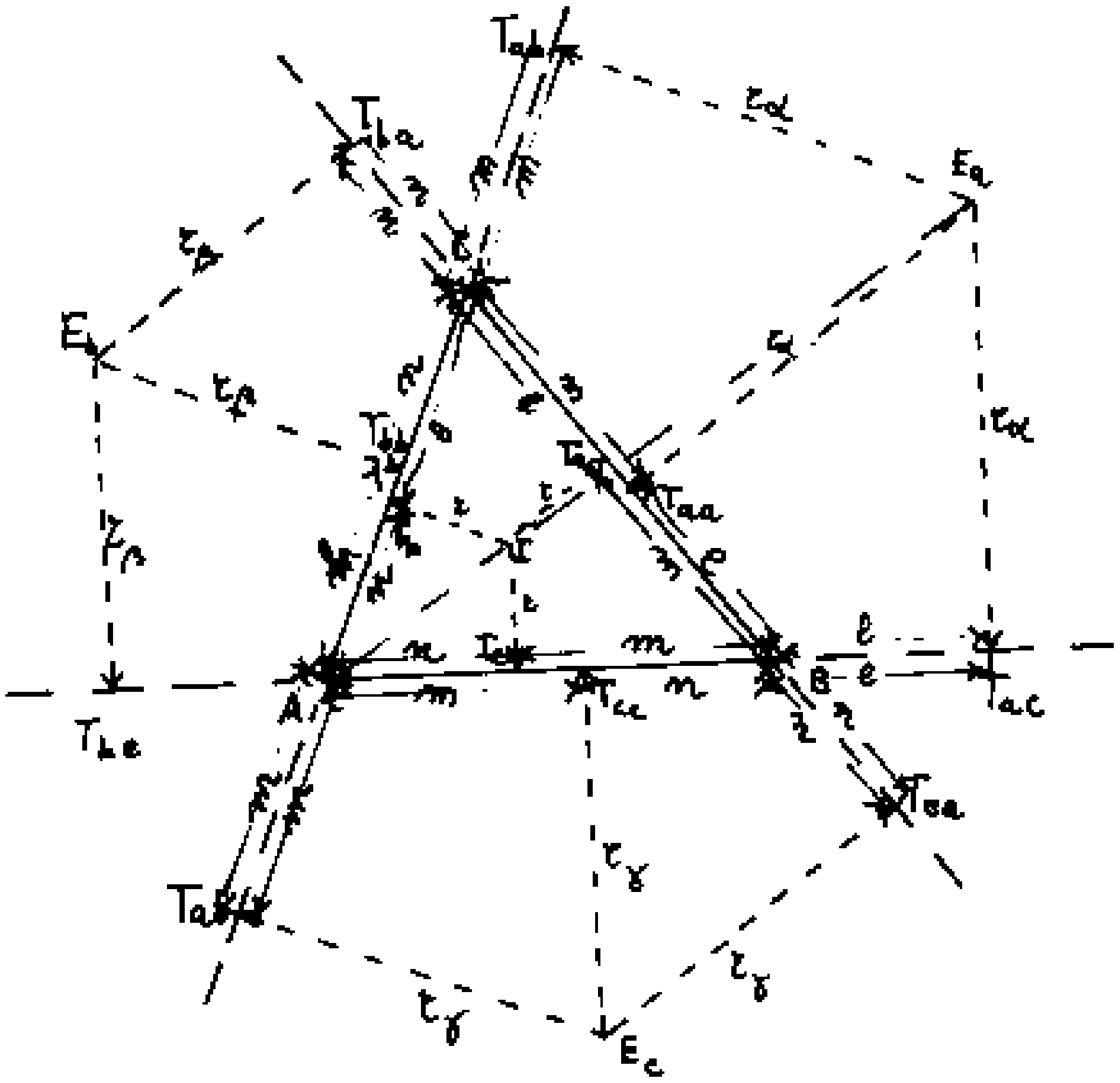
poiché i segmenti fra vertici e punti di tangenza sono già stati calcolati per il cerchio inscritto; abbiamo:

$$\boxed{m = \frac{a+c-b}{2}} \quad = \quad \boxed{m = (p-b)}$$

$$\boxed{n = \frac{b+c-a}{2}} \quad = \quad \boxed{n = (p-a)}$$

$$\boxed{\ell = \frac{a+b-c}{2}} \quad = \quad \boxed{\ell = (p-c)}$$

Notiamo che le distanze dei punti di tangenza esterni dai vertici opposti sullo stesso lato del triangolo è pari al semiperimetro $p = l+m+n$.



cioè:

$\overline{T_{ab}A} = m+n+l = p$

$\overline{T_{ba}B} = p$

$\overline{T_{bc}B} = p$

$\overline{T_{ab}C} = p$

$\overline{T_{ca}C} = p$

$\overline{T_{ac}A} = p$

per la similitudine dei triangoli rettangoli:

$AT_{ab}E_a \equiv AT_bI$ (e analoghi) si ha:

$$r_\alpha : p = r : n \supset r_\alpha = \frac{pr}{n} = \frac{p}{(p-a)} r$$

$$r_\beta : p = r : m \supset r_\beta = \frac{pr}{m} = \frac{p}{(p-b)} r$$

$$r_\gamma \div p = r : l \supset r_\gamma = \frac{pr}{l} = \frac{p}{(p-c)} r$$

sostituendo: $\boxed{r = \frac{S}{p}}$ abbiamo:

$$\boxed{\begin{aligned} r_\alpha &= \frac{S}{(p-a)} \\ r_\beta &= \frac{S}{(p-b)} \\ r_\gamma &= \frac{S}{(p-c)} \end{aligned}}$$

Valori dei raggi dei cerchi exinscritti dai quali si può ricavare:

$$\boxed{r = \frac{r_\alpha \cdot r_\beta \cdot r_\gamma}{p^2}}$$

Distanze degli exincentri dai vertici

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo:
$AT_{ab}E_a$ si ha:

$$\overline{AE_a}^2 = p^2 + r_\alpha^2 = p^2 + \frac{S^2}{(p-a)^2} = \frac{p^2(p-a)^2 + p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)^2}$$

$$\overline{AE_a}^2 = p(p-a) + \frac{(p-b)(p-c)p}{(p-a)} = \left(\frac{p^2(\cancel{p-a})^2}{(\cancel{p}-a)^2}\right)\left(1 + \frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}\right)$$

$$\overline{AE_a}^2 = p^2\left(1 + tg^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{p^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{p^2(bc)}{p(p-a)} = \frac{pbc}{(p-a)}$$

$$AE_a = \sqrt{\frac{pbc}{(p-a)}}$$

$$BE_b = \sqrt{\frac{pac}{(p-b)}}$$

$$CE_c = \sqrt{\frac{pab}{p-c}}$$

<u>distanze degli exincentri dai vertici opposti</u>

$$\overline{AE_b}^2 = r_\beta^2 + \overline{AT_{bc}}^2 = \left(\frac{S}{(p-b)}\right)^2 + (p-c)^2 = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c) + (p-c)^2(p-b)^2}{(p-b)^2}$$

$$\overline{AE_b}^2 = (p-c)^2\left(1 + \frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}\right) = (p-c)^2\left(1 + ctg^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{(p-c)^2}{sen^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\overline{AE_b} = (p-c)\sqrt{\frac{bc}{(p-b)(p-c)}} \quad ; \quad \overline{AE_c} = (p-b)\sqrt{\frac{bc}{(p-b)(p-c)}}$$

$$\overline{BE_c} = (p-a)\sqrt{\frac{ac}{(p-a)(p-c)}} \quad ; \quad \overline{BE_a} = (p-c)\sqrt{\frac{ac}{(p-a)(p-c)}}$$

$$\overline{CE_a} = (p-b)\sqrt{\frac{ab}{(p-a)(p-b)}} \quad ; \quad \overline{CE_b} = (p-a)\sqrt{\frac{ab}{(p-a)(p-b)}}$$

$$\overline{E_bE_c} = a\sqrt{\frac{bc}{(p-b)(p-c)}} = a/sen\frac{\alpha}{2}$$

$$\overline{E_aE_c} = b\sqrt{\frac{ac}{(p-a)(p-c)}} = b/sen\frac{\beta}{2}$$

$$\overline{E_aE_b} = c\sqrt{\frac{ab}{(p-a)(p-b)}} = c/sen\frac{\gamma}{2}$$

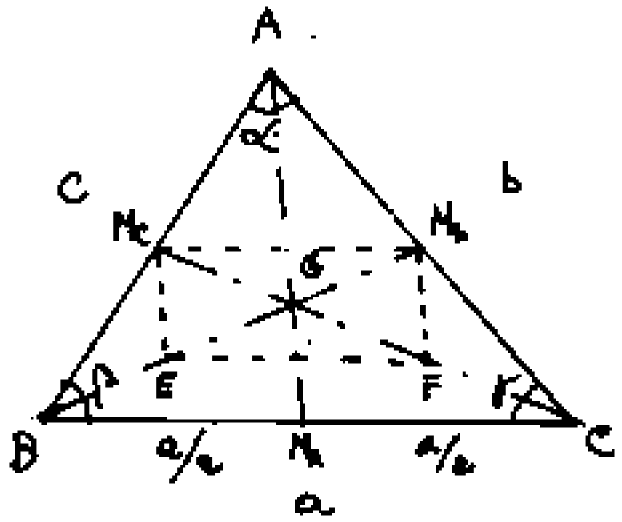
<u>distanze fra gli exincentri</u>

Baricentro

Dicesi "Baricentro" di un triangolo il punto comune delle mediane e si indica con la lettera G. (Dicesi mediana la retta che uscente da un vertice biseca il lato opposto)

Abbiamo già accennato al concetto di baricentro in generale, ed in particolare abbiamo rilevato che il baricentro di un segmento è il suo punto medio; se consideriamo la superficie di un triangolo costituita da tanti segmenti paralleli ad un lato e decrescenti fino al punto vertice opposto al lato, il baricentro di ciascuno di essi è nel loro punto medio, cioè giace sulla mediana al lato. Quindi se appoggiamo un triangolo di peso uniforme (per esempio di cartone) su una lama di coltello in corrispondenza di una sua mediana, il nostro triangolo materializzato sta in equilibrio, (la lama deve essere oltre metà spessore per avere equilibrio stabile, altrimenti si ha equilibrio instabile. come voler far stare ritto un cono poggiato sul vertice) Il discorso vale per tutte le mediane, per cui, se appoggiamo il nostro triangolo di cartone sulla punta di uno spillo in corrispondenza al punto G, punto comune delle mediane (baricentro) esso starà in equilibrio.

Dimostriamo ora che il baricentro G di un triangolo divide le mediane in due parti tali che la distanza di G da un vertice è doppia della distanza di G dal punto medio del lato opposto a quel vertice.



Tracciate le mediane: $\overline{AM_a}$; $\overline{BM_b}$; $\overline{CM_c}$ unito $\overline{M_cM_b}$ (parallelo a BC) da M_b ed M_c le parallele ad $\overline{AM_a}$, avremo, nell'incontro con le altre mediane, il parallelogramma M_cM_BFE ove $\overline{EG} = \overline{GM_b}$ ed anche: $\overline{FG} = \overline{GM_c}$, ma per i triangoli simili M_cEB ed AGB anche $\overline{BE} = \overline{EG} = \overline{GM_b}$ e poiche $\overline{BE} + \overline{EG} + \overline{GM_b} = \overline{BM_b} = m_b$ = mediana su b abbiamo che $\overline{GB} = \frac{2}{3} m_b$; $\overline{GM_b} = \frac{1}{3} m_b$. Lo stesso discorso può essere fatto per: $\overline{CF} = \overline{FG} = \overline{GM_c}$; ove: $\overline{CG} = \frac{2}{3} m_c$, $\overline{GM_c} = \frac{1}{3} m_c$. E tracciando la parallela ad un altro lato per esempio: $\overline{M_aM_c}$, si dimostra che $\overline{GA} = \frac{2}{3} m_a$; $\overline{GM_a} = \frac{1}{3} m_a$.

Questa dimostrazione, può essere fatta in molti modi.

Calcoliamo ora la lunghezza delle mediane.

Applicando il teorema di Carnot al triangolo ABM_a abbiamo: $\overline{AM_a}^2 = m_a^2 = c^2 + (a/2)^2 - \cancel{2} c \frac{a}{\cancel{2}} \cos\beta$

ancora per Carnot al triangolo ABC

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

sostituendo:

$$m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} - \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

quindi:

$$m_a^2 = \frac{2(c^2+b^2)-a^2}{4}$$

cioè:

$$\left.\begin{array}{l}
\boxed{m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(c^2+b^2)-a^2}} \\[2ex]
\boxed{m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}} \\[2ex]
\boxed{m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}}
\end{array}\right\} \quad \underline{\text{lunghezza delle}}\ \underline{\text{mediane}}$$

$$\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right) = \frac{1}{4}\left[2c^2+2b^2-a^2+2a^2+2c^2-b^2+2a^2+2b^2-c^2\right]$$

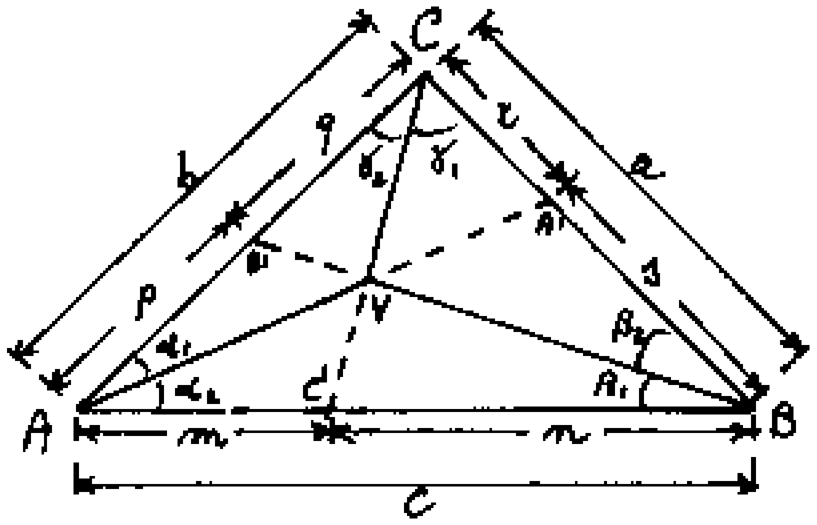
$$\boxed{\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right) = \frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)} \left\{\begin{array}{l}\text{la somma dei quadrati} \\ \text{delle mediane è } 3/4 \text{ la} \\ \text{somma dei quadrati dei lati}\end{array}\right.$$

La distanza del baricentro G dai vertici del triangolo è: $\frac{2}{3}m$, perciò:

$$\left.\begin{array}{l}
\boxed{\overline{GA} = \frac{1}{3}\sqrt{2(c^2+b^2)-a^2}} \\[2ex]
\boxed{\overline{GB} = \frac{1}{3}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}} \\[2ex]
\boxed{\overline{GC} = \frac{1}{3}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}}
\end{array}\right\} \quad \underline{\text{distanze del}}\ \underline{\text{baricentro}}\ \underline{\text{dai vertici}}$$

Complementi sul triangolo

Ricerchiamo la condizione affinché tre rette uscenti dai vertici di un triangolo A, B, C abbiano un punto V in comune. Indichiamo con A', B', C' i punti di intersezione delle rette coi lati opposti ai vertici omonimi. Con α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2 le parti in cui tali rette dividono gli angoli ai vertici. Per il teorema dei seni abbiamo:



$$\begin{aligned}\overline{VA} &= b\frac{\operatorname{sen}\gamma_2}{\operatorname{sen}(\alpha_1+\gamma_2)} = c\,\frac{\operatorname{sen}\beta_1}{\operatorname{sen}(\beta_1+\alpha_2)}\\ \overline{VB} &= c\frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{\operatorname{sen}(\beta_1+\alpha_1)} = a\,\frac{\operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}(\gamma_1+\beta_2)}\\ \overline{VC} &= a\frac{\operatorname{sen}\beta_2}{\operatorname{sen}(\gamma_1+\beta_2)} = b\,\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}(\alpha_1+\gamma_2)}\end{aligned}\Bigg\}$$

facendo i rapporti in modo da elidere lati e denominatori:

si ha:

$$\frac{\overline{VA}}{\overline{VB}} = \frac{\operatorname{sen}\beta_1}{\operatorname{sen}\alpha_2} \quad ; \quad \frac{\overline{VC}}{\overline{VA}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\gamma_2} \quad ; \quad \frac{\overline{VB}}{\overline{VC}} = \frac{\operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}\beta_2}$$

moltiplicando membro a membro le tre uguaglianze si ha:

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\beta_1 \operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}\alpha_2 \operatorname{sen}\beta_2 \operatorname{sen}\gamma_2} = 1}$$

che è la <u>condizione perché tre rette, uscenti dai vertici di un triangolo, abbiano un punto comune.</u>

Consideriamo ora:

$$\overline{AB'} = p = c\,\frac{\operatorname{sen}\beta_1}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta_1)} \;;\; \overline{CB'} = q = a\,\frac{\operatorname{sen}\beta_2}{\operatorname{sen}(\gamma+\beta_2)} \;;\; \beta_2 = (\beta-\beta_1)\;;$$

$\boxed{\operatorname{sen}(\gamma+\beta_2) = \operatorname{sen}(\alpha+\beta_1)}$; sostituedo si ha:

La generalizzazione del teorema della bisettrice:

$$\frac{AB'}{CB'} = \frac{p}{q} = \frac{c \operatorname{sen}\beta_1}{a \operatorname{sen}\beta_2}$$

analogamente:

$\frac{r}{s} = \frac{b \operatorname{sen}\alpha_1}{c \operatorname{sen}\alpha_2}$	$\frac{p}{q} = \frac{c \operatorname{sen}\beta_1}{a \operatorname{sen}\beta_2}$	$\frac{n}{m} = \frac{a \operatorname{sen}\gamma_1}{b \operatorname{sen}\gamma_2}$

"Una retta uscente da un vertice di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali ai lati adiacenti moltiplicati rispettivamente per i seni degli angoli fra la retta e i lati stessi"

Se la retta è la bisettrice: $(\alpha_1 = \alpha_2)$; $(\beta_1 = \beta_2)$; $(\gamma_1 = \gamma_2)$

perciò: $\frac{r}{s} = \frac{b}{c}$; $\frac{p}{q} = \frac{c}{a}$; $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$; cioè la bisettrice divide il lato opposto proporzionalmente ai lati adiacenti (Teorema della bisettrice)

Se moltiplichiamo membro a membro le tre uguaglianze della generalizzazione del teorema della bisettrice; semplificando otteniamo:

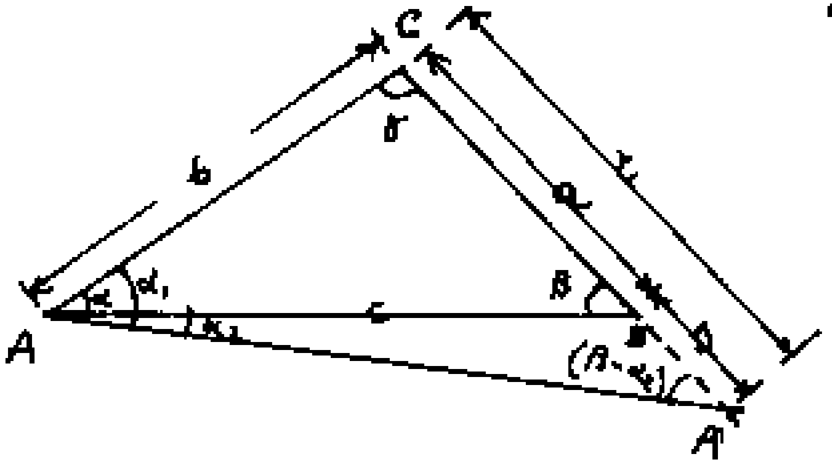
$$\boxed{\frac{r \cdot p \cdot n}{s \cdot q \cdot m} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\beta_1 \operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}\alpha_2 \operatorname{sen}\beta_2 \operatorname{sen}\gamma_2} = 1}$$

Che è la condizione perché tre rette uscenti dai vertici di un triangolo, abbiano un punto comune. (espresso in funzione delle parti in cui vengono divisi i lati opposti)

Puo' esprimersi:

"Se tre rette uscenti dai vertici di un triangolo, hanno un punto comune, il prodotto dei rapporti fra le parti in cui dividono i lati opposti (prese ordinatamente in senso orario o antiorario) è l'unità.

Abbiamo considerato rette interne al triangolo; per rette esterne al triangolo si ha: (per il teorema dei seni):



$$r = b\,\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha_2)} \;;\; s = \frac{c\,\operatorname{sen}\alpha_2}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha_1)}$$

$$\boxed{\frac{r}{s} = \frac{b\,\operatorname{sen}\alpha_1}{C\,\operatorname{sen}\alpha_2}}$$

Vale ancora il teorema della bisettrice generalizzato.

Si possono avere i seguenti casi:

1) Le tre rette si incontrano in un punto interno al triangolo

2) Le tre rette si incontrano in un punto esterno al triangolo (In questo caso una sola retta taglia il triangolo

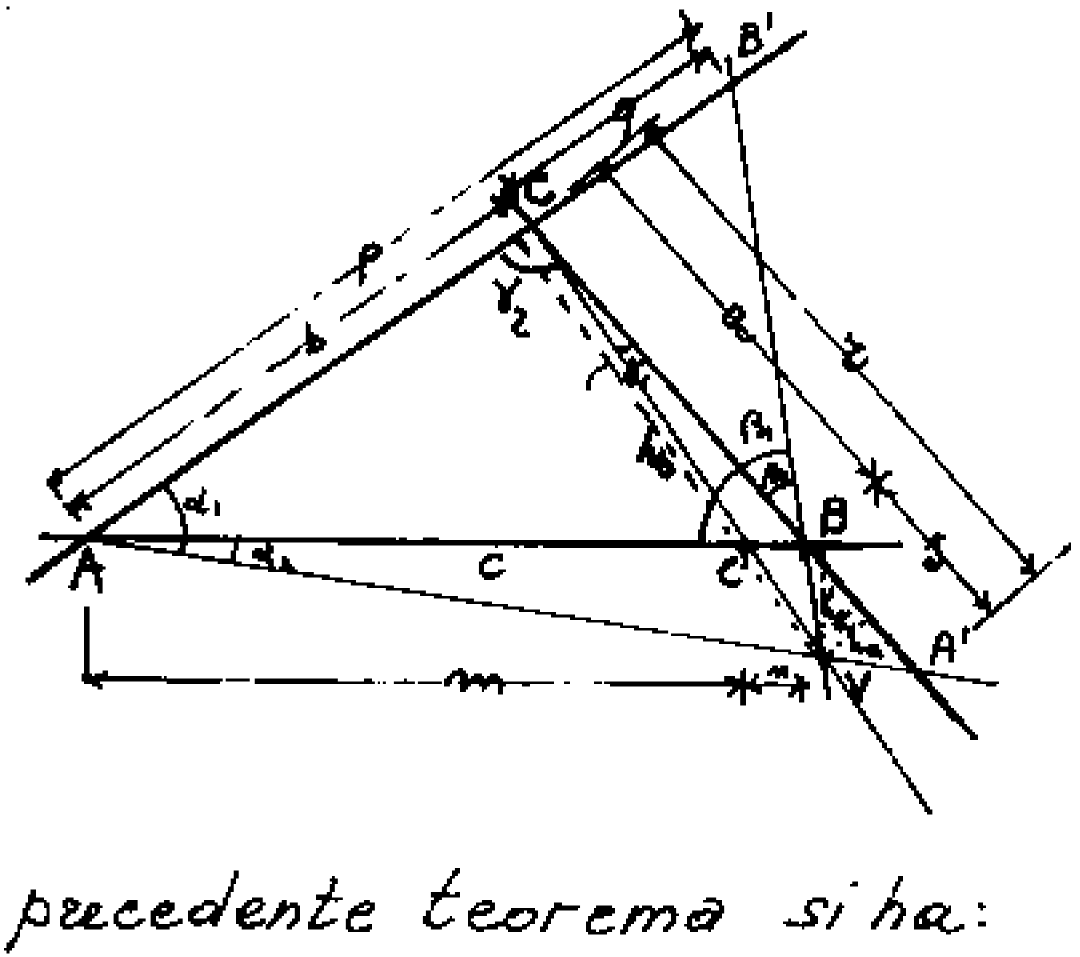
3) I punti A', B', C' sono allineati (in questo caso una sola retta uscente dai vertici è esterna al triangolo)

4) Le rette dai vertici non hanno un punto comune e i punti A'B'C' non sono allineati.

Notiamo che, nel caso che le tre rette abbiano un punto in comune, (V), possiamo considerare i triangoli: ABV ; BCV ; CAV ; le cui aree saranno il semiprodotto dei lati per le rispettive altezze tracciate da V perpendicolarmente ai lati a, b, c che indicheremo rispettivamente con h_a, h_b, h_c.

ma: $\operatorname{sen}\alpha_1 = h_b/\overline{VA}$; $\operatorname{sen}\alpha_2 = h_c/\overline{VA}$; $\operatorname{sen}\beta_1 = h_c/\overline{VB}$

$\operatorname{sen}\beta_2 = h_a/\overline{VB}$; $\operatorname{sen}\gamma_1 = h_a/\overline{VC}$; $\operatorname{sen}\gamma_2 = h_b/\overline{VC}$



Ciò vale sia che il punto comune "V" sia interno al triangolo, sia che sia esterno. Se sostituiamo i valori dei seni nelle espressioni del precedente teorema si ha:

$$\frac{r}{s} = \frac{b \operatorname{sen}\alpha_1}{c \operatorname{sen}\alpha_2} = \frac{b\,h_b/\overline{VA}}{c\,h_c/\overline{VA}} = \frac{b h_b}{c h_c} = \frac{2 S_{ACV}}{2 S_{ABV}} = \frac{S_{ACV}}{S_{ABV}}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{c \operatorname{sen}\beta_1}{a \operatorname{sen}\beta_2} = \frac{c\,h_c/\overline{VB}}{a\,h_a/\overline{VB}} = \frac{c h_c}{a h_a} = \frac{2 S_{ABV}}{2 S_{BCV}} = \frac{S_{ABV}}{S_{BCV}}$$

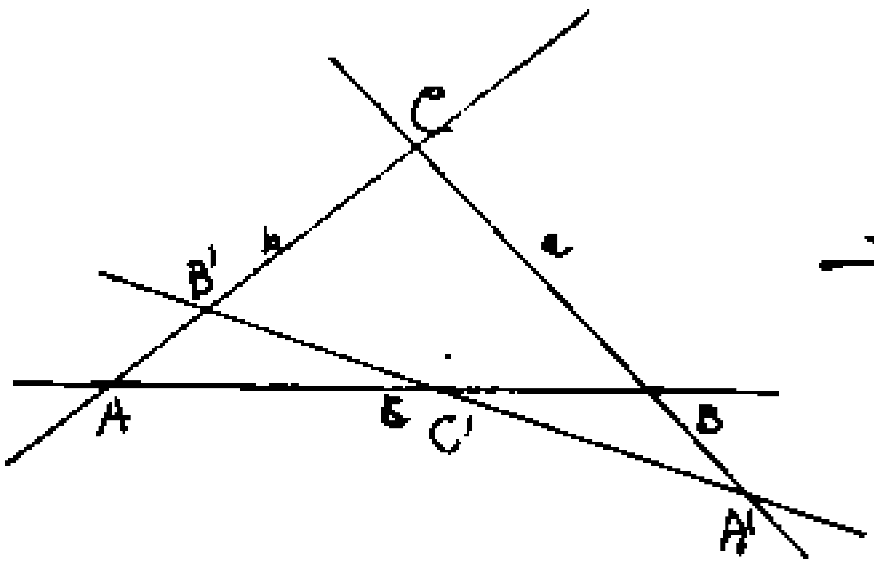
$$\frac{n}{m} = \frac{a \operatorname{sen}\gamma_1}{b \operatorname{sen}\gamma_2} = \frac{a\,h_a/\overline{VC}}{b\,h_b/\overline{VC}} = \frac{a h_a}{b h_b} = \frac{2 S_{BCV}}{2 S_{ACV}} = \frac{S_{BCV}}{S_{ACV}}$$

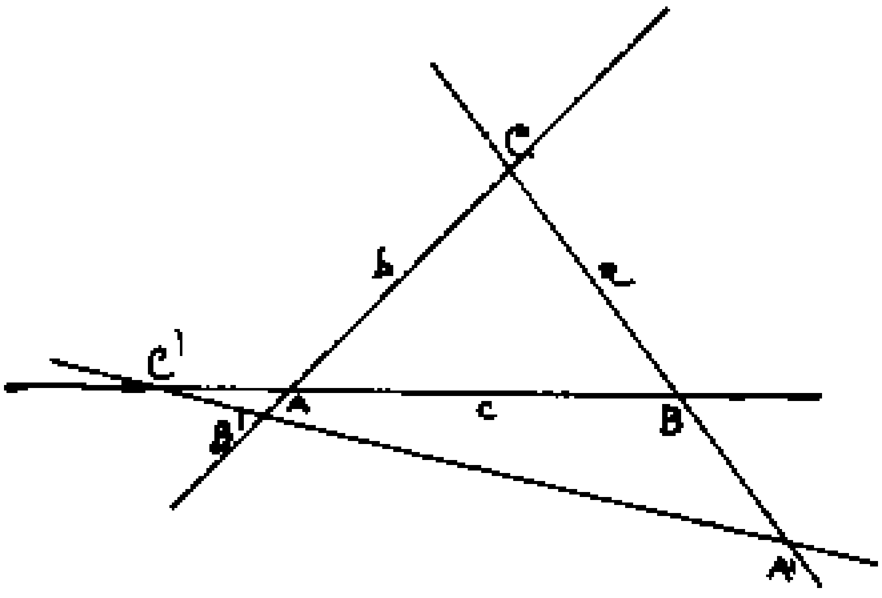
Cioè si ha un altro aspetto del precedente teorema:

"Se da un punto "V" del piano uniamo i vertici A,B,C, di un triangolo, la retta passante per un vertice divide il lato opposto in due parti proporzionali alle aree dei triangoli delimitati dalla retta stessa, dai lati adiacenti e dalle altre due rette uscenti da V.

$$\boxed{\frac{r}{s} = \frac{S_{AVC}}{S_{AVB}}} \qquad \boxed{\frac{p}{q} = \frac{S_{AVB}}{S_{BVC}}} \qquad \boxed{\frac{n}{m} = \frac{S_{BVC}}{S_{AVC}}}$$

Si noti invece che, affinché tre punti A', B', C', presi sui lati di un triangolo, siano allineati, la retta che li unisce non può passare per i vertici A, B, C distinti da A', B', C'.





Si hanno due casi: 1) la retta taglia il triangolo 2) la retta è esterna al triangolo. (Torneremo sull'argomento).

Il teorema di Ceva

Occorre premettere una osservazione sui segni: le parti $\overline{AC'}$ e $\overline{BC'}$ del lato $\overline{AB}$ hanno segni opposti perché misurate in direzione opposta $(\overline{BC'}=-\overline{C'B})$ analogamente per i segni delle altre parti.

$$\boxed{\left(\frac{\overline{AB'}}{\overline{CB'}}\right)\left(\frac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}}\right)\cdot\left(\frac{\overline{CA'}}{\overline{BA'}}\right)=-1}$$

reciprocamente, se sussiste tale relazione, le rette $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$; hanno un punto in comune

(Teorema di Ceva)

La dimostrazione si avvale del precedente teorema:

$$\left(\frac{\overline{AB'}}{\overline{CB'}}\right)=\frac{-p}{-q}=\frac{-S_{AVB}}{S_{BVC}}\ ;\ \frac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}}=\frac{-n}{m}=\frac{-S_{BVC}}{S_{AVC}}\ ;\ \frac{\overline{CA'}}{\overline{BA'}}=\frac{-r}{s}=\frac{-S_{AVC}}{S_{AVB}}$$

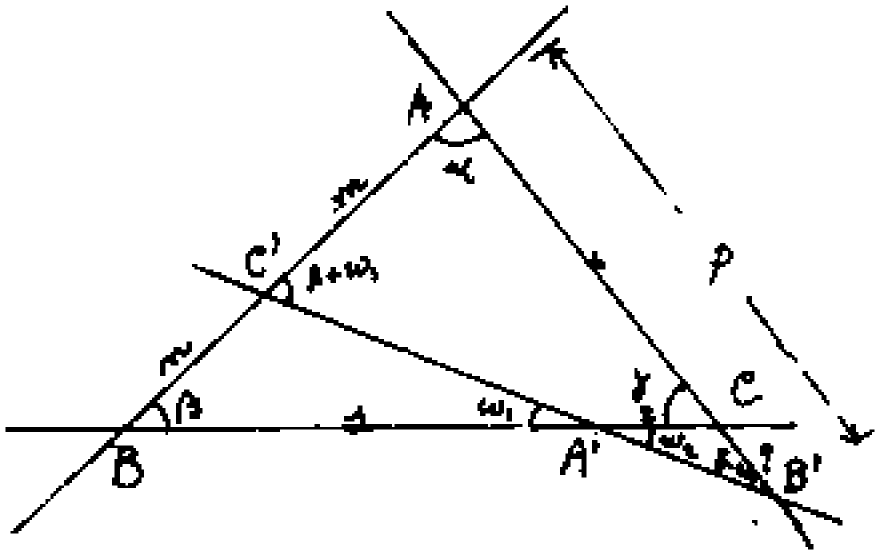
sostituendo:

$$\left(\frac{-\cancel{S_{AVB}}}{\cancel{S_{BVC}}}\right)\cdot\left(\frac{-\cancel{S_{BVC}}}{\cancel{S_{AVC}}}\right)\cdot\left(\frac{-\cancel{S_{AVC}}}{\cancel{S_{AVB}}}\right)=-1$$

Il prodotto dei rapporti fra le parti in cui vengono divisi i lati di un triangolo da tre rette uscenti dai vertici opposti ed aventi un punto comune, è pari all'unità presa di segno negativo, essendo le parti di lato misurate a partire dai vertici.

Il teorema di Menelao

Una trasversale (non passante per i vertici) sega i lati di un triangolo ABC nei punti: A', B', C' rispettivamente, su a, b, c. si ha:



$$\boxed{\left(\frac{\overline{AB'}}{\overline{CB'}}\right)\left(\frac{BC'}{AC'}\right)\cdot\left(\frac{CA'}{BA'}\right) = 1}$$

"Il prodotto dei rapporti, fra le distanze dai vertici dei punti intercettati sui lati di un triangolo da una trasversale, misurate sui lati stessi è unitario. e viceversa se i punti A', B', C' soddisfano la precedente relazione i tre punti sono allineati." (Teorema di Menelao)

Si noti che i tre punti A', B', C', del teorema di Ceva non sono allineati, e che le rette AA', BB', CC' del presente teorema non hanno un punto comune.

La condizione di allineamento di C'A'B' può esprimersi: (vedi figura): $\omega_1 = \omega_2$.

Dal triangolo BC'A' abbiamo: $\frac{n}{s} = \frac{\operatorname{sen}\omega_1}{\operatorname{sen}(\beta+\omega_1)}$

" " A'CB' " $\frac{r}{q} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma-\omega_2)}{\operatorname{sen}\omega_2}$

" " C'AB' " $\frac{p}{m} = \frac{\operatorname{sen}(\beta+\omega_1)}{\operatorname{sen}(\gamma-\omega_2)}$

moltiplicando fra loro le tre uguaglianze abbiamo:

$$\frac{n \cdot r \cdot p}{m \cdot s \cdot q} = \frac{\operatorname{sen}(\omega_1) \cdot \cancel{\operatorname{sen}(\gamma-\omega_2)} \cdot \cancel{\operatorname{sen}(\beta+\omega_1)}}{\operatorname{sen}\omega_2 \cdot \cancel{\operatorname{sen}(\gamma-\omega_2)}\ \cancel{\operatorname{sen}(\beta+\omega_1)}}$$

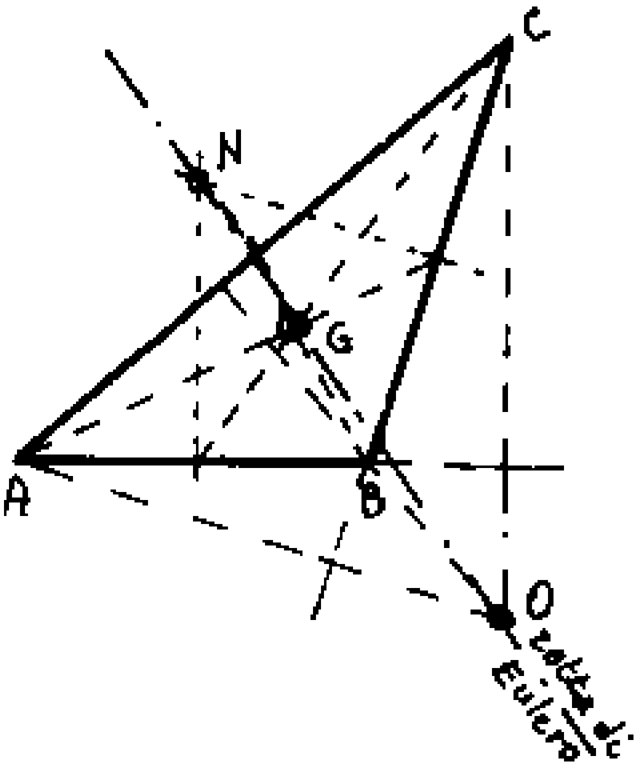
cioè: i prodotti dei rapporti

$$\frac{p}{q} = \left(\frac{\overline{AB'}}{\overline{CB'}}\right) ; \quad \frac{n}{m} = \left(\frac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}}\right) ; \quad \frac{r}{s} = \left(\frac{\overline{CA'}}{(\overline{BA'})}\right)$$

sono uguali all'unità se $(\omega_1) = (\omega_2)$, resta dimostrato il teorema di Menelalo.

Retta di Eulero

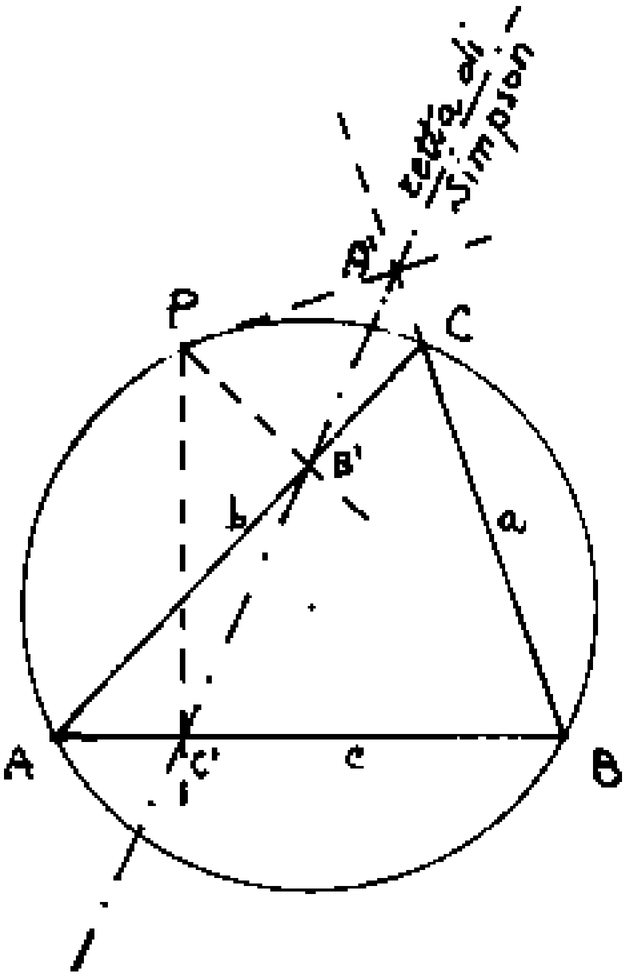
si può anche dimostrare che l'ortocentro "O", il baricentro G, ed il circocentro N; in qualsiasi triangolo sono tre punti allineati, e



la retta che li congiunge è chiamata: "Retta di Eulero"

E si ha che: $\overline{ON}/\overline{GN} = 3$, per cui G è intermedio ad $\overline{ON}$ e divide il segmento $\overline{ON}$ in due parti una doppia dell'altra. (come G divide anche le mediane del triangolo)

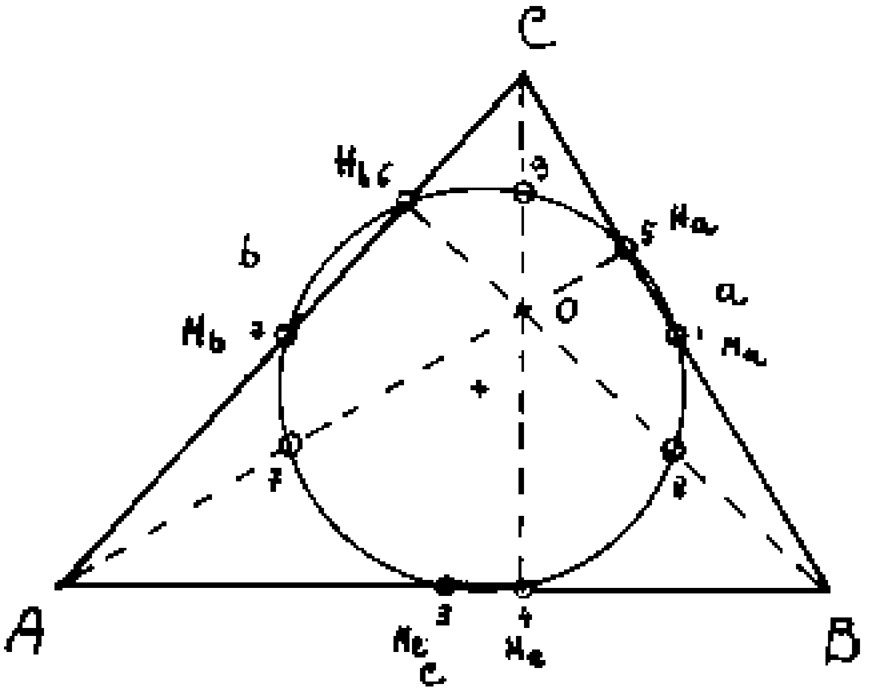
Retta di Simpson



I piedi A', B', C', delle normali condotte da un punto P, del cerchio circoscritto ad un triangolo, rispettivamente ai lati a, b, c, sono allineati. La retta che li congiunge è detta: "retta di Simpson".

Il cerchio dei nove punti

(o di Feuerbach)

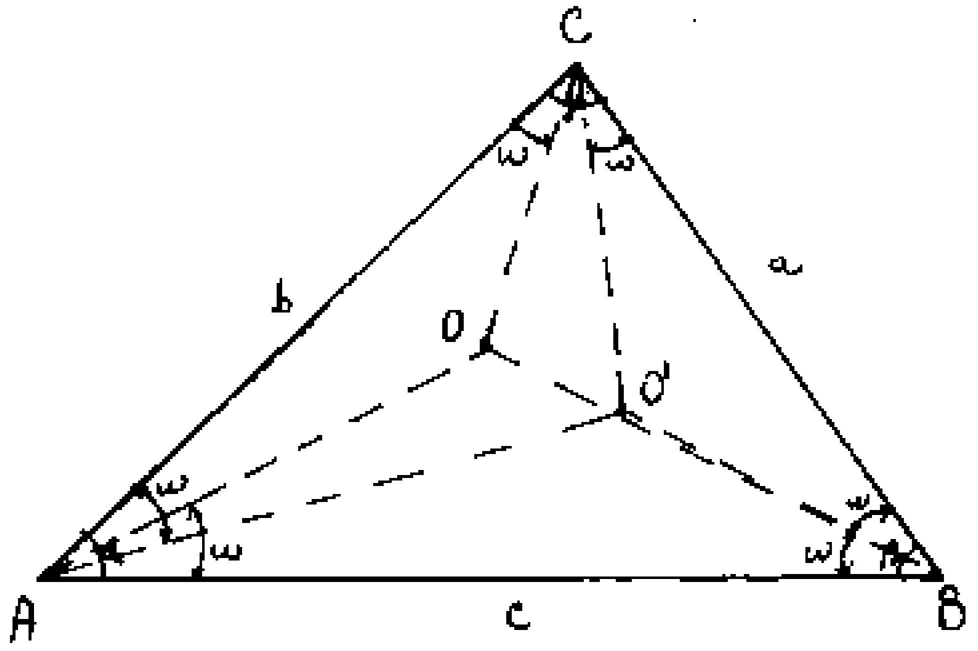


Dato un triangolo ABC, dicesi "Cerchio dei nove punti", il cerchio che passa per i punti medi dei lati, perchè passa anche per i piedi delle altezze, e per i punti medi dei segmenti che dall'ortocentro vanno ai vertici del triangolo.

(V. Encicl. delle Mat. Elem. (op. cit.) Vol. II parte 1ª pag. 188 nota 46)

I Punti di Brocard.

Dato un triangolo ABC, nel suo piano esistono due punti "O" ed "O'" detti "punti di Brocard", tali che:



$\widehat{OAB} = \widehat{OBC} = \widehat{OCA} = \omega$;

$\widehat{O'CB} = \widehat{O'BA} = \widehat{O'AC} = \omega$;

ove:

$$\boxed{cotg(\omega) = cotg(\alpha) + cotg(\beta) + cotg(\gamma)}$$

sostituendo:

$$\boxed{cotg(\omega) = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}}$$

$$\boxed{tang(\omega) = \frac{4S}{a^2+b^2+c^2}}$$

poiche: $sen\,\alpha = 2\,sen\frac{1}{2}\alpha\,\cos\frac{1}{2}\alpha = 2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

$sen(\alpha) = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $\boxed{sen(\alpha) = \frac{2S}{bc}}$

$\cos(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\qquad cotg(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\cancel{bc}}\cdot\frac{\cancel{bc}}{2S}$

$cotg(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$, $cotg(\beta) = \frac{a^2+c^2-b^2}{4S}$; $cotg\,\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$

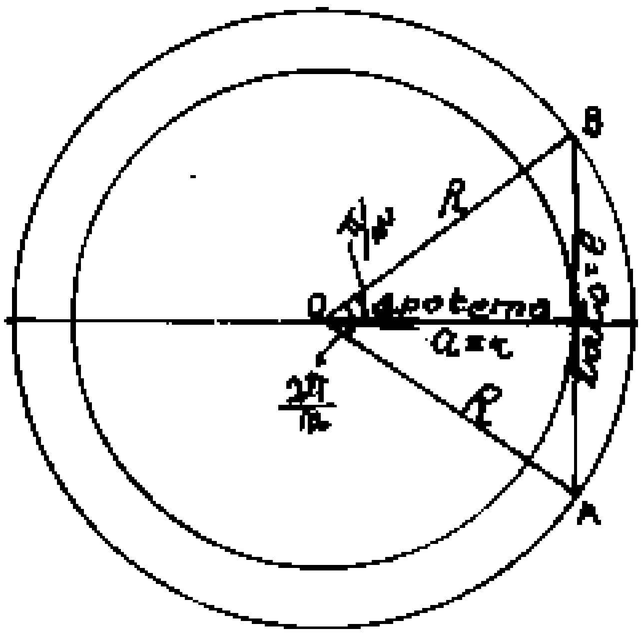
I Poligoni regolari

Si dicono "*poligoni regolari*" quei poligoni che hanno lati uguali ed angoli interni uguali e sono quindi inscrittibili e circoscrittibili con una circonferenza. Essi prendono il nome dal numero dei lati, che corrisponde al numero di parti uguali in cui viene divisa la circonferenza. (o l'angolo giro). Abbiamo giá visto che è possibile dividere la circonferenza in 3, 4, 5, 6 parti uguali, e multipli secondo le potenze di 2, cioè: 2, 4, 8, 16 .... avremo quindi la possibitá di disegnare poligoni di: 3, 6, 12, 24, 48 ...; 4, 8, 16, 32, 64 .... ; 5, 10, 20, 40 ....; lati Nonché quelle frazioni ricavabili per somma o differenza di divisioni note; per esempio: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{15}$; od $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{30}$ per cui è possibile anche la serie di: 15, 30, 60, 120... lati. Non è invece possibile, (col solo ausilio della squadra e del compasso), dividere la circonferenza in 7, 9, 11, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 23, ... parti uguali. Ciò equivale a dire che non disponiamo di formule capaci di fornirci *esattamente* i valori delle funzioni trigonometriche di tali angoli, (Che possono essere calcolati solo mediante le serie, in quanto sono *numeri trascendenti*).

In un poligono regolare, se uniamo il centro comune del cerchio inscritto e del cerchio circoscritto con i vertici del poligono, otteniamo tanti triangoli isosceli uguali quanti sono i lati del poligono, aventi per base il lato del poligono, per altezza il raggio del cerchio inscritto, e per lato obliquo il raggio del cerchio circoscritto; "l'altezza" di tali triangoli è chiamata: "apotema" da cui la regola generale per calcolare l'area di un poligono regolare: "L'area di un poligono regolare è data dal perimetro per metà dell'apotema"

Come abbiamo detto, l'apotema può essere calcolata in funzione del lato. Nella scuola primaria si insegna la regola: "L'apotema è data dal lato per il numero fisso."

Vediamo come si calcola il "misterioso" numero fisso; siano: l = lato; n = numero dei lati; $a = r$ = apotema = raggio del cerchio inscritto; R = raggio del cerchio circoscritto.



$$\boxed{l = 2R\,\mathrm{sen}(\pi/n)\ ;\ \Big|\ R = l/_2\,\mathrm{sen}(\pi/n)\ ;\ \Big|\ a = R\cos(\pi/n)\ ;}$$

$$\boxed{R = \frac{a}{\cos(\pi/n)}}\ ;\quad \boxed{a = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\frac{l}{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}}\ ;\quad \boxed{a = \left(\frac{\mathrm{cotg}(\pi/n)}{2}\right)l}$$

Quindi il numero fisso "N" = $\boxed{\frac{1}{2}\cot g\left(\frac{\pi}{n}\right)}$

Facciamo una tabella

n	poligono	numero fisso $a/l = N = \frac{1}{2}\cot g(\pi/n)$	angolo al centro
3	triangolo	0,288675135 $= (\sqrt{3}/6)$	120°
4	quadrato	0,500000000 $= (1/2)$	90°
5	pentagono	0,688190960 $= \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right)$	72°
6	esagono	0,866025404 $= (\sqrt{3}/2)$	60°
7	ettagono	1,038260699 = (trascendente)	51° 35' 42",8571
8	ottagono	1,207106781 $= \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$	45°
9	ennagono	1,373738710 = (trascendente)	40°
10	decagono	1,538841769 $= \left(\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)$	36°
11	undecagono	1,702843620 = (trascendente)	32° 43' 38",181828
12	dodecagono	1,866025404 $= (1+\sqrt{3}/2)$	30°

Se consideriamo i poligoni regolari inscritti e circoscritti ad una circonferenza di raggio unitario, avremo, a parità di n, che il perimetro del poligono circoscritto ed il perimetro del poligono inscritto si avvicinano (all'aumentare di n) alla lunghezza della circonferenza.

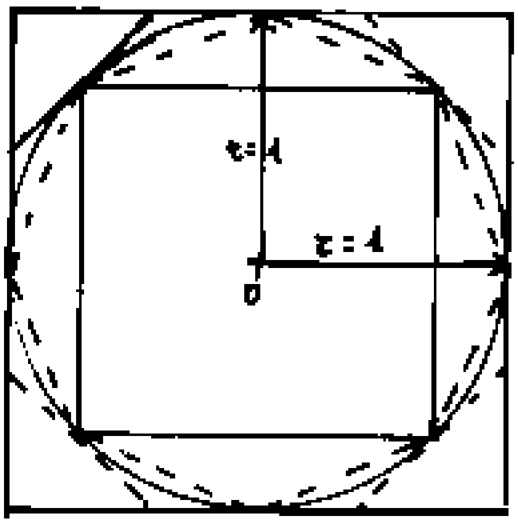
Con questo metodo gli antichi calcolavano il valore di π per eccesso e per difetto.

$$(n)\,\mathrm{sen}(\pi/m) < \pi < (n)\,\mathrm{tang}(\pi/n)$$

Usando la trigonometria è facile per noi scrivere la doppia disuguglianza che delimita π e se disponiamo di un calcolatore anche modesto possiamo dire: per $n = 100$

$3,141075902 \ldots < \pi < 3,142626598$; sono i semiperimetri dei poligoni di 100 lati circoscritti ed inscritti ad un cerchio di raggio unitario.

Assai più laborioso è partire dal quadrato inscritto e circoscritto ad un cerchio di raggio unitario calcolarne i semiperimetri e dire:



$$4 < \pi < 2\sqrt{2} = 2,83$$

Quindi dividere in due l'angolo al centro e calcolare (col teorema di Pitagora) il lato e quindi il semiperimetro dell'ottagono inscritto e circoscritto, e dire:

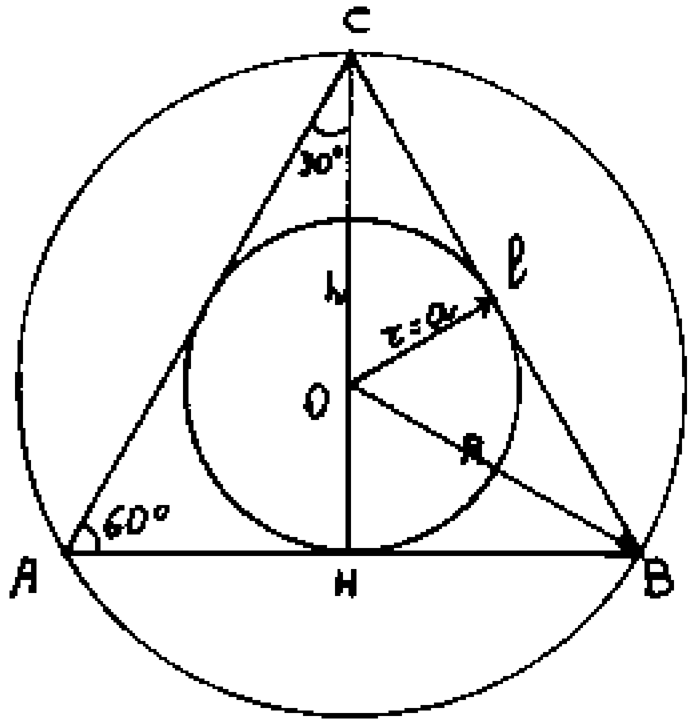
$$3,06147 < \pi < 3,31371$$

e per sedici lati: $3,12145 < \pi < 3,182598$ . . . e così via.

Per scopi pratici gli antichi approssimarono il valore di π a $\frac{22}{7} = 3,142887143$ (valore per eccesso di $+ 0,001264489$, il nostro 3,14 è approssimato per difetto $- 0,0015926535..$)

È formativo pensare mentalmente il crescere di n = numero dei lati e vedere il poligono inscritto e quello circoscritto avvicinarsi alla circonferenza. (Torneremo sul concetto di limite).

Triangolo equilatero



l = lato ; h = altezza;

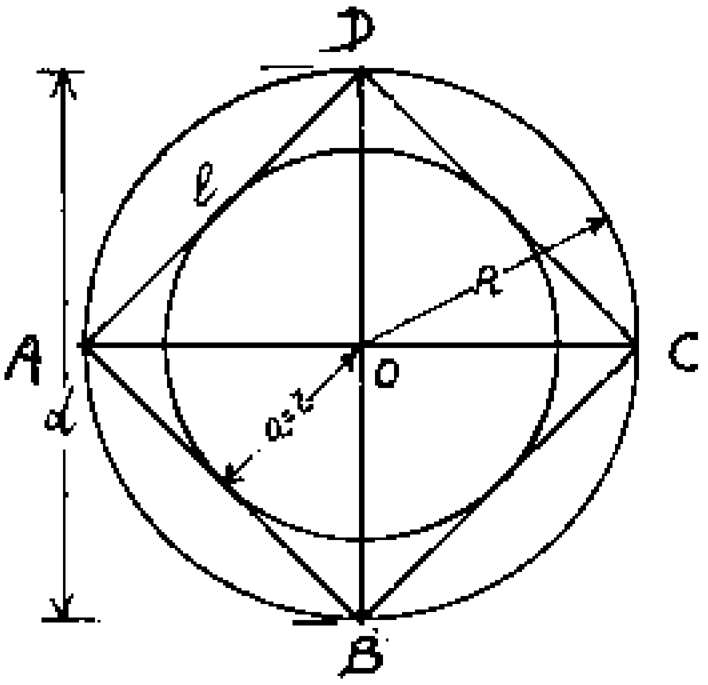
R = raggio del cerchio circoscritto

a = apotema = r = raggio del cerchio inscritto.

Tavola delle correlazioni:

noti / incogniti	l	h	$a=r$	R
l	l	$\frac{2}{3}h\sqrt{3} = 1{,}15470\, h$	$2a\sqrt{3} = 3{,}46410a$	$R\sqrt{3} = 1{,}73205 \cdot R$
h	$\frac{l}{2}\sqrt{3} = 0{,}86603 \cdot l$	h	$3a$	$\frac{3}{2}R = 1{,}5\,R$
$a=r$	$\frac{l}{6}\sqrt{3} = 0{,}28868 \cdot l$	$\frac{h}{3} = 0{,}33333 \cdot h$	$a=r$	$\frac{R}{2} = 0{,}5\,R$
R	$\frac{l}{3}\sqrt{3} = 0{,}57735\, l$	$\frac{2}{3}h = 0{,}6667\, h$	$2a$	R

Quadrato



l = lato ; d = diagonale

R = raggio del cerchio circoscritto

a = apotema = r = raggio del cerchio inscritto.

Tavola delle correlazioni

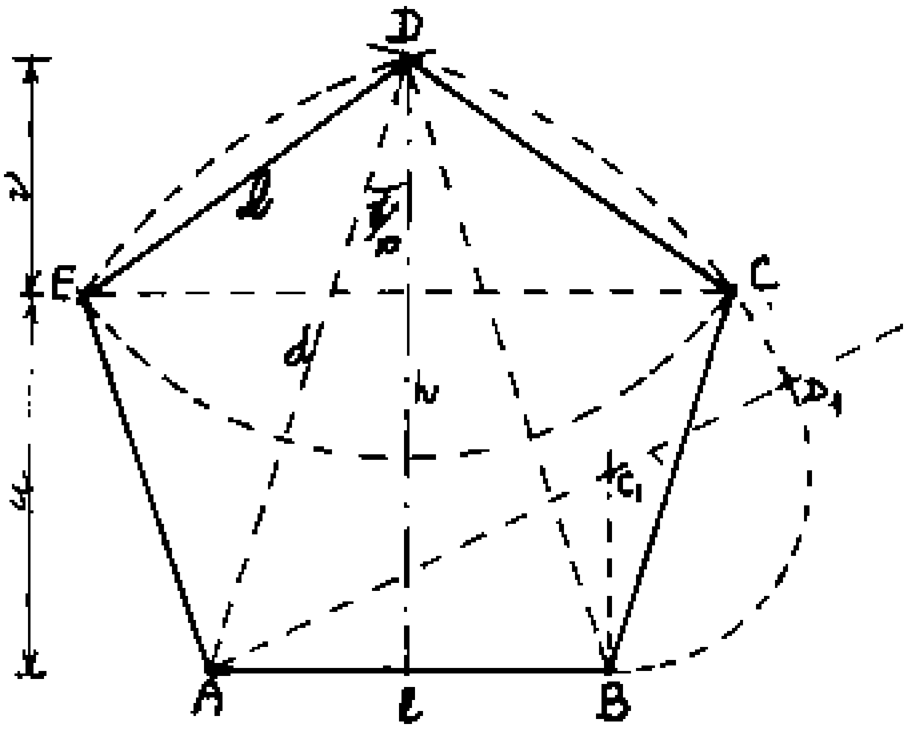
noti / incogniti	l	d	$a=r$	R
l	l	$\frac{d}{2}\sqrt{2} = 0{,}70711 \cdot d$	$2 \cdot a$	$R\sqrt{2} = 1{,}4142 \cdot R$
d	$l\sqrt{2} = 1{,}4142 \cdot l$	d	$2a\sqrt{2} = 2{,}82843 \cdot a$	$2R$
$a=r$	$l/2 = 0{,}5\, l$	$\frac{d}{4}\sqrt{2} = 0{,}35335\, d$	$a=r$	$\frac{R}{2}\sqrt{2} = 0{,}70711\, R$
R	$\frac{l}{2}\sqrt{2} = 0{,}70711\, l$	$d/2 = 0{,}5d$	$a\sqrt{2} = 1{,}4142 \cdot a$	R

Pentagono

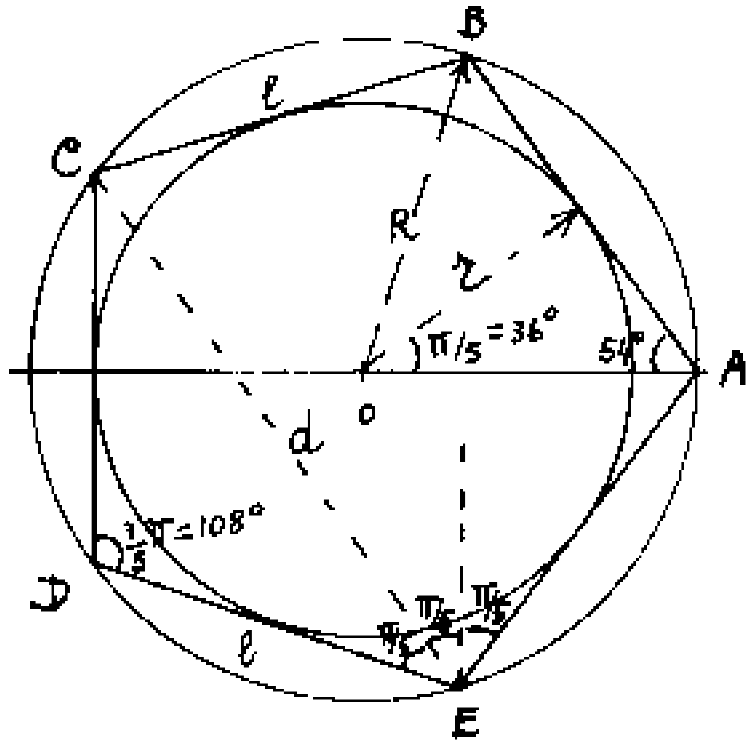
Costruzione grafica dato il lato

Mediante la sezione aurea, dato il raggio del cerchio circoscritto sappiamo costruire il decagono e quindi il pentagono regolare.

Dato invece il lato $\overline{AB}=l$, del pentagono, avvalendoci ancora della sezione aurea riportiamo dall'estremo B perpendicolarmente ad $\overline{AB}$ un segmento $\overline{BC_1} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{l}{2}$. Unito A con C_1 e prolungato di $\overline{C_1D_1} = \overline{BC_1}$ si trova D_1.



Il segmento $\overline{AD_1}$ è la diagonale del pentagono, per cui: $\overline{AD_1} = d = \frac{l}{2}(\sqrt{5}+1)$. Centro in A ed in B con raggio $\overline{AD_1}$ si trova D. Centro in; A, B, D e raggio = l, si trovano E e C. (Deve verificare E e D.)



l = lato ; d = diagonale ;

R = raggio del cerchio circoscritto

a = apotema = r = raggio del cerchio inscritto.

Facciamo la tavola delle correlazioni

Relazioni fra gli elementi del pentagono

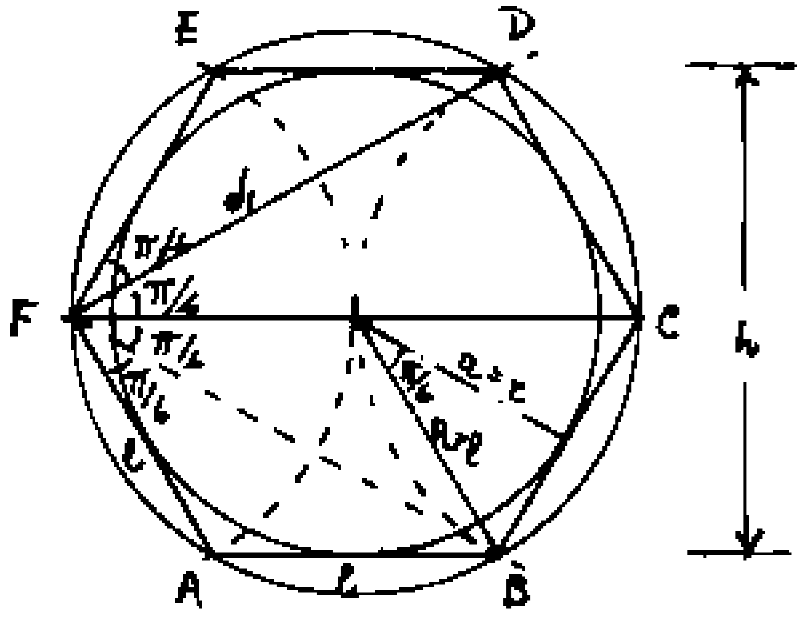
i ╲ n	l	R	$a = r$	d	h	v	u
l	l	$=R\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{2}}$ 1.175570525 · R	$=a\,2\sqrt{5-2\sqrt5}$ 1.453085057 · a	$=d\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)$ 0.618033989 · d	$=h\,2\sqrt{\frac{5-2\sqrt5}{5}}$ 0.649839392 · h	$=v\sqrt{\frac{10+2\sqrt5}{5}}$ 1.701301616 · v	$=u\sqrt{\frac{10-2\sqrt5}{5}}$ 1.051462224 · u
R	$=l\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}$ 0,850650808 · l	R	$=a\left(\sqrt5-1\right)$ 1,236067977 · a	$=d\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}$ 0.525731112 · d	$=h\left(1-\sqrt{\frac{1}{5}}\right)$ 0.552786405 · h	$=v\left(\frac{5+\sqrt5}{5}\right)$ 1.447213595 · v	$=u\left(\frac{2\sqrt5}{5}\right)$ 0.894427191 · u
$a=r$	$=\frac{l}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5}}$ 0,688190960 · l	$=R\left(\frac{\sqrt5+1}{4}\right)$ 0,809016994 · R	$a = r$	$=\frac{d}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}$ 0,425325404 · d	$=h\left(\frac{\sqrt5}{5}\right)$ 0,447213595 · h	$=v\left(\frac{3\sqrt5+5}{10}\right)$ 1,170820394 · v	$=u\left(\frac{5+\sqrt5}{10}\right)$ 0,723606797 · u
d	$=l\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)$ 1,618033989 · l	$=R\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}}$ 1.902113032 · R	$=a\sqrt{2(5-\sqrt5)}$ 2.351141009 · a	d	$=h\sqrt{\frac{10-2\sqrt5}{5}}$ 1.051462224 · h	$=v\,2\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5}}$ 2,752763840 · v	$=u\sqrt{\frac{10+2\sqrt5}{5}}$ 1.701301616 · u
h	$=\frac{l}{2}\sqrt{5+2\sqrt5}$ 1.538841769 · l	$=R\left(\frac{5+\sqrt5}{4}\right)$ 1.809016994 · R	$= a\sqrt5$ 2.236067977 · a	$=\frac{d}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}}$ 0.951056517 · d	h	$=v\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)$ 2.618033989 · v	$=u\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)$ 1.618033989 · u
v	$=\frac{l}{2}\cdot\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{2}}$ 0.587785253 · l	$=R\left(\frac{5-\sqrt5}{4}\right)$ 0.690983006 R	$=a\left(\frac{3\sqrt5-5}{2}\right)$ 0.854101966 · a	$=\frac{d}{2}\sqrt{5-2\sqrt5}$ 0.363271264 · d	$=h\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)$ 0,381966012 · h	v	$=u\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)$ 0,618033989 · u
u	$=\frac{l}{4}\sqrt{10+2\sqrt5}$ 0.951056516 · l	$= R\,\frac{\sqrt5}{2}$ 1.118033989 · R	$=a\left(\frac{5-\sqrt5}{2}\right)$ 1.381966011 · a	$=\frac{d}{4}\sqrt{10-2\sqrt5}$ 0.587785252 · d	$=h\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)$ 0,618033989 · h	$= v\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)$ 1.618033989 · V	u

Tavola delle funzioni trigonometriche (pentagono)

giri	$\alpha°$	α rad.	sen (α)	cos (α)	tang(α)	cotg (α)
$\frac{1}{40}$	9°	$\pi/20$ 0,157079633	$\sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}}{2}}$ 0,156434465	$\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}}{2}}$ 0.987688341	$\left(\sqrt{5}+1-\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)$ 0,158384440	$\left(\sqrt{5}+1+\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)$ 6,313751516
$\frac{1}{20}$	18°	$\pi/10$ 0,314159265	$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$ 0.309016994	$\left(\frac{l}{d}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ 0.951056517	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$ 0.324919696	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ 3.077683537
$\frac{1}{10}$	36°	$\pi/5$ 0,628318531	$\left(\frac{l}{2R}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ 0.587785253	$\left(\frac{a}{R}\right)=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$ 0.8090169943	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ 0.726542528	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ 1.376381920
$\frac{1}{5}$	72°	$2\pi/5$ 1,256637062	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ 0.951056517	$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$ 0.3090169943	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ 3.077683537	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$ 0.324919696
$\frac{3}{40}$	27°	$3\pi/20$ 0,471238898	$\sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}{2}}$ 0.453990500	$\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}{2}}$ 0.891006524	$\left(\sqrt{5}-1-\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)$ 0.5095254495	$\left(\sqrt{5}-1+\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)$ 1,962610505
$\frac{3}{20}$	54°	$3\pi/10$ 0;942477796	$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$ 0.8090169943	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ 0.587785253	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ 1,376381920	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ 0,726542528
$\frac{7}{40}$	63°	$7\pi/10$ 1,099557424	$\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}{2}}$ 0,891006524	$\sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}{2}}$ 0,453990500	$\left(\sqrt{5}-1+\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)$ 1,962610505	$\left(\sqrt{5}-1-\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)$ 0,5095254495
$\frac{9}{40}$	81°	$9\pi/20$ 1.413716694	$\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}}{2}}$ 0,987688341	$\sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}}{2}}$ 0,156434465	$\left(\sqrt{5}+1+\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)$ 6,313751516	$\left(\sqrt{5}+1-\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)$ 0,158384440

Esagono

L'esagono è una figura geometrica fondamentale.



Il lato = l = R = raggio del cerchio circoscritto; perciò la costruzione grafica dell'esagono è semplicissima: fatto un cerchio di raggio $l = R$, con lo stesso raggio si fa centro agli estremi di un diametro (come F, C) e per intersezione si trovano i restanti 4 punti (A, B, D, E). I sei punti A, B, C, D, E, F, sono i vertici dell'esagono. L'angolo al centro è $2\pi/6$ cioè $\frac{1}{6}$ di angolo giro; e poiché è facile dividere gli angoli a metà si può ottenere: $\frac{1}{12}$ e poi $\frac{1}{24}$ di giro (che sono rispettivamente i mesi dell'anno e le ore del giorno già prefissate dai Caldei col loro sistema sessagesimale.)

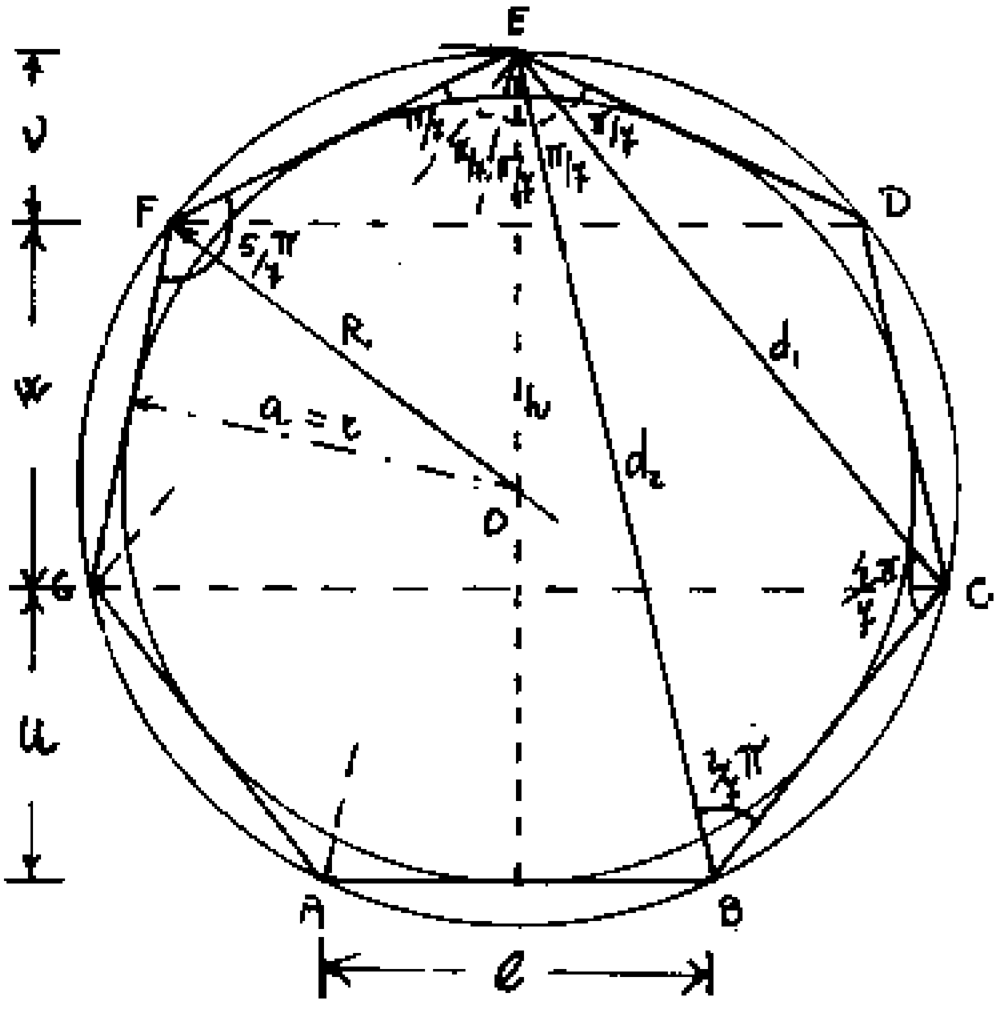
Detto: a = apotema = r = raggio del cerchio inscritto;

h = altezza = d_1 = diagonale minore; d_2 = diagonale maggiore; Si hanno le seguenti relazioni.

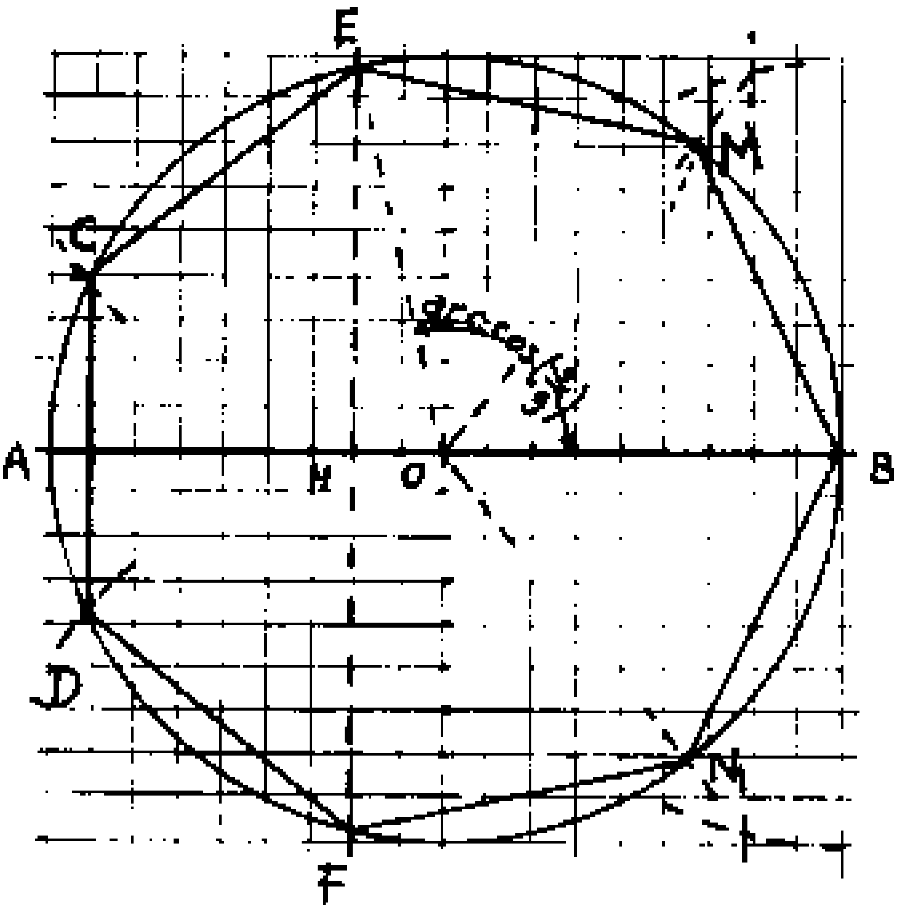
$x \backslash n$	$l = R$	$a = r$	$h = d_1$	d_2
$l = R$	$= (l - R)$	$= a(2/3\sqrt{3})$ $1.54700539 \cdot a$	$= h(\sqrt{3}/3)$ $0.577350269 \cdot h$	$= d_2(1/2)$ $0.50000000 \, d_2$
$a = r$	$= l/2\sqrt{3}$ $0.8660254 \cdot l$	$= (a = r)$	$= (h/2)$ $0.500000 \cdot h$	$= d_2/4\sqrt{3}$ $0.433012702 \, d_2$
$h = d_1$	$= l\sqrt{3}$ $1.7320508 \cdot l$	$= 2a$ $2.00000 \cdot a$	$= (h = d_1)$	$= d_2/2\sqrt{3}$ $0.866025404 \cdot d_2$
d_2	$= 2 \cdot l$ $2.000000 \cdot l$	$a(4/3\sqrt{3})$ $2.309401078 \cdot a$	$= h(2/3\sqrt{3})$ $1.154700539 \cdot h$	$= (d_2)$

Ettagono

L'ettagono è un poligono regolare che non si può disegnare col solo ausilio della riga e del compasso. Vi sono molte costruzioni approssimate che si avvalgono di funzioni trigonometriche note, od altri elementi noti. Per esempio sapendo che il coseno di $\pi/7$ è: $\cos(\pi/7) = 0,900968868\ldots$ arrotondando il valore a: "0,9", (cioè con un errore di quasi un millesimo) "$u \cdot 0,9 = \frac{9}{10} u$", si possono fare due cerchi concentrici, uno di raggio = 9 ed uno di raggio = 10 che saranno rispettivamente il cerchio inscritto ed il cerchio circoscritto all'ettagono di lato $l = u \cdot 2 \operatorname{sen}(\pi/7) = u \cdot 0,867767478 \simeq 0,868 \cdot u$, ed avendo scelto $u = 10$ il lato sarà 8,68 delle nostre unità grafiche. Si noti che un triangolo che abbia gli angoli uno doppio dell'altro, dovendo essere π la somma degli angoli interni avremo: $\alpha + 2\alpha + 4\alpha = \pi$ da cui: $\alpha = \pi/7$. Il triangolo è come BCE, ma la sua costruzione grafica presenta le stesse difficoltà della trisezione dell'angolo.



Un metodo per costruire l'ettagono con buona approssimazione, ed assai pratico su carta quadrettata, consiste nel tracciare un cerchio di 9 caselli di raggio, sia $\overline{AB}$ il diametro orizzontale, ed "O" il centro. scostata di due caselli da O si traccia perpendicolarmente ad $\overline{AB}$ la corda: $\overline{EF}$; si tracciano le bisettrici degli angoli $E\hat{O}B$ ed $F\hat{O}B$, che incontrano il cerchio in M ed N. Avremo necessariamente: $\overline{EM} = \overline{MB} = \overline{BN} = \overline{NF} = \ell$. Con raggio $\overline{EM}$ e centro in E ed F si determinano i punti "C" e "D" quindi si verifica che anche $\overline{CD} \cong \ell$ nei limiti di tolleranza grafica.



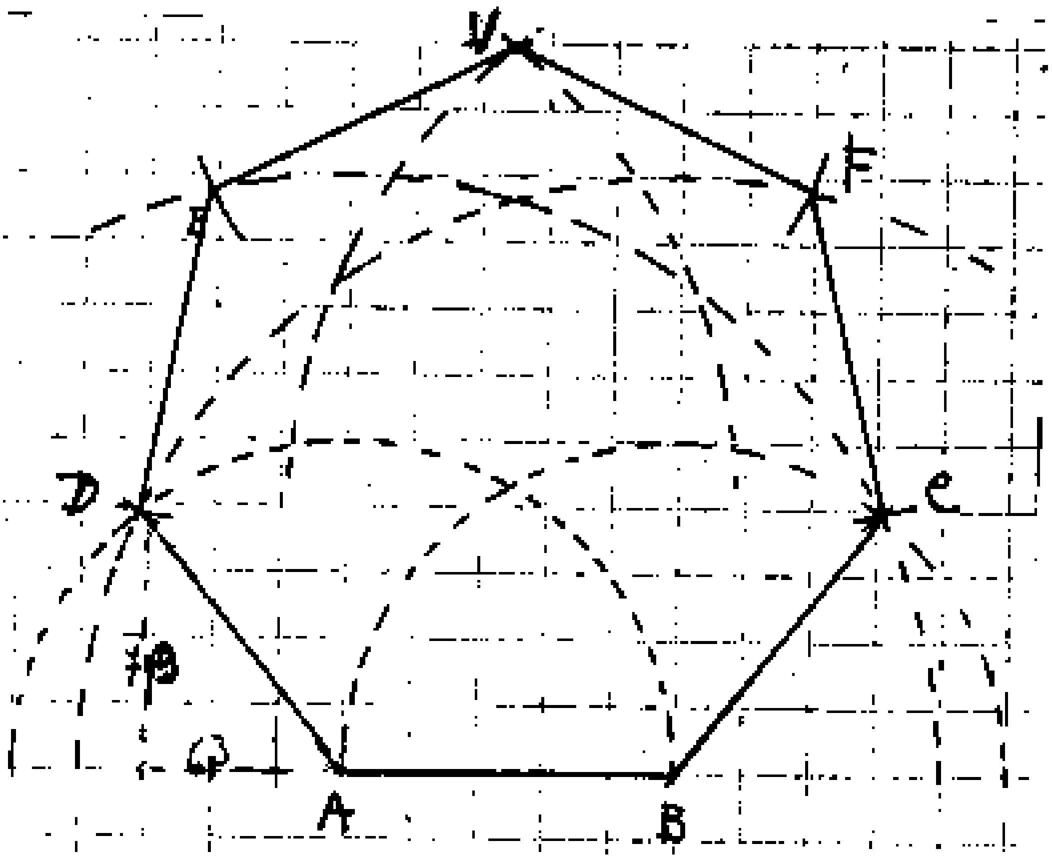
Calcoliamo l'errore:

$\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{2}{9}\right) = 51°,41979417 5$; $\frac{360°}{7} = 51°,42857143$ differenza in difetto: 0°,00877723 = 0° 00' 32" di errore angolare (graficamente irrilevante). $\overline{BM} = \overline{ME} = \overline{EC} = \overline{BN} = \overline{NF} = \overline{FD} = \ell = 2R\cdot\text{sen}\,\text{arc}\cos\left(-\frac{2}{9}\right)$, cioè $\ell = 2R\,\text{sen}(25°,7098971) = 0,8676294549\,R$

$\overline{DC} = 2R\left(\text{sen}\frac{3}{2}\text{arccos}\left(-\frac{2}{9}\right)\right) = 0,8685955111\cdot R$ differenza $\ell - \overline{DC} = -0,0009660562\cdot R$ = cioè: 8,69 millesimi di casello $DC > \ell$.

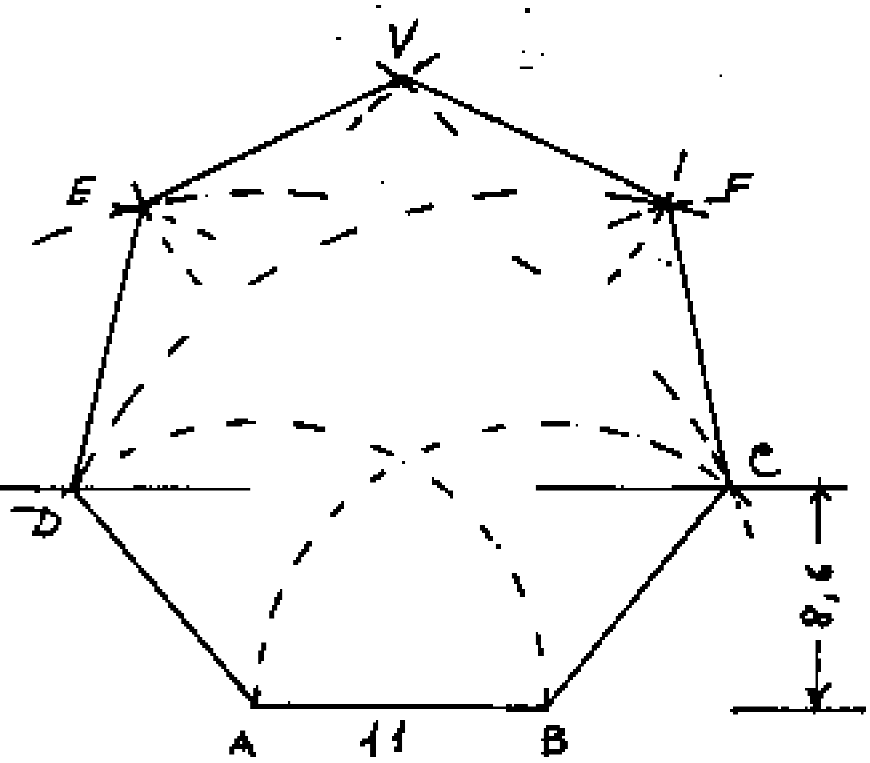
(anche questo irrilevante graficamente, per caselli di 5mm errore 4,3/100 mm.)

Se, invece del raggio, conosciamo il lato dell'ettagono, possiamo fare la seguente costruzione



(Per esempio utilizzando la carta quadrettata). Sia $\overline{AB}$ il lato di 5 caselli, con raggio di 5 caselli si tracciano, con centro in A e B, gli archi $\overset{\frown}{BD}$ ed $\overset{\frown}{AC}$. Quindi ancora con centri in A e B, ma, con raggio di 9 caselli, si tracciano gli archi $\overset{\frown}{CE}$ e $\overset{\frown}{DF}$, determinando così per intersezione i punti "C" e "D". Con lo stesso raggio di 9 caselli con centro in C e D si tracciano gli archetti che determinano V. Preso ora il raggio di 5 caselli con centro in V si determinano per intersezione i punti E ed F. Per verifica, sempre con raggio di 5 caselli, si fa centro in E ed F e gli archetti dovranno passare per D e per C (nei limiti di errore grafico accettabile) Verifichiamo l'approssimazione di questa costruzione: $\arccos(4{,}5/5) = 25°\ 50'\ 31''$ $\left(\frac{360°}{14} = 25°\ 42'\ 51\right)$ errore 7' e 40" sull'angolo: $C\hat{A}B = A\hat{B}D$; $A\hat{B}C = B\hat{A}D = 128°\ 18'\ 58''$; $\left(\frac{5}{7}180° = 128°\ 34'\ 17''\right)$ errore : 15' 29". (circa 1/100 di casello per la posizione dei vertici) $\left[\text{Arctg}\left(\frac{79}{63}\right) - \left(\frac{360°}{7}\right)\right] = \left(\underset{\text{errore}}{0°\ 0'\ 0'',6347529305268305''}\right)$

Un metodo molto più preciso del precedente si ottiene prendendo il rapporto: V/l arrotondato ad 8,6/11 (o valori proporzionali) in effetti anziché 8,6 il valore sarebbe: 8,600146307148328..... L'errore non arriva a 15 centimillesimi di unità, cioè con un lato dell'ettagono di 11 cm, l'errore sarebbe minore di $1,5\mu = \frac{1,5}{1000}$ mm. Se il disegno è con pennino da 0,1 mm, l'errore è poco più di $\frac{1}{100}$ dello spessore della linea.



Tracciata la base $\overline{AB}$ e la parallela $\overline{DC}$ distante $\frac{8,6}{11}\overline{AB}$, abbiamo gli elementi per costruire l'ettagono. Centro in A e B con raggio $\overline{AB}$ si determinano C e D e quindi le diagonali $\overline{AC} = \overline{BD} = \overline{AE} = \overline{BF} = \overline{VC} = \overline{DV}$.

$\overline{EF}$ parallela ad $\overline{AB}$ dista da $\overline{AB}$ i $\frac{65}{37}$ di $\overline{AB}$ con approssimazione maggiore della presente costruzione, infatti con questa costruzione la distanza è 19,32416198.., mentre la vera distanza con lato = 11 è 19,32435333..., infine se prendiamo i $\frac{6,5}{3,7}11$ = si ha: 19,32432432.

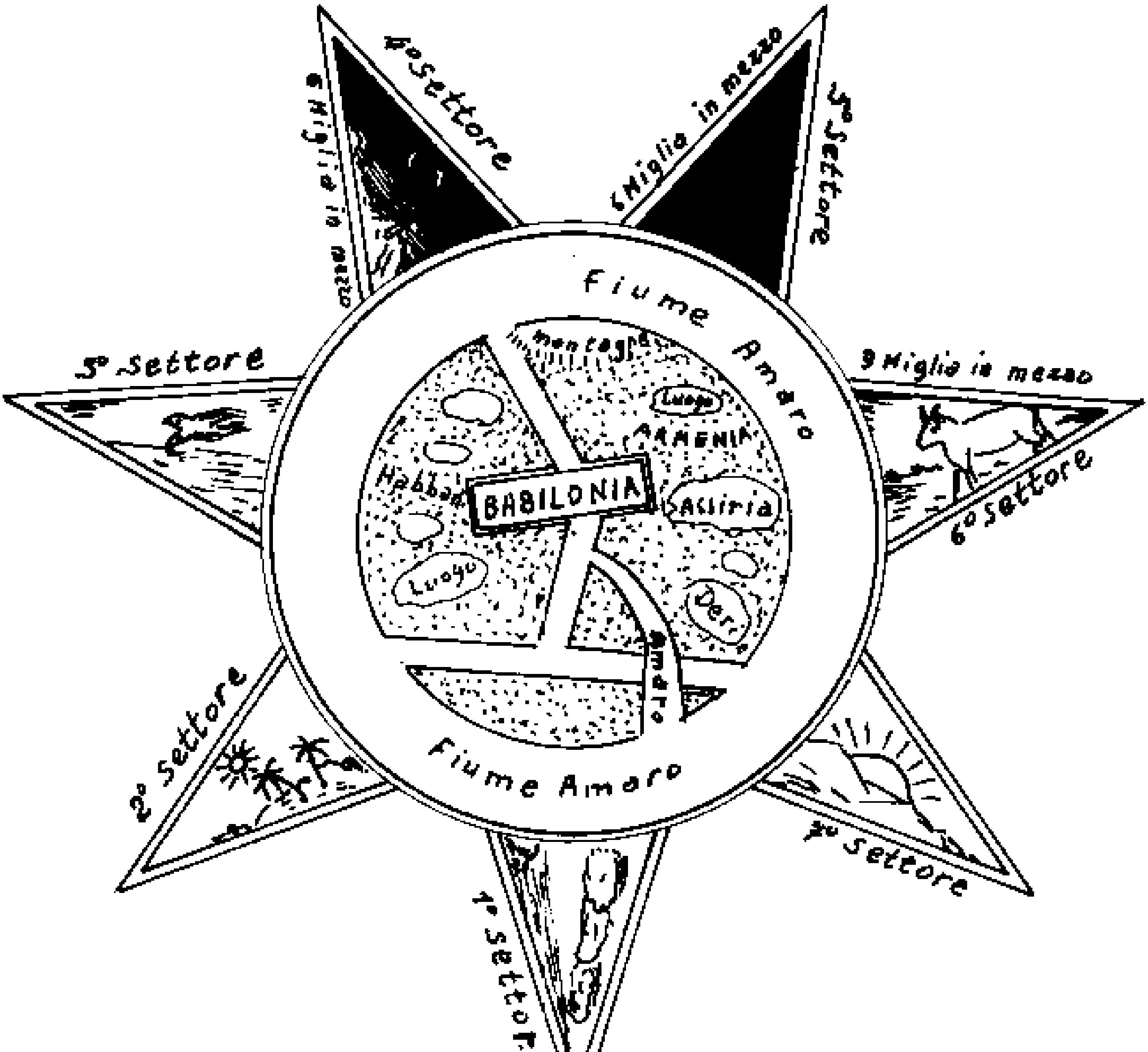
Però il rapporto: 65/37 non si presta ad una comoda costruzione dell'ettagono: (lato $\overline{AB}$ = 37; distanza da $\overline{EF}$ = 65)

Costruzioni più precise si hanno utilizzando la tabella.

Relazioni fra gli elementi dell' ettagono

	l	R	$a = r$	h	d_1	d_2	v	w	u
l	$= l$	$= R\left(2\operatorname{sen}(\pi/7)\right)$ $0.867767478 \cdot R$	$= a\left(2\operatorname{tg}(\pi/7)\right)$ $0.963149238 \cdot a$	$= h\left(2\operatorname{tg}(\pi/14)\right)$ $0.456486949 \cdot h$	$= d_1\left(\frac{1}{2\cos(\pi/7)}\right)$ $0.554958132 \cdot d_1$	$= d_2\left(2\operatorname{sen}(\pi/14)\right)$ $0.445041868 \cdot d_2$	$= v\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/7)}\right)$ $2.304764871 \cdot v$	$= w\left(\frac{1}{\cos(\pi/14)}\right)$ $1.025716863 \cdot w$	$= u\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\frac{2}{7}\pi)}\right)$ $1.279048008 \cdot u$
R	$= l\left(\frac{1}{2\operatorname{sen}(\pi/7)}\right)$ $1.152382435 \cdot l$	$= R$	$= a\left(\frac{1}{\cos(\pi/7)}\right)$ $1.109916264 \cdot a$	$= h\left(\frac{1}{1+\cos(\pi/7)}\right)$ $0.526047592 \cdot h$	$= d_1\left(\frac{1}{2\operatorname{sen}(\frac{2}{7}\pi)}\right)$ $0.639524004 \cdot d_1$	$= d_2\left(\frac{1}{2\cos(\pi/14)}\right)$ $0.512858432 \cdot d_2$	$= v\left(\frac{1}{2\operatorname{sen}^2(\pi/7)}\right)$ $2.655970555 \cdot v$	$= w\left(\frac{1}{2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{7})\cos\frac{\pi}{14}}\right)$ $1.182018093 \cdot w$	$= u\left(\frac{1}{2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{7})\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{7})}\right)$ $1.473952688 \cdot u$
$a = r$	$= l\left(\frac{\cot(\pi/7)}{2}\right)$ $1.038260698 \cdot l$	$= R\left(\cos(\pi/7)\right)$ $0.900968868 \cdot R$	$= a - r$	$= h\left(\frac{\cos(\pi/7)}{1+\cos(\pi/7)}\right)$ $0.473952457 \cdot h$	$= d_1\left(\frac{1}{4\operatorname{sen}(\pi/7)}\right)$ $0.576191218 \cdot d_1$	$= d_2\left(\frac{\cos(\pi/7)}{2\cos(\pi/14)}\right)$ $0.462069481 \cdot d_2$	$= v\left(\frac{1}{2\operatorname{sen}(\pi/7)\operatorname{tg}(\pi/7)}\right)$ $2.392946874 \cdot v$	$= w\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}(\pi/7)\cos(\frac{\pi}{14})}\right)$ $1.064961507 \cdot w$	$= u\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}(\pi/7)\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{7})}\right)$ $1.327987238 \cdot u$
h	$= l\left(\frac{\operatorname{cotg}(\pi/14)}{2}\right)$ $2.190643133 \cdot l$	$= R\left(1+\cos(\frac{\pi}{7})\right)$ $1.900968868 \cdot R$	$= a\left(1+\frac{1}{\cos(\pi/7)}\right)$ $2.109916264 \cdot a$	$= h$	$= d_1\left(\frac{1}{4\cos(\frac{\pi}{7})\operatorname{tg}(\frac{\pi}{14})}\right)$ $1.215715322 \cdot d_1$	$= d_2\left(\cos(\frac{\pi}{14})\right)$ $0.974927912 \cdot d_2$	$= v\left(\frac{1}{2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{7})\operatorname{tg}(\frac{\pi}{14})}\right)$ $5.048917339 \cdot v$	$= w\left(\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{14}}\right)$ $2.246979604 \cdot w$	$= u\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}(\frac{\pi}{14})\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{7})}\right)$ $2.801937737 \cdot u$
d_1	$= l\left(2\cos(\frac{\pi}{7})\right)$ $1.801937736 \cdot l$	$= R\left(2\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{7})\right)$ $1.563662965 \cdot R$	$= a\left(4\operatorname{sen}(\frac{\pi}{7})\right)$ $1.735534957 \cdot a$	$= h\left(4\cos(\frac{\pi}{7})\operatorname{tg}(\frac{\pi}{14})\right)$ $0.822561059 \cdot h$	$= d_1$	$= d_2\left(\frac{1}{2\cos(\frac{2\pi}{7})}\right)$ $0.801937736 \cdot d_2$	$= v\left(2\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{7})\right)$ $4.153042793 \cdot v$	$= w\left(\frac{2\cos(\pi/7)}{\cos(\pi/14)}\right)$ $1.848277922 \cdot w$	$= u\left(\frac{2\cos(\pi/7)}{\operatorname{sen}(\frac{2}{7}\pi)}\right)$ $2.304764872 \cdot u$
d_2	$= l\left(\frac{1}{2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{14})}\right)$ $2.246979604 \cdot l$	$= R\left(2\cos(\frac{\pi}{14})\right)$ $1.949855824 \cdot R$	$= a\left(\frac{2\cos(\frac{\pi}{14})}{\cos(\pi/7)}\right)$ $2.164176692 \cdot a$	$= h\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{14})}\right)$ $1.025716863 \cdot h$	$= d_1\left(2\cos(\frac{2\pi}{7})\right)$ $1.246979604 \cdot d_1$	$= d_2$	$= v\left(\frac{1}{2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{7})\operatorname{sen}(\frac{\pi}{14})}\right)$ $5.178759457 \cdot v$	$= w\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/7)}\right)$ $2.304764871 \cdot w$	$= u\left(\frac{1}{2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{14})\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{7})}\right)$ $2.873994787 \cdot u$
v	$= l\left(\operatorname{sen}(\frac{\pi}{7})\right)$ 0.433883739	$= R\left(2\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{7})\right)$ $0.376510198 \cdot R$	$= a\left(2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{7})\operatorname{tg}(\frac{\pi}{7})\right)$ $0.417894783 \cdot a$	$= h\left(2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{7})\operatorname{tg}(\frac{\pi}{14})\right)$ $0.198062264 \; h$	$= d_1\left(\frac{\operatorname{tg}(\pi/7)}{2}\right)$ $0.240787309 \cdot d_1$	$= d_2\left(2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{7})\operatorname{sen}(\frac{\pi}{14})\right)$ $0.193096430 \cdot d_2$	$= v$	$= w\left(\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{7})}{\cos(\frac{\pi}{14})}\right)$ $0.445041868 \cdot w$	$= u\left(\frac{1}{2\cos(\pi/7)}\right)$ $0.554958132 \cdot u$
w	$= l\left(\cos(\frac{\pi}{14})\right)$ $0.974927912 \cdot l$	$= R\left(2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{7})\cos(\frac{\pi}{14})\right)$ $0.846010736 \cdot R$	$= a\left(2\operatorname{tg}(\frac{\pi}{7})\cos(\frac{\pi}{14})\right)$ $0.939001075 \cdot a$	$= h\left(2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{14})\right)$ $0.445041868 \cdot h$	$= d_1\left(\frac{\cos(\pi/14)}{2\cos(\pi/7)}\right)$ $0.541044173 \cdot d_1$	$= d_2\left(\operatorname{sen}(\pi/7)\right)$ $0.433883739 \, d_2$	$= v\left(\frac{\cos(\pi/14)}{\operatorname{sen}(\pi/7)}\right)$ $2.246979603 \cdot v$	$= w$	$= u\left(\frac{\cos(\pi/14)}{\operatorname{sen}(2\pi/7)}\right)$ $1.246979604 \cdot u$
u	$= l\left(\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{7})\right)$ $0.781831482 \cdot l$	$= R\left(2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{7})\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{7})\right)$ $0.678447934 \cdot R$	$= a\left(2\operatorname{tg}(\frac{\pi}{7})\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{7})\right)$ $0.753020396 \cdot a$	$= h\left(2\operatorname{tg}(\frac{\pi}{14})\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{7})\right)$ $0.356895868 \cdot h$	$= d_1\left(\frac{\operatorname{sen}(2\pi/7)}{2\cos(\pi/7)}\right)$ $0.433883739 \cdot d_1$	$= d_2\left(2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{14})\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{7})\right)$ $0.347948743 \cdot d_2$	$= v\left(2\cos(\pi/7)\right)$ $1.801937736 \cdot v$	$= w\left(\frac{\operatorname{sen}(2\pi/7)}{\cos(\pi/14)}\right)$ $0.801937736 \cdot w$	$= u$

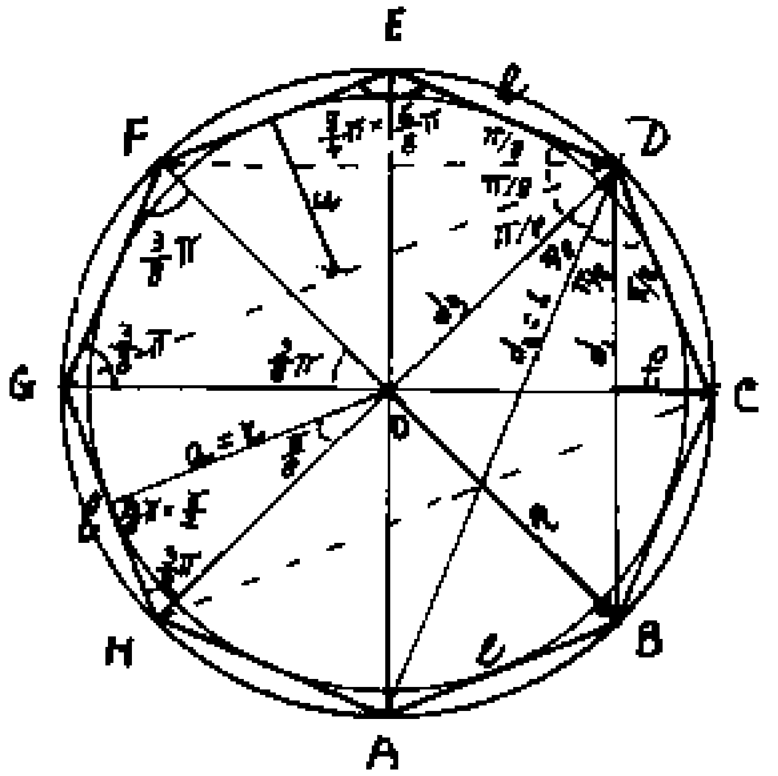
E' interessante ricordare che nella prima metà, o primi anni del I° Millennio a.C. gli astronomi Babilonesi avevano rappresentato il cosmo con una stella ettagonale su una tavoletta di argilla, oggi conservata nel British Museum di Londra. Di tale tavoletta ne è stata fatta la ricostruzione, di cui noi schematizziamo un bozzetto a vista:



Le punte sembrano rappresentare la giornata dalle prime luci dell'alba, al sorgere del sole, al mattino, il meriggio, la sera, l'ini= della notte, e la notte fonda.

Ottagono

Anche l'ottagono è un poligono di notevole interesse scientifico; di facile costruzione grafica (bisecando gli angoli retti al centro di un cerchio) e di facile calcolo. (Il prisma di Wollaston è $\frac{1}{4}$ di ottagono).



l = lato ; a = apotema = r = raggio del cerchio inscritto ; h = altezza = d_2 = seconda diagonale ; d_1 = prima diagonale o diagonale minore ; d_3 = diagonale maggiore = diametro del cerchio circoscritto ; R = raggio del cerchio circoscritto; f_1 = freccia = distanza di un vertice da d_1 ; u = distanza di un lato da d_2.

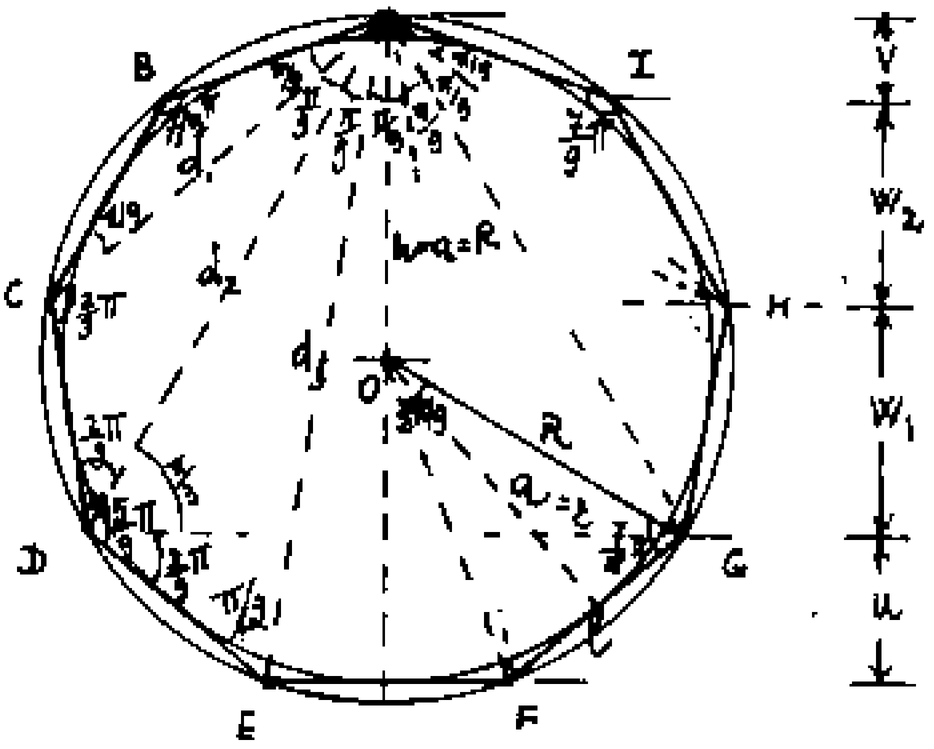
Poiché : $h = 2a = d_2$; $d_3 = 2R$; possiamo ridurre le:

Relazioni fra gli elementi dell'ottagono

incogniti \ noti	l	$R = d_3/2$	$a = r = \frac{h}{2} = \frac{d_2}{2}$	d_1	u	f_1
l	l	$= R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ $0{,}765366865 \cdot R$	$= a(2(\sqrt{2}-1))$ $0{,}828427124 \cdot a$	$= d_1\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$ $0{,}541196100 \cdot d_1$	$= u(\sqrt{2})$ $1{,}4142135 \cdot u$	$= f_1\sqrt{2(2+\sqrt{2}}$ $4{,}613125929 \cdot f_1$
$R = d_3/2$	$= l\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$ $1{,}306562965 \cdot l$	R	$= a\sqrt{2(2-\sqrt{2})}$ $1{,}0823922 \cdot a$	$= d_1(1/\sqrt{2})$ $0{,}707106781 \cdot d_1$	$= u\sqrt{2+\sqrt{2}}$ $1{,}847759065$	$= f_1(2+\sqrt{2})$ $3{,}414213545$
$a = r = \frac{h}{2} = \frac{d_2}{2}$	$= l\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ $1{,}20710678 \cdot l$	$= R \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ $0{,}92387953 \cdot R$	a	$= d_1\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{8}}$ $0{,}653281482 \cdot d_1$	$= u(1+1/\sqrt{2})$ $1{,}70710678 \cdot u$	$= f_1\sqrt{\frac{10+7\sqrt{2}}{2}}$ $3{,}154321989 \cdot f_1$
d_1	$= l\sqrt{2+\sqrt{2}}$ $1{,}847759065 \cdot l$	$= R(\sqrt{2})$ $1{,}4142135 \cdot R$	$= a(2\sqrt{2-\sqrt{2}})$ $1{,}53073373 \cdot a$	d_1	$= u\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$ $2{,}61312593 \cdot u$	$= f_1(2)(\sqrt{2}+1)$ $4{,}828427124 \cdot f_1$
u	$= l(1/\sqrt{2})$ $0{,}70710678 \cdot l$	$= R\sqrt{1-1/\sqrt{2}}$ $0{,}5411961 \cdot R$	$= a(2-\sqrt{2})$ $0{,}585786438 \cdot a$	$d_1(\frac{1}{2}$ $0{,}3826834 \cdot d_1$	u	$= f_1\sqrt{2+\sqrt{2}}$ $1{,}847759065\, f_1$
f_1	$= l(\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}})$ $0{,}382683433 \cdot l$	$= R(1-1/\sqrt{2})$ $0{,}2928932 \cdot R$	$= a\sqrt{10-7\sqrt{2}}$ $0{,}31702534 \cdot a$	$= d_1\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$ $0{,}20710678 \cdot d_1$	$= u\sqrt{1-1/\sqrt{2}}$ $0{,}5411961 \cdot u$	f_1

Ennagono

Il problema dell'ennagono si riallaccia direttamente al problema della "trisezione dell'angolo" problema famoso fin dall'antichità e a tutt'oggi non risolto. Sappiamo dividere in tre parti l'angolo giro, l'angolo piatto e l'angolo retto, non sappiamo dividere in tre parti $120° = \frac{\pi}{3}$ infatti: $\frac{360°}{9} = \frac{120°}{3} = 40° = 2\pi/9$ rad; cioè non sappiamo costruire graficamente l'angolo $\alpha/3$ quando e noto α, usando solo la riga ed il compasso. Per la trisezione di un angolo generico possiamo avvalerci dei goniometri, della trigonometria, di curve speciali dette trisettrici. Nel caso dell'ennagono cercheremo, per quanto possibile, trovare delle correlazioni fra gli elementi, ma fondamentalmente useremo la trigonometria. (Il disegno è stato eseguito usando un goniometro-rapportatore) Si noti che tre diagonali d_2 consecutive formano un triangolo equilatero (come ADG) e pertanto tutti gli angoli alla circonferenza di corda d_2 saranno $\pi/3 = 60° = \frac{3}{9}\pi$ da banda opposta $\frac{2}{3}\pi = 120° = \frac{6}{9}\pi$. Quindi avremo: $d_2 = R\sqrt{3}$.



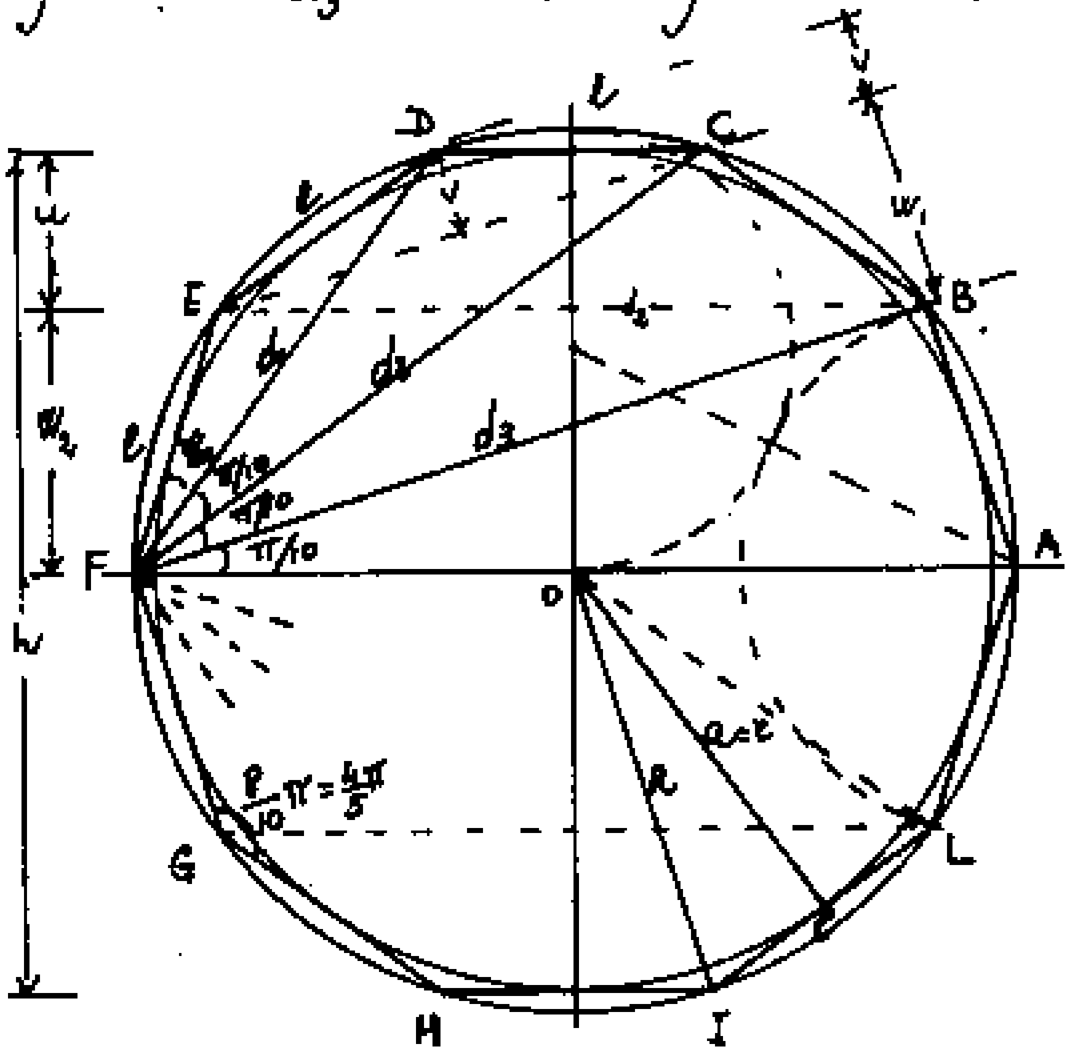
Relazioni fra gli elementi dell'ennagono

$i \backslash n$	l	R	$a = r$	h	d_1	d_2	d_3	u	w_1	w_2	v
$l =$	l	$2\,\mathrm{sen}(\pi/9)$ 0.684040287	$2\,\mathrm{tg}(\pi/9)$ 0,727940468	$2\,\mathrm{tg}(\pi/18)$ 0.352653961	$1/2\cos(\pi/9)$ 0,532088886	$2\,\mathrm{sen}(\pi/9)/\sqrt{3}$ 0,394930844	$2\,\mathrm{sen}(\pi/18)$ 0,347296355	$1/\mathrm{sen}(2\pi/9)$ 1,555723827	$1/\cos(\pi/18)$ 1,015426612	$2/\sqrt{3}$ 1,154700538	$1/\mathrm{sen}(\pi/9)$ 2,923804400
$R =$	$1/2\,\mathrm{sen}(\pi/9)$ 1,461902200	R	$1/\cos(\pi/9)$ 1.064177772	$1/2\cos^2(\pi/18)$ 0.515545602	$1/2\,\mathrm{sen}(2\pi/9)$ 0,777861914	$1/\sqrt{3}$ 0,577350269	$1/2\cos(\pi/18)$ 0,507713206	$1/2\,\mathrm{sen}(\pi/9)\,\mathrm{sen}(2\pi/9)$ 2,274316085	$1/2\,\mathrm{sen}(\pi/9)\cos(\pi/18)$ 1,484454498	$1/\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\pi/9)$ 1,688059237	$1/2\,\mathrm{sen}^2(\pi/9)$ 4,274316083
$a = r =$	$1/2\,\mathrm{tg}(\pi/9)$ 1,373738710	$\cos(\pi/9)$ 0,939692621	a	$\cos(\pi/9)/2\cos^2(\pi/18)$ 0,484454398	$1/4\,\mathrm{sen}(\pi/9)$ 0,730951100	$\cos(\pi/9)/\sqrt{3}$ 0,542531787	$\cos(\pi/9)/2\cos(\pi/18)$ 0,477094447	$1/4\,\mathrm{sen}^2(\pi/9)$ 2,137158042	$1/2\,\mathrm{tg}(\pi/9)\cos(\pi/18)$ 1,394930844	$1/\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(\pi/9)$ 1,586256828	$\cos(\pi/9)/2\,\mathrm{sen}^2(\pi/9)$ 4,016543287
$h =$	$1/2\,\mathrm{tg}(\pi/18)$ 2,835640912	$2\cos^2(\pi/18)$ 1,939692621	$2\cos^2(\pi/18)/\cos(\pi/9)$ 2,064177772	h	$1/4\,\mathrm{sen}(\pi/9)\,\mathrm{tg}(\pi/18)$ 1,508813015	$2\cos^2(\pi/18)/\sqrt{3}$ 1,119884056	$\cos(\pi/18)$ 0,984807753	$1/2\,\mathrm{sen}(2\pi/9)\,\mathrm{tg}(\pi/18)$ 4,411474130	$1/2\,\mathrm{sen}(\pi/18)$ 2,879385244	$1/\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(\pi/18)$ 3,274316087	$1/4\,\mathrm{sen}^2(\pi/18)$ 8,290859385
$d_1 =$	$2\cos(\pi/9)$ 1,879385241	$2\,\mathrm{sen}(2\pi/9)$ 1,285575219	$4\,\mathrm{sen}(\pi/9)$ 1,368080574	$4\,\mathrm{sen}(\pi/9)\,\mathrm{tg}(\pi/18)$ 0,662772650	d_1	$2\,\mathrm{sen}(2\pi/9)/\sqrt{3}$ 0,742227199	$\mathrm{sen}(2\pi/9)/\cos(\pi/18)$ 0,652703645	$1/\mathrm{sen}(\pi/9)$ 2,923804400	$2\cos(\pi/9)/\cos(\pi/18)$ 1,908377768	$4\cos(\pi/9)/\sqrt{3}$ 2,170127150	$2/\mathrm{tg}(\pi/9)$ 5,494954840
$d_2 =$	$\sqrt{3}/2\,\mathrm{sen}(\pi/9)$ 2,532088886	$\sqrt{3}$ 1,732050808	$\sqrt{3}/\cos(\pi/9)$ 1,843209971	$\sqrt{3}/2\cos^2(\pi/18)$ 0,892951176	$\sqrt{3}/2\,\mathrm{sen}(2\pi/9)$ 1,347296355	d_2	$\sqrt{3}/2\cos(\pi/18)$ 0,879385242	$\sqrt{3}/2\,\mathrm{sen}(\pi/9)\,\mathrm{sen}(2\pi/9)$ 3,939231015	$\sqrt{3}/2\,\mathrm{sen}(\pi/9)\cos(\pi/18)$ 2,571160439	$1/\mathrm{sen}(\pi/9)$ 2,923804400	$\sqrt{3}/2\,\mathrm{sen}^2(\pi/9)$ 7,403332624
$d_3 =$	$1/2\,\mathrm{sen}(\pi/18)$ 2,879385244	$2\cos(\pi/18)$ 1,969615506	$2\cos(\pi/18)/\cos(\pi/9)$ 2,096011042	$1/\cos(\pi/18)$ 0,984807753	$\cos(\pi/18)/\mathrm{sen}(2\pi/9)$ 1,532088886	$2\cos(\pi/18)/\sqrt{3}$ 1,137158042	d_3	$1/2\,\mathrm{sen}(2\pi/9)\,\mathrm{sen}(\pi/18)$ 4,479528233	$1/\mathrm{sen}(\pi/9)$ 2,923804400	$1/\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\pi/18)$ 3,324827692	$1/2\,\mathrm{sen}(\pi/9)\,\mathrm{sen}(\pi/18)$ 8,418759248
$u =$	$\mathrm{sen}(2\pi/9)$ 0,642787610	$2\,\mathrm{sen}(\pi/9)\cos(2\pi/9)$ 0,439692621	$4\,\mathrm{sen}^2(\pi/9)$ 0,467911114	$2\,\mathrm{sen}(2\pi/9)\,\mathrm{tg}(\pi/18)$ 0,226681591	$\mathrm{sen}(\pi/9)$ 0,342020143	$\frac{2\,\mathrm{sen}(\pi/9)\,\mathrm{sen}(2\pi/9)}{\sqrt{3}}$ 0,253856653	$2\,\mathrm{sen}(2\pi/9)\,\mathrm{sen}(\pi/18)$ 0,223237794	u	$4\cos(2\pi/9)\,\mathrm{sen}(\pi/18)$ 0,653703644	$2\,\mathrm{sen}(2\pi/9)/\sqrt{3}$ 0,742227199	$2\,\mathrm{sen}(\pi/9)$ 1,879385241
$w_1 =$	$\cos(\pi/18)$ 0,984807753	$2\,\mathrm{sen}(\pi/9)\cos(\pi/18)$ 0,673648178	$2\,\mathrm{tg}(\pi/9)\cos(\pi/18)$ 0,716881417	$2\,\mathrm{sen}(\pi/18)$ 0,347296355	$\cos(\pi/18)/2\,\mathrm{sen}(\pi/9)$ 0,524005261	$\frac{2\,\mathrm{sen}(\pi/9)\cos(\pi/18)}{\sqrt{3}}$ 0,388930857	$\mathrm{sen}(\pi/9)$ 0,342020143	$1/4\,\mathrm{sen}(\pi/9)\cos(\pi/9)$ 1,532088888	w_1	$2\cos(\pi/18)/\sqrt{3}$ 1,137158042	$1/2\,\mathrm{sen}(\pi/18)$ 2,879385244
$w_2 =$	$\sqrt{3}/2$ 0,866025404	$\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\pi/9)$ 0,592396265	$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(\pi/9)$ 0,630414938	$\sqrt{3}\cdot\mathrm{tg}(\pi/18)$ 0,305407289	$\sqrt{3}/4\cos(\pi/9)$ 0,460802493	$\mathrm{sen}(\pi/9)$ 0,342020143	$\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\pi/18)$ 0,300767466	$\sqrt{3}/2\,\mathrm{sen}(2\pi/9)$ 1,347296356	$\sqrt{3}/2\cos(\pi/18)$ 0,879385242	w_2	$\sqrt{3}/2\,\mathrm{sen}(\pi/9)$ 2,532088886
$v =$	$\mathrm{sen}(\pi/9)$ 0,342020143	$2\,\mathrm{sen}^2(\pi/9)$ 0,233955557	$2\,\mathrm{tg}(\pi/9)\,\mathrm{sen}(\pi/9)$ 0,248970303	$4\,\mathrm{sen}^2(\pi/18)$ 0,120614758	$\mathrm{tg}(\pi/9)/2$ 0,181985117	$2\,\mathrm{sen}^2(\pi/9)/\sqrt{3}$ 0,135074304	$2\,\mathrm{sen}(\pi/9)\,\mathrm{sen}(\pi/18)$ 0,118782349	$1/2\cos(\pi/9)$ 0,532088886	$2\,\mathrm{sen}(\pi/18)$ 0,347296355	$2\,\mathrm{sen}(\pi/9)/\sqrt{3}$ 0,394930844	v

$$\left(\sqrt{3} = \mathrm{tg}(\pi/3) = \mathrm{tg}\left(\tfrac{3}{9}\pi\right) = 2\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) = 2\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{4\pi}{9}\right)\right) \; ; \; \left(1 + \cos\left(\tfrac{\pi}{9}\right)\right) = 2\cos^2(\pi/18)$$

Il Decagono

Abbiamo già trattato del decagono nel capitolo della sezione aurea, ed abbiamo già calcolato molti elementi trattando il pentagono. (Le diagonali "d_1" consecutive del decagono, sono i lati del pentagono inserito nella stessa circonferenza, la diagonale "d_3" del decagono è la "d" del pentagono, ecc)



Abbiamo visto che il lato del decagono è la parte aurea del raggio, perciò:

$$\boxed{\ell=\frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}$$

$$a=\sqrt{R^2-\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}$$

$$\boxed{a=\frac{R}{4}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}$$

$$h=2a\;;\quad\boxed{h=\frac{R}{2}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}\;;\quad\frac{\ell}{a}=\frac{2\left(\sqrt{5}-1\right)}{\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}$$

$$\boxed{\frac{\ell}{a}=\frac{2}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}}=0,649839353\;;\quad\boxed{a=\ell\cdot1,538841769}$$

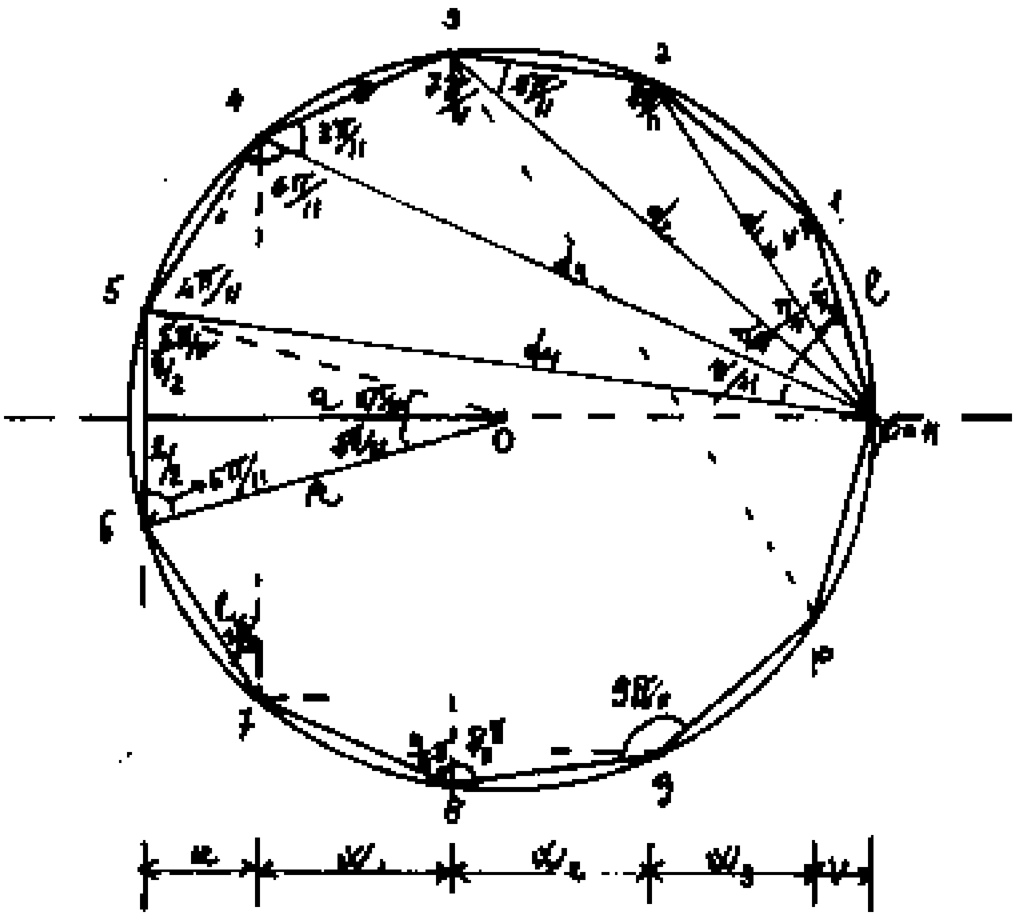
$$\boxed{h=d_3=2a}\;;\;\boxed{d_4=2R}\;;\;\boxed{R=2W_1}\;;\;\boxed{d_1=2W_2}$$

Relazioni fra gli elementi del decagono

i \ n	l	R	$a = r$	h	d_1	d_2	d_3	v	w_1	u	w_2
$l =$	l	$\frac{R}{2}(\sqrt5-1)$ 0,6180339887	$a\cdot 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt5}{5}}$ 0,6498393825	$h\cdot\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt5}}$ 0,3249196962	$d_1\cdot\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}$ 0,5257311121	$d_2\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)$ 0,3819660113	$d_3\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt5}}$ 0,3249196962	$v\cdot\sqrt{6+2\sqrt5}$ 3,236067977	$w_1(\sqrt5-1)$ 1,236067978	$u\cdot\sqrt{\frac{2(5+\sqrt5)}{5}}$ 1,701301617	$w_2\sqrt{\frac{10-2\sqrt5}{5}}$ 1,051462224
$R =$	$\frac{l}{2}(\sqrt5+1)$ 1,618033989	R	$a\sqrt{2-\frac{2}{\sqrt5}}$ 1,051462224	$h\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}$ 0,525731112	$d_1\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}$ 0,850650808	$d_2\frac{(\sqrt5-1)}{2}$ 0,6180339887	$d_3\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}$ 0,525731112	$v\cdot(3+\sqrt5)$ 5,236067977	$w_1\cdot 2$ 2,0000000	$u\cdot 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5}}$ 2,752763841	$w_2\cdot 2\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}$ 1,701301617
$a = r =$	$\frac{l}{2}\sqrt{5+2\sqrt5}$ 1,538841769	$\frac{R}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}}$ 0,9510565163	$a = r$	$h/2$ 0,5000000	$d_1\cdot\frac{(\sqrt5+1)}{4}$ 0,8090169944	$\frac{d_2}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{2}}$ 0,5877852523	$d_3/2$ 0,5000000	$v\sqrt{\frac{25+11\sqrt5}{2}}$ 4,97979657	$w_1\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}}$ 1,902113032	$\frac{u}{2}(3+\sqrt5)$ 2,618033989	$\frac{w_2}{2}(\sqrt5+1)$ 1,618033989
$h =$	$l\sqrt{5+2\sqrt5}$ 3,077683537	$R\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}}$ 1,902113033	$a\cdot 2$ 2,000000	h	$d_1\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)$ 1,618033989	$d_2\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{2}}$ 1,175570505	d_3 1,000000	$v\sqrt{50+22\sqrt5}$ 9,959593139	$w_1\cdot\sqrt{10+2\sqrt5}$ 3,804226065	$u\cdot(3+\sqrt5)$ 5,236067977	$w_2(\sqrt5+1)$ 3,236067977
$d_1 =$	$l\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}}$ 1,902113033	$R\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{2}}$ 1,175570505	$a(\sqrt5-1)$ 1,236067977	$h\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)$ 0,6180339887	d_1	$d_2\sqrt{5-2\sqrt5}$ 0,726654233	$d_3\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)$ 0,6180339887	$v\,2\sqrt{5+2\sqrt5}$ 6,155367074	$w_1\sqrt{2(5-\sqrt5)}$ 2,351141009	$u(\sqrt5+1)$ 3,236067977	$w_2\cdot 2$ 2,000000
$d_2 =$	$l\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)$ 2,618033989	$R\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)$ 1,618033989	$a\,2\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}$ 1,701301617	$h\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}$ 0,850650808	$d_1\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5}}$ 1,37638192	d_2 1,000000	$d_3\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}$ 0,850650808	$v\,2\sqrt{9+4\sqrt5}$ 8,472135955	$w_1(\sqrt5+1)$ 3,236067977	$u\sqrt{2\left(\frac{25+11\sqrt5}{5}\right)}$ 4,454065458	$w_2\cdot 2\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt5}}$ 2,752763841
$d_3 =$	$l\sqrt{5+2\sqrt5}$ 3,077683537	$R\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}}$ 1,902113032	$a\cdot 2$ 2,00000000	$h\cdot 1$ 1,0000000	$d_1\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)$ 1,618033989	$d_2\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{2}}$ 1,175570505	d_3	$v\sqrt{50+22\sqrt5}$ 9,959593139	$w_1\sqrt{10+2\sqrt5}$ 3,804226065	$u(3+\sqrt5)$ 5,236067977	$w_2(\sqrt5+1)$ 3,236067977
$v =$	$l\left(\frac{\sqrt5-1}{4}\right)$ 0,3090169944	$R\left(\frac{3-\sqrt5}{4}\right)$ 0,1909830056	$a\sqrt{\frac{25-11\sqrt5}{10}}$ 0,2008114159	$\frac{h}{2}\sqrt{\frac{25-11\sqrt5}{10}}$ 0,1004057079	$\frac{d_1}{2}\sqrt{\frac{5-2\sqrt5}{5}}$ 0,162459848	$\frac{d_2}{2}\sqrt{9-4\sqrt5}$ 0,1180339887	$\frac{d_3}{2}\sqrt{\frac{25-11\sqrt5}{10}}$ 0,1004057079	v	$w_1\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)$ 0,3819660112	$u\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}$ 0,5257311121	$w_2\sqrt{\frac{5-2\sqrt5}{5}}$ 0,3249196962
$w_1 =$	$l\left(\frac{\sqrt5+1}{4}\right)$ 0,8090169944	$R\cdot\frac{1}{2}$ 0,5000000	$a\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}$ 0,5257311121	$\frac{h}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}$ 0,2628655556	$\frac{d_1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}$ 0,4253254042	$d_2\left(\frac{\sqrt5-1}{4}\right)$ 0,3090169944	$\frac{d_3}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}$ 0,2628655576	$v\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)$ 2,618033989	w_1	$u\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5}}$ 1,37638192	$w_2\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}$ 0,850650808
$u =$	$\frac{l}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{2}}$ 0,5877852522	$\frac{R}{2}\sqrt{5-2\sqrt5}$ 0,363271264	$a\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)$ 0,3819660113	$h\left(\frac{3-\sqrt5}{4}\right)$ 0,1909830056	$d_1\left(\frac{\sqrt5-1}{4}\right)$ 0,3090169944	$\frac{d_2}{2}\sqrt{\frac{25-11\sqrt5}{2}}$ 0,2245139883	$d_3\left(\frac{3-\sqrt5}{4}\right)$ 0,1909830056	$v\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}}$ 1,902113032	$w_1\sqrt{5-2\sqrt5}$ 0,726542528	u	$w_2\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)$ 0,6180339887
$w_2 =$	$\frac{l}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}}$ 0,9510565163	$\frac{R}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{2}}$ 0,5877852523	$a\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)$ 0,6180339887	$h\left(\frac{\sqrt5-1}{4}\right)$ 0,3090169944	$d_1\left(\frac{1}{2}\right)$ 0,5000000	$\frac{d_2}{2}\sqrt{5-2\sqrt5}$ 0,363271264	$d_3\left(\frac{\sqrt5-1}{4}\right)$ 0,3090169944	$v\sqrt{5+2\sqrt5}$ 3,077683537	$\frac{w_1}{2}\sqrt{2(5-\sqrt5)}$ 1,175570505	$u\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)$ 1,618033989	w_2

undecagono

Anche questo poligono non può essere costruito col solo ausilio della riga e del compasso; pertanto si costruisce il poligono dividendo il cerchio in 11 parti uguali mediante l'ausilio di un rapportatore, e verificando con la trigonometria ($sen(360°/11) = 0,540640817$; da cui: $d_1 = 2R\,sen(360°/11)$; $cos(360°/11) = 0,841253533$; da cui: $a = R\cos(360°/11)$; ecc. Ricordiamo che gli antichi



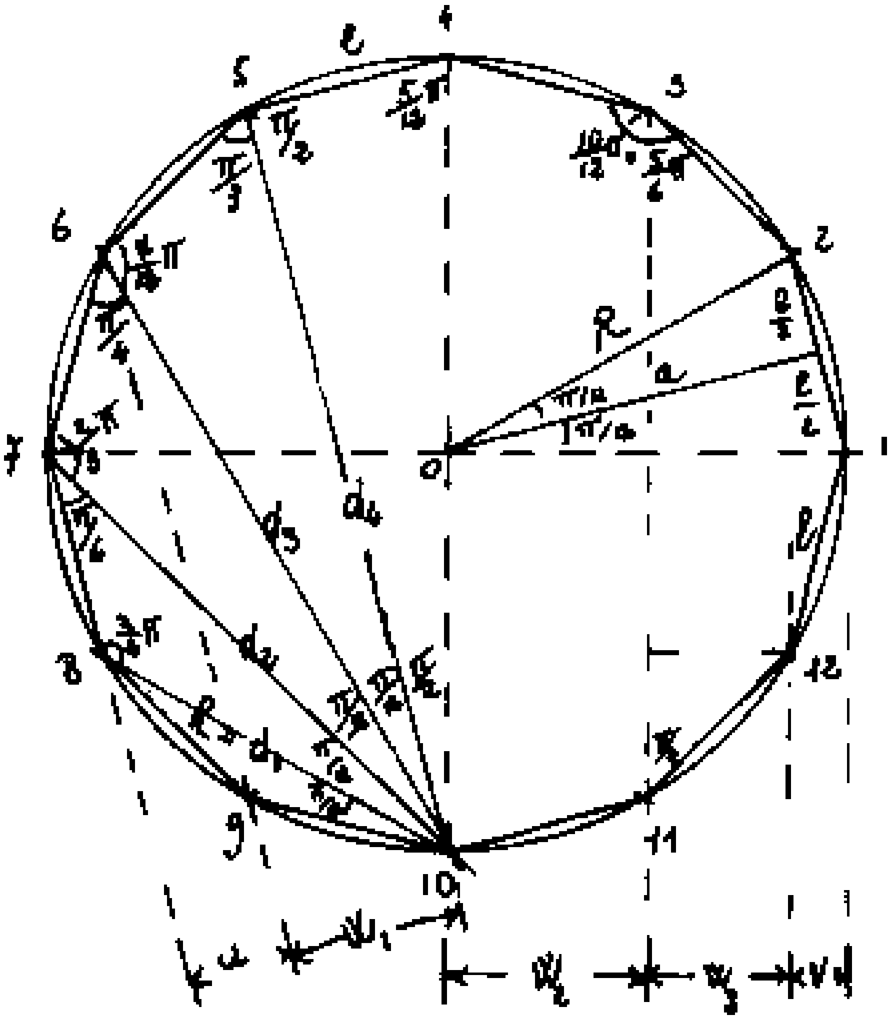
approssimavano π alla frazione $22/7 = 3,142857143...$ al posto di $3,14159265358...$ Prendendo il diametro pari a 7 unità, quindi il raggio = 3,5 unità, l'arco di $\pi/11 = R\frac{\pi}{11} = \frac{3,5}{11}\pi \simeq 1 = (0,999597663...)$. Cioè archi di 11 conci sono tali che la larghezza media di ciascun concio è $\simeq \frac{1}{7}$ del diametro medio d'imposta; od anche l'intradosso dell'arco a tutto sesto è $11/7$ della luce netta l_0. Cioè se i conci sono tutti uguali e sono 11 di altezza h, in intradosso sono larghi: $\frac{1}{7}l_0$, mentre in estradosso sono larghi $\frac{1}{7}(l_0+2h)$. Questa regola talvolta modificata costruendo l'arco in 9 o 13 conci, verrà meglio trattata studiando l'arco.

Relazioni fra gli elementi dell'undecagono

i	ℓ	R	$a = r$	d_1	d_2	d_3	d_4	u	W_1	W_2	W_3	V
$\ell =$	ℓ	$R\cdot 2\,\mathrm{sen}(\pi/11)$ 0.563465114	$a\cdot 2\cdot\mathrm{tg}(\pi/11)$ 0.587252986	$d_1/2\cos(\pi/11)$ 0.531108558	$d_2\,\frac{\mathrm{sen}(\pi/11)}{\mathrm{sen}(3\pi/11)}$ 0.372785598	$d_3\,\frac{\mathrm{sen}(\pi/11)}{\mathrm{sen}(4\pi/11)}$ 0.309721468	$d_4\,2\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{22})$ 0.284629436	$u/\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{11})$ 1.849656846	$W_1/\cos(\frac{3\pi}{22})$ 1.00934568	$W_2/\mathrm{sen}(\frac{5\pi}{11})$ 1.01028332	$W_3/\cos(\frac{2\pi}{11})$ 1.188703389	$V/\mathrm{sen}(\pi/11)$ 3.549465833
$R =$	$\ell/2\,\mathrm{sen}(\pi/11)$ 1.774732267	R	$a/\cos(\pi/11)$ 1.042217115	$d_1\,1/2\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{11})$ 0.924838632	$d_2/2\,\mathrm{sen}(\frac{3\pi}{11})$ 0.661534815	$d_3/2\,\mathrm{sen}(\frac{4\pi}{11})$ 0.549657202	$d_4/2\cos(\pi/22)$ 0.505141613	$\frac{u}{2\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{11})\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{11})}$ 3.282646662	$\frac{W_1}{2\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{11})}$ [illegible] 1.951044791	$\frac{W_2}{2\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{11})\,\mathrm{sen}(\frac{5\pi}{11})}$ 1.792982345	$W_3/2\,\mathrm{sen}$ [illegible] 1.309628982	$V/2\,\mathrm{sen}^2(\pi/11)$ 6.299535387
$a = r$	$\ell/2\,\mathrm{tg}(\pi/11)$ 1.702843520	$R\cos(\pi/11)$ 0.959492974	$a = r$	$d_1/4\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{11})$ 0.887356395	$d_2\,\frac{\cos(\pi/11)}{2\,\mathrm{sen}(3\pi/11)}$ 0.634895577	$d_3\,\frac{\cos(\pi/11)}{2\,\mathrm{sen}(4\pi/11)}$ 0.527402325	$d_4\left(\frac{\cos(\pi/11)}{2\cos(\pi/22)}\right)$ 0.484679829	$u/4\,\mathrm{sen}^2(\frac{\pi}{11})$ [illegible]	$\frac{W_1}{2\,\mathrm{tg}(\frac{\pi}{11})\cos(\frac{3\pi}{22})}$ [illegible]	$\frac{W_2}{2\,\mathrm{tg}(\frac{\pi}{11})\,\mathrm{sen}(\frac{5\pi}{11})}$ [illegible]	$W_3/2\,\mathrm{tg}(\frac{\pi}{11})\cos(\frac{2\pi}{11})$ 2.023734109	$V\,\frac{\cos(\pi/11)}{2\,\mathrm{sen}^2(\pi/11)}$ 6.044184736
$d_1 =$	$\ell\cdot 2\cos(\pi/11)$ 1.918985947	$R\cdot 2\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{11})$ 1.081281635	$a\cdot 4\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{11})$ 1.126930227	d_1	$d_2\,\frac{\mathrm{sen}(2\pi/11)}{\mathrm{sen}(3\pi/11)}$ 0.717370323	$d_3/2\cos(\frac{2\pi}{11})$ 0.594351144	[illegible] 0.544200349	$u/\mathrm{sen}(\frac{\pi}{11})$ 3.549465533	$W_1\,\frac{2\cos(\pi/11)}{\cos(3\pi/22)}$ 2.109628902	$\frac{W_2\cdot 2\cos(\pi/11)}{\mathrm{sen}(5\pi/11)}$ 1.938719314	$W_3\,\frac{2\cos(\pi/11)}{\cos(\frac{2\pi}{11})}$ 2.281102978	$V\cdot 2/\mathrm{tg}(\pi/11)$ 6.811374881
$d_2 =$	$\ell\,\frac{\mathrm{sen}(3\pi/11)}{\mathrm{sen}(\pi/11)}$ 2.682507061	$R\,2\,\mathrm{sen}(\frac{3\pi}{11})$ 1.511499149	$a\,\frac{2\,\mathrm{sen}(3\pi/11)}{\cos(\pi/11)}$ 1.575310286	$d_1\,\frac{\mathrm{sen}(3\pi/11)}{\mathrm{sen}(2\pi/11)}$ 1.397937890	d_2	$d_3\,\frac{\mathrm{sen}(3\pi/11)}{\mathrm{sen}(4\pi/11)}$ 0.830830026	$d_4\,\frac{\mathrm{sen}(3\pi/11)}{\cos(\pi/22)}$ 0.763521119	$u\,\frac{2\,\mathrm{sen}(3\pi/11)}{\mathrm{sen}(\pi/11)\,\mathrm{sen}(2\pi/11)}$ 4.961317615	$W_1\,\frac{2\,\mathrm{sen}(3\pi/11)}{\mathrm{sen}(\pi/11)}$ 2.949002541	$W_2\,\frac{\mathrm{sen}(3\pi/11)}{\mathrm{sen}(\frac{\pi}{11})\,\mathrm{sen}(\frac{5\pi}{11})}$ 2.320091855	$W_3\,\frac{\mathrm{sen}(3\pi/11)}{\mathrm{sen}(\frac{\pi}{11})\cos(\frac{2\pi}{11})}$ 3.188702291	$V\,\frac{\mathrm{sen}(3\pi/11)}{\mathrm{sen}^2(\pi/11)}$ 9.521466375
$d_3 =$	$\ell\,\frac{\mathrm{sen}(4\pi/11)}{\mathrm{sen}(\pi/11)}$ 3.228707411	$R\,2\,\mathrm{sen}(\frac{4\pi}{11})$ 1.819263991	$a\,\frac{2\,\mathrm{sen}(4\pi/11)}{\cos(\pi/11)}$ 1.896068070	$d_1\cdot 2\cos(\frac{2\pi}{11})$ 1.682507066	$d_2\,\frac{\mathrm{sen}(4\pi/11)}{\mathrm{sen}(3\pi/11)}$ 1.203615634	d_3	$d_4\,\frac{\mathrm{sen}(4\pi/11)}{\cos(\pi/22)}$ 0.918985947	$u\,\frac{2\cos(2\pi/11)}{\mathrm{sen}(\pi/11)}$ 5.972000841	$W_1/\mathrm{sen}(\pi/11)$ 3.549465533	$W_2\,\frac{\mathrm{sen}(4\pi/11)}{\mathrm{sen}(\frac{\pi}{11})\,\mathrm{sen}(\frac{5\pi}{11})}$ 3.261908546	$W_3\left(4\cos(\pi/11)\right)$ 2.837971834	$V\,\frac{\mathrm{sen}(4\pi/11)}{\mathrm{sen}^2(\pi/11)}$ 11.46018569
$d_4 =$	$\ell/2\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{22})$ 3.513337094	$R\,2\cos(\frac{\pi}{22})$ 1.979642884	$a\,\frac{2\cos(\pi/22)}{\cos(\pi/11)}$ 2.063212698	$\frac{d_1\cdot 1}{4\cos(\pi/11)\,\mathrm{sen}(\ldots)}$ [illegible]	$d_2\,\frac{\cos(\pi/22)}{\mathrm{sen}(3\pi/11)}$ 1.309721463	$d_3\,\frac{\cos(\pi/22)}{\mathrm{sen}(4\pi/11)}$ 1.088157321	d_4	$\frac{u}{2\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{22})\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{11})}$ 6.498468078	$\frac{W_1}{2\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{22})\cos(\frac{3\pi}{22})}$ 3.862871964	$\frac{W_2}{2\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{22})\,\mathrm{sen}(\frac{5\pi}{11})}$ [illegible]	$\frac{W_3}{2\cos(\frac{2\pi}{11})\,\mathrm{sen}(\ldots)}$ 4.176211843	$\frac{V}{2\,\mathrm{sen}(\ldots)\,\mathrm{sen}(\ldots)}$ [illegible]
$u =$	$\ell\cdot\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{11})$ 0.540640817	$R\,2\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{11})\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{11})$ 0.304632860	$a\cdot 4\,\mathrm{sen}^2(\frac{\pi}{11})$ 0.317493396	$d_1\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{11})$ 0.281733850	$d_2\,\frac{\mathrm{sen}(\ldots)\,\mathrm{sen}(\ldots)}{\mathrm{sen}(3\pi/11)}$ 0.201543110	$d_3\,\frac{\mathrm{sen}(\pi/11)}{2\cos(2\pi/11)}$ 0.167448068	[illegible] 0.153882421	u	$\frac{W_1}{2\cos(2\pi/11)}$ 0.594351144	$W_2\,\frac{2\,\mathrm{sen}(3\pi/11)}{\mathrm{sen}(5\pi/11)}$ 0.546200349	$W_3\cdot\mathrm{tg}(\frac{2\pi}{11})$ 0.642641096	$V\cdot 2\cos(\pi/11)$ 1.918985943
$W_1 =$	$\ell\cos(\frac{3\pi}{22})$ 0.909632000	$R\,2\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{11}\cos(\ldots)$ 0.512545836	$a\cdot 2\,\mathrm{tg}(\frac{\pi}{11})\cos(\frac{3\pi}{22})$ 0.534184105	$d_1\,\frac{\cos(3\pi/22)}{2\cos(\pi/11)}$ 0.474017018	$d_2\,\frac{\mathrm{sen}(\pi/11)}{2\,\mathrm{sen}(3\pi/22)}$ 0.339099703	$d_3\,\mathrm{sen}(\pi/11)$ 0.281732557	$d_4(\ldots)\cos(\frac{3\pi}{22})$ 0.258908260	$u\cdot 2\cos(\frac{2\pi}{11})$ 1.682507066	W_1	$W_2\,\frac{\cos(3\pi/22)}{\mathrm{sen}(5\pi/11)}$ 0.918985941	$W_3\cdot 2\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{11})$ 1.081281664	$V\,\frac{\cos(3\pi/22)}{\mathrm{sen}(\pi/11)}$ 3.228707415
$W_2 =$	$\ell\,\mathrm{sen}(\frac{5\pi}{11})$ 0.989821442	$R\,2\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{11})\,\mathrm{sen}(\frac{5\pi}{11})$ 0.557728851	[illegible] 0.581238339	$d_1\,\frac{\mathrm{sen}(5\pi/11)}{2\cos(\pi/11)}$ 0.515804425	$d_2\,\frac{\mathrm{sen}(\ldots)\,\mathrm{sen}(\ldots)}{\mathrm{sen}(3\pi/11)}$ 0.368991132	$d_3\,\frac{\mathrm{sen}(\ldots)\,\mathrm{sen}(5\pi/11)}{\mathrm{sen}(4\pi/11)}$ 0.306566950	$d_4(\ldots)\,\mathrm{sen}(\frac{5\pi}{11})$ 0.281732557	$u\,\frac{\mathrm{sen}(5\pi/11)}{\mathrm{sen}(2\pi/11)}$ 1.830830026	$W_1\,\frac{\mathrm{sen}(5\pi/11)}{\mathrm{sen}(3\pi/22)}$ 1.088155921	W_2	$W_3\,\frac{\mathrm{sen}(5\pi/11)}{\cos(2\pi/11)}$ 1.176603016	$V\,\frac{\mathrm{sen}(5\pi/11)}{\mathrm{sen}(\pi/11)}$ 3.513337092
$W_3 =$	$\ell\cos(2\pi/11)$ 0.841253532	$R\cdot 2\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{11})\cos(\frac{2\pi}{11})$ 0.474017013	$a\cdot 2\,\mathrm{tg}(\frac{\pi}{11})\cos(\frac{2\pi}{11})$ 0.494028165	$d_1\,\frac{\cos(2\pi/11)}{2\cos(\pi/11)}$ 0.438384616	$d_2\,\frac{\mathrm{sen}(\ldots)\cos(\ldots)}{\mathrm{sen}(3\pi/11)}$ 0.311607301	$d_3/4\cos(\pi/11)$ 0.260554234	[illegible] 0.239445821	$u/\mathrm{tg}(\frac{2\pi}{11})$ 1.556030333	$\frac{W_1}{2\,\mathrm{sen}(2\pi/11)}$ 0.924838643	$W_2\,\frac{\cos(2\pi/11)}{\mathrm{sen}(5\pi/11)}$ 0.849906332	W_3	$V\,\frac{\cos(2\pi/11)}{\mathrm{sen}(\pi/11)}$ 2.986000620
$V =$	$\ell\,\mathrm{sen}(\pi/11)$ 0.281732557	$R\cdot 2\,\mathrm{sen}^2(\frac{\pi}{11})$ 0.158746461	$a\,\frac{2\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{11}}{\cos(\pi/11)}$ 0.165448285	$d_1\,\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}(\pi/11)$ 0.146813245	$d_2\,\frac{\mathrm{sen}^2(\pi/11)}{\mathrm{sen}(3\pi/11)}$ 0.105025840	$d_3\,\frac{\mathrm{sen}^2(\pi/11)}{\mathrm{sen}(4\pi/11)}$ 0.087258621	[illegible] 0.080181446	$u/2\cos(\pi/11)$ 0.521108558	$W_1\,\frac{\mathrm{sen}(\pi/11)}{\cos(3\pi/22)}$ 0.309721468	$W_2\,\frac{\mathrm{sen}(\pi/11)}{\mathrm{sen}(5\pi/11)}$ 0.284629436	$W_3\,\frac{\mathrm{sen}(\pi/11)}{\cos(2\pi/11)}$ 0.334886135	V

Dodecagono

Dividere il cerchio in dodici parti uguali (e quindi in 24 parti uguali) è facile data la facile costruzione grafica dell'esagono. Quindi le fasi cicliche, fin dall'antichità, usarono tale suddivisione: l'anno in dodici mesi, il giorno e la notte in dodici ore (quando il giorno = la notte). Per costruirlo graficamente, basta far centro, (con lo stesso raggio del cerchio) agli estremi di due diametri ortogonali.



Abbiamo: $2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right) = 0,51763809$

$2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right) = 1,931851653.$

Si noti inoltre che: $d_1 = R$ è il lato dell'esagono inscritto; d_2 = lato del quadrato inscritto; d_3 = lato del triangolo equilatero inscritto; $d_4 = \sqrt{(2R)^2 - l^2}$; $u = \frac{l}{2}$ $w_1 = \frac{l}{2}\sqrt{3}$; $w_2 = R/2$; $w_3 = \frac{l}{2}\sqrt{2}$; $v = \sqrt{l^2 - (\frac{l}{2})^2}$; Queste relazioni consento di correlare gli elementi senza ricorrere alla trigonometria.

Relazioni fra gli elementi del dodecagono

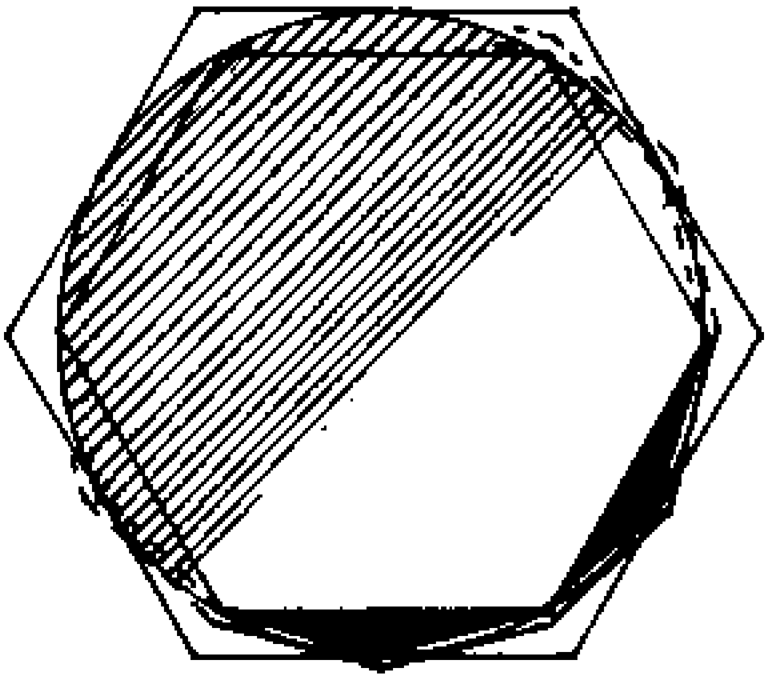
	ℓ	$R = d_1$	$a = r$	h	d_2	d_3	d_4	u	W_1	W_2	W_3	V
$\ell =$	ℓ	$R(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}$ 0,517638090	$a(2-\sqrt{3})2$ 0,535898385	$h(2-\sqrt{3})$ 0,267949192	$d_2(\sqrt{3}-1)/2$ 0,366025404	$d_3\sqrt{2}(3-\sqrt{3})/6$ 0,298858491	$d(2-\sqrt{3})$ 0,267949192	$u \cdot 2$ 2.000000	$W_1 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3}$ 1,154700538	$W_2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$ 1,035276180	$W_3 \cdot \sqrt{2}$ 1,414213562	$V \cdot \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$ 3,863703302
$R{=}d_1 =$	$\ell(\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}$ 1,931851653	$R = d_1$	$a(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}$ 1,035276180	$h(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}$ 0,517638090	$d_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ 0,707106781	$d_3/\sqrt{3}$ 0,577350269	$d_4(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}$ 0,517638090	$u(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}$ 3,863703305	$W_1\sqrt{2}(3+\sqrt{3})/3$ 2,230710143	$W_2 \cdot 2$ 2.000000	$W_3(\sqrt{3}+1)$ 2,732050808	$V\,2(2+\sqrt{3})$ 7,464101615
$a{=}r$	$\ell(\sqrt{3}+2)/2$ 1,866025404	$R(\sqrt{3}+1)/2\sqrt{2}$ 0,965925827	$a = r$	$h \cdot \frac{1}{2}$ 0,5000000	$d_2(\sqrt{3}+1)/4$ 0,683012702	$d_3(\sqrt{3}+1)/2\sqrt{6}$ 0,557677536	$d_4\ \frac{1}{2}$ 0,5000000	$u(\sqrt{3}+2)$ 3,732050808	$W_1(1+2/\sqrt{3})$ 2,154700538	$W_2(\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}$ 1,931851653	$W_3(\sqrt{3}+2)/\sqrt{2}$ 2,638958435	$V(5+3\sqrt{3})/\sqrt{2}$ 7,209768520
$h =$	$\ell(\sqrt{3}+2)$ 3,732050808	$R(\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}$ 1,931851653	$a \cdot 2$ 2,000000	h	$d_2(\sqrt{3}+1)/2$ 1,366025404	$d_3(\sqrt{3}+1)/\sqrt{6}$ 1,115355072	d_4	$u(\sqrt{3}+2)2$ 7,464101616	$W_1(1+2/\sqrt{3})2$ 4,309401069	$W_2(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}$ 3,863703305	$W_3(\sqrt{3}+2)\sqrt{2}$ 5,277916867	$V(5+3\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}$ 14,41953703
$d_2 =$	$\ell(\sqrt{3}+1)$ 2,732050808	$R\sqrt{2}$ 1,414213562	$a(\sqrt{3}-1)2$ 1,464101616	$h(\sqrt{3}-1)$ 0,732050808	d_2	$d_3(\sqrt{2}/\sqrt{3})$ 0,816496581	$d_4(\sqrt{3}-1)$ 0,732050808	$u(\sqrt{3}+1)2$ 5,464101616	$W_1(3+\sqrt{3})2/3$ 3,154700539	$W_2\,2\sqrt{2}$ 2,828427124	$W_3(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}$ 3,863703305	$V(2+\sqrt{3})2\sqrt{2}$ 10,55583373
$d_3 =$	$\ell(3+\sqrt{3})/\sqrt{2}$ 3,346065216	$R\sqrt{3}$ 1,732050808	$a(3-\sqrt{3})\sqrt{2}$ 1,793160944	$h(3-\sqrt{3})/\sqrt{2}$ 0,896575472	$d_2(\sqrt{3}/\sqrt{2})$ 1,224744871	d_3	$d_4(3-\sqrt{3})/\sqrt{2}$ 0,896575472	$u(3+\sqrt{3})\sqrt{2}$ 6.692130435	$W_1(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}$ 3,863703307	$W_2 \cdot 2\sqrt{3}$ 3,46101616	$W_3(\sqrt{3}+3)$ 4,732050808	$V(2+\sqrt{3})2\sqrt{3}$ 1'
$d_4 =$	$\ell(2+\sqrt{3})$ 3,732050808	$R(\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}$ 1,931851653	$a \cdot 2$ 2,000000	h	$d_2(\sqrt{3}+1)/2$ 1,366025404	$d_3(\sqrt{3}+1)/\sqrt{6}$ 1,115355072	d_4	$u(\sqrt{3}+2)2$ 7,464101616	$W_1(1+2/\sqrt{3})2$ 4,309401065	$W_2(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}$ 3,863703305	$W_3(2+\sqrt{3})\sqrt{2}$ 5,277916867	$V(5+3\sqrt{3})\sqrt{2}$ 14,41953703
$u =$	$\ell/2$ 0,5000000	$R(\sqrt{3}-1)/2\sqrt{2}$ 0,258819045	$a(2-\sqrt{3})$ 0,267949192	$h(2-\sqrt{3})/2$ 0,133974596	$d_2(\sqrt{3}-1)/4$ 0,183012702	$d_3(3-\sqrt{3})/6\sqrt{2}$ 0,149429245	$d_4(2-\sqrt{3})/2$ 0,133974596	u	$W_1(1/\sqrt{3})$ 0,577350269	$W_2(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}$ 0,517638091	$W_3(1/\sqrt{2})$ 0,707106781	$V(\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}$ 1,931851653
$W_1 =$	$\ell\ \sqrt{3}/2$ 0,866025404	$R(3-\sqrt{3})/2\sqrt{2}$ 0,448287736	$a(2\sqrt{3}-3)$ 0,464101616	$h(2\sqrt{3}-3)/2$ 0,232050808	$d_2(3-\sqrt{3})/4$ 0,316987298	$d_3(3-\sqrt{3})/2\sqrt{6}$ 0,258819045	$d_4(2\sqrt{3}-3)/2$ 0,232050808	$u \cdot \sqrt{3}$ 1,732050808	W_1	$W_2(3-\sqrt{3})/\sqrt{6}$ 0,896575472	$W_3(\sqrt{3}/\sqrt{2})$ 1,224744871	$V(3+\sqrt{3})/\sqrt{2}$ 3,346065216
$W_2 =$	$\ell(\sqrt{3}+1)/2\sqrt{2}$ 0,965925827	$R \cdot 1/2$ 0.5000000	$a(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}$ 0,517638090	$h(\sqrt{3}-1)/2\sqrt{2}$ 0,258819045	$d_2(\sqrt{2}/4)$ 0,353553391	$d_3(\sqrt{3}/6)$ 0,288675135	$d_4(\sqrt{3}-1)/2\sqrt{2}$ 0,258819045	$u(\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}$ 1,931851651	$W_1(3+\sqrt{3})/3\sqrt{2}$ 1,115355072	W_2	$W_3(\sqrt{3}+1)/2$ 1,366025404	$V(2+\sqrt{3})$ 3,732050808
$W_3 =$	$\ell(\sqrt{2}/2)$ 0,707106781	$R(\sqrt{3}-1)/2$ 0,366025404	$a\sqrt{2}(2-\sqrt{3})$ 0,378937382	$h(2-\sqrt{3})/\sqrt{2}$ 0,189468691	$d_2(\sqrt{3}-1)/2\sqrt{2}$ 0,258819045	$d_3(3-\sqrt{3})/6$ 0,211324865	$d_4(2-\sqrt{3})/\sqrt{2}$ 0,189468691	$u \cdot \sqrt{2}$ 1,414213562	$W_1(\sqrt{2}/\sqrt{3})$ 0,816496580	$W_2(\sqrt{3}-1)$ 0,732050808	W_3	$V(\sqrt{3}+1)$ 2,732050808
$V =$	$\ell(\sqrt{3}-1)/2\sqrt{2}$ 0,258819046	$R(2-\sqrt{3})/2$ 0,133974596	$a(3\sqrt{3}-5)/\sqrt{2}$ 0,138700708	$h(3\sqrt{3}-5)/2\sqrt{2}$ 0,069350354	$d_2(2-\sqrt{3})/2\sqrt{2}$ 0,094734346	$d_3(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2})$ 0,07735027	$d_4(3\sqrt{3}-5)/2\sqrt{2}$ 0,069350354	$u(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}$ 0,517638090	$W_1(3-\sqrt{3})/3\sqrt{2}$ 0,298858491	$W_2(2-\sqrt{3})$ 0,267949192	$W_3(\sqrt{3}-1)/2$ 0,366025404	V

Il processo di esaustione

La parola: "esaustione", ormai pressoché in disuso nella lingua italiana, ha lasciato la parola: "esausto" = "che ha esaurito le proprie energie", può farci capire meglio il concetto. "Esaustione" è un procedimento matematico introdotto da Eudosso di Cnido, usato anche da Euclide ed esteso da Archimede. Esso consiste in una successione di preposizioni false evidentemente da usare come assurde per dimostrare una verità. Euclide con questo procedimento dimostrò che l'area del cerchio è proporzionale al quadrato del raggio. Nell'introdurre i poligoni regolari noi abbiamo accennato come gli antichi delimitassero il valore di π calcolando i perimetri dei poligoni regolari inscritti e circoscritti ad una circonferenza; (<u>è un esempio di processo di esaustione</u>). Poiché ciò può servire come introduzione al concetto di limite ed al calcolo infinitesimale, ripetiamo il ragionamento per il calcolo dell'area del cerchio.

1) È assurdo che l'area del cerchio equivalga quella di un suo poligono circoscritto, perché se coloriamo l'area del cerchio restano da colorare i triangoli curvilinei aventi i vertici coincidenti con i vertici

del poligono e con i punti di tangenza al cerchio, perciò: l'area del poligono circoscritto ad un cerchio è sempre maggiore dell'area del cerchio. Analogomente: l'area del poligono inscritto ad un cerchio è sempre minore dell'area del cerchio.



2) Se raddoppiamo il numero dei lati dei due poligoni; avremo che l'area dei poligoni inscritti aumenta dell'area dei triangoli isosceli aventi per base il lato del primo poligono inscritto e per lati obliqui quelli del poligono di numero doppio di lati. Perciò l'area del nuovo poligono inscritto, pur restando inferiore a quella del cerchio vi si è avvicinata. Analogamente l'area del nuovo poligono circoscritto, pur restando superiore a quella del cerchio vi si è avvicinata. Raddoppiando nuovamente il numero dei lati avremo un ulteriore avvicinamento delle aree per difetto e per eccesso a quella del cerchio ...."per esaustione" coincideranno. Quindi si riguarda la circonferenza come il perimetro di un poligono avente un infinito numero di lati, la cui "apotema" è il raggio. L'area dei poligoni regolari è: "il perimetro per metà apotema"; l'area del cerchio: "la circonferenza per la metà del raggio. (Vedasi anche il capitolo: "poligoni regolari")

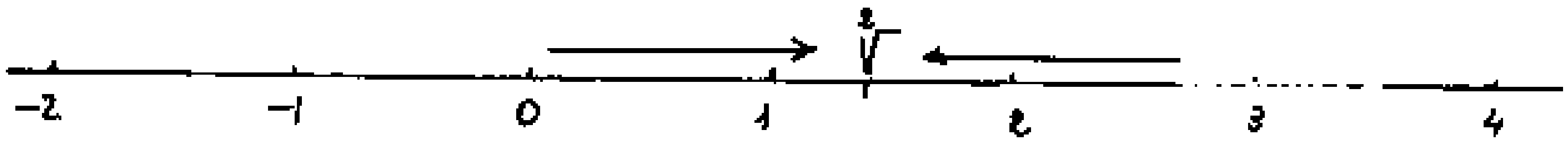
Le classi contigue

La determinazione approssimata per eccesso e per difetto di un numero, porta alla concezione delle <u>classi contigue</u>, cioè due classi di numeri una crescente, l'altra decrescente, che tendono ad avvicinarsi indefinitamente al numero da determinare. e che è detto: "elemento separatore delle classi contigue". Per esempio per $\sqrt{2}$ possiamo scrivere:

$$1 < \sqrt{2} < 2$$
$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$
$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$
$$\vdots$$

ove: 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142 ...è la classe crescente
2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143 ...è la classe decrescente

Se sull'asse reale graduato pensiamo il punto $\sqrt{2}$



vediamo le due classi convergere verso $\sqrt{2}$, senza per altro che numericamente possano raggiungerlo.

Un altro esempio di classi contigue si ha calcolando i semiperimetri dei poligoni inscritti e circoscritti ad un cerchio di raggio unitario facendo crescere con legge qualsiasi il numero dei lati; l'elemento separatore è π, cioè un numero trascendente:

$$n \operatorname{sen}(\pi/n) < \pi < n \operatorname{tg}(\pi/n)$$

per n crescente da >1 ad ∞ si hanno le due classi contigue.

Si ha così <u>L'approssimazione numerica</u> del valore cercato. Gli elementi delle due classi contigue costituiscono due successioni convergenti nell'elemento separatore. Tutti gli elementi di una classe contigua sono minori dell'elemento separatore, gli elementi dell'altra classe contigua sono maggiori, perciò le due classi non possono sovrapporsi e <u>non hanno nessun elemento comune</u> poiché l'elemento separatore non fà parte di nessuna delle due classi, essendo per esse irraggiungibile.

Abbiamo già visto una coppia di classi contigue per determinare π, dedotte da semiperimetri di poligoni inscritti e circoscritti al cerchio di raggio unitario. La loro convergenza era lentissima, infatti per $n = 100$

$$3{,}141075902\ldots < \pi < 3{,}142626598$$

Una coppia di classi contigue che converga più velocemente su π potrebbe essere:

$$3 < \pi < 4$$

$$3{,}1 < \pi < 3{,}2$$

$$3{,}14 < \pi < 3{,}15$$

$$3{,}141 < \pi < 3{,}142$$

$$3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$$

$3{,}14159 < \pi < 3{,}1416$ (notare che si ripete)

$3{,}141592 < \pi < 3{,}141593$ (già molto più approssimata)

IL calcolo infinitesimale

Fin dai tempi piú remoti il problema degli antichi filosofi era: "Quid est natura rerum?" Cioè: "di cosa sono fatte le cose?" Si pensó ad un elemento comune, indistruttibile, indivisibile (atomo) che appunto in greco significa "indivisibile". L'atomismo di Leucippo prima, e di Democrito poi, fissó i cardini di quella scienza, che diramatasi ad albero, si scisse in varie branche; dalla geometria all'analisi matematica, dall'alchimia alla chimica ed alla chimica-fisica, fino all'attuale atomistica.

La scuola di Elea (attuale Velia a sud di Napoli) definí gli enti geometrici (600 anni a.C). Gli Eleati definirono il punto: "ció che non ha parti" cioè: non partitabile = indivisibile = atomo.

Il loro ragionamento era estremamente semplice: "Prendiamo un granello di sabbia e dividiamolo a metá, metá la gettiamo, metá la teniamo; questa metá dividiamola ancora in due parti, metá la gettiamo, metá la teniamo, e questa metá dividiamola ancora in due parti ...... e cosí procediamo, quand'é che il processo termina? Evidentemente quando non v'è piú parti da dividere!" Da ció la definizione di punto. (si confronti quanto giá detto nel cap. progressioni geometriche a proposito di due torte)

Se guardiamo, con la conoscenza attuale, il procedimento eleatico diremmo: "granello di sabbia = biossido di silicio SiO_2, dividendo si arriva alla molecola, dividendo questa, peró, si perde la caratteristica: "Sabbia = SiO_2", si avrá ossigeno o silicio, si arriva all'atomo (al cosiddetto atomo) di ossigeno o di silicio dividendo il quale si perde la caratteristica: "elemento chimico" avremo un nucleo e degli elettroni, dividendo il nucleo si hanno neutroni e protoni, siamo nell'ordine delle cariche elettriche, si arriva a stati di transizione fra materia ed energia, non ha piú senso il castello di attributi che abbiamo dato alla materia, cade anche il concetto di spazio geometrico (un Coulomb non è misurabile in lunghezze, aree, o volumi) continuando cade anche il concetto di tempo, si arriva ad una mutua influenza, una specie di Soffio Creativo, fuori del tempo, che è sempre il presente, che è spirito di vita, il tutto e il niente, capace di assumere tutti gli aspetti, assai piú simile ai sentimenti che alla materia. Come dice Dante: "L'amor che move il sole e le altre stelle". Purtroppo l'uomo è appena arrivato un po' piú in lá del "Quark" ed è ben lontano dalla soluzione.

Eppure l'uomo ha il coraggio di formulare leggi e norme di etica, di religione, di ogni attivitá umana. Povere presuntuose formulazioni di chi crede di possedere la Veritá.

Analizziamo meglio la questione: "Punto". Dato un segmento è possibile proiettarlo in modo che la proiezione sia più corta, uguale, o più lunga del segmento proiettato, anzi la proiezione può ridursi ad un punto e può diventare una semiretta. Eppure a ciascun "punto" del segmento corrisponde uno ed un sol punto nella proiezione. Cosa implica tuttociò? Implica che un segmento comunque piccolo, ha lo stesso infinito numero di punti di un segmento comunque grande. Cioè dire infinito od n volte infinito è sempre lo stesso infinito (indefinito). La cosa diventa più sconcertante se pensiamo che una retta è composta di infiniti segmenti; allora, contrariamente alla dizione che una retta possiede infiniti punti, ne possederebbe infiniti al quadrato (∞^2), e poiché un segmento può essere diviso in infiniti segmenti avremmo ∞^3 e così via, il che nega l'esistenza di infiniti e quindi di infinitesimi di ordine superiore.

Il problema sull'ordine degli infiniti e degli infinitesimi, che, come dice Russell: "..Giungo ora ad un problema molto difficile, di cui farei volentieri a meno di parlare:....." (B. Russell - I principi della matematica - ediz. Longanesi - Milano - 1970 - Pag 468) fu trattato da Cantor, da Du Bois Reymond, da Stolz ed altri, dissentendo fra loro.

Non ci sentiamo evidentemente così preparati da poter sostenere la nostra "opinione", possiamo solo riportare come noi vediamo l'intera questione. "Il Cantor, sostiene decisamente che l'intera teoria e errata" dice il Russell.

Noi cerchiamo di esaminare i due aspetti:

1) Accettando la teoria noi vediamo le più piccole particelle di un atomo abitate da esseri umani, l'atomo è già il loro universo e quell'atomo non è altro che parte di una molecola, di una cellula organica di un pelo di un altro essere umano il quale vive su un pianeta, ha il suo universo che a sua volta ..... E' evidente che le dimensioni non sono paragonabili fra i due esseri umani, l'uno ha il suo infinito nell'infinitesimo dell'altro; le dimensioni del primo "sono trascurabili" rispetto alle dimensioni del secondo. Come un segmento può essere suddiviso in infiniti segmenti più piccoli e questi a loro volta essere divisi in infiniti segmenti ancora più piccoli, e così via.

2) Non accettando la teoria, per prima cosa notiamo che si usa il simbolo ∞ come fosse una qualsiasi grandezza finita. Mentre le potenze dei tre simboli: 0^n; 1^n; ∞^n debbono necessariamente essere uguali a se stesse. $0^n=0$; $1^n=1$; $\infty^n=\infty$: se: $\left(\frac{1}{0}\right)^n=\infty^n=\left(\frac{1}{0^n}\right)$ ... non ha senso che zero alla enne sia più piccolo di zero! Cioè

un nulla alla n; più nulla del nulla. Perché dovrebbe aver senso che ∞^n sia più grande di ∞? Quando diciamo: "infinito", meglio sarebbe chiamarlo "indefinito"; non possiamo pensare che esista un infinito sergente o caporale che sbatte sugli attenti l'infinito soldato. Ne tanto meno possiamo pensare che, essendo ormai fuori del nostro campo dimensionale, ci si permetta di asserire che $\infty \pm N = \infty$, che: $(N)\infty = \infty$, ma che $\infty \cdot \infty = \infty^2$, è una entità superiore, quando per N si accetti qualsiasi grandezza, comunque grande, purché finita.

Per noi zero(0) ed infinito(∞) sono "limiti" del nostro campo e non usabili come semplici simboli di grandezze algebriche finite. Se zero è un "numero" ed infinito non lo è come possiamo accettare: $\frac{N}{0} = \infty$?

Il punto non ha dimensioni, perciò possiamo considerare infinite rette per esso, senza fare "spessore". Per noi i punti, le rette, i piani, non esistono "in se", siamo noi che li pensiamo; il punto dello spigolo di questo foglio di carta, nessuno può dire è carta, oppure è aria, e neppure può dire è elemento limite perché ammesso un intorno superficiale piano, piccolo a piacere, attraverso di esso si trasmette la pressione dell'aria e le radiazioni luminose, termiche, elettromagnetiche, che i due corpi reali si trasmettono. Quindi la somma di infiniti punti, per noi è ancora un punto; e non esiste "in sé"!

Questa troppo lunga esposizione, vuol solo evidenziare che la cosiddetta "certezza" della matematica, quando esce dal concreto, sfocia in una problematica non risolta, che è poi lo stesso problema dell'uomo. Ogni "perché?" ne richiede sempre altri, fino ad uscire dai limiti umani; oltre "la siepe" e lí, (come dice il Leopardi) "Si annega il pensier mio e il naufragar m'e' dolce in questo mare".

I Differenziali

Abbiamo gia' introdotto il concetto di "differenziale" come limite infinitesimo di un segmento al capitolo "I diagrammi e il concetto di funzione; noi definiamo, in generale, il differenziale " Come la piú piccola grandezza di una dimensione fisica". Avremo cosí la piú piccola lunghezza, il piú piccolo intervallo di tempo, la piú piccola area, il piú piccolo volume, e cosí via, oltre il quale non esiste piú la dimensione fisica rappresentata. Se per esempio consideriamo una superficie di area finita (come un foglio), peró avente uno spessore differenziale: ds, il suo volume infinitesimo sará:

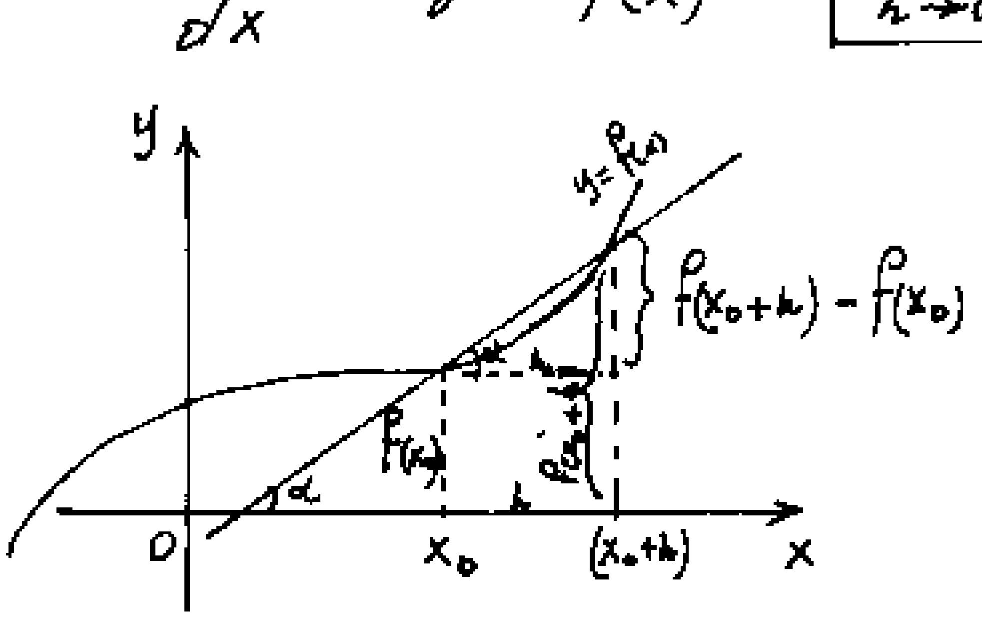
$dV = A ds$. Qualora si pensasse uno spessore minore di ds (il che non è possibile per definizione), sparirebbe ds e non vi sarebbe più spessore, e quindi non vi sarebbe più volume; resterebbe la porzione di superficie di area A. Analogamente se pensiamo l'area infinitesima $dA = l\,ds$ data dal prodotto della lunghezza finita l di un segmento per lo spessore infinitesimo ds; decadendo ds, decade lo spessore, decade dA, non esiste più una superficie, ma esiste una lunghezza l. del segmento. A sua volta il segmento di lunghezza l può ridursi ad un dl, oltre dl non v'è più segmento. Ma non siamo ancora al nulla, infatti esistono grandezze fisiche non dimensionabili con misure di lunghezze, aree, o volumi, in cui il "dividere per metà" non è più nello spazio geometrico, è nello spazio n dimensionale. Una carica elettrica non ha volume; una caloria non è dimensionabile in misure di lunghezza, area, o volume, così altre forme energetiche come il KWh; però le forme energetiche possono riportarsi a Joule cioè a (Newton)(metri) oppure a (Kgm); ove si reintroduce una misura di lunghezza geometrica che fa intravedere una connessione fra lo spazio geometrico e l'ennedimensionale.
(V. III Volume)

Derivate

Abbiamo già visto (pag. 83) che il limite del rapporto fra l'incremento della variabile dipendente e l'incremento della variabile indipendente, cioè il rapporto dei differenziali, si chiama "derivata" ed indica la "pendenza" della grafica della funzione. O meglio, possiamo ora dire che: "la derivata, in un punto di una funzione, è la tangente trigonometrica dell'angolo che la retta tangente in quel punto alla curva rappresentativa della funzione, forma con l'asse delle ascisse".

Ordinariamente nei testi di analisi si indica con "h" l'incremento Δx, per cui la derivata come "limite del rapporto incrementale" diventa:

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \boxed{\lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right)} = \text{tang}(\alpha).$$



$$\boxed{\alpha = \text{arctg}\left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right)}$$

Nell'equazione di una retta: $y = mx + q$, il coefficiente angolare m è la sua derivata, $y' = m$ cioè la sua pendenza. Se tale pendenza l'uguagliamo a quella di una $y = f(x)$ avremo: $y = f'(x)x + q$.

Si noti che:

$$\frac{(f(x_0+h) - f(x_0))}{(h)} \quad \frac{= \Delta(y)}{= \Delta(x)} \quad \left(\text{incremento finito}\right)$$

che: $$\frac{\lim_{h\to 0}(f(x_0+h) - f(x_0))}{\lim_{h\to 0}\ (h)} \quad \frac{=}{=} \quad \frac{dy}{dx} \quad \begin{matrix} = \text{incremento differenziale in } y. = d(f_{(x)}) \\ = \text{incremento differenziale in } x. \end{matrix}$$

Quest'ultima uguaglianza: $(\lim_{h\to 0} = dx)$ può apparire come una contraddizione perché essendo $h=0$ anche dx dovrebbe essere nullo contraddicendo l'ipotesi che sia "la più piccola dimensione..." Però dobbiamo considerare "h" <u>tendente a zero</u> cioè si sia fermata l'attimo avanti di essere zero. L'errore, al solito, stá nel considerare lo zero, cioè il "nulla" un simbolo quantitativo nel dimensionale continuo. Anche su questo argomento grandi matematici come Peano e come Cantor avevano "opinioni" opposte. Un giorno che parlavamo col prof. Sansone (insigne matematico), gli domandammo se considerava lo zero un numero, rispose: "certo è un numero e di grandissima importanza!" — "e l'infinito?" — "No l'infinito non è un numero!".. — "Scusi professore allora come possiamo fare: $\frac{1}{0} = \infty$?, ed $\frac{1}{\infty} = 0$?". In effetti il problema è aperto.

Noi consideriamo due ipotesi: <u>o entrambi numeri</u>: ove ∞ è il numero dei tagli effettuabili in qualsiasi segmento e zero lo spessore di ciascun taglio. <u>O entrambi limiti</u> (irraggiungibili) ove

"∞" è la più grande possibile delle nostre dimensioni oltre la quale non v'è più dimensione e "zero" la più piccola possibile delle nostre dimensioni oltre la quale non v'è più dimensione. Cerchiamo di capire meglio la questione: consideriamo questo foglio, esso è delimitato da segmenti privi di spessore. Essi non "esistono" "in se" materialmente, dove finisce il foglio inizia l'aria e viceversa.

Infiniti segmenti affiancati, in quanto privi di spessore, si sovrappongono e danno luogo ad un segmento privo di spessore. Ma questi segmenti, privi di spessore, hanno una lunghezza finita, (per es. 21 cm) cioè mancano di una dimensione. (Altre dimensioni possono averle).

Supponiamo di dividere in due il foglio, in modo da dividere in due anche il nostro segmento e ripetiamo l'operazione (è il discorso degli Eleati) finché c'è foglio da dividere, l'ultima strisciolina sarà veramente sottile, ma avrà la lunghezza dell'altro lato del foglio, (e il suo spessore). Quando l'operazione è stata ripetuta un numero di volte indefinitamente grande, la larghezza della strisciolina è un differenziale ds; (si noti che un numero comunque grande di volte è sempre duplicabile e nella realtà i numeri non finiscono mai), quindi il cosiddetto "infinito" è fuori del reale; se col pensiero "idealmente" pensiamo di raggiungerlo e di poter tagliare il nostro "ds" avremo non più una strisciolina, ma un segmento. (E' difficile pensare un foglio non di striscioline affiancate, ma di soli tagli).

Cerchiamo di fare altri esempi.

La grandezza 1/3 è finita, eppure espressa in numero decimale: 0,333333 .... non si finirebbe mai di scrivere la cifra: $3/10^n$ con n variabile da uno ad infinito. Ebbene finché n è reale, grande a piacere, la sequenza della cifra 3 sarebbe grandissima, ma il valore del numero scritto sarebbe sempre inferiore ad $\frac{1}{3}$.

Solo infinite cifre 3 (dopo 0,..) ci darebbero il valore di $\frac{1}{3}$. Questo esempio ci mostra che l'irraggiungibile infinito, può dare un valore finito.

Dobbiamo però fare una notevole distinzione, fra l'attimo prima del limite, ed il passaggio al limite. Cioè se consideriamo l'infinito e lo zero "condizioni limite" dobbiamo esaminare i due aspetti come le facce di un piano. La grandezza che tende a zero è un differenziale è la faccia destra o sinistra del piano zero. E' una specie di zero +(o zero −), che ci dà il differenziale; lo zero è il nulla, il punto, è lo spessore di un piano o di un segmento. Lo stesso discorso vale per l'infinito, in campo reale posso parlare di punti fino alla faccia di qua di infinito. Passato il limite un punto all'infinito non ha senso.

I Limiti

Paradosso di Achille e la tartaruga

Un giorno, una tartaruga sfidó Achille (il pié veloce) in una gara di corsa dicendogli: " Se tu o Achille mi dai un vantaggio alla partenza io vinceró la corsa." E spiegó la sua teoria: " Infatti quando tu parti io avró giá fatto un tratto di pista, e nel tempo che tu impieghi a fare quel tratto, io avró percorso un'altro tratto di pista (sia pure piú piccolo), quindi anche per percorrere questo tratto impiegherai del tempo durante il quale io non saró lí ad attenderti, e questo procedimento non ha fine, per cui non potrai mai raggiungermi ed io vinceró la corsa".

L'algebra elementare risolve cosí il problema:

Sia V_A = Velocitá di Achille ; V_T = Velocitá tartaruga.

Se il vantaggio consiste in un tratto "a" di percorso (ed in questo caso la partenza é contemporanea), oppure se il vantaggio consiste nel fatto che Achille parte dopo che é trascorso il tempo "t_0", permane lo stesso vantaggio essendo: $\boxed{a = V_T \cdot t_0}$, ma occorre fare attenzione all'origine dei tempi.

-Se vogliamo calcolare quanto tempo impiega Achille a raggiungere la tartaruga avremo nei due casi:

I) Achille deve percorrere lo spazio $(S+a)$, la tartaruga solo lo spazio S :

$$V_A \cdot t = S + a \quad ; \quad V_T t = S \qquad \text{da cui:}$$

$$V_A t = V_T t + a \qquad \boxed{t = \frac{a}{V_A - V_T}} \; ; \; \boxed{t = \frac{V_T t_0}{V_A - V_T}}$$

(Il tempo t è computato iniziando dalla partenza di Achille,)

Se invece vogliamo lo spazio S oltre il vantaggio a che la tartaruga riesce a percorrere senza essere raggiunta: $t = \frac{S}{V_T}$; $\frac{V_A \cdot S}{V_T} = (S+a)$; $V_A S = V_T S + a V_T$

$$\boxed{S = \frac{a V_T}{(V_A - V_T)}} \; ; \; \boxed{S = \frac{V_T^2 t_0}{(V_A - V_T)}}$$

Vediamo ora di tradurre in simboli matematici il discorso della tartaruga:

Il tempo che Achille impiega per percorrere il tratto "a" sia : $t_1 = \frac{a}{V_A} = \frac{V_T t_0}{V_A}$. Durante t_1 la tartaruga percorre il tratto: $s_1 = t_1 V_T = \frac{a V_T}{V_A} = \frac{V_T^2 t_0}{V_A}$. Per percorrere s_1 Achille impiega il tempo $t_2 = \frac{s_1}{V_A} = \frac{t_1 V_T}{V_A} = \frac{a V_T}{V_A^2} = \frac{V_T^2 t_0}{(V_A^2)}$ ma in questo tempo t_2 la tartaruga avrà percorso il tratto: $s_2 = t_2 \cdot V_T = \frac{s_1 V_T}{V_A} = \frac{V_T^2 t_1}{V_A} = \frac{a V_T^2}{V_A^2} = \frac{V_T^3 t_0}{V_A^2}$ ed Achille per coprire s_2 impiegherà $t_3 = \frac{s_2}{V_A} = \frac{a V_T^2}{V_A^3} = \frac{V_T^3 t_0}{V_A^3}$.

Quindi dobbiamo sommare gli infiniti termini:

$$t^* = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \dots\dots t_n$$

(attenzione: Achille è partito dopo il tempo "t_0", quindi t^* è il tempo di partenza della tartaruga allineata con Achille, trascorso il tempo t_0 la tartaruga ha in vantaggio il tratto "a" e parte Achille).

Sostituendo ed evidenziando t_0 si ha:

$$t^* = t_0\left(1 + \frac{V_T}{V_A} + \left(\frac{V_T}{V_A}\right)^2 + \left(\frac{V_T}{V_A}\right)^3 + \dots\dots + \left(\frac{V_T}{V_A}\right)^n\right)$$

progressione geometrica di ragione $q = \left(\frac{V_T}{V_A}\right)$: (pag 123) di cui sappiamo fare la somma: $S_\infty = a_1\left(\frac{1}{1-q}\right)$

$$t^* = t_0\left(\frac{1}{1 - \frac{V_T}{V_A}}\right) = \frac{t_0 V_A}{V_A - V_T}$$ (tempo della tartaruga)

$$t = t_0\left(\frac{V_T}{V_A}\,\frac{1}{1-\left(\frac{V_T}{V_A}\right)}\right) = \frac{t_0 V_T}{V_A - V_T} = \boxed{t = \left(\frac{a}{V_A - V_T}\right)}$$ (tempo di Achille.)

Il risultato concorda con l'algebra elementare.

Evidente che la tartaruga non sapeva che sommando infiniti termini può venire un valore finito.

Cioè la progressione geometrica per $q < 1$. ha per somma di "n" termini, con "n" tendente all'infinito, un valore finito. Ovvero la serie che esprime t^*, o $t = t^* - t_0$, è convergente.

Torniamo ai limiti.

Operazioni di passaggio al limite

Ritenuto ovvio che, la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente dei limiti (allo stesso limite) equivale al limite della somma, della differenza, del prodotto, del quoziente delle espressioni che hanno generato i singoli limiti. Cioé se: $\lim_{x \to k}(f(x)) = m$; e $\lim_{x \to k}(\varphi(x)) = n$ si ha: $\lim_{x \to k}\left(f(x) \pm \varphi(x)\right) = m \pm n$; $\lim_{x \to k}\left(f(x)/\varphi(x)\right) = m/n$ $\lim_{x \to k}\left(\varphi(x) f(x)\right) = n \cdot m$. Osserviamo anche che: $\varphi(\lim f(x)) = \lim(\varphi(f(x)))$ (funzione di funzione).

Consideriamo la frazione: $1/n$, il suo valore diventa tanto piú piccolo quanto maggiore è "n". Pensiamo quindi di far crescere "n" a numeri grandissimi, anzi per avere una visione migliore poniamo $n = 10^m$ avremo: $\frac{1}{n} = \frac{1}{10^m}$ e facciamo crescere "m" a numeri grandissimi; il valore della frazione tradotto in numero decimale sará una unitá posta all'ennesima cifra decimale: per $m = 1$; $\frac{1}{10^m} = 0{,}1$; per $m = 6$ $\frac{1}{10^m} = \frac{1}{10^6} = 0{,}000001$ (un milionesimo); se pensiamo $m =$ = un miliardo, la miliardesima cifra decimale è fuori della approssimazione dei nostri calcoli numerici, perció:

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

si usa scrivere: $\boxed{\frac{1}{\infty} = 0}$ $\boxed{\frac{1}{0} = \infty}$

Se moltiplichiamo queste uguaglianze per un numero finito N si ha:

$$\boxed{\frac{N}{\infty} = 0} \quad ; \quad \boxed{\frac{N}{0} = \infty}$$

Sono i limiti fondamentali base dei limiti notevoli

Da queste uguaglianze si deduce:

$$\boxed{0 \cdot \infty = N}$$

Cioè qualsiasi grandezza finita N può considerarsi il prodotto fra zero ed infinito.

"Ogni cosa (compreso l'uomo) è il nulla permeato di infinito" (è come una creazione).

Matematicamente le forme:

$$\boxed{\frac{0}{0}} \; ; \; \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \; ; \; \boxed{0 \cdot \infty} \; ; \; \boxed{\infty - \infty} \; ;$$

sono dette: "FORME INDETERMINATE" in quanto possono dar luogo a numeri finiti in dipendenza delle funzioni di cui si cerca il limite. Oltre i metodi che esponiamo negli esempi che seguono, per le forme indeterminate vale il teorema di l'Hospital e certi artifizi che tratteremo più avanti.

Alcuni autori considerano "forme indeterminate le espressioni: $\boxed{0^0}$; $\boxed{1^\infty}$; $\boxed{\infty^0}$ che possono presentarsi per una troppo semplicistica sostituzione dei valori limite.

per esempio: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281828 \ldots$ sostituendo senza riflettere avremo $\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^\infty = 1^\infty$; ma in effetti non è 1^∞, ma $\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^\infty$ e pur sapendo che si pone: $\frac{1}{\infty}=0$, non possiamo riguardare $\frac{1}{\infty}$ come il nulla, ma come "qualcosa" di non confrontabile con le grandezze finite, ma che, infinite volte ripetuto, può dare "qualcosa" di finito (è come un differenziale).

<u>Facciamo alcuni esempi di passaggi al limite.</u>

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^3 - x + 5}{x^3 - 6} \right) =$$ sostituendo alla $x = \infty$

$$= \frac{\infty}{\infty} = \text{forma indeterminata.}$$

Se, <u>prima di sostituire</u>, <u>dividiamo ambo i termini della frazione per la x al massimo esponente</u> (nel nostro caso per x^3) abbiamo:

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2 - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{1 - \frac{6}{x^3}} \right)$$ e sostituendo ora $x = \infty$

e rilevando che $\frac{N}{\infty} = 0$ (meglio: trascurabile rispetto ad 1) avremo:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^3 - x + 5}{x^3 - 6} \right) = 2}$$

Questo procedimento è utilizzabile quando si ha una frazione costituita dal rapporto di due polinomi dello stesso grado con limite tendente ad infinito. Se il grado del numeratore $\gtrless$ del denominatore il limite tende ad ∞, oppure a zero.

Se l'espressione precedente la x tende a zero:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^3-x+5}{x^3-6}\right) = -\frac{5}{6}}$$ (ottenuta ponendo: $x=0$)

Cerchiamo ora di memorizzare i seguenti limiti:

- Sia $a > 1$ e quindi: $\frac{1}{a} < 1$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a^n\right) = \infty \quad \cdot \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = 1 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

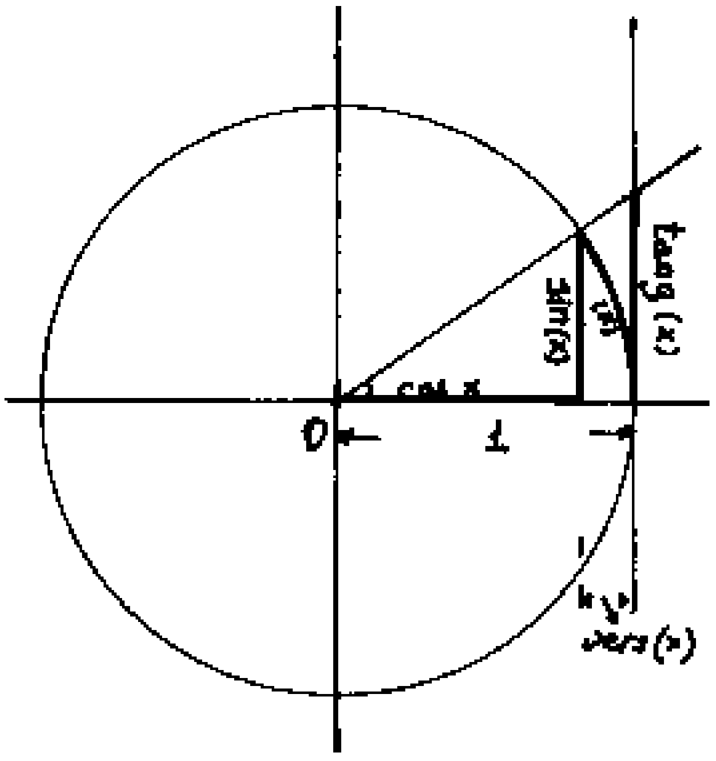
Poiché: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, gli ultimi due limiti esprimono il fatto che, essendo radici con indice n tendente all'∞, per numeri $a>1$ il valore, via via diminuisce al crescere di n; invece per $\frac{1}{a}<1$ il valore via, via, cresce al crescere di n e tendono entrambi ad uno. (Per esempio)

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{1,20}}}} \simeq \sqrt{\sqrt{\sqrt{1,10}}} \simeq \sqrt{\sqrt{1,05}} \simeq \sqrt{1,02} \simeq 1,01 \to 1$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{0,80}}}} \simeq \sqrt{\sqrt{\sqrt{0,89}}} \simeq \sqrt{\sqrt{0,95}} \simeq \sqrt{0,97} = 0,99 \to 1$$

Come si vede già con $n=16$ si può apprezzare il convergere ad 1 delle radici con indice tendente all'infinito.

Limiti notevoli (trigonometrici)



Notiamo che:

$$\boxed{sen(x) < x < tang(x)}$$

ed anche:

$$\frac{1}{sen(x)} > \frac{1}{x} > \frac{1}{tang(x)}$$

moltiplicando per sen(x), si ha

$$\frac{\cancel{sen}x}{\cancel{sen}x} > \frac{sen(x)}{x} > \frac{\cancel{sen}x \cos(x)}{\cancel{sen}x}$$

$$1 > \frac{sen(x)}{x} > \cos(x)$$

passando al limite per $x \to 0$, si ha:

$$1 > \frac{0}{0} > \cos(0)$$

cioè:

$$\boxed{1 > \lim_{x\to 0}\left(\frac{Sen(x)}{x}\right) > 1}$$

in quanto non maggiore e non minore di 1 si ha

$$\boxed{\lim_{x\to 0}.\left(\frac{sen(x)}{x}\right) = 1}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{tg(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\,\frac{1}{\cos(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos(x)}\right) =$$

$$= 1\cdot\frac{1}{\cos(0)} = 1 \qquad \boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{tg(x)}{x}\right) = 1}$$

Quando il limite di una frazione, tende ad un numero o all'unità, la velocità di avvicinamento al limite per i due termini della frazione è dello stesso ordine. (vedasi figura) $(x \to 0)$.

vediamo ora:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos(x)}{(x)} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos(x)}{(x)} \cdot \frac{(1+\cos(x))}{(1+\cos(x))} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x\,(1+\cos(x))} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right) \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)} \right) =$$

$$= 1 \, \frac{0}{2} \; ; \qquad \boxed{\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos(x)}{x} \right) = 0}$$

che può scriversi: $\boxed{\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{vers}(x)}{x} \right) = 0}$

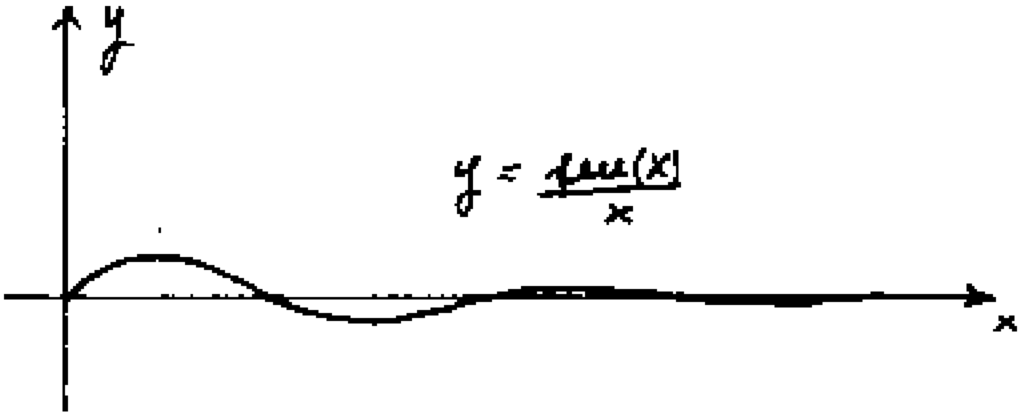
Se il limite di una frazione tende a zero vuol dire che la velocitá di avvicinamento al limite dell'espressione al numeratore è maggiore di quella del denominatore (tendendo a zero la variabile). I libri di matematica usano dire che il numeratore è infinitesimo di ordine superiore al denominatore. (vedasi la figura, mentalmente immaginandosi che il raggio ruoti diminuendo x ($x \to 0$).

Abbiamo evidenziato passaggi algebrici elementari, per far vedere come nel passaggio al limite di una espressione si cerchi di ridurla a limiti già noti.

Sappiamo che <u>le funzioni trigonometriche non esistono per $x \to \infty$</u> infatti all'infinito x è contemporaneamente infinite volte $(\frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi)$ e quindi non è determinabile la funzione trigonometrica. Al più si dirà che il sen(x), (o cos(x)) si manterrà nel campo:

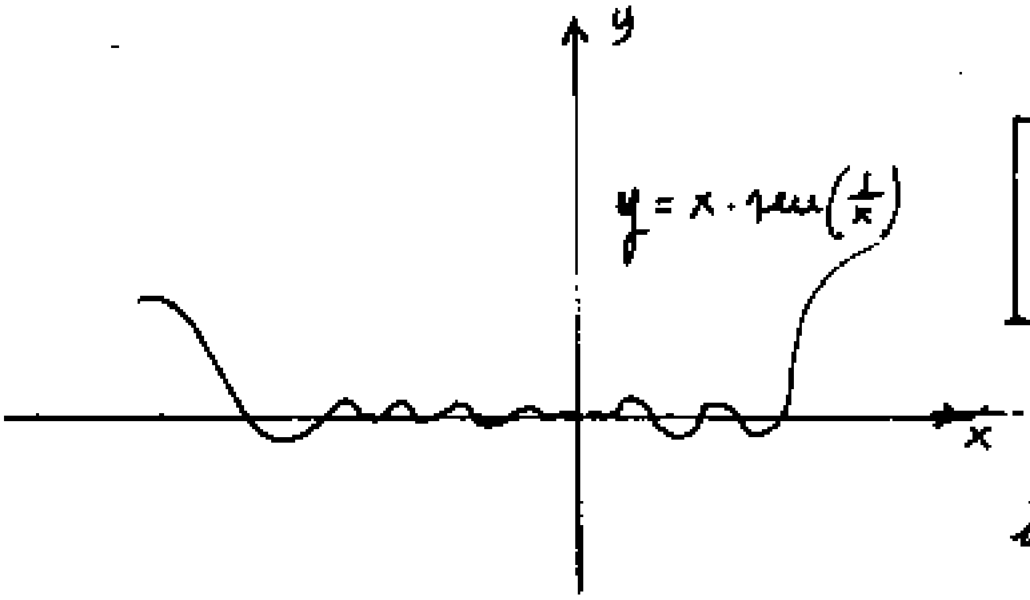
$$\boxed{-1 \le \text{sen}(x) \le +1}$$

Esistono invece i limiti:



$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\text{sen}\,x}{x}\right)=0}$$

(essendo: $N/\infty = 0$)



$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0}$$

mentre: $-1 \le \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \le +1$ il moltiplicatore x tendendo a zero moltiplica per zero $(N\cdot 0)=0$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}(ax)}{\text{sen}(bx)}\right)=\frac{a}{b}}$$

si dimostra con l'Hospital (vedi in seguito)

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\text{tg}\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\text{indeterminato}}$$

Limiti notevoli (derivati da "e")

Abbiamo già parlato del numero "e" al capitolo dei logaritmi, abbiamo già visto come l'espressione: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ al crescere di "n" si avvicina sempre più ad un valore numerico finito, che per $n \to \infty$, è chiamato "e", ma "e" è un numero trascendente ad infinite cifre decimali e quindi non rappresentabile esattamente. Quando "n" = 1000 sono giuste solo le prime due cifre decimali, con "n" = 1000 000 sono giuste le prime otto cifre decimali. Il calcolo più veloce delle cifre di "e" può farsi: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \frac{1}{n!}$ con $n \to \infty$.

$e = 2,718\,28\,1828\,45\,90452\,353\,6028\,7471352\,6624\,977\,572\,470\,936\,9995 \dots\dots$

Accettiamo la validità del limite: $\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ ne daremo, a suo tempo, la dimostrazione.

1) $$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

2) $$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x}$$

Da questi due limiti può dedursi: (ponendo $n = \frac{1}{\varepsilon}$)

3) $$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0}\left(1+\varepsilon\right)^{1/\varepsilon} = e}$$

(prendendo i logaritmi naturali)

4) $$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\right) = 1}$$ (importante!)

ed anche :

5) $$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\ln(1+\varepsilon)\Big)=0}$$

Se poniamo : $\varepsilon=(a^{\theta}-1)$; ove $a>0$ ma $a\neq 1$

poiché : $\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0}(\theta)=0}$ cioè: $(\theta\to 0)$ per $(\varepsilon\to 0)$

sostituendo nella 4) abbiamo:

$$\frac{\ln(\varepsilon+1)}{\varepsilon}=\frac{\ln(a^{\theta})}{a^{\theta}-1}=\frac{\theta\ln(a)}{a^{\theta}-1}$$

per cui

6) $$\boxed{\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\theta\ln(a)}{a^{\theta}-1}\right)=1}$$

ma $\ln(a)$ è costante al variare di θ e si può mettere in evidenza:

7) $$\boxed{\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\theta}{a^{\theta}-1}\right)=\frac{1}{\ln(a)}}$$

ed anche:

8) $$\boxed{\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{a^{\theta}-1}{\theta}\right)=\ln(a)}$$ (importante)

se poniamo $\underline{(1+\varepsilon)=(1+a)^{\mu}}$ (con μ = reale)

dovrà essere: $\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0}(a)=0}$ cioè: $(a\to 0)$ per $(\varepsilon\to 0)$

sostituendo nella 4) abbiamo:

$$\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon}=\frac{\ln(1+a)^{\mu}}{(1+a)^{\mu}-1}=\frac{\mu\ln(1+a)}{(1+a)^{\mu}-1}$$

cioè:

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{\mu \ln(1+a)}{(1+a)^\mu - 1}\right) = 1$$

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{\ln(1+a)}{(1+a)^\mu - 1}\right) = \frac{1}{\mu}$$

$$9) \quad \boxed{\lim_{a\to 0}\left(\frac{(1+a)^\mu - 1}{\ln(1+a)}\right) = \mu}$$

$$\frac{(1+a)^\mu - 1}{\ln(1+a)}\,\frac{\cdot a}{\cdot a} = \left(\frac{(1+a)^\mu - 1}{a}\right)\cdot\left(\frac{a}{\ln(1+a}\right)$$

avremo che:

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{(1+a)^\mu - 1}{\ln(1+a}\right) = \lim_{a\to 0}\left(\frac{(1+a)^\mu - 1}{a}\right)\lim_{a\to 0}\left(\frac{a}{\ln(1+a)}\right) = \mu$$

ma per il limite 4) $\lim_{a\to 0}\left(\frac{a}{\ln(1+a)}\right) = 1$

avremo:

$$10) \quad \boxed{\lim_{a\to 0}\left(\frac{(1+a)^\mu - 1}{a}\right) = \mu}$$

Quest'ultimo limite serve per dimostrare la convergenza delle serie col criterio di Kummer (vedi II vol)

Facciamo una tavola riepilogativa sostituendo le variabili $n, \varepsilon, \theta, a$ con la variabile x.

Tabella dei limiti notevoli

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0}\;;\quad\boxed{\frac{1}{\infty}=0}\;;\quad\boxed{\frac{N}{\infty}=0}\;;\quad\boxed{0\cdot\infty=N}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)=\infty}\;;\quad\boxed{\frac{1}{0}=\infty}\;;\quad\boxed{\frac{N}{0}=\infty}\;;$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}(x)}{x}\right)=1}\;;\quad\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\text{sen}(x)}\right)=1}\;;\quad\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\text{sen}(x)}{x}\right)=0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{tg}(x)}{x}\right)=1}\;;\quad\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\text{tg}(x)}\right)=1}\;;\quad\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)=0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right)=0}\;;\quad\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{1-\cos(x)}\right)=\infty}\;;\quad\boxed{\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)=1/2}\;;\quad\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}(ax)}{\text{sen}(bx)}=\frac{a}{b}\right.}\;;\quad\boxed{\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\text{tg}\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\text{indeter.}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}\;;\quad\boxed{\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e}\;;\quad\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln|1+x|}{x}\right)=1}\;;\quad\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\ln|1+x|}\right)=1}\;;\quad\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\ln|1+x|\right)=0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(x\ln(x)\right)=0}\;;\quad\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot\ln|a|}{a^x-1}\right)=1}\;;\quad\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x\ln|a|}\right)=1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}\right)=\ln|a|}\;;\quad\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{a^x-1}\right)=\log_a(e)}\;;\quad\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^a-1}{\ln|1+x|}\right)=a}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln|1+x|}{(1+x)^a-1}\right)=\frac{1}{a}}\;;\quad\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^a-1}{x}\right)=a}\;;\quad\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{(1+x)^a-1}\right)=\frac{1}{a}}$$

Si veda anche nel seguito il teorema di l'Hospital sulle forme indeterminate.

Ordine degli infiniti e degli infinitesimi.

Nell'introduzione al capitolo "Calcolo infinitesimale" abbiamo trattato questo argomento. I sostenitori dell'ordine degli infiniti e degli infinitesimi dicono:

"Dato il rapporto di due funzioni in x, se il limite di tale rapporto, per x tendente a zero, è zero; la funzione al numeratore è infinitesimo di ordine superiore al denominatore. Viceversa se il limite è ∞. Invece le funzioni al numeratore ed al denominatore sono dello stesso ordine se il limite è un numero finito" (Esempio)

Abbiamo già visto che per $x \to 0$, x, $sen(x)$, $tg(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine: $\lim_{(x \to 0)} \left(\frac{sen(x)}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{tg(x)}{x} \right) = 1$

mentre: $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{vers(x)}{x} \right) = 0$; cioè $(1 - \cos x) = vers(x)$ sono infinitesimi di ordine superiore ad x. Ricordando che: $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = 1/2$ si ha che: $(1 - \cos x) = vers(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine di x^2 (cioè del secondo ordine).

A questo proposito, nel calcolare il limite abbiamo già parlato di velocità di impiccolimento.

Quindi per $x \to 0$ vengono dette infinitesimo del 1°, 2°, 3°... n° ordine quelle funzioni che risultano rispettivamente dello stesso ordine di $x, x^2, x^3 \dots x^n$. Analogamente se il limite della frazione, per $x \to \infty$, risulta ∞ in questo caso il numeratore è un infinito di ordine superiore al denominatore.

Ma tornando agli infinitesimi, ove si suol dire che si trascurano gli infinitesimi di ordine superiore rispetto agli infinitesimi di ordine inferiore. (Attenzione l'infinitesimo di ordine superiore è ritenuto più piccolo di quello di ordine inferiore).

Purtroppo questi criteri sono applicati anche ai differenziali ove: $(dx)^2$ è detto infinitesimo di ordine superiore a (dx) e pertanto trascurabile!. Ciò senza render si conto che il differenziale ha dimensioni fisiche e quindi se dx è la più piccola dimensione lineare, $(dx)^2$ ha le dimensioni di un'area e non sono certamente confrontabili come non sono confrontabili misure in cm e misure in cm^2.

Se una stecca è lunga due metri e pesa 3 Kg, il fatto che pesi 3 Kg è irrilevante ai fini della misura della lunghezza. Ed ai limiti sarebbe assurdo dire che il differenziale peso è di ordine superiore al differenziale lunghezza o viceversa.

Però i sostenitori degli ordini degli infinitesimi obiettano che questo metodo semplifica i calcoli, ciò è vero, in moltissimi casi, in altri si hanno informazioni ridotte. Ma ciò che può in qualche modo chiarire la questione è che gli infiniti e gli infinitesimi, in effetti non hanno superato il campo reale, non sono l'Infinito (che non può esistere in campo reale neppure come limite), od il "nulla", sono solo quantità molto piccole o molto grandi.

Metodi di calcolo dei limiti

Oltre ai metodi esposti, ed al metodo che esporremo al teorema di l'Hospital, per eseguire il calcolo di un limite è spesso necessario trasformare l'espressione, tal volta invertendo la variabile e quindi il punto limite: $\left(\lim_{x\to0}\left(f(x)\right) = \lim_{\frac{1}{x}\to+\infty}\left(f(x)\right) = \lim_{t\to\infty}\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right); \text{con } t=\frac{1}{x}\right)$ Artifizi vari di moltiplicare e dividere, o, di aggiungere e togliere stesse espressioni; trasformate trigonometriche, logaritmiche, ecc; in modo da ridurre la espressione di cui si cerca il limite, alla somma o differenza, o prodotto, o quoziente di espressioni di limiti notevoli (già calcolati). Per esempio:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{(a\cancel{x})\left(\frac{\operatorname{sen}(ax)}{(ax)}\right)}{(b\cancel{x})\ \frac{\operatorname{sen}(bx)}{(bx)}}\right) = a/b\ .$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos(x)-\cos(2x)}{\cos(x)-\cos(5x)}\right) = (\text{per la prostaferesi}) = \lim_{x\to0}\left(\frac{2\operatorname{sen}(\frac{3}{2}x)\operatorname{sen}(\frac{1}{2}x)}{2\operatorname{sen}(3x)\cdot\operatorname{sen}(2x)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{sen}(\frac{3}{2}x)}{\operatorname{sen}(3x)}\right)\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}x)}{\operatorname{sen}(2x)}\right) = \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1/2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$$

Ricordando che: $\log_x(a) = \frac{1}{\log_a x}$ si ha:

$$\lim_{x\to0^+}\left(\log_e(x)\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\log_x a\right) = 0$$

Calcolo di Derivate

Sulla base dei limiti calcolati possiamo calcolare le principali derivate.

consideriamo la funzione: $\boxed{y=x^n}$

indichiamo la sua derivata : $\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^n)}{dx} = y'$

Il rapporto incrementale sarà:

$$y' = \lim_{h \to 0} \left[\frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} \right]$$

ponendo in evidenza (x_0^n) si ha:

$$y' = \lim_{h \to 0} \left(x_0^n \frac{(1+h/x_0)^n - 1}{h} \right)$$

essendo: $\lim_{h \to 0} = \lim_{\frac{h}{x_0} \to 0}$

$$y' = \lim_{(h/x_0) \to 0} \left(\frac{(1+h/x_0)^n - 1}{h/x_0} \cdot x_0^{n-1} \right)$$

ma, dalla tabella dei limiti notevoli si ha:

$$\lim_{(h/x_0) \to 0} \left(\frac{(1+(h/x_0))^n - 1}{(h/x_0)} \right) = n$$

perciò se: $\boxed{y=x^n} \rightarrow \boxed{y'=n x^{n-1}}$

formula fondamentale ove ad n può darsi qualsiasi valore, intero o frazionario, positivo o negativo ed anche nullo. Per esempio se $C=\text{costante}=C \cdot x^0=y \rightarrow y'=C0x^{-1}=0$ cioè la derivata di una costante è zero!

$y = f(x) = (x^1)a \; ; \quad y' = 1 \cdot x^{1-1} \cdot a = x^0 \cdot a = a$

$y = 3x^5 \rightarrow y' = 3 \cdot 5\, x^{5-1} = y' = 15x^4$

$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \longrightarrow y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3} \longrightarrow y' = \frac{2}{3} x^{2/3-1} = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$y = \frac{a}{\sqrt{x}} = a\, x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow y' = \frac{-a}{2} x^{-\frac{1}{2}-1} = -a/2\, x^{-3/2} = \frac{-a}{2x\sqrt{x}}$

$y = x^{m/n} \rightarrow y' = \frac{m}{m} x^{\frac{m-n}{n}}$

Dalla funzione: $\boxed{y = \operatorname{sen}(x)}$

$$y' = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x_0+h) - \operatorname{sen}(x_0)}{h} \right) \quad \text{(rapporto incrementale)}$$

sviluppando:

$$y' = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\operatorname{sen}(h) - \operatorname{sen}(x_0)}{h} \right)$$

ponendo in evidenza $\operatorname{sen}(x_0)$ e scindendo la frazione:

$$y' = \lim_{h \to 0} \left(\cos(x_0)\left(\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right) - \operatorname{sen}(x_0)\left(\frac{1-\cos(h)}{h}\right) \right)$$

cioè: $y' = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(h)}{(h)} \right) \cdot \cos(x_0) - (\operatorname{sen} x_0) \lim_{h \to 0} \left(\frac{1-\cos(h)}{(h)} \right)$

dalla tabella dei limiti notevoli:

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(h)}{(h)} \right) = 1 \; ; \; \lim_{h \to 0} \left(\frac{1-\cos(h)}{(h)} \right) = 0$$

perciò:

se: $\boxed{y = \operatorname{sen}(x)} \rightarrow \boxed{y' = \cos(x)}$

Notare che l'indice o alla x cioè x_0 stà ad indicare che la derivata è valida per tutte le x, punto per punto fissato.

$$\boxed{y = \cos(x)}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\cos(x_0+h) - \cos(x_0)}{(h)} \right)$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\cos(x_0)\cos(h) - \mathrm{sen}(x_0)\,\mathrm{sen}(h) - \cos(x_0)}{(h)} \right)$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \left(\cos(x_0) \left(\frac{\cos(h) - 1}{(h)} \right) - \mathrm{sen}(x_0) \left(\frac{\mathrm{sen}(h)}{(h)} \right) \right)$$

$$\boxed{y' = - \mathrm{sen}\, X}$$

$$\boxed{y = a^x}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \left(\frac{a^{(x_0+h)} - a^{(x_0)}}{(h)} \right)$$

$$y' = a^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \left(\frac{a^h - 1}{(h)} \right)$$

$$\boxed{y' = a^{x_0} \ln(a)}$$

$$\boxed{y = e^x}$$

caso particolare del precedente

ma: $\ln(e) = 1$ per cui:

$$\boxed{y' = e^x}$$

$$\boxed{y = \ln(x)}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\ln(x_0+h) - \ln(x_0)}{(h)} \right)$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\ln\left(\frac{(x_0+h)}{x_0} \right)}{h} \right) \frac{\cdot x_0}{\cdot x_0} = \lim_{\left(\frac{h}{x_0}\right) \to 0} \left(\frac{\ln(1 + h/x_0)}{(h/x_0)} \right) \frac{1}{x_0}$$

$$\boxed{y' = \frac{1}{x_0}}$$

$$\boxed{y = \log_a |x|}$$

ricordando i cambio di base logaritmica $y = (\ln|x|)(\log_a|e|)$ ed essendo costante il fattore: $(\log_a|e|)$

$$\boxed{y' = \left(\log_a|e|\right)\frac{1}{x}}$$

essendo: $\log_a|e| = 1/\ln|a|$

$$\boxed{y' = \frac{1}{x \ln|a|}}$$

Se avessimo fatto il rapporto incrementale:

$$y' = \lim_{h \to 0}\left(\frac{\log_a|x_0+h| - \log_a|x_0|}{h}\right)$$

saremmo arrivati:

$$y' = \lim_{\left(\frac{h}{x_0}\right) \to 0}\left(\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{(h/x_0)}\right)\frac{1}{x_0}$$

ove ricordando che: $\lim_{\theta \to 0}\left(\frac{\theta}{a^\theta - 1}\right) = 1/\ln|a|$

avremo:

$$\lim_{\theta \to 0}\left(\frac{\log_a|(1+\theta)|}{(\theta)}\right) = \lim_{\theta \to 0}\left(\frac{\theta}{a^\theta - 1}\right) = 1/\ln|a|$$

Cioè mentre per calcolare le derivate ci avvaliamo di limiti noti; inversamente avvalendoci di derivate note possiamo calcolare altri limiti.

Le regole di derivazione di funzioni

1) Somma e differenza di funzioni

se: $y = f(x) \pm \varphi(x) \pm g(x) \ldots$

$$y' = f'(x) \pm \varphi'(x) \pm g'(x)$$

cioè si deriva termine a termine.

---

2) Prodotto di funzioni

se: $y = \left(f(x)\right)\left(\varphi(x)\right)$

$$y' = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\left(f(x_0+h)\right)\left(\varphi(x_0+h)\right) - \left(f(x_0)\right)\left(\varphi(x_0)\right)}{h} \right)$$

aggiungendo e togliendo: $\left(f(x_0)\right)\left(\varphi(x_0+h)\right)$ si ha:

$$y' = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\left(\varphi(x_0+h)\right)\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right) + \left(f(x_0)\right)\left(\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)\right)}{h} \right)$$

poiché: $\lim_{h \to 0} \left(\varphi(x_0+h)\right) = \varphi(x_0)$;

$$y' = \varphi(x_0) \cdot \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right) + f(x_0) \lim_{h \to 0} \left(\frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} \right)$$

$$\boxed{y' = \left(\varphi_{x_0}\right)\left(f'_{x_0}\right) + \left(f(x_0)\right)\left(\varphi'(x_0)\right)}$$

Si suol porre: $f(x) = u$; $\varphi(x) = v$ per cui:

se: $\boxed{y = u \cdot v}$

$$\boxed{y' = u'v + v'u}$$

ricordando che:

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad ; \quad u' = \frac{du}{dx} \quad ; \quad v' = \frac{dv}{dx}$$

sostituendo ed eliminando dx : $\left(\frac{dy}{\cancel{dx}} = \frac{d(uv)}{\cancel{dx}} \right)$

si ha:

$$\boxed{d(uv) = u\,dv + v\,du}$$

importantissima espressione differenziale

---

3) Quoziente di funzioni

$$\boxed{y = \frac{f_{(x)}}{\varphi_{(x)}}}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} \left(\frac{f(x_0+h)}{\varphi(x_0+h)} - \frac{f_{(x_0)}}{\varphi_{(x_0)}} \right) \right]$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\varphi_{(x_0)} \cdot f_{(x_0+h)} - \varphi_{(x_0+h)} \cdot f_{(x_0)}}{\varphi_{(x_0)} \, \varphi_{(x_0+h)} \cdot h} \right)$$

aggiungendo e togliendo: $(f_{(x_0)}) \cdot (\varphi_{(x_0)})$ si ha: (essendo: $\lim_{h \to 0} (\varphi_{(x_0+h)}) = \varphi_{(x_0)}$)

$$y' = \lim_{h \to 0} \left[\frac{\varphi_{(x_0)} \left(f_{(x_0+h)} - f_{(x_0)} \right) - f_{(x_0)} \left(\varphi_{(x_0+h)} - \varphi_{(x_0)} \right)}{h} \right] \frac{1}{\varphi^2_{(x_0)}}$$

$$\boxed{y' = \left(\frac{f'_{(x_0)} \, \varphi_{(x_0)} - \varphi'_{(x_0)} \, f_{(x_0)}}{\varphi^2_{(x_0)}} \right)}$$

ponendo: $f_{(x)} = u$; $\varphi_{(x)} = v$

$$\boxed{y = \frac{u}{v}} \rightarrow \boxed{y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}}$$

L' espressione differenziale sarà:

$$\boxed{d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}}$$

può scriversi:

$$\boxed{\frac{d(u)}{(v)}=d\left(\frac{u}{v}\right)+\frac{u}{v^2}\,dv}$$

come esempio applicativo del quoziente di funzioni consideriamo:

$$y=\mathrm{tang}(x)=\frac{\mathrm{sen}(X)}{\cos(X)}$$

$$y'=\frac{(\cos(x))(\cos(x))-(-\mathrm{sen}(x))(\mathrm{sen}\,x)}{(\cos(x))^2}$$

$$y'=\frac{\cos^2(x)+\mathrm{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}=\left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)=\left(1+\mathrm{tg}^2(x)\right)$$

---

4) Funzione di funzione

$$\boxed{y=f(\varphi_{(x)})}$$

$$y'=\frac{d\left(f(\varphi_{(x)})\right)}{dx}\cdot\frac{d(\varphi_{(x)})}{d(\varphi_{(x)})}$$

$$\boxed{y'=\left(\frac{d\left(f(\varphi_{(x)})\right)}{d(\varphi_{(x)})}\right)\left(\frac{d(\varphi_{(x)})}{d(x)}\right)}$$

Quindi la derivata di funzione di funzione è data dal prodotto delle derivate eseguite rispetto all'operatore più prossimo. Facciamo un esempio:

$$\boxed{y=\ln|\mathrm{sen}(x)|}\rightarrow\left(\frac{d(\ln|\mathrm{sen}(x)|)}{d(\mathrm{sen}(x))}\right)\cdot\left(\frac{d(\mathrm{sen}(x))}{d(x)}\right)=\left(\frac{1}{\mathrm{sen}(x)}\right)(\cos x)=\mathrm{ctg}(x).$$

$$\boxed{y'=\mathrm{ctg}(x)}$$

Il procedimento può essere esteso a più operatori consecutivi ed è utilissimo ricordarlo in forma differenziale perché di grande ausilio nel procedimento inverso della differenziazione che è l'integrazione ove il simbolo $\int$ elide il simbolo d.

$\int dy = y$ ma: $dy = y'dx$ per cui: $y = \int y'dx$.

esempio: (log = ln)

$$\frac{d\left(\ln|tg^2(5x^3)|\right)}{d\left(tg^2(5x^3)\right)} = \frac{1}{tg^2(5x^3)}$$

$$\frac{d\left(tg^2(5x^3)\right)}{d\left(tg(5x^3)\right)} = 2\,tg(5x^3)$$

$$\frac{d\left(tg(5x^3)\right)}{d(5x^3)} = \frac{1}{\cos^2(5x^3)}$$

$$\frac{d(5x^3)}{dx} = 15\,x^2$$

moltiplicando membro a membro i primi termini ed i secondi termini si ha:

$$\frac{d\left(\ln|tg^2(5x^3)|\right)}{d(x)} = \frac{2\,tg(5x^3)}{tg^2(5x^3)}\,\frac{15\,x^2}{\cos^2(5x^3)} = \frac{30\,x^2}{\operatorname{sen}(5x^3)\cos(5x^3)}$$

$= \dfrac{60x^2}{\operatorname{sen}(10x^3)}$ cioè se: $\boxed{y = \ln|tg^2(5x^3)|}$ $\boxed{y' = \dfrac{60x^2}{\operatorname{sen}(10x^3)}}$

Il procedimento inverso: $\int d(5x^3) = 5x^3 = \int (15\,x^2)\,dx$

cioè: $\int 15x^2\,dx = \int d(5x^3)$ è portare sotto segno differenziale.

Derivata logaritmica

Ordinariamente i testi di matematica chiamano derivata logaritmica quella che noi chiameremo derivata esponenziale, che è una conseguenza della derivata logaritmica.

Consideriamo la funzione:

$$\boxed{y = \ln|f(x)|}$$

Per la derivata di funzione di funzione si ha:

$$\boxed{y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)}$$

Cosa vuol dire tuttociò?:

se: $\boxed{y = f(x)}$ anche: $\boxed{\ln|y| = \ln|f(x)|}$

derivando: (funzione di funzione)

$$\frac{1}{y} y' = \left(\ln|f(x)|\right)' = \frac{d(\ln|f(x)|)}{dx}$$

da cui:

$$\boxed{y' = y\left(\ln|f(x)|\right)'}$$

ed anche:

$$\boxed{y' = f(x)\left(\ln|f(x)|\right)'} \quad (1)$$

"La derivata di una funzione è data dal prodotto della funzione per la derivata del logaritmo naturale della funzione stessa" esempio: $\boxed{y = e^{f(x)}}$ sappiamo che, per la derivata di funzione di funzione, $y' = f'(x)\, e^{f(x)}$ allo stesso risultato si giunge applicando la (1) infatti: $\ln|e^{f(x)}| = f(x)$, e $\left(\ln|f(x)|\right)' = f'(x)$ per cui $y' = \left(e^{f(x)}\right)\left(f'(x)\right)$.

(Noi chiamiamo la (1) derivata logaritmica)

Derivata esponenziale

Sia $\boxed{y=(u)^v}$ con u e v funzioni della x

Si noti diverse modalità di funzioni in esponente:

$$y=\varphi(x)^{\psi(x)} \quad ; \quad y=\varphi(x^{\psi(x)}) \quad ; \quad y=(\varphi(x))^{\psi(x)}$$

ad evitare confusione consideriamo:

$$\boxed{y=(u)^v}$$

prendendo i logaritmi:

$$\ln|y| = v \ln|u|$$

derivando:

$$\frac{1}{y}y' = v'\ln|u| + v\frac{1}{u}u'$$

cioè:

$$\boxed{y' = y\left(v'\ln|u| + \frac{v}{u}u'\right)}$$

$$(*) \quad \boxed{\boxed{y' = (u)^v\left\{v'\ln|u| + \frac{vu'}{u}\right\}}}$$

(questa espressione viene chiamata derivata logaritmica)

esempio: $y=(\operatorname{sen}(x))^{\operatorname{sen}(x)}$

$$y' = (\operatorname{sen}(x))^{\operatorname{sen}(x)}\left\{\cos(x)\ln|\operatorname{sen}(x)| + \frac{\operatorname{sen}x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}x}\right\}$$

$$\boxed{y' = (\operatorname{sen}(x))^{\operatorname{sen}(x)}\left\{\cos(x)\left(\ln|\operatorname{sen}(x)| + 1\right)\right\}}$$

"La derivata di una funzione esponenziale è data dal prodotto della funzione stessa che moltiplica la somma dei prodotti: della derivata dell'esponente per il logaritmo naturale della base, più la derivata della base per il rapporto fra esponente e base"

Derivata di funzioni inverse

Data una espressione matematica in cui sia esplicitata la y, che risulta uguagliata ad una espressione in x, si suol dire che la y è funzione della x e si scrive: $y = f(x)$.
Se con opportuni passaggi riusciamo in quella espressione ad esplicitare la x, (che risulterà uguagliata ad una espressione in y), abbiamo che la x è funzione della y: $(x = \varphi(y))$ e questa funzione è detta: funzione inversa della $y = f(x)$.
Alcuni testi simboleggiano: $x = f^{-1}_{(y)}$ la funzione inversa, ma è improprio perché: $f^{-1}_{(y)} = \frac{1}{f(y)}$ e può portare ad ambiguità. Una notazione migliore è: $\boxed{x = \arg f[y]}$ che si legge: "x è l'argomento che nella funzione f dà y". (Argomento = variabile indipendente).

Esempi di funzioni inverse:

$$y = x^n \longrightarrow x = \sqrt[n]{y}$$

$$y = e^x = \exp(x) \longrightarrow x = \ln|y|$$

$$y = \ln|x| \longrightarrow x = \exp(y) = e^y$$

$$y = \operatorname{sen}(x) \longrightarrow x = \operatorname{arcsen}(y)$$

$$y = \operatorname{senh}(x) \longrightarrow x = \operatorname{argsenh}(y).$$

Si noti che per le funzioni circolari si usa "arc" e si legge: "arco (cioè angolo in radianti) il cui seno è y" mentre per le funzioni iperboliche si usa "arg" e si legge: "argomento il cui seno iperbolico è y".

sia: $\boxed{y = \arg f(x)}$ poniamo subito: $\boxed{x = f(y)}$

derivando:

$$x' = \frac{dx}{dy} = f'(y) = f'(\arg f(x))$$

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(\arg f(x))}}$$

cioè: "la derivata di una funzione inversa è il reciproco della deriva della funzione diretta sostituendo alla y l'espressione in x."

Esempi di derivate di funzioni inverse

$\boxed{y = \text{arcsen}(x)}$; $x = \text{sen}(y)$; $\frac{dx}{dy} = \cos(y)$

$\cos(y) = \sqrt{1 - \text{sen}^2(y)} = \sqrt{1 - x^2}$ sostituendo:

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1 - x^2} \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$\boxed{y = \text{arccos}(x)}$; $x = \cos(y)$; $\frac{dx}{dy} = -\text{sen}(y) = -\sqrt{1 - \cos^2(y)} =$

$$\frac{dx}{dy} = -\sqrt{1-x^2} \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \boxed{y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$\boxed{y = \text{arctg}(x)}$; $x = \text{tg}(y)$; $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2(y)} = 1 + \text{tg}^2(y) = (1 + x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{y' = \frac{1}{1+x^2}}$$

$\boxed{y = \ln(x)}$; $x = e^y$; $\frac{dx}{dy} = e^y = x$

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{y' = \frac{1}{x}}$$

Risultato che avevamo già trovato, facendo il limite del rapporto incrementale.

$\boxed{y = a^x}$ $x = \log_a(y)$ od anche, per il cambio di base logaritmica, oppure prendendo i logaritmi naturali della espressione iniziale:

$\ln(y) = \ln(a^x) = x\ln(a) \Rightarrow x = \frac{\ln|y|}{\ln|a|}$;

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{1}{\ln|a|}\right)\left(\frac{1}{y}\right) = \left(\frac{1}{\ln|a|}\right)\left(\frac{1}{a^x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{y' = \ln|a| \cdot a^x}$$

$\boxed{y = \text{arg}\,\text{senh}(x)}$ $x = \text{senh}(y)$ $\frac{dx}{dy} = \cosh(y)$

$$\cosh(y) = \sqrt{1 + \text{senh}^2(y)} = \sqrt{1 + x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

Il calcolo dei massimi e dei minimi relativi di una funzione

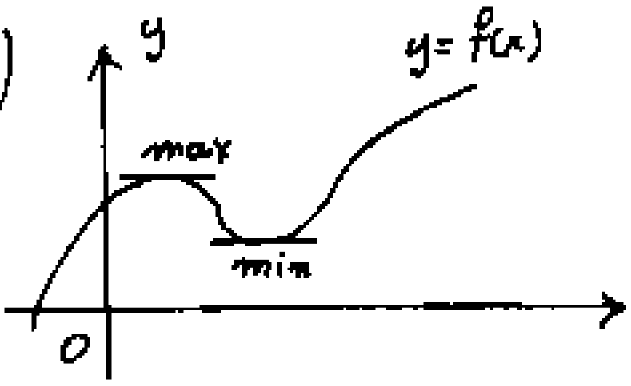
Abbiamo visto che la derivata di una funzione in un punto, rappresenta la "pendenza" della grafica della funzione in quel punto.

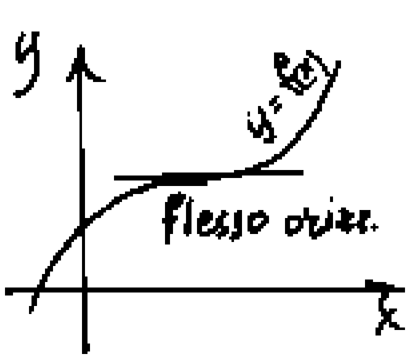
Ciò vuol dire che:

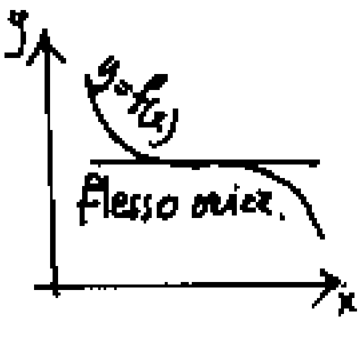
se la derivata $\underline{y'>0}$ allora $y=f(x)$ <u>è crescente</u>

" $\underline{y'<0}$ " $y=f(x)$ <u>è decrescente</u>

E per $[\,y'=0\,]$ cosa vuol dire? "Che non è né crescente, né decrescente; è quel punto ove la $f(x)$ cessa di essere crescente per diventare decrescente, (<u>Punto di massimo relativo</u>); oppure è quel punto ove la $f(x)$ cessa di essere decrescente per diventare crescente, (<u>Punto di minimo relativo</u>). Ma possono verificarsi anche altri due casi e cioè quando appare che la $f(x)$ ha cessato di crescere, anziché decrescere riprende di nuovo a crescere. Viceversa quando appare aver cessato di decrescere, inizia di nuovo a decrescere. (Sono due <u>punti di flesso orizzontale</u>)







Le derivate di ordine n.

Continuando il discorso precedente, ci domandiamo: "Com'é possibile distinguere, quando $y' = f'(x) = 0$, se trattasi di un <u>Max</u>, o un <u>min</u>, o <u>un flesso orizzontale</u>?" Noi possiamo, una volta trovata $f'(x)$, uguagliarla a zero e ricavare per quali valori di x la $f'(x) = 0$. Se in questi punti

la $f'(x)$ passa da >0 a <0 → $f'(x)$ = <u>decrescente</u> (Max)

la $f'(x)$ passa da <0 a >0 → $f'(x)$ = <u>crescente</u> (Min)

la $f'(x)$ già >0 <u>resta</u> >0 o viceversa, si ha <u>un flesso</u>.

Per vedere tuttoció senza calcolare punti dell'intorno, si puó considerare la $f'(x)$ come una nuova funzione e farne la derivata che sarà detta: "<u>Derivata seconda</u>" e si indicherà con:

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}.$$

quindi:

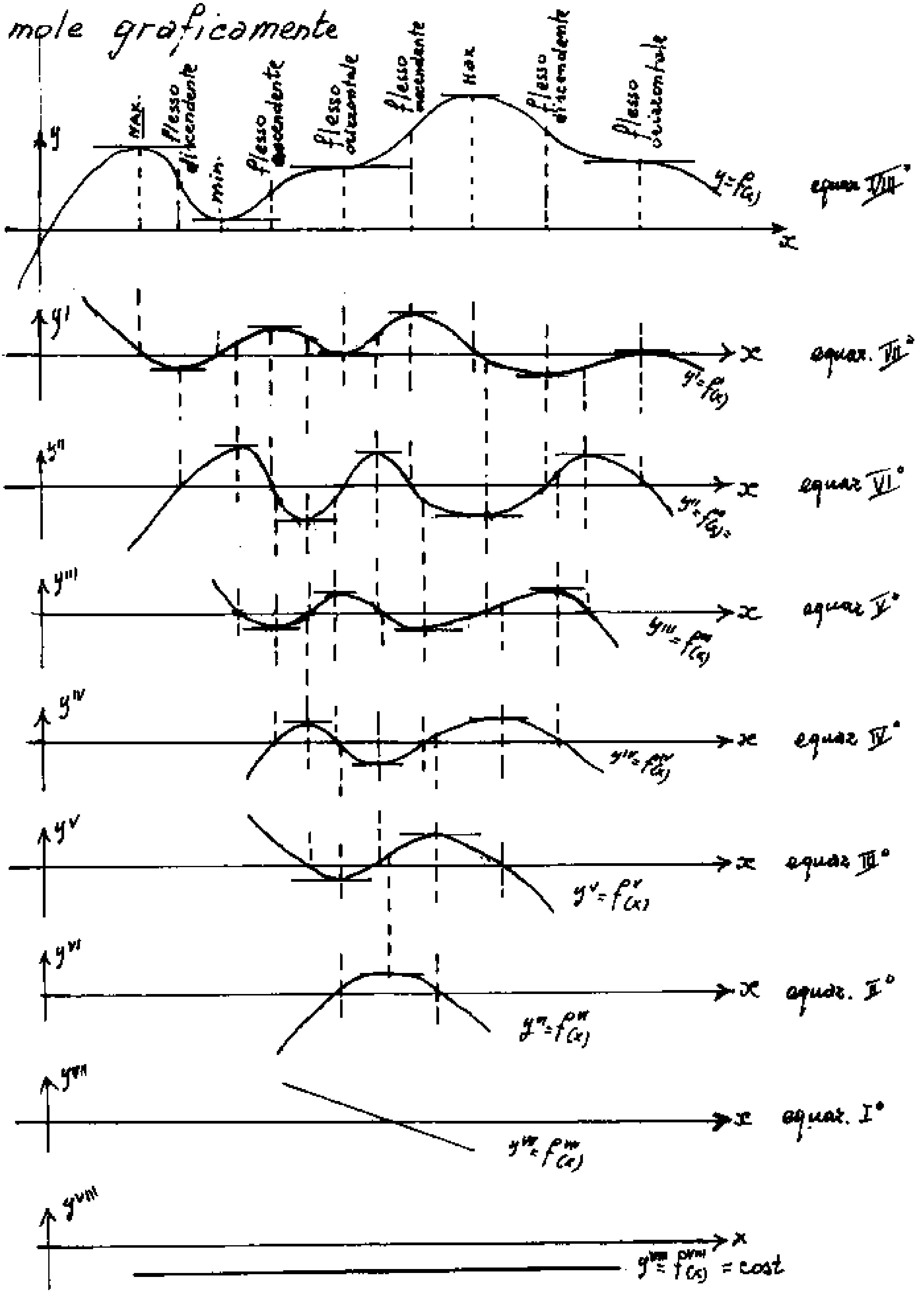
se: $y'' < 0 \rightarrow f'(x) = \underline{\text{decrescente}}\ ; \rightarrow f(x) = \underline{\text{max}}$

$y'' > 0 \rightarrow f'(x) = \underline{\text{crescente}}\ ; \rightarrow f(x) = \underline{\text{min}}$

$$y'' = 0 \rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & \rightarrow f(x) = \underline{\text{flesso orizzontale}} \\ f'(x) \neq 0 & \rightarrow f(x) = \underline{\text{flesso inclinato}} \end{cases}$$

Abbiamo introdotto il concetto di derivata seconda e quindi ripetendo ancora il processo di derivazione, abbiamo il concetto di derivata di ordine "n".

Vogliamo però vedere meglio queste derivate successive, partendo da una generica: $y = f(x)$, rappresentiamole graficamente



Flessi

I disegni delle $y, y', y'' \dots y^n$ sono "arrangiati" in modo che i punti zero, i punti di max e min, nonché i punti di flesso ricadano nel campo del grafico, in modo, che appaia come ad un max di una $f^n_{(x)}$ corrisponda $f^{n+1}_{(x)} = 0$ ed $f^{n+2}_{(x)} < 0$; un min di $f^n_{(x)}$ avrá $f^{n+1}_{(x)} = 0$ ed $f^{n+2}_{(x)} > 0$. Un flesso orizzontale di $f^n_{(x)}$ avrá $f^{n+1}_{(x)} = 0; f^{n+2}_{(x)} = 0$; un flesso ascendente di $f^n_{(x)}$ avrá $f^{n+1}_{(x)} > 0 ; f^{n+2}_{(x)} = 0$; un flesso discendente di $f^n_{(x)}$ avrá $f^{n+1}_{(x)} < 0 ; f^{n+2}_{(x)} = 0$.

Quindi l'essere: $f^{n+2}_{(x)} = 0$ significa punto di flesso.

Si hanno tre tipi di flesso:

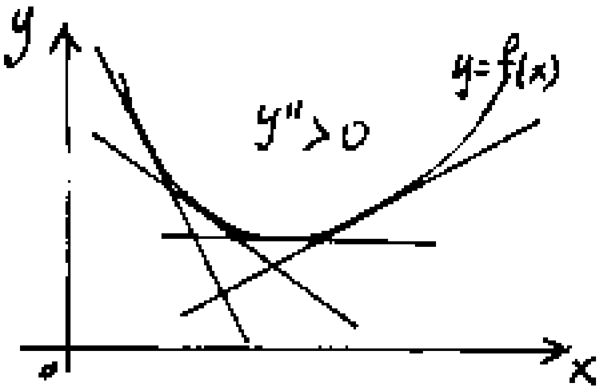
1) ascendente $f'_{(x)} > 0$; $f''_{(x)} = 0 <$ cresente → $f'''_{(x)} > 0$; decresente → $f'''_{(x)} < 0$

2) orizzontale $f'_{(x)} = 0$; $f''_{(x)} = 0 <$ cresente → $f'''_{(x)} > 0$; decrescente → $f'''_{(x)} < 0$

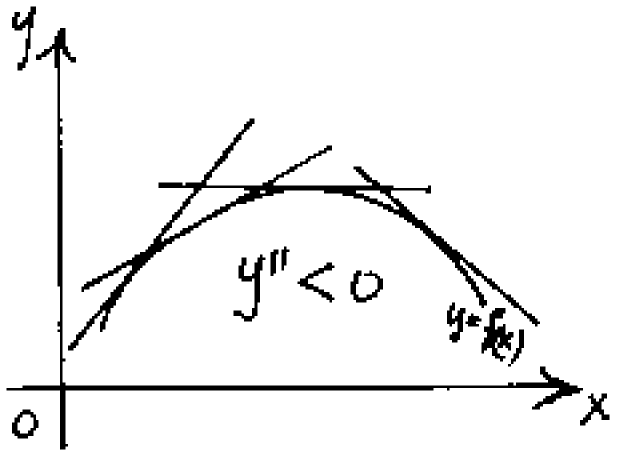
3) discendente $f'_{(x)} < 0$; $f''_{(x)} = 0 <$ crescente → $f'''_{(x)} > 0$; decrescente → $f'''_{x} < 0$

Questa "crescenza" o "decrescenza" della $f''_{(x)}$ è meglio chiarirla partendo da altri punti di vista. Dobbiamo, fin da adesso, familiarizzare con i differenziali: la $y' = dy/dx$, dobbiamo riguardarla come: $\boxed{dy = y' \cdot dx}$ ove essendo $dx = |dx|$ cioè essenzialmente positivo, il segno di "dy" dipende dal segno di y' ; infatti $y' > 0 \to dy > 0 \to y =$ crescente $y' < 0 \to dy < 0 \to y =$ decrescente ; ove il "dy" è il segmentino infinitesimo di variazione di ordinata, causato dalla variazio=

ne infinitesima "dx" ciò perchè "y" è una ordinata. Ma: $d(y') = y''d(x)$; mentre il segno di "$d(y')$" corrisponde al segno di: "y''"; $d(y')$ non è una variazione di ascissa, ma una variazione di "<u>pendenza</u>" avremo quindi che se: $\boxed{y''>0}$ una iniziale pendenza negativa, si attenuerà per diventare pendenza positiva, avremo per $y'=0$ ed $y''>0$ <u>un minimo della $f(x)$ che volgerà la concavità verso l'alto per $y''>0$</u>



Analogamente, se $\boxed{y''<0}$ la pendenza diminuirà, e se inizialmente positiva passando per zero ove: $f'(x)=0$ è un massimo della $f(x)$ che volgerà la concavità verso il basso per $y''<0$. Nelle figure abbiamo disegnato alcune rette tangenti alla $y=f(x)$ per evidenziare il variare con x della pendenza.



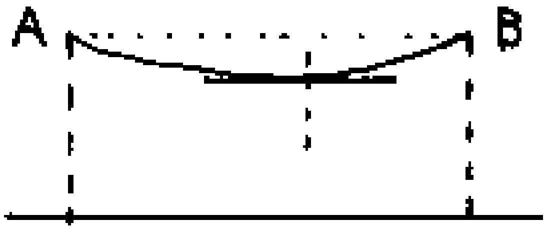
Se la $y=f(x)$ è un polinomio di grado "n" ogni derivata diminuisce di uno il grado fino ad arrivare ad una costante la cui derivata è zero e non esistono derivate ulteriori: $y=x^n$; $y'=nx^{n-1}$; $y''=n(n-1)x^{n-2}$; ... $y^{n-1}=n!x$; $y^n=n!$; $y^{n+1}=0$. ($y=x^4$; $y'=4x^3$; $y''=12x^2$; $y'''=24x$; $y^{iv}=24$; $y^{v}=0$) (ove: $24=4!$). Mentre in altre funzioni (per es $y=\mathrm{sen}(x)$) l'ordine arriva all'∞

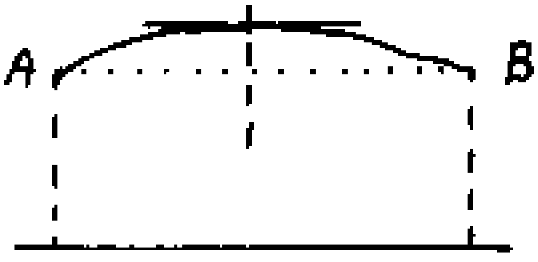
I teoremi di Rolle, di Lagrange, di Cauchy.

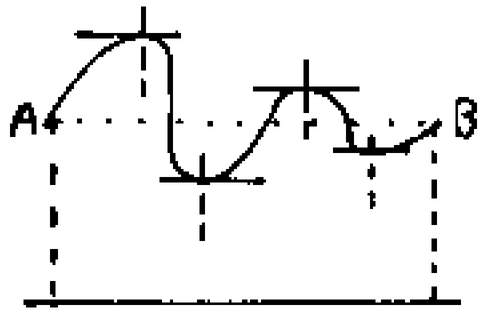
Teorema di Rolle:

"Se in un intervallo A, B, di una $y=f(x)$, si ha che: $y_A = y_B$, e la funzione è continua nell'intervallo; allora, in almeno un punto interno, si ha: $y'=0$ (cioè tangente orizzontale".

Le figure evidenziano il teorema:





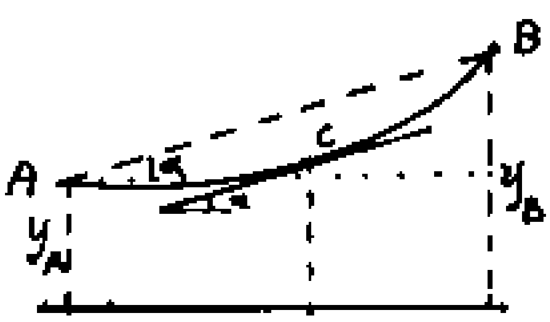


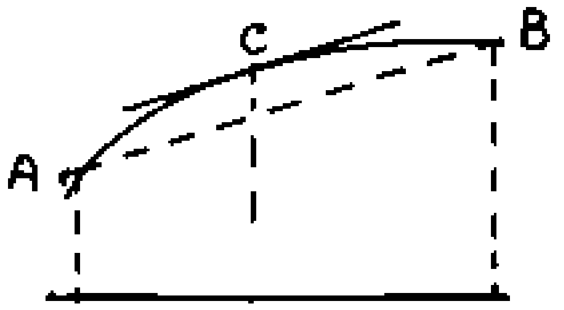
Se partendo da A, $y'<0$ (decresce la $y=f(x)$) per arrivare a B deve risalire ($y'>0$); ma, se $y=f(x)$ è continua in A,B; la y' per passare da $y'<0$ a $y'>0$ deve attraversare: $y'=0$.

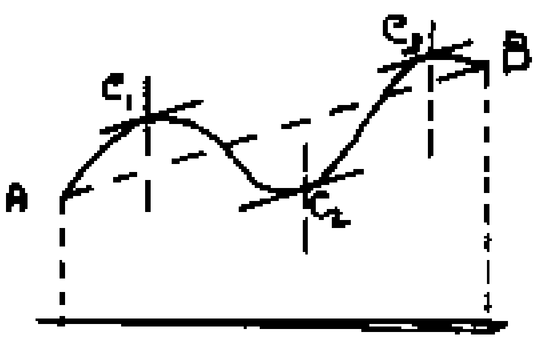
Analogamente le altre.

Teorema di Lagrange:

"Se in un intervallo A,B di una $y=f(x)$, continua in A,B si ha che: $y_A \neq y_B$, allora, in almeno un punto C, interno ad A,B, si ha: $\boxed{y'_{(c)} = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)}}$ (cioè si ha una tangente parallela alla congiungente $\overline{AB}$.)".







Se partendo da A verso B si "scosta" dalla pendenza di $\overline{AB}$, deve "recuperare" per arrivare a B; il che implica che fra pendenza maggiore, e pendenza minore, intermedia vi sia la stessa pendenza di $\overline{AB}$.

Le dimostrazioni che abbiamo esposte sono "rigorose", però sono formulate in modo tutt'altro che conforme al linguaggio dei testi di matematica. La nostra dimostrazione si basa sul fatto che per passare da valori positivi a valori negativi, con continuità in campo finito, si deve necessariamente passare per zero. (Anche attraverso infinito si può passare da valori positivi a negativi o viceversa).

Il teorema di Lagrange che noi abbiamo espresso nella forma:

$$\boxed{\frac{(y_B - y_A)}{(X_B - X_A)} = y'_{(c)} = tg(\alpha).}$$

può scriversi:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_{(C)}} = f'(x_c)$$

Poiché "C" è intermedio ad A, B (e la funzione è continua) se indichiamo con "θ" un numero minore di uno il prodotto: $\theta\Delta x$ sarà un segmento minore di Δx; perciò:

$$\boxed{x_c = x_A + \theta\Delta x}$$

cioè:

$$\boxed{\Delta y = \Delta x \left[f'(x_A + \theta\Delta x) \right]}$$

La formula:

$$\boxed{\Delta y = \Delta x \left[f'(x_A + \theta \Delta x) \right]}$$

è detta

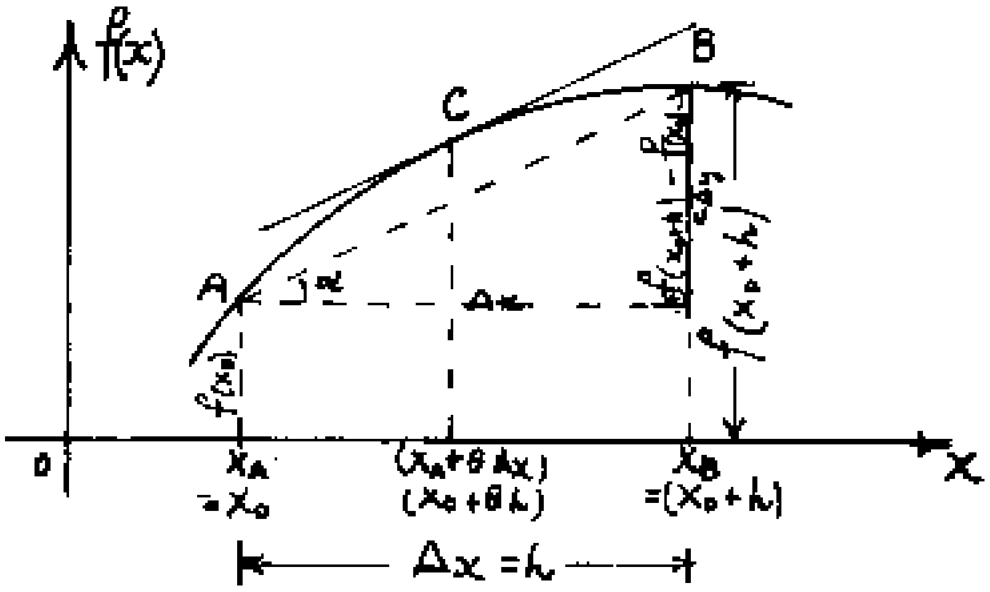
<u>Formula del valor medio</u>

od anche:

<u>Formula degli accrescimenti finiti</u>

Si noti che l'accrescimento finito Δy della funzione, per passare da A a B è dato dall'accrescimento finito $\Delta x = (x_B - x_A)$ per la derivata in un <u>punto intermedio</u> dell'intervallo A, B.

$(\Delta y = \Delta x \text{ tang}(\alpha))$



I testi di matematica che ordinariamente indicano con "h" l'incremento: $\Delta x = (x_B - x_A)$ scrivono la formula suddetta nella forma:

$$\boxed{f(x_0+h) - f(x_0) = h\left[f'(x_0+\theta h)\right]}$$

in analogia col rapporto incrementale, ove impiccolendo la figura fino a renderla quasi puntiforme, e per: $h \to 0$; $x_0 \to (x_0+\theta h) \leftarrow x_B$, la tangente in C può rimanere invariata mantenendosi parallela ad $\overline{AB} \to C$.

Si può anche dire che la <u>"pendenza" media</u> in $\overline{A,B}$ corrisponde alla <u>"pendenza"</u> della $y = f(x)$ <u>in almeno un punto intermedio ad A, B.</u>

Questo si verifica in una molteplicitá di fatti ordinari: per esempio: Qualunque sia la strada per salire (o scendere) dal paese A al paese B, posti a quota diversa, in almeno un punto intermedio, la pendenza della strada corrisponde alla pendenza media. – La portata di un fiume è variabile durante l'anno, ma vi è almeno un istante, di quell'anno, in cui la portata corrisponde con quella media.–

Con ció si giustificano le denominazioni date alla formula.

Teorema di Cauchy

"Date due funzioni: $f_{(x)}$ e $\varphi_{(x)}$, finite e continue in un intervallo A,B di ampiezza $\Delta x = h = (x_B - x_A)$, ed in tale intervallo le derivate di $f_{(x)}$, e $\varphi_{(x)}$ non si annullino mai contemporaneamente, posto $(x_A = x_0)$ ed $(x_B = x_0 + h)$, in almeno un punto interno all'intervallo AB si ha:

$$\boxed{\frac{(f_{(x_0+h)} - f_{(x_0)})}{(\varphi_{(x_0+h)} - \varphi_{(x_0)})} = \frac{f'_{(x_0+\theta h)}}{\varphi'_{(x_0+\theta h)}}}$$

Cioè: Il rapporto degli incrementi delle funzioni equivale al rapporto delle derivate in almeno un punto C $(x_c = x_0 + \theta h)$ intermedio ad AB."

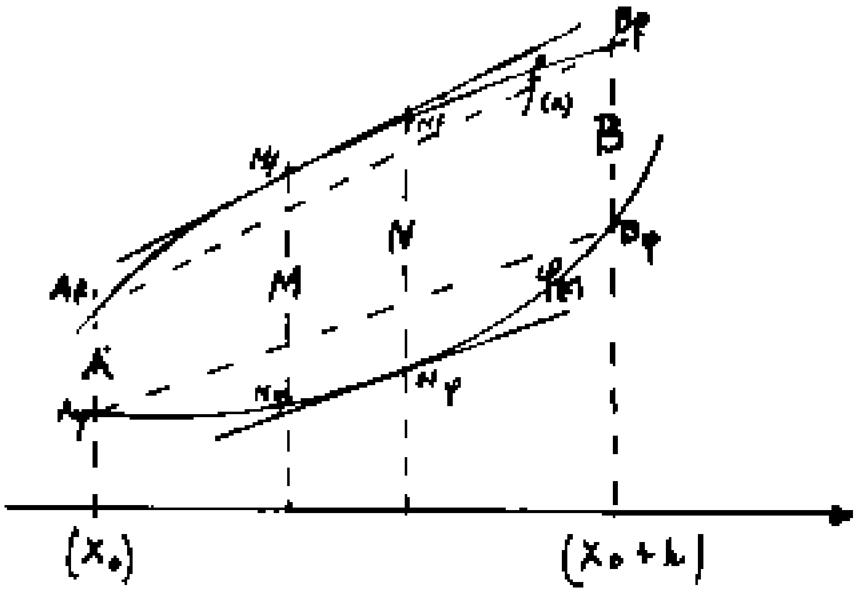
Cerchiamo di capire il teorema facendo una dimostrazione con due particolari funzioni, notando che al primo membro si hanno valori finiti.

Le pendenze medie, <u>costanti in A, B</u>, cioè:

$$\frac{f_{(x_0+h)} - f_{(x_0)}}{h} = \frac{\Delta f}{h} \quad ; \quad \frac{\varphi_{(x_0+h)} - \varphi_{(x_0)}}{h} = \frac{\Delta \varphi}{h}$$

implicano che anche il <u>loro rapporto è costante</u>.

cioè: $\frac{\Delta f}{\Delta \varphi} = \boxed{\frac{f_{(x_0+h)} - f_{(x_0)}}{\varphi_{(x_0+h)} - \varphi_{(x_0)}} = K} =$ <u>costante</u>.



Dalla figura notiamo:

<u>in A, M</u>: $f'_{(x)} > \frac{\Delta f}{h}$; $\varphi'_{(x)} < \frac{\Delta \varphi}{h}$

per cui: $\frac{f'_{(x)}}{\varphi'_{(x)}} > \left(\frac{\Delta f}{\Delta \varphi} = K\right)$

in N, B: $f'_{(x)} < \frac{\Delta f}{h}$; $\varphi'_{(x)} \quad \frac{\Delta \varphi}{h}$

per cui: $\frac{f'_{(x)}}{\varphi'_{(x)}} < \left(\frac{\Delta f}{\Delta \varphi} = K\right)$

Per la continuità delle funzioni e quindi del loro rapporto e del rapporto delle loro derivate: $\frac{f'_{(x)}}{\varphi'_{(x)}}$. che, per passare da: $\frac{f'_{(x)}}{\varphi'_{(x)}} > K$ (tratto A, M) a $\frac{f'_{(x)}}{\varphi'_{(x)}} < K$ (nel tratto N, B) necessariamente dovrà passare per un punto ove $\frac{f'_{(x)}}{\varphi'_{(x)}} = K$, (nel caso in figura tale punto C è nel tratto M, N)

La dimostrazione del teorema di Cauchy, in generale considera la funzione:

$$\boxed{F_{(x)} = \left(f_{(x)} - f_{(x_0)}\right) - K\left(\varphi_{(x)} - \varphi_{(x_0)}\right)}$$

Che dovrà azzerarsi. Si nota che $F = 0$ sia per $(x = x_0)$ (si annullano i termini in parentesi), sia per $(x = (x_0 + h))$ per la: $(\Delta f = K \Delta \varphi)$. Ma se agli estremi dell'intervallo AB la $F_{(x)}$ assume lo stesso valore, per il teorema di

Rolle dovrà azzerarsi anche la sua derivata in punto intermedio dell'intervallo A, B. Se "C" è tale punto dovrà essere: $\frac{dF_{(x_c)}}{dx} = 0$ cioè derivando l'espressione:

$$\frac{dF_{(x)}}{dx} = f'_{(x_c)} - K\,\varphi'_{(x_c)} = 0$$

e posto: $x_c = (x_0 + \theta h)$ avremo:

$$\boxed{\frac{f'_{(x_0+\theta h)}}{\varphi'_{(x_0+\theta h)}} = K = \frac{f_{(x_0+h)} - f_{(x_0)}}{\varphi_{(x_0+h)} - \varphi_{(x_0)}}}$$

e resta dimostrato il teorema.

Facciamo un esempio:

Sia: $f_{(x)} = \text{sen}(x)$; $\varphi_{(x)} = \cos(x)$; $f'_{(x)} = \cos(x)$; $\varphi'_{(x)} = -\text{sen}(x)$

$$\frac{\text{sen}(x_B) - \text{sen}(x_A)}{\cos(x_B) - \cos(x_A)} = (\text{per le prostaferesi}) = \frac{\cancel{2}\cos\left(\frac{x_B+x_A}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x_B-x_A}{\cancel{2}}\right)}{-\cancel{2}\,\text{sen}\left(\frac{x_B+x_A}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x_B-x_A}{\cancel{2}}\right)} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{x_B+x_A}{2}\right)}{-\text{sen}\left(\frac{x_B+x_A}{2}\right.} = \frac{f'_{(x)}}{\varphi'_{(x)}} \quad \text{per } x = x_c = \left(\frac{x_A+x_B}{2}\right) = (x_0 + \theta h)$$

$$\text{cioè: } = \left(x_A + \theta(x_B - x_A)\right);\ \text{per } \left(\theta = \frac{1}{2}\right);\ = \left(x_A + \frac{x_B}{2} - \frac{x_A}{2}\right) = \left(\frac{x_B+x_A}{2}\right)$$

In questo caso è stato possibile individuare anche il valore di θ. Se $f_{(x)} = x^n$; $\varphi_{(x)} = \ln|x|$ si ha:

$$\frac{x_B^n - x_A^n}{\ln|x_B| - \ln|x_A|} = \frac{n\,x_c^{n-1}}{1/x_c} = n\,x_c^n = n\left(x_A + \theta(x_B - x_A)\right)^n \text{ da cui:}$$

$$\frac{\left(x_B^n - x_A^n\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln\left|\left(\frac{x_B}{x_A}\right)^n\right|\right)^{\frac{1}{n}}} = x_A + \theta(x_B - x_A)$$

da cui θ, ma non il suo valore numerico se non fissiamo numericamente XA e XB.

Generalizzazione delle formule di Cauchy e di Lagrange

Nella formula di Cauchy poniamo: $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$ essa diventa:

$$\frac{f(x_0+h)}{\varphi(x_0+h)} = \frac{f'(x_c)}{\varphi'(x_c)} = \frac{f'(x_0+\theta h)}{\varphi'(x_0+\theta h)} ; \overset{\text{con}}{(0<\theta\leq 1)}$$

Consideriamo derivabili le funzioni fino alle derivate di ordine n, e poniamo θ in relazione al grado della derivata. Cioè poichè una derivata successiva è funzione della precedente possiamo scrivere:

$$\frac{f(x_0+h)}{\varphi(x_0+h)} = \frac{f'(x_0+\theta_1 h)}{\varphi'(x_0+\theta_1 h)} = \frac{f''(x_0+\theta_2 h)}{\varphi''(x_0+\theta_2 h)} = \dots\dots = \frac{f^{n}(x_0+\theta_n h)}{\varphi^{n}(x_0+\theta_n h)}$$

$$\boxed{\frac{f(x_0+h)}{\varphi(x_0+h)} = \frac{f^{n}(x_0+\theta_n h)}{\varphi^{n}(x_0+\theta_n h)}}$$

formula generalizzata di Cauchy

se poniamo: $\varphi_{(x)} = (x-x_0)^n$, si ha: $\varphi'_{(x)} = n(x-x_0)^{n-1}$;

$\varphi''_{(x)} = n(n-1)(x-x_0)^{n-2} \dots\dots \boxed{\varphi^{n}_{(x)} = n!}$

$\varphi_{(x)} = (x-x_0)^n$; $\varphi_{(x_0+h)} = (x_0+h-x_0)^n = h^n$

sostituendo nella generalizzata di Cauchy abbiamo:

$$\frac{f(x_0+h)}{\varphi(x_0+h)} = \frac{f(x_0+h)}{h^n} = \frac{f^{n}(x_0+\theta_n h)}{n!}$$

da cui:

$$\boxed{f(x_0+h) = \frac{h^n}{n!} f^{n}(x_0+\theta_n h)}$$

formula generalizzata di Lagrange

Formule importanti per lo sviluppo accorciato di Taylor.

Teoremi di De L'Hospital

I due teoremi di De L'Hospital esprimono:

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f_{(x)}}{\varphi_{(x)}} \right) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f'_{(x)}}{\varphi'_{(x)}} \right) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f''_{(x)}}{\varphi''_{(x)}} \right) = \dots \lim_{x \to a} \left(\frac{f^{n}_{(x)}}{\varphi^{n}_{(x)}} \right).$$

"Il limite del rapporto di due funzioni, se esiste, è uguale al limite del rapporto delle rispettive derivate".

Il primo teorema si riferisce al $\lim_{x \to a} \left(\frac{f_{(x)}}{\varphi_{(x)}} \right) = \frac{0}{0}$.

Il secondo teorema si riferisce al $\lim_{x \to a} \left(\frac{f_{(x)}}{\varphi_{(x)}} \right) = \frac{\infty}{\infty}$.

I due teoremi trovano utile applicazione nel calcolo dei limiti quando si cade in forme indeterminate (ed è una notevole applicazione delle derivate).

Esempi:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right) = \frac{0}{0} \rightarrow = \lim_{x \to 0}{}^{H} \left(\frac{\cos(x)}{1} \right) = \left(\frac{\cos(0)}{1} \right) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{(1 - \cos x)}{x^2} \right) = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0}{}^{H} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{2x} \right) = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} H' \left(\frac{\cos(x)}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x) - x\cos(x)}{x^2 \operatorname{sen}(x)} \right) = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0}{}^{H} \left(\frac{\cos(x) - (\cos x - x \operatorname{sen} x)}{2x \operatorname{sen}(x) + x^2 \cos(x)} \right) = \lim_{x \to 0}{}^{H} \left(\frac{x \operatorname{sen}(x)}{x(2 \operatorname{sen} x + x \cos x)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2 + \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x} \right) \cos(x)} \right) = \frac{1}{3}$$

Il teorema di l'Hospital vale in tutti i casi di forme indeterminate. Vediamo ora alcuni artifizi per poter applicare i due teoremi di L'Hospital anche in forme indeterminate che non si presentano come rapporto.

Artifizi per poter applicare i teoremi di De l'Hospital nelle varie forme indeterminate

Abbiamo già visto le applicazioni per le forme indeterminate: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$

1) Supponiamo che le funzioni si presentino sotto forma di prodotto: $(f(x)) \cdot (\varphi(x))$ ove sostituendo il limite si abbia la forma indeterminata: $\boxed{0 \cdot \infty}$.

In questi casi basta porre: $f(x) \cdot \varphi(x) = \dfrac{f(x)}{1/\varphi(x)}$.

Esempio:

$$\lim_{x \to 0} (x \cdot \ln|x|) = (0)(-\infty) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\ln|x|}{1/x} \right) = \lim_{x \to 0}{}^{H} \left(\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{-1/x^2} \right) = x = 0$$

---

2) Se abbiamo $\lim (f(x) - \varphi(x)) = \boxed{\infty - \infty}$

si può sostituire:

$$(f(x) - \varphi(x)) = \left(\frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot \varphi(x)}} \right)$$

Tal volta si può raggiungere lo stesso risultato applicando particolari artifizi.

Esempio:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(x - (x+1)\, e^{\frac{1}{(x+1)}} \right)} = \infty - \infty =$$

aggiungo e tolgo 1:

$$\lim_{x \to \infty} \left(-1 + (x+1) - (x+1)\, e^{\frac{1}{(x+1)}} \right) = -1 + \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1 - e^{\frac{1}{(x+1)}}}{(x+1)^{-1}} \right) = -1 + \frac{0}{0} =$$

$$= -1 + \lim_{x \to \infty}{}^{H} \left(\frac{\frac{1}{(x+1)^2}\, e^{\frac{1}{(x+1)}}}{\frac{-1}{(x+1)^2}} \right) = -1 + \lim_{x \to \infty} \left(-e^{\frac{1}{(x+1)}} \right) = -1 - e^0 = \boxed{-2}$$

In questo caso l'applicazione della formula sostitutiva avrebbe portato a calcoli laboriosi.

Per eliminare l'indeterminazione: $\boxed{\infty - \infty}$ può anche essere utile sostituire:

$$\boxed{\left(f_{(x)} - \varphi_{(x)}\right) = f(x)\left(1 - \frac{\varphi_{(x)}}{f(x)}\right)}$$.

se il limite del rapporto: $\frac{\varphi(x)}{f(x)} = 1$, si può porre $f(x) = \frac{1}{1/f(x)}$ ed avremo:

$$\lim\left(\frac{1 - \frac{\varphi(x)}{f(x)}}{1/f(x)}\right) = \frac{0}{0}$$ indeterminazione che sappiamo eliminare.

Se: $(f(x) - \varphi(x))$ ammette un limite finito L, il limite $e^{(f(x) - \varphi(x))}$ cioè: $\lim\left(e^{(f(x) - \varphi(x))}\right) = \lim\left(\frac{e^{f(x)}}{e^{\varphi(x)}}\right) = \exp(L)$ per cui: $L = \ln(\exp(L))$.

Esempio:

$$\boxed{\lim_{x \to 0}\left(\mathrm{cotg}(x) - \frac{1}{x}\right)} = \boxed{\infty - \infty}$$

$$= \lim_{x \to 0}\left[\mathrm{cotg}\,x\left(1 - \frac{1/x}{\mathrm{cotg}\,x}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x \to 0}\left[\mathrm{cotg}(x)\left(1 - \frac{\mathrm{tg}\,x}{x}\right)\right] = \boxed{\infty \cdot 0}$$ (essendo: $\lim_{x \to 0}\left(\frac{\mathrm{tg}(x)}{x}\right) = 1$); allora

poniamo: $\mathrm{cotg}(x) = \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{cotg}(x)}}$; avremo: $\lim_{x \to 0}\left(\frac{1 - \frac{1/x}{\mathrm{cotg}\,x}}{1/\mathrm{cotg}(x)}\right) = \frac{0}{0}$

essendo: $= \lim_{x \to 0}\left(\frac{1 - \left(\frac{\mathrm{tang}(x)}{(x)}\right)}{\mathrm{tg}(x)}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{x - \mathrm{tang}(x)}{x\ \mathrm{tang}(x)}\right) = \mapsto$

$$= \lim_{x \to 0}{}''\left(\frac{1 - \frac{1}{\cos^2(x)}}{\mathrm{tg}(x) + \frac{x}{\cos^2(x)}}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{-\mathrm{sen}^2(x)}{\mathrm{sen}(x)\cos x + x}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{-\mathrm{sen}(x)}{\cos(x) + \left(\frac{x}{\mathrm{sen}\,x}\right)}\right)$$

$$= \left(\frac{-\mathrm{sen}(0)}{\cos(0) + \lim_{x \to 0}\left(\frac{x}{\mathrm{sen}\,x}\right)}\right) = \left(\frac{0}{1 + 1}\right) = \left(\frac{0}{2}\right) = \boxed{0}$$

3) Espressioni del tipo: $\boxed{\left(f_x\right)^{\psi(x)}}$ al limite possono portare alle forme indeterminate:

$$\boxed{0^0}\ ;\ \boxed{1^\infty}\ ;\ \boxed{\infty^0}$$

in questi casi si cerca: $\boxed{\lim_{x\to\cdots}\left(\ln\left|\left(f(x)\right)^{\psi(x)}\right|\right)}$

Esempi:

1) $\boxed{\lim_{x\to0}\left(x^x\right)}=\boxed{0^0}\to\lim_{x\to0}\left(\ln\left|x^x\right|\right)=\lim_{x\to0}\left((x)\ln|x|\right)=$

$$=\boxed{(0)(-\infty)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln|x|}{1/x}\right)=\boxed{\frac{-\infty}{\infty}}=\lim_{x\to0}{}^{H}\left(\frac{1/x}{-1/x^2}\right)=$$

$=\lim_{x\to0}(-x)=0$ ma, se: $\lim_{x\to0}\left(\ln\left|x^x\right|\right)=0$

allora: $\boxed{\lim_{x\to0}\left(x^x\right)=e^0=1}$

2) $\boxed{\lim_{x\to1}\left(x^{\frac{1}{1-x}}\right)}=\boxed{1^\infty}\to\lim_{x\to1}\left(\ln\left|x^{\frac{1}{1-x}}\right|\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{\ln|x|}{1-x}\right)=\frac{0}{0}=$

$=\lim_{x\to1}{}^{H}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-1}\right)=-1$; se: $\lim_{x\to1}\left(\ln\left|x^{\frac{1}{1-x}}\right|\right)=-1$

allora: $\boxed{\lim_{x\to1}\left(x^{\frac{1}{1-x}}\right)=e^{-1}=\frac{1}{e}}$

3) $\boxed{\lim_{x\to0^+}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{tg(x)}\right)}=\boxed{\infty^0}$: $\lim_{x\to0}\left(\ln\left|\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x}\right|\right)=\lim_{x\to0}\left(tg(x)\ln\left|\frac{1}{x}\right|\right)=$

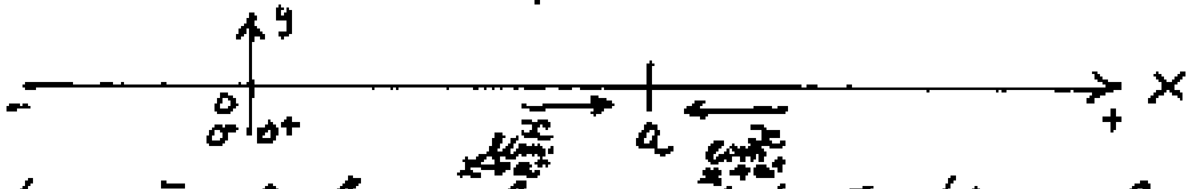
$=0\cdot\infty$; $=-\lim_{x\to0}\left(\frac{tg(x)}{x}\cdot x\ln|x|\right)=-\lim_{x\to0}\left(x\cdot\ln|x|\right)=(0)(-\infty)$

$=-\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln|x|}{1/x}\right)=\frac{+\infty}{\infty}=-\lim_{x\to0}{}^{H}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2x^2}}\right)=\lim_{x\to0}(2x)=2\cdot0=0$

se $\lim_{x\to0}\left(\ln\left|\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x}\right|\right)=0$ allora: $\boxed{\lim_{x\to0^+}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x}\right)=e^0=1}$

Limiti a destra, limiti a sinistra.

Per completare lo studio dei limiti, è bene rilevare che, se la x tende al limite "a", per valori crescenti di x (limite a sinistra di "a") oppure se tende ad "a" per valori decrescenti di x (limite a destra di "a"), il risultato puó essere nettamente diverso.

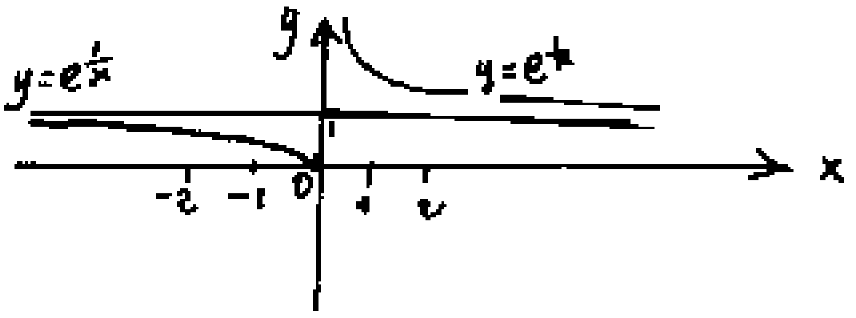


Se il limite è lo "zero" anziché dire limite a sinistra di zero, si indica: $\left(\lim_{x \to 0^-}\right)$ che vuol dire che la x tende a zero per valori negativi. Viceversa: $\left(\lim_{x \to 0^+}\right)$ vuol dire che la x tende a zero per valori positivi. Questa notazione è stata estesa a $\left(\lim_{x \to a^-}\right)$ ed $\left(\lim_{x \to a^+}\right)$ ed esprime rispettivamente il limite a sinistra di "a" cioè per valori < "a", e limite a destra di "a" cioè per valori > "a". Alcuni testi (facendo confusione) intendono il segno (-) come valori di x decrescente ed il segno (+) come valori di x crescenti. (Mettiamoci d'accordo!).

Esempio:

$$\lim_{x \to 0^+}\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = e^{\frac{1}{0}} = e^{\infty} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$



Lo studio delle funzioni

1) Semplificazioni

Data una funzione: $\boxed{y = f(x)}$, la primissima cosa da effettuare è vedere se è *possibile semplificarla* , in ogni caso metterla in una forma conveniente alla discussione, Ciò si fà *scomponendo in binomi* i prodotti notevoli ed i polinomi divisibili ; evidenziando, per quanto possibile, le *condizioni di "zero"*, cioè i valori della "x" che azzerano una *qualsiasi* parte dell'espressione: $f(x)$. Occorre peró fare molta attenzione che le semplificazioni non invalidino l'espressione.

Esempio:

$$y = \sqrt{\frac{2x^2-10x+12}{x^2+4x-21}} = \sqrt{\frac{2(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+7)}} = \sqrt{\frac{2(x-2)}{(x+7)}}$$

2) Valori assoluti

Una volta semplificata l'espressione, la cosa da fare è *togliere i* simboli di valore assoluto, dividendo le ascisse in campi ove *non opera* il valore assoluto (e quindi puó essere tolto perchè non modifica la funzione) ed in campi ove *opera* (cioè trasforma in positivi i valori negativi); in questi campi, ciò che "*opera*" il valore assoluto, possiamo farlo noi moltiplicando per (-1) e togliere il valore assoluto.

È evidente che per fare ció dobbiamo sapere quando le espressioni sotto segno di valore assoluto sono > 0 e quindi il valore assoluto puó essere tolto; e quando le espessioni sotto segno di valore assoluto sono < 0 e quindi occorre moltiplicarle per (-1) per poter togliere il simbolo di valore assoluto. Per decidere ció basta porre = zero le espressioni entro valore assoluto e calcolare per quali valori di x si azzerano, oppure calcolare se vi sono asintoti verticali per le espressioni entro valore assoluto; perché il cambio di segno avviene attraverso lo zero o attraverso infinito, (per f(x) continue). I punti di ascissa in cui le espressioni sotto abs. cambiano segno dividono i campi in cui non opera abs da quelli in cui opera. Questi campi possono a loro volta dividersi in campi di esistenza.

Per esempio l'espressione:

$$\sqrt{\frac{|2x^2-10x+12|}{(x^2+4x-21)}} = \sqrt{\frac{2|(x-3)(x-2)|}{(x-3)(x+7)}}$$

non possiamo semplificarla finché non abbiamo tolto il valore assoluto al numeratore; esso si azzera per $(x = 2)$ e per $(x = 3)$ ed è > 0 per $x < 2$ ed $x > 3$, mentre è < 0 per: $2 < x < 3$ ed in questo campo dobbiamo cambiare segno per togliere il valore assoluto.

nei tre campi abbiamo quindi:

$\boxed{-\infty < x < 2}$ vale $\sqrt{\frac{2(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+7)}} = \sqrt{\frac{2(x-2)}{(x+7)}}$.

per $\boxed{x=2}$ <u>non è semplificabile il denominatore</u> $\sqrt{\frac{0}{(x-3)(x+7)}}$

$\boxed{2 < x < 3}$ vale $\sqrt{\frac{2(2-x)}{(x+7)}}$ (immaginaria)

per $\boxed{x=3}$ (forma indeterminata) al limite immaginaria

$\boxed{3 < x < \infty}$ vale $\sqrt{\frac{2(x-2)}{(x+7)}}$

---

3) <u>Campi di esistenza</u>

Una funzione <u>non esiste</u> <u>se è immaginaria</u> (radicali ad indice di radice pari, con radicandi negativi.)

<u>non esiste</u> <u>se è il logaritmo di un numero negativo</u>

<u>non esiste</u> <u>se il suo valore è infinito</u> (∞) cioè: $\left(\frac{1}{0}\right)$

<u>non esiste</u> <u>se funzione inversa impossibile</u> (per esempio: $y = \operatorname{arcsen}(2)$ → poiché il seno ha come massimo valore 1, non esiste nessun angolo (arc) il cui seno sia 2).

<u>non esiste</u> nessuna funzione $y = f(x)$ tale che: $e^{f(x)} < 0$, cioè che "e" elevata ad $f(x)$ dia luogo ad un numero negativo

L'esempio di cui sopra ci fa' subito vedere nel campo: $\boxed{-\infty < x < 2}$ per $\boxed{x \leq -7}$ il denominatore < 0

perciò: $\boxed{-\infty < x \leq 7}$ la funzione <u>esiste</u>. $y = \sqrt{\frac{2(x-2)}{(x+7)}}$

per $\boxed{x = -7}$ " " <u>diverge all'infinito</u>

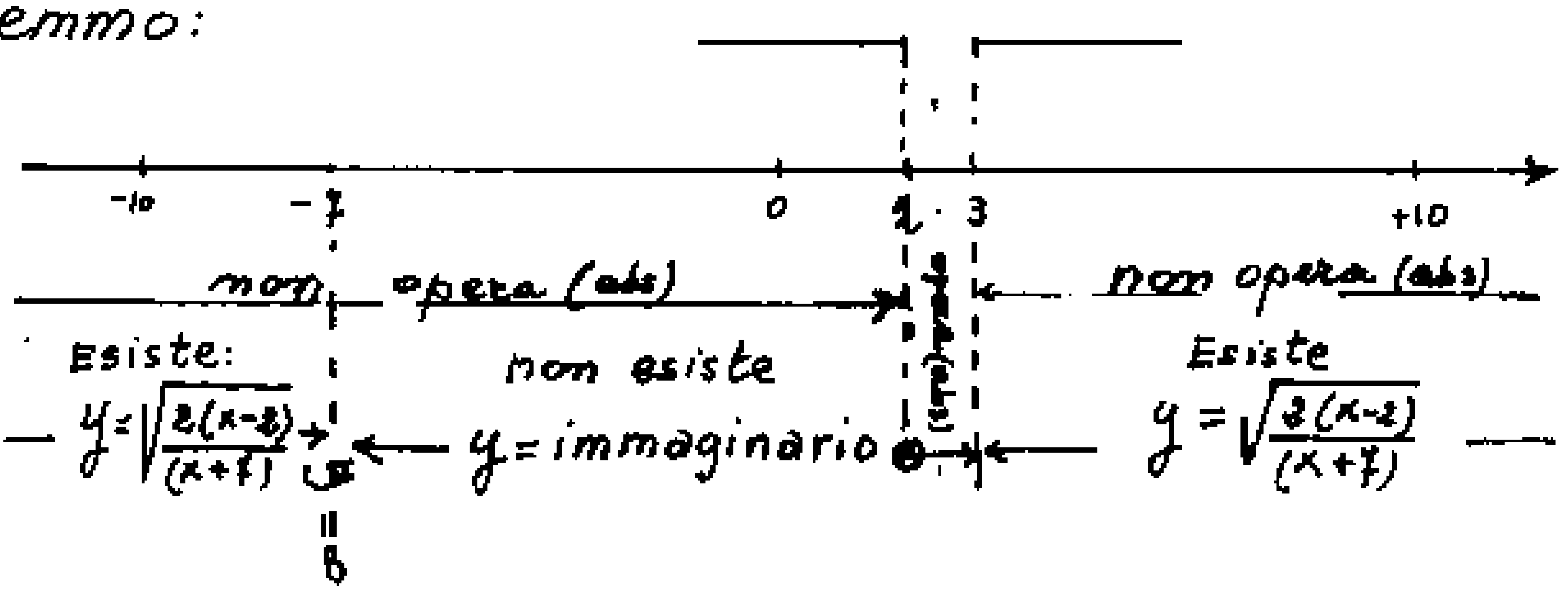
$\boxed{-7 < x < 2}$ la funzione <u>non esiste</u> (immaginaria)

$\boxed{x = 2}$ $y = \frac{0}{0}$ (punto isolato?) (implicherebbe discontinuità)

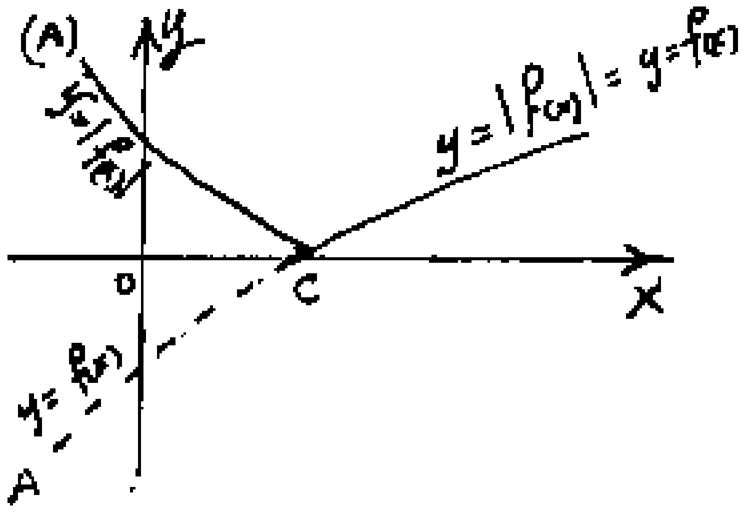
$\boxed{2 < x \leq 3}$ la funzione <u>non esiste</u> (immaginaria)

$\boxed{3 \leq x < \infty}$ la funzione <u>esiste</u> $y = \sqrt{\frac{2(x-2)}{(x+7)}}$

Le suddivisioni delle ascisse in campi di esistenza è opportuno siano graficizzate. Per l'esempio fatto avremmo:



occorre fare molta attenzione ai punti di separazione ove opera ed ove non opera il valore assoluto perchè il limite a destra ed a sinistra delle derivate sono in genere diversi, perchè il valore assoluto ribalta a positive le ordinate negative; per es.



nella figura a fianco produce una cuspide nel punto C della curva sulle ascisse, avendo ribaltato il tratto AC.

Molto importante il punto $x=2$ della funzione soprascritta:

$$y=\sqrt{\frac{|(x-3)(x-2)|}{(x-3)(x+7)}}$$

Per effetto di (abs) il numeratore è sempre >0, mentre il denominatore per $x<3$ è <0; per cui $y=$ immaginaria. Nel punto $x=2$, si ha uno: 0^- (zero nel campo negativo); e quindi è dubbio se 2 possa considerarsi <u>un punto isolato</u>: $y=0$.

Poiché (secondo i matematici) per la continuità di una funzione nel punto "a" basta che $\lim_{x \to a^-} (f(x)) = \lim_{x \to a^+} (f(x))$; nel nostro caso non solo i limiti a destra ed a sinistra sono uguali per la $f(x)$, ma lo sono anche per la $f'(x)$ (Per noi una $f(x)$ è continua in un punto quando, non solo i limiti destro e sinistro della funzione in quel punto sono uguali, ma lo sono anche i limiti delle derivate di ordine n qualsiasi da 1 a n) Nel punto $x=2$ la nostra funzione già immaginaria per $x<2$, permane immaginaria per $x>2$ e per $x=2$ è zero immaginario è da vedere se lo zero immaginario coincide con lo zero reale La questione è interessante per chi non crede dogmaticamente di possedere la Verità. Noi crediamo che a seconda di quali principi accettiamo per veri, accetteremo, l'una o l'altra impostazione. "Scusi, ma lo zero è un numero?" ... (ne abbiamo già parlato).

---

4) Operazioni preparatorie all'esposizione dati

Le suddivisioni del campo, danno già un'idea dell'entità della funzione, per cui fatto uno schema grafico come quello sopra detto, sarà bene approntare una tabella la cui prima colonna (o prime due colonne, se vogliamo tener evidenziate le divisioni dipendenti dal valore assoluto, da quelle dipendenti dai campi di esistenza).

Quindi affiancata la colonna delle x, che partendo da "$-\infty$" passa per "zero" ed arriva a "$+\infty$". Fissati questi tre punti, occorrerà, per ogni divisione di campo, scrivere due volte la (x) ove divide: una volta per il campo precedente, una volta per il campo susseguente; perché i valori di y, y', y'' possono essere diversi per i due campi. Ancora adiacenti le colonne delle: y; y'; y''; infine una colonna NOTE, ove potremo segnarsi elementi da evidenziare.

Per esempio, la funzione di cui abbiamo trattato ci porterebbe alla seguente tabella:

campi		x	y	y'	y''	NOTE
(abs)	esistenza					
$y=\sqrt{\frac{2(x-2)(x-2)}{(x-3)(x+7)}}$	**Reale** $y=\sqrt{\frac{2(x-2)}{(x+7}}$	$-\infty$	$\sqrt{2}$	0		(asintoto orizzontale)
		-7	∞	∞		(asintoto verticale)
	(immaginaria)	-7	i			
		0	i			
		2	i			
		2	$0/i$	∞		(punto singolare ?)
$\sqrt{\frac{\Delta>0}{\Delta<0}}$	(immaginaria)	2	i			
		3	i			
$y=\sqrt{\frac{2(x-2)}{(x+7)}}$	**Reale**	3	$\sqrt{1/5}$			
		$+\infty$	$\sqrt{2}$	0		(asintoto orizzontale)

una volta impiantata la tabella, lasciando spazi nei campi, conviene studiare separatamente campo per campo, poichè possono avere espressioni diverse.

5) Calcolo di altri punti caratteristici

Se è possibile calcoliamo per quali valori di x si ha: $y=0$. Si fa la derivata prima della funzione e si uguaglia a zero, per trovare gli eventuali punti di massimo o di minimo; quindi si fa la derivata seconda di $f(x)$ e vi si riporta l'ascissa per cui si ha $f'(x)=0$, ciò consente di distinguere i max ($y''<0$) dai min ($y''>0$); mentre uguagliando a zero $f''(x)=0$ possiamo trovare per quali x si verificano i punti di flesso cioè quei punti ove cambia la curvatura da verso l'alto a verso il basso o viceversa.

Notare che, per il teorema di Rolle, se in uno stesso campo vi sono due diverse x per cui $y=0$, necessariamente intermedio vi è una x per cui $y'=0$ (oppure $y'=\infty$). analogamente, se in uno stesso campo vi sono due $y'=0$ intermedio vi è $y''=0$.

Tutte queste x caratteristiche, ed i conseguenti valori di y, y', y'' si riportano ordinatamente in tabella. (Campo per campo).

Può capitare che uguagliando a zero la y', si trovi una x che è fuori del campo di validità della ($y=f(x)$) trattata è chiaro che tale valore non si riporta in tabella, ed a fianco ad esso si scrive: "fuori campo" per indicare che non deve essere considerato.

Può anche capitare che per risolvere una espressione, sia stato necessario elevarla a quadrato; poiché ciò facendo abbiamo introdotto una radice, occorre fare la verifica SEMPRE!! di tutti i risultati per vederne la validità, sia come espressione, sia come appartenenza al campo. La verifica si effettua semplicemente sostituendo.

6) Calcolo di asintoti

Un asintoto non è altro che una retta tangente la curva $y=f(x)$ all'infinito. Perciò la sua equazione è del tipo: $\boxed{y = mx + q}$

ove: $\boxed{m = f'_{(x_\infty)}}$ quindi per prima cosa dobbiamo accertare se esiste il limite: $\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(f'_{(x)}\right)}$

1) Se non esiste il limite, non esistono asintoti. (la formula in questi casi può portare ad assurdi)

2) $f'_{(\infty)} = \infty$ l'asintoto è verticale e all'∞ (non esistono asintoti in campo finito)

3) $f'_{(\infty)} = 0 = m$ esiste un asintoto orizzontale (parallelo all'asse delle x)

4) $f'_{(\infty)} \neq 0 = m$: esiste un asintoto inclinato di $\alpha = arctg(m) = arctg(f'_{\infty})$

5) Per gli eventuali asintoti verticali in campo finito, per essi si verificherà $y'_{(x_0)} = \infty$; $y_{(x_0)} = \infty$.

Torniamo ai nostri asintoti reali inclinati od orizzontali per i quali: $m = f'_{(x\to\infty)}$. la loro equazione sarà:

$$\boxed{y = f'_{(x\to\infty)} X + q}$$

equazione però comune a tutte le rette parallele inclinate dell'angolo: $\alpha = arctg(f'_{(\infty)})$; ove q= coefficiente di traslazione lineare per ora indeterminato. Il nostro asintoto però è tale che la $(f(x))$ ed: $(f'_{(\infty)}(x)+q)$ all'infinito debbono avere la stessa ordinata per cui il:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)) = \lim_{x\to+\infty}((f'_{(\infty)})x+q)$$

cioè essendo q= costante:

$$q = \lim_{x\to+\infty}(f_{(\infty)}) - \lim_{x\to+\infty}(f_{(\infty)}).$$

$$\boxed{q = \lim_{x\to+\infty}(f_{(x)} - f'_{(\infty)}x)}$$

noto "q" l'intera equazione dell'asintoto è nota.

Quindi le equazioni degli asintoti possono essere:

$y = q$ asintoto orizzontale $(f'_{(\infty)} = 0)$

$x = p$ asintoto verticale $f_{(p)} = f'_{(p)} = \infty$

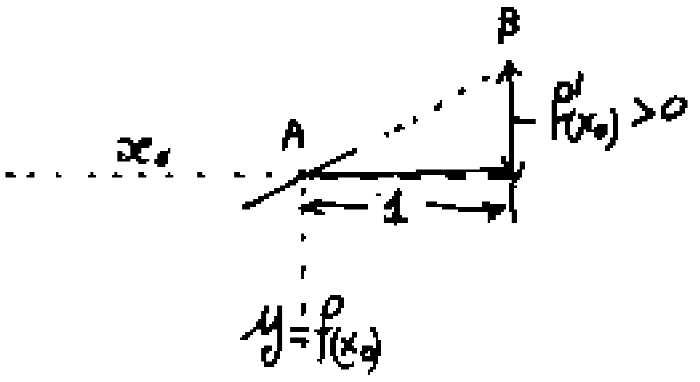
$y = mX + q$ asintoto inclinato $m = f'_{(\infty)}$; $q = \lim_{x\to\infty}(f_{(x)} - f'_{(\infty)}x)$

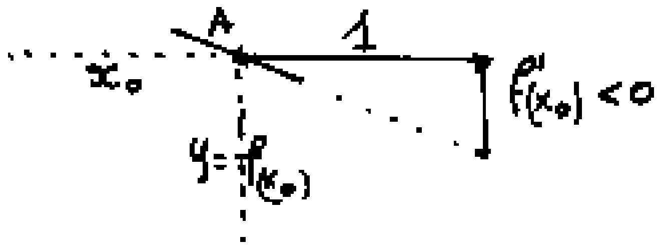
$y = mx$ asintoto inclinato per l'origine assi $m = f'_{(\infty)}$; $q = 0$

Il grafico della funzione

Completata la tabella, con tutti i punti caratteristici compresi, max, min, flessi, punti zero, asintoti, curvature siamo in grado di fare un grafico in scala.

Consideriamo un generico punto di ascissa x_0 per esso è stato calcolato y che riportiamo in ordinate su x_0; è stato calcolato y' che riportiamo in ordinate a distanza: $(x_0 + \text{uno})$ un $(y \pm y'_{(\text{uno})})$ questo nuovo punto che indichiamo quí con B, mentre indichiamo con $A \equiv (x_0, f_{(x_0)})$ non vá segnato, ma serve per fare un trattino su A (direzione AB) che indica la direzione della tangente in A alla $f(x)$.

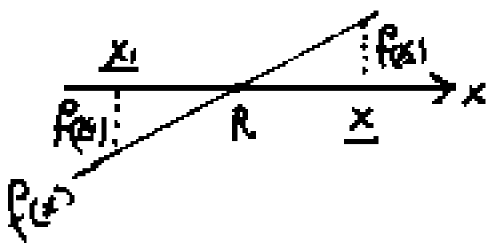




È evidente che $f'_{(x_0)}$ può essere $f'_{(x_0)} \gtrless 0$ per $f'_{(x_0)} = 0$ il trattino sarà orizzontale ed indicherà un max, oppure un min, oppure un flesso orizzontale. Attenzione: il segmento = 1 può essere preso in qualsiasi scala anche diversa da quella del grafico purché $f'_{(x_0)}$ sia riportato in questa nuova scala, (Per il teorema di Talete l'inclinazione o pendenza della tangente in A non varia se il segmento "uno" ed il segmento $f'_{(x_0)}$ sono doppi, tripli od n volte.

Abbiamo così una tratteggiata nei punti caratteristici, Qualora il grafico che tratteggia la curva presenti spazi troppo grandi fra un punto e l'altro per essere raccorolati è bene infittire i punti calcolando qualche punto intermedio – riportando gli elementi in tabella – I punti intermedi da scegliere sono quelli di facile calcolo per $x=0$; $x=1$; qualora non siano essi punti notevoli già calcolati.

Tracciati quindi gli asintoti si raccorda la curva. Se è stato impossibile calcolare le ascisse x dei punti ove si azzera la funzione (cioè $f(x)=0$) il grafico indicherà approssimativamente (se esistono) i punti in cui $f(x)=0$. Volendo un più preciso valore numerico di tali radici, si legge, dal grafico il valore approssimato della radice "$\underline{x}$" e si sostituisce nella $y=f(\underline{x})$: avremo tre casi: $f(\underline{x})>0$; $f(\underline{x})=0$ (in questo caso il valore era esatto); $f(\underline{x})<0$. Opereremo come segue:
se $f(\underline{x})>0$ ed $f'(\underline{x})>0$ ci troviamo nella condizione:

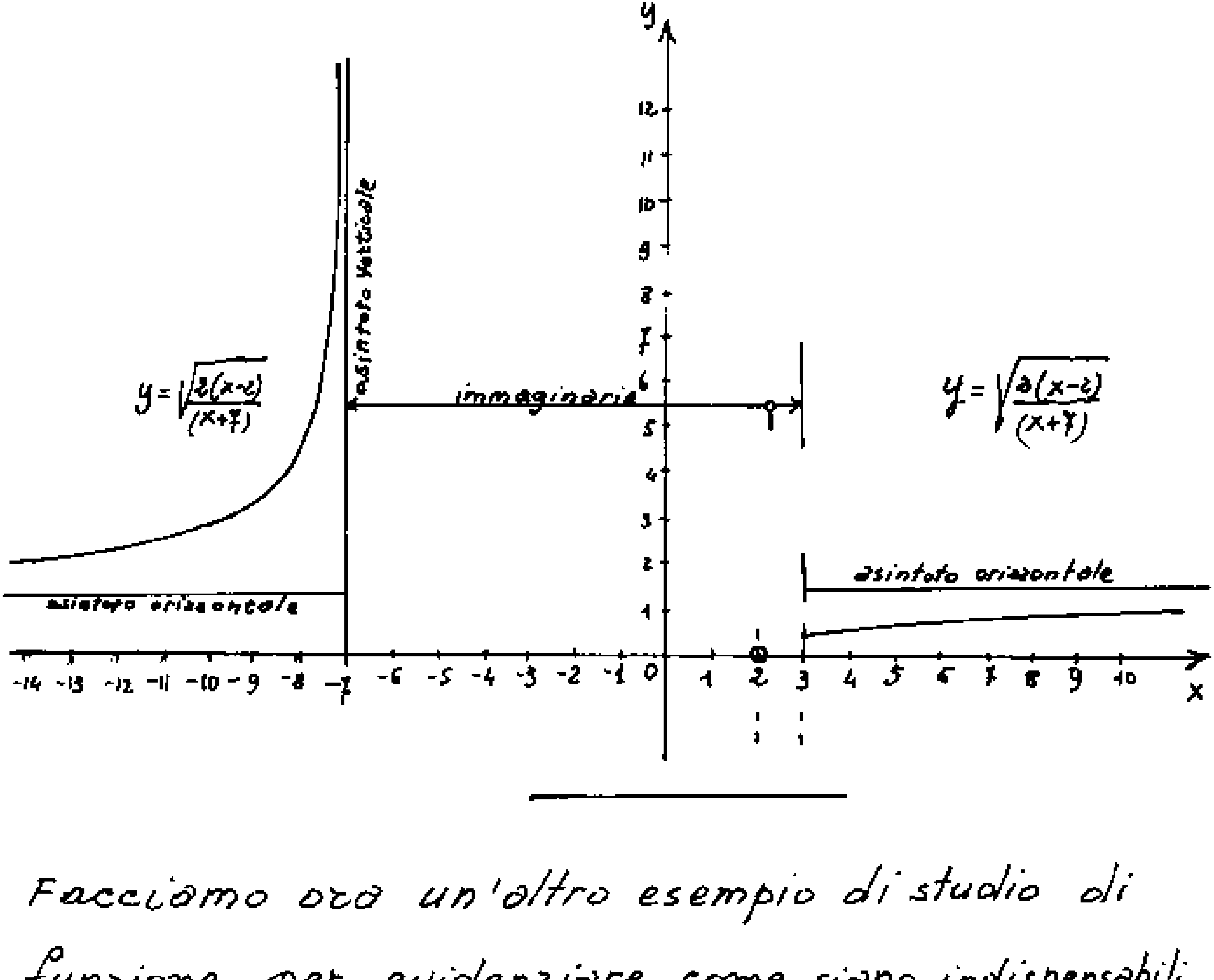


del grafico a fianco, prenderemo un $\underline{x_1}$ più piccolo di $\underline{x}$ finché: $f(\underline{x_1})<0$ quindi riportando graficamente questi elementi si può costruire che ci dia un R più approssimato. Avremmo potuto anche approssimarsi ad R con: $R=(\underline{X})\left(1-\frac{1}{f'(\underline{x})}\right)$. e ripeterla.

Il grafico della funzione che abbiamo portato ad esempio :

$$\boxed{y = \sqrt{\frac{|2x^2-10x+12|}{(x^2+4x-21)}}}$$

per valori positivi della radice:



Facciamo ora un'altro esempio di studio di funzione per evidenziare come siano indispensabili le verifiche.

ESERCIZIO

Studiare la funzione:

$$\boxed{y = (x+1) - \sqrt{|(x+3)(x-5)|}}$$

Osservazione: interpretiamo il segno "meno" davanti alla radice come fosse: $-|\sqrt{\ }|$.

Studio dei campi di esistenza.

Il radicando si annulla per $(x = -3)$ ed $(x = +5)$ esternamente alle radici il radicando è positivo e quindi possiamo togliere il valore assoluto; internamente alle radici moltiplichiamo per (-1) e togliamo il valore assoluto.

Quindi: Caso A) : $\boxed{-\infty < x \leq -3}$ e $\boxed{5 \leq x < +\infty}$

vale la formula:

$$\boxed{y = (x+1) - \sqrt{(x+3)(x-5)}}$$

caso B) : $\boxed{-3 < x < 5}$ vale la formula:

$$\boxed{y = (x+1) - \sqrt{(x+3)(5-x)}\ .}$$

Caso A)

calcolo delle $f(x)$ ai limiti:

$$\lim_{x \to -\infty} \left((x+1) - \sqrt{(x+3)(x-5)}\right) = (-\infty + 1) - \sqrt{(\infty+3)(\infty-5)}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left((x+1) - \sqrt{(x+3)(x-5)} = -\infty - \infty = -2\infty = -\infty\right.$$

per $x = -\infty \rightarrow y = -\infty$

$x = -3 \rightarrow y = -2$

$(-3 < x < +5)$ (caso B)

$x = +5 \rightarrow y = +6$

$$x = +\infty \rightarrow y = \lim_{x \to +\infty} \left[(x+1) - \sqrt{(x+3)(x-5)}\right] = \infty - \infty$$

forma indeterminata; (aggiungo e tolgo 2)

$$y = \lim_{x \to +\infty} \left[(x+3) - \sqrt{(x+3)(x-5)} - 2\right] = -2 + \lim_{x \to \infty} (x+3)\left[1 - \sqrt{\frac{x-5}{x+3}}\right] =$$

forma indeterminata: $(-2 + \infty \cdot 0) = -2 + \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{\left(1 - \sqrt{\frac{x-5}{x+3}}\right)}{\frac{1}{(x+3)}}\right) = -2 + \frac{0}{0}$

$$= -2 + \overset{H}{\lim_{x \to \infty}} \left(\frac{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+3}{x-5}} \left(\frac{(x+3)-(x-5)}{(x+3)^2}\right)}{-\frac{1}{(x+3)^2}}\right) = -2 + \lim_{x \to \infty} \left(4\sqrt{\frac{x+3}{x-5}}\right) = -2+4 = +2$$

Il fatto che per $x \to +\infty$ la $y \to +2$ fa già prevedere la esistenza di un asintoto <u>orizzontale</u>.

Vediamo se esistono in questi campi $y = 0$

elevando a quadrato la $y = f(x) = 0$, si ha:

$$(x+1)^2 = (x+3)(x-5)$$

$$(\cancel{x^2} + 2x + 1) = (\cancel{x^2} - 2x - 15) \supset x = \frac{-16}{4} = -4$$

Il valore $(x = -4)$ rientra nel caso A) però avendo elevato a quadrato abbiamo introdotto una radice per cui occorre verificare (ciò si fà semplicemente sostituendo)

$$y = \left[(-4+1) - \sqrt{(-1)(-9)}\right] = (-3 - 3) = -6 \neq 0$$

Il valore $(x = -4)$ non azzera $f(x)$. Poiché si è elevato a quadrato la radice ha perso il segno $(-)$ ed ha dato una radice che soddisfa $y = 0$ se la radice è positiva $(+3-3=0)$.

Ciò vuol dire che nei campi del caso A) la f(x) non è mai zero.

Derivando si ha:

$$y' = 1 - \frac{(x-5)+(x+3)}{2\sqrt{(x+3)(x-5)}} = \left(1 - \frac{\cancel{2}(x-1)}{\cancel{2}\sqrt{(x+3)(x-5)}}\right)$$

nei punti limite:

$$x = -3 \rightarrow y' = +\infty \quad ; \quad x = +5 \rightarrow y' = -\infty$$

la curva arriva con tangente verticale.

Calcolo dei massimi o minimi

poniamo: $y' = 0$, elevando a quadrato ne consegue:

$$(x-3)(x-5) = (x-1)^2$$

$$\cancel{x^2}\cancel{-2x}-15 = \cancel{x^2}\cancel{-2x}+1$$

assurdo: $\boxed{-15 = +1}$ che indica che nei due campi del caso A) la y' non si annulla, cioè non vi sono né massimi, né minimi.

Calcolo degli asintoti: $\left(\text{cerchiamo } \lim_{x\to\pm\infty}(y')\right)$

dividiamo ambo i termine della frazione per x

$$y' = 1 - \left(\frac{(x-1)}{\sqrt{(x+3)(x-5}}\right)\begin{matrix}(1/x)\\(1/x)\end{matrix} = \left(y' = 1 - \frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)}{\pm\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}}}\right)$$

sostituendo ad $x: \left\langle\begin{matrix}+\infty\\-\infty\end{matrix}\right.$ abbiamo:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(y'\right) = \left\langle\begin{matrix}1-\frac{1}{+\sqrt{1}} = 0 = \text{asintoto orizzontale}\\ 1-\frac{1}{-\sqrt{1}} = +2 = \text{asintoto inclinato:}(tg\alpha = 2)\end{matrix}\right.$$

Completiamo il calcolo degli asintoti, determinando il coefficiente di traslazione lineare "q"

Per l'asintoto orizzontale l'equazione è del tipo: $y=q$ che uguagliamo alla $y=f(x)$

$$q = x+1 - \sqrt{(x+3)(x-5)}$$

separando ed elevando a quadrato:

$$\left[x+(1-q)\right]^2 = x^2-2x-15$$

$$\cancel{x^2}+(1-q)^2+2x(1-q)=\cancel{x^2}-2x-15$$

dividendo per $2x$:

$$\frac{(1-q)^2}{(2x)}+(1-q)=-1-\frac{15}{2x}$$

sostituendo:

$$(x=\infty) \rightarrow (1-q)=-1 \qquad \text{cioè: } \boxed{q=2}$$

valore che già conoscevamo come $\lim_{x \to +\infty}(f(x))$

L'equazione dell'asintoto è quindi: $y=2$ e vale nel campo: $\boxed{5<x<+\infty}$

Per l'altro asintoto l'equazione è $\boxed{y=2x+q}$ ove "q" è da determinarsi uguagliando con $f(x)$.

$$(2x+q)=(x+1)-\sqrt{(x+3)(x-5)}$$

elevando a quadrato dopo aver separato la radice:

$$(1-q-x)^2 = x^2-2x-15$$

$$\cancel{x^2}-2x(1-q)+(1-q)^2=\cancel{x^2}-2x-15$$

dividendo per $(2x)$ → $-(1-q)+\frac{(1-q)^2}{(2x)}=-1-\frac{15}{(2x)}$; e per $x=\infty$

$$\cancel{-1}+q=\cancel{-1} \rightarrow \boxed{q=0}$$

l'equazione dell'asintoto è quindi: $\boxed{y = 2x}$ e vale nel campo: $\boxed{-\infty < X < -3}$ se prolungassimo tale retta nel campo del caso B, noteremmo che passa per l'origine degli assi. (ma vale solo per il caso A).

caso B) vale nel campo: $\boxed{-3 < x < 5}$

$$\boxed{y = (x+1) - \sqrt{(x+3)(5-x)}}$$

ai limiti: per $\underline{(x = -3)} \rightarrow \underline{(y = -2)}$; $\underline{(X = +5)} \rightarrow \underline{(y = +6)}$

per $\underline{(x = 0)} \rightarrow (y = \underline{1 - \sqrt{15} = -2{,}87298}\dots)$

vediamo se esiste in questo campo una $y = f(x) = 0$

separando la radice ed elevando a quadrato si ha:

$$(x^2 + \cancel{2x} + 1) = (-x^2 + \cancel{2x} + 15)$$

da cui: $\boxed{x = \pm\sqrt{7}}$ al solito facciamo la verifica sostituendo:

$$X \begin{cases} = +\sqrt{7} \rightarrow y = (\sqrt{7}+1) - \sqrt{-7 + 2\sqrt{7} + 15} = \\ -\sqrt{7} \rightarrow y = (\sqrt{7}+1) - \sqrt{-7 + 2\sqrt{7} + 15} = \end{cases}$$

$$X = \begin{cases} +\sqrt{7} \rightarrow y = (+\sqrt{7}+1) - \left(\sqrt{\frac{8+6}{2}} + \sqrt{\frac{8-6}{2}}\right) = \sqrt{7}+1 - \sqrt{7} - 1 = 0 \\ -\sqrt{7} \rightarrow y = (-\sqrt{7}+1) - \left(\sqrt{\frac{8+6}{2}} - \sqrt{\frac{8-6}{2}}\right) = \sqrt{7}+1 - \sqrt{7}+1 = -3{,}29 \end{cases}$$

Cioè solo: $\boxed{X = +\sqrt{7} = +2{,}64575}$ verifica: $y = f(x) = 0$

cioè: per $\underline{x = 2{,}64575} \rightarrow \underline{y = 0}$

Derivando si ha:

$$y' = 1 - \frac{(5-x)-(x+3)}{2\sqrt{(x+3)(5-x)}} = 1 - \frac{-2x+2}{2\sqrt{(x+3)(5-x)}} =$$

$$\boxed{y' = 1 + \frac{(x-1)}{\sqrt{(x+3)(5-x)}}}$$

per: $(x=-3) \rightarrow y' = -\infty$; $(x=+5) \rightarrow y' = \infty$;

per: $(x=0) \rightarrow y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{15}} = (+0{,}74180)$

Calcolo dei massimi e minimi

(ponendo $y'=0$

separando ed elevando a quadrato:

$$(x+3)(5-x) = (1-x)^2$$

$$(x^2-2x+1) = (-x^2+2x+15)$$

$$2x^2-4x-14=0$$

$$x^2-2x-7=0 \rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1+7} \begin{cases} x_1 = (1+2\sqrt{2}) = 3{,}828 \\ x_2 = 1-2\sqrt{2} = -1{,}828 \end{cases}$$

verifichiamo sostituendo:

per $x_1 = +3{,}82843 \rightarrow y' = 2$

per $x_2 = -1{,}82843 \rightarrow y' = 0$

per cui è valida solo $x_2 = -1{,}82843 \rightarrow y = -3{,}65685$

dalla tabella notiamo, (non avendo calcolato y'') che il punto è un minimo

---

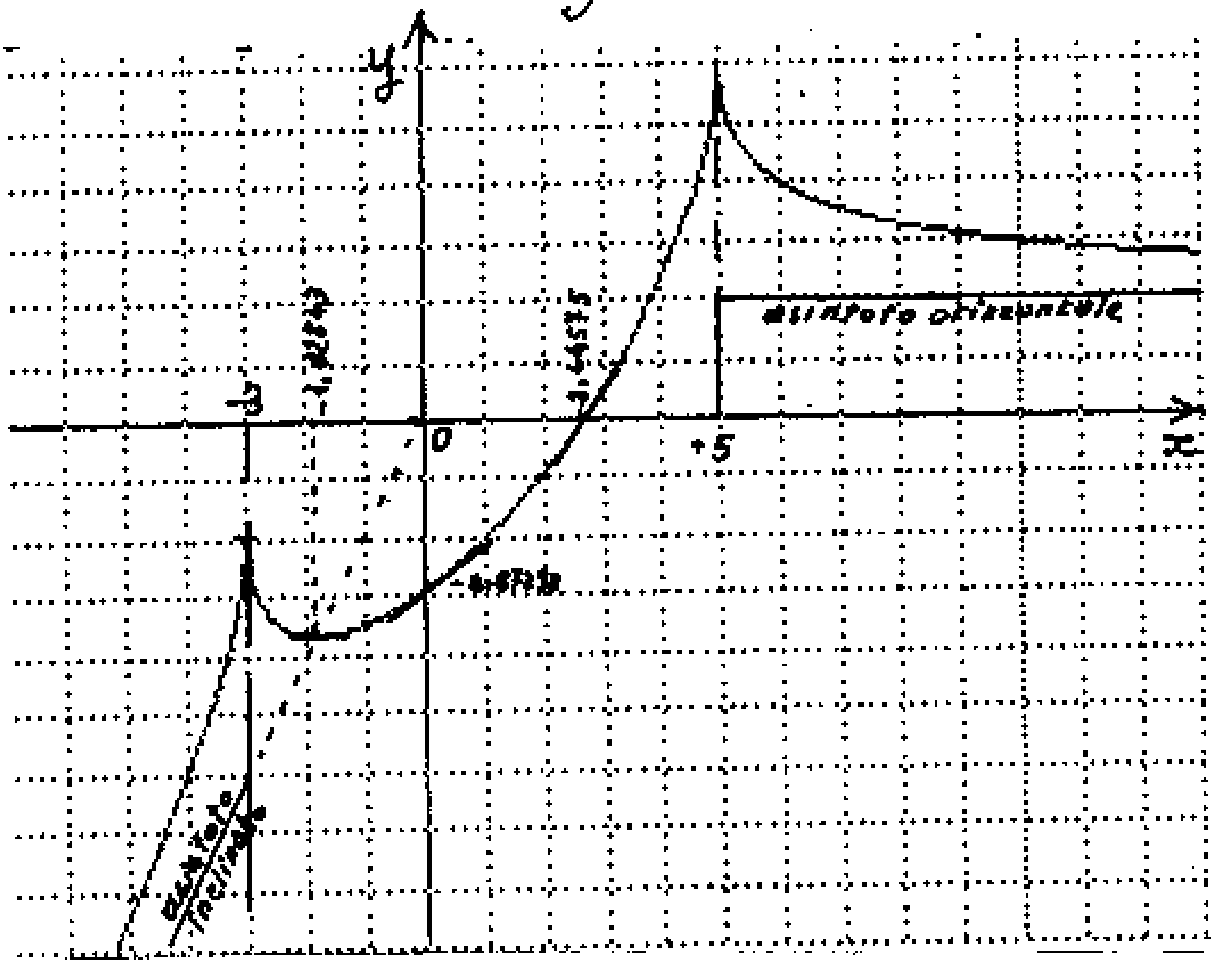
non calcoliamo asintoti perchè il campo del caso B) non si estende all'infinito.

Riportiamo la tabella:

caso	x	y	y'	y''	NOTE
A	$-\infty$	$-\infty$	$+2$		asintoto inclinato
				>0	
	-3	-2	$+\infty$		
B	-3	-2	$-\infty$		
	$-1{,}82843$	$-3{,}65685$	0		minimo relativo
	0	$-2{,}87298$	$+0{,}74180$	>0	
	$+2{,}64575$	0	$+1{,}45142$		
	$+5$	$+6$	$+\infty$		
A	$+5$	$+6$	$-\infty$		
				>0	
	$+\infty$	$+2$	0		asintoto orizzontale

Abbiamo potuto porre $y''>0$ perché dalla tabella si nota y' crescente.

Il grafico



IL Calcolo integrale

Alla parola "integrare" associamo la parola "ripristinare". Integrare una funzione significa infatti trovare un'altra funzione "primitiva" la cui derivata è la funzione integranda. Ma dire: "derivata" non è detto bene; meglio dire: "il cui differenziale è la funzione integranda".

Il simbolo di "integrale" è una "esse allungata": "$\int$" e significa: "somma di differenziali."

quindi se integriamo: $\int d(f_{(x)}) = \int(f'_{(x)}\,dx) = (f_{(x)}+c)$

Ricordiamo: è importantissimo riguardare il rapporto di differenziali: $\frac{d f_{(x)}}{d(x)} = f'_{(x)}$ scritto nella forma:

$$\boxed{d(f_{(x)}+c) = f'_{(x)}\,d(x)}$$

ove abbiamo evidenziato una costante c "arbitraria" che sparisce derivando (differenziando).

Il processo diretto di differenziazione ed inverso di integrazione puó schematizzarsi:

$$\begin{tikzcd}
F = (f_{(x)}+c) \arrow[rr, bend left, "\substack{\text{differenziando}\\ d(F) = d(f_{(x)}+c) ="}"] & & (f'_{(x)} \cdot dx) \arrow[ll, bend left, "\substack{\text{integrando}\\ = \int(f'_{(x)}\,dx)}"]
\end{tikzcd}$$

Integrando i termini delle uguaglianze

$$\cancel{\int d}(F) = \cancel{\int d}(f(x)+c) = \int f'(x)\,dx$$

nei primi due termini i segni di integrale "$\int$" e di differenziale mutuamente si elidono per cui:

$$F = (f(x)+c) = \int f'(x)\,dx)$$

Cioè se una espressione riuscissimo a portarla tutta sotto segno di differenziale l'integrazione sarebbe immediata. Per esempio ricordando che $d(sen(x)+c) = (cos(x)\cdot dx)$ dovendo integrare:

$$\int cos(x)\,d(x) = \cancel{\int d}(sen(x)+c) = sen(x)+c$$

<u>Si notino le seguenti regole:</u>

1) <u>aggiungere o togliere una costante ad una espressione sotto segno di differenziale, il valore del differenziale non cambia</u> (perché la costante additiva sparisce per derivazione).

esempio: ricordando che: $d(ln(x)+c) = \left(\frac{1}{x}\,dx\right)$; e che $d(ln(x+a)+c) = \frac{1}{(x+a)}\,d(x+a) = \frac{1}{(x+a)}\,dx$; avremo:

$$\int\frac{dx}{(x+a)} = \int\frac{d(x+a)}{(x+a)} = \cancel{\int d}(ln(x+a)+c) = ln(x+a)+c$$

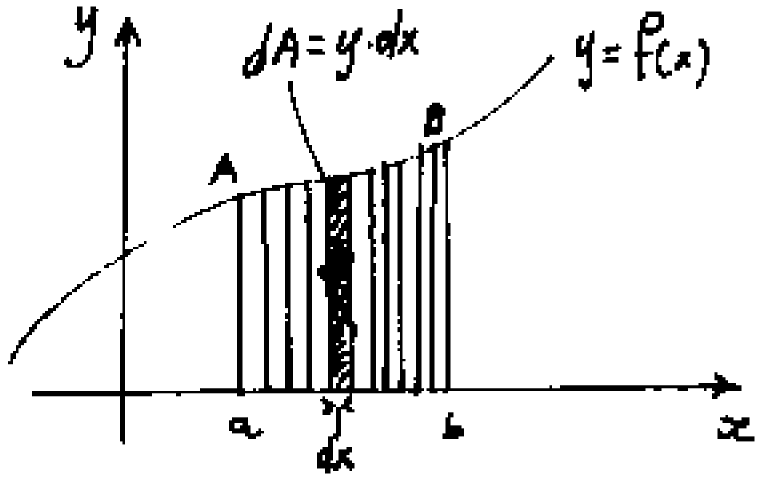
$$ln(x+a)+c = \underline{ln|x+a| + ln(c_1)} = ln|c_1(x+a)|$$

la derivata è in genere un numero finito (tg(α) per cui l'integrale si distingue in parti:

$$\int(\underline{\text{fattore finito}})\,d(\underline{\text{fattore differenziale}})$$

cioè il "*fattore finito*" è quella parte di espressione in x, una $\varphi(x)$ da riguardarsi come una $f'(x)$, che rimane fra il simbolo di integrale ed il simbolo di differenziale. Il "*fattore differenziale*" è quella espressione in x, che può ridursi alla semplice x, ma può anche essere una $\psi(x)$ abbastanza notevole e che si trova dopo il simbolo "d" di differenziale.

Consideriamo una: $y = f(x)$ rappresentata in assi cartesiani, supponiamo di voler integrare:



$$\int (y)\,d(x) = \int (f(x))\,d(x)$$

Il fattore finito è rappresentato dai segmenti di ordinata $y = f(x)$. Mentre *il fattore differenziale in (x)* cioè $d(x)$ è (come abbiamo già detto) il più piccolo possibile segmento in x, lo dobbiamo riguardare come lo spessore infinitesimo delle ordinate, le quali, una accanto all'altra generano la superficie rigata compresa fra l'asse x e la linea della $y=f(x)$

Se le ordinate le consideriamo prive di spessore, esse si sovrammetterebbero senza generare superfici. *L'area elementare infinitesima* (differenziale) di una di esse sarà:

$$dA = (y \cdot dx) = (f(x) \cdot dx) \quad \text{(rettangolino elementare)}$$

per cui integrando avremo:

$$\int d(A) = \int f_{(x)}\,dx$$

cioè integrare una: $y = f(x)$ in $d(x)$ significa calcolare l'area "<u>indefinita</u>" compresa fra l'asse x e la curva. Perciò scriviamo:

$$\int f(x)\,dx = A + C$$

ove <u>C è la costante arbitraria di integrazione.</u>

Un tale integrale è detto: <u>Integrale indefinito</u>

Supponiamo invece di volere l'area delimitata anche dalle ordinate $y_{(A)} = f_{(a)}$; ed $y_B = f_{(b)}$ cioè per $x=a$ ed $x=b$. "a" e "b" sono detti: "<u>limiti di integrazione</u>" e si pongono dal basso verso l'alto (in ordine al verso delle x) agli estremi del simbolo di integrale; cioè in modo che il limite in basso, o <u>limite inferiore</u> corrisponda al valore minore della x, ed il limite in alto o <u>limite superiore</u> al valore maggiore della x.

Perciò:

$$A = \int_a^b f_{(x)}\,dx$$

è detto: <u>integrale definito</u>.

Se sappiamo che: $d\varphi_{(x)} = \varphi'_{(x)}dx = f_{(x)}\,d(x)$

avremo:

$$A = \int_a^b f_{(x)}dx = \int_a^b d(\varphi_{(x)}) = \left[\varphi(x)\right]_a^b = \boxed{\left(\varphi_{(b)} - \varphi_{(a)}\right) = A}$$

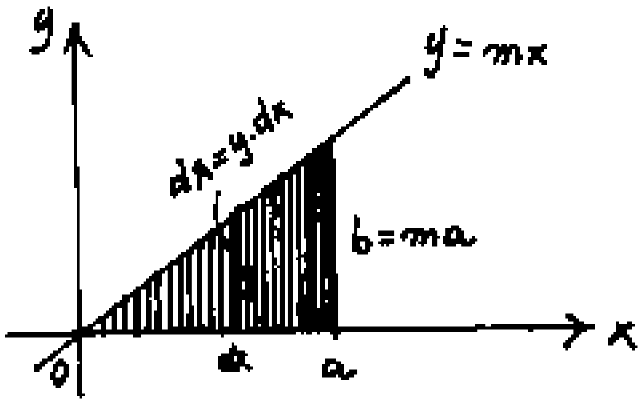
Nell'integrale definito non si riporta la costante C che si elide.

- Se nell'integrale definito si scambiano i limiti di integrazione, l'integrale cambia segno.
- Se c è un punto intermedio dell'intervallo a,b si può scindere l'integrale: $\int_a^b f(x)\,d(x) = \int_a^c f(x)\,d(x) + \int_c^b f(x)\,d(x)$.

Consideriamo ora un integrale che ricorrerà spessissimo nei calcoli; cioè: $\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{m+1}}{(m+1)} + C}$

infatti: $d\left(\frac{1}{(m+1)} x^{(n+1)} + C\right) = \frac{m+1}{n+1}\left(x^{n+1-1}\right)dx = \left(x^n dx\right)$.

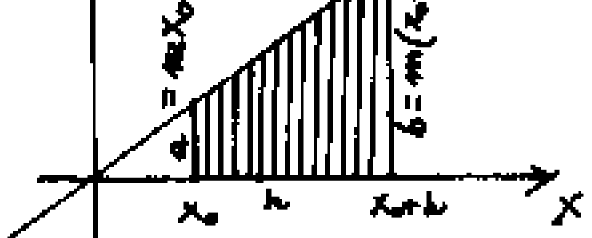
Facciamo qualche applicazione:



La retta $y = mx$ delimita l'area del triangolo rettangolo di cateti a e $b = ma$. Il contributo di area infinitesima dovuto ad una generica ordinata y per lo spessore infinitesimo dx sarà: $\boxed{dA = y \cdot dx}$ e sostituendo $y = mx$; $dA = (mx)dx$; ed integrando nei limiti da "0" ad "a" avremo: $A = \int_0^a (mx)\,dx = m\int_0^a x^1 dx =$

$$= \left[\frac{mx^2}{2}\right]_0^a = \left[\left(\frac{ma^2}{2}\right) - 0\right] = \frac{ma \cdot a}{2} \simeq \boxed{\frac{ba}{2} = A}$$

nota formula dell'area del triangolo rettangolo (semiprodotto dei cateti).



Se (vedi figura) i limiti fossero stati: (x_0) ed (x_0+h) avremmo $\left[\frac{mx^2}{2}\right]_{x_0}^{x_0+h} = \left[\frac{m}{2}\right]\left[(x_0+h)^2 - x_0^2\right]$

$$= \left(\frac{m}{2}\right)\left(2hx_0 + h^2\right) = \frac{h}{2}\left(x_0 m + (x_0+h)m\right) = \boxed{h\left(\frac{a+b}{2}\right) = A}$$

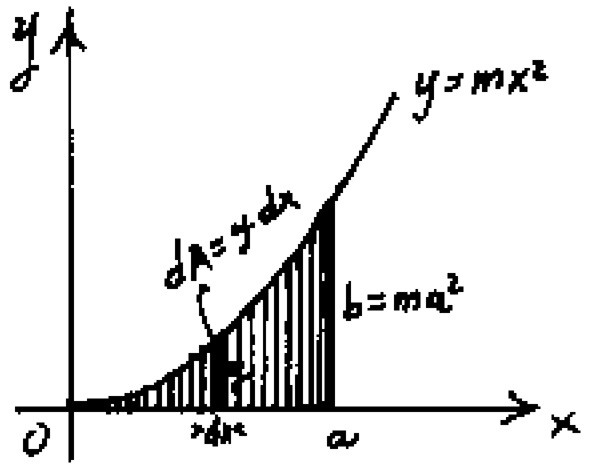
nota formula dell'area del trapezio.

Per il triangolo parabolico avremo: $A = \int_0^a y\,dx =$

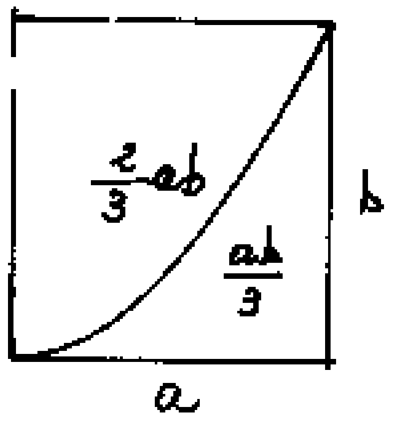
$$= A = \int_0^a (mx^2)\,d(x) = m\int_0^a (x^2)\,dx = m\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a =$$

$$= A = m\left[\frac{a^3}{3} - 0\right] = \frac{ma^2}{3}\cdot a =$$

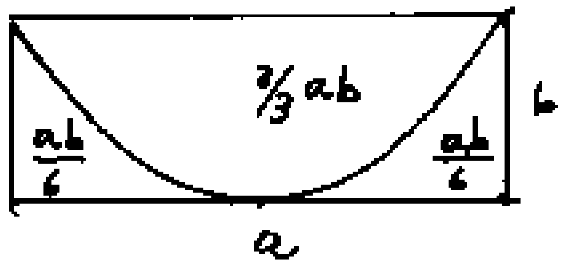
$$\boxed{A = \frac{ab}{3}}$$



L'area del triangolo rettangolo a bisettrice parabolica è un terzo del prodotto dei cateti; (se la parabola ha il vertice tangente un cateto. Cioè una diagonale parabolica (con vertice tangente un lato in uno spigolo) divide il rettangolo in due parti una doppia dell'altra.



Se la parabola è circoscritta da un rettangolo avente due lati paralleli alle corde di cui uno tangente nel vertice della parabola, l'area compresa dalla parabola e dalla sua corda è ⅔ dell'area del rettangolo.



La conoscenza di queste formule puó risparmiare calcoli tal volta laboriosi.

Ricordando che: $d\,f(x) = f'(x)\cdot dx$, sulla base delle derivate che abbiamo già calcolato, facciamo una tabella delle derivate e integrali di $y = f(x)$.

Si omette di scrivere la costante di integrazione per semplicità.

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$	$\int y\,dx$	corrispondenza di differenziali
$y = c = (\text{cost})$	0	$= cx$	$d(x) = d(x \pm c)$
x^n	$n\,x^{n-1}$	$\frac{1}{(n+1)} \cdot x^{n+1}$	$dx^n = (n\,x^{n-1})\,dx$
e^x	e^x	e^x	$e^x \cdot dx = d(e^x)$
a^x	$(\ln\lvert a\rvert)\,a^x$	$\frac{1}{(\ln\lvert a\rvert)}\,a^x$	$(\ln\lvert a\rvert)\,a^x \cdot dx = d(a^x)$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right)$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$x(\ln\lvert x\rvert - 1)$	$\frac{d(x)}{x} = d(\ln\lvert x\rvert)$
$\log_a \lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}\,\frac{1}{\ln\lvert a\rvert}$	$\left(\frac{1}{\ln\lvert a\rvert}\right)(\ln\lvert x\rvert - 1) \cdot x$	$\frac{1}{\ln\lvert a\rvert}\left(\frac{dx}{x}\right) = d(\log_a\lvert x\rvert)$
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)$	$\cos x \cdot dx = d(\operatorname{sen}(x))$
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$	$\operatorname{sen}(x)$	$-\operatorname{sen} x \cdot dx = d(\cos(x))$
$tg(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\frac{dx}{\cos^2(x)} = d(\tan x)$
$ctg(x)$	$\frac{-1}{\operatorname{sen}^2(x)}$	$\ln\lvert\operatorname{sen}(x)\rvert$	$\frac{-dx}{\operatorname{sen}^2(x)} = d(\cot(x))$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-X}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$	$\operatorname{arcsen}(x)$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\operatorname{arcsen}(x))$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{+X}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$	$\arccos(x)$	$\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arccos x)$
$\frac{1}{(1+x^2)}$	$\frac{-2X}{(1+x^2)^2}$	$\operatorname{arctg}(x)$	$\frac{dx}{(1+x^2)} = d\,\operatorname{arctg}(x)$
$\operatorname{senh}(x)$	$\cosh(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{senh}(x)\,dx = d(\cosh(x))$
$\cosh(x)$	$\operatorname{senh}(x)$	$\operatorname{senh}(x)$	$\cosh(x) \cdot dx = d(\operatorname{senh}(x))$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\ln\lvert\cosh(x)\rvert$	$\frac{dx}{\cosh^2(x)} = d(\tanh(x))$

E' bene chiarire che non ha nessun significato dire: "La derivata o l'integrale di una funzione" se non si specifica rispetto a cosa si deriva o si integra. Cioè: rispetto a quale fattore differenziale.

Questo concetto è stato ampliamente esemplificato alle derivate di funzione di funzione., ove derivavamo, via rispetto all'espressione su cui agiva l'operatore iniziando dal più esterno, l'espressione era: $y = \ln|tg^2(5x^3)|$, ed abbiamo iniziato con $\frac{d(y)}{d(tg^2(5x^3))}$; la derivata era come una $y = \ln|X|$ ove: $\frac{dy}{d(X)} = \frac{1}{(X)}$ ove la "grande X sotto l'operatore: "ln" può essere una espressione comunque grande. Analogamente per gli altri operatori:

$$\frac{d(tg^2(5x^3))}{d(tg(5x^3))} = \frac{d(tg(5x^3))^2}{d(tg(5x^3))} = 2\,tg(5x^3).$$

Per dare l'idea di una espressione comunque grande ma identificabile, la chiameremo "Carlotta"

Si ha così:

$$\frac{d(carlotta)^n}{d(carlotta)} = n(carlotta)^{n-1}$$

$$\frac{d(\ln|carlotta|)}{d(carlotta)} = \frac{1}{(carlotta)}$$

$$\frac{d(sen(carlotta))}{d(carlotta)} = \cos(carlotta)$$

Analogamente l'integrazione: $\int \frac{d(carlotta)}{\cos^2(carlotta)} = tg(carlotta) + c.$

Saper portare sotto segno di differenziale.

E' il metodo piú elegante e piú veloce per risolvere un integrale.

E' il metodo che noi abbiamo chiamato "Carlotta", peró la nostra "carlotta" dobbiamo sapercela costruire; a tal fine nella tabella delle derivate e integrali principali abbiamo fatta una colonna di corrispondenza di differenziali, perchè sia subito evidente che all'espressione: $\cos(x)\,d(x)$ posso sostituire $d(\text{sen}(x))$, oppure che all'espressione: $\text{sen}(x)\,d(x)$ posso sostituire $-d(\cos(x))$.

Facciamo un esempio.

$$\int \text{sen}(x)\cos(x)\,dx = \begin{cases} = \displaystyle\int \text{sen}(x)(\cos(x)\,dx) = \int (\text{sen}(x))\,d(\text{sen}(x)) = \frac{\text{sen}^2(x)}{2} + C_1 \\ = \displaystyle\int \cos(x)(\text{sen}(x)\,d(x)) = -\int \cos(x)\,d(\cos(x)) = \frac{-\cos^2(x)}{2} + C_2 \\ = \displaystyle\int \frac{2\,\text{sen}\,x\cos x}{2}\,d\frac{2x}{2} = \frac{1}{4}\int \text{sen}(2x)\,d(2x) = -\frac{\cos(2x)}{4} + C_3 \end{cases}$$

Nell'esempio di cui sopra la nostra "carlotta" di volta in volta era: "$\text{sen}(x)$"; "$\cos(x)$"; "$2x$".

I tre risultati <u>sono solo apparentemente diversi,</u>

infatti: $\left(-\frac{\cos^2 x}{2} + C_2\right) = \left(-\frac{(1-\text{sen}^2 x)}{2} + C_2\right) = \frac{\text{sen}^2(x)}{2} + \left(C_2 - \frac{1}{2}\right)$ cioè

$$C_1 = \left(C_2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\left(-\frac{\cos(2x)}{4} + C_3\right) = -\left(\frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{4} + C_3\right) = \left(\frac{-1+2\,\text{sen}^2 x}{4} + C_3\right) = \frac{\text{sen}^2(x)}{2} + \left(C_3 - \frac{1}{4}\right)$$

$\left(C_1 = C_3 - \frac{1}{4}\right)$ <u>Resta evidente che diversi procedimenti di integrazione possono portare a risltati apparentemente diversi in quanto accumulano una parte nella costante arbitraria di integrazione.</u>

facciamo altri esempi:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = \int \frac{dx}{(\operatorname{sen}(x)\cos(x))\left(\frac{\cos(x)}{\cos(x)}\right)} = \int \frac{dx}{\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right)\cos^2(x)} =$$

essendo: $\left(\frac{dx}{\cos^2(x)}\right) = d(tg(x))$ ed essendo: $\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = tg(x)$

avremo:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = \int \frac{d(tg(x))}{(tg(x))} = \ln|tg(x)| + C_1$$

se poniamo $C_1 = \ln|K|$; $\ln|tg(x)| + \ln|K| = \ln|K\cdot tg(x)|$.

$$\boxed{\int \frac{d(x)}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = \ln|K\cdot tg(x)|}$$

Potevamo moltiplicare e dividere per 2

$$\int \frac{d(x)}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = \int \frac{d(2x)}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = \int \frac{d(2x)}{\operatorname{sen}(2x)} \frac{(\operatorname{sen}(2x))}{(\operatorname{sen}(2x))} = \int \frac{-d(\cos(2x))}{\operatorname{sen}^2(2x)} =$$

$$= -\int \frac{d(\cos(2x))}{1-\cos^2(2x)} = -\int \frac{d(\cos(2x))}{(1-\cos(2x))(1+\cos(2x))} = \frac{-2}{2}\int \frac{d(\cos(2x))}{\frac{(1+\cos(2x))}{(1-\cos(2x))}(1-\cos(2x))^2} =$$

essendo: $d\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}dx = \frac{2dx}{(1-x)^2}$ avremo:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{1+\cos(2x)}{1-\cos(2x)}\right)}{\left(\frac{1+\cos(2x)}{1-\cos(2x)}\right)} = \boxed{-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos(2x)}{1-\cos(2x)}\right| + C_1} \left(\begin{array}{l}\text{appare}\\ \text{diverso}\\ \text{da: } \ln|K tg(x)|\end{array}\right) =$$

$$= \ln\left|\sqrt{\frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}}\right| + C_1 = \ln\left|\frac{1-\cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}\right| + C_1 = \ln\left|\frac{1-(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{1-(2\cos^2(x)-1)}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}\right| + C_1 = \ln\left|\frac{\cancel{2}(1-\cos^2(x))}{\cancel{2}\operatorname{sen}(x)\cos(x)}\right| + C_1 = \ln\left|\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right| + C_1 = \ln|tg(x)| + C_1$$

questa volta la costante è rimasta invariata.

Le operazioni da effettuare, nello studio di un integrale sono quelle che riescono a ridurre, la funzione integranda al prodotto di due funzioni di cui una è la derivata dell'altra nel differenziale in atto, nell'integrazione. Cioè una $\int \varphi(x)dx$ deve potersi ridurre ad una forma del tipo:

$$\int (f(x))^n f'(x)\,dx = \int (f(x))^n d(f(x)) = \frac{1}{n+1}(f(x))^{n+1} + c$$

$$\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = \int \frac{d(f(x))}{(f(x))} = \ln|f(x)| + c$$

$$\int [\cos(f(x))][f'(x)]\,dx = \int \cos(f(x))\, d(f(x)) = \operatorname{sen}(f(x)) + c$$

ecc. ecc. potremmo continuare.

Le regole per portare sotto segno di differenziale sono:

1) si può aggiungere o togliere una costante sotto segno di differenziale senza che cambi niente.

2) Si può moltiplicare o dividere, il fattore differenziale, per una costante, purché contemporaneamente si divida o si moltiplichi l'integrale per la stessa costante.

3) Si può cambiare segno al fattore differenziale, purché contemporaneamente si cambi segno all'integrale.

4) un fattore moltiplicativo costante da sotto segno di differenziale, può essere portato sia nel fattore finito, sia fuori segno integrale.

$$\int f(x)\, d(kx) = \int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx \quad (\text{e viceversa})$$

Esempi:

$$\int sen(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int sen(ax+b)\,d(ax) = \frac{1}{a}\int sen(ax+b)\,d(ax+b) = \frac{-1}{a}\cos(ax+b)$$

più la costante arbitraria: $\boxed{\int sen(ax+b)\,dx = \frac{-1}{a}\cos(ax+b) + C}$

La nostra "carlotta" questa volta era: "ax+b"

$$\int \frac{dx}{-4+x} = \int \frac{d(-4+x)}{(-4+x)} = \ln|(-4+x)| + C .$$

Facciamo l'integrale: $\boxed{\int \frac{60x^2}{sen(10x^3)}\,d(x)}$ (è l'inverso dell'esempio fatto a derivata di funzione di funzione, noi supponiamo di non saperlo e ragioniamo come segue:)

1) Se portiamo x^2 sotto segno di differenziale $x^2 d(x) = \frac{1}{3} d(x^3)$ riusciamo ad uguagliare la potenza della variabile sotto l'operatore: "sen".

$$\int \frac{60x^2 d(x)}{sen(10x^3)} = \int \frac{20\, d(x^3)}{sen(10x^3)} = 2\int \frac{d(10x^3)}{sen(10x^3)} .$$

Noi non sappiamo ancora che: $\int \frac{dx}{sen(x)} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$ ....
e diciamo: "sotto segno di differenziale ci occorrerebbe un operatore trigonometrico; visto che il coeff. di x^3 è pari proviamo a svilupparlo:

$$2\int \frac{d(\cancel{2}\,5\cdot x^3)}{\cancel{2}\,sen(5x^3)\cos(5x^3)} \cdot \frac{\cos(5x^3)}{\cos 5x^3} = 2\int \frac{d(5x^3)}{\frac{sen(5x^3)}{\cos(5x^3)} \cdot \cos^2(5x^3)} = 2\int \frac{d\left(tg(5x^3)\right)}{tg(5x^3)} =$$

$$2\ln|tg(5x^3)| = \qquad \boxed{\int \frac{60x^2 \cdot dx}{sen(10x^3)} = \ln|tg^2(5x^3)| + C}$$

Ritorna l'esempio da dove eravamo partiti.

I metodi di integrazione

1) Somma o differenza di funzioni

Si integra per scomposizione integrando termine a termine le funzioni addendi.

$$\int \left(\varphi_{(x)} + f_{(x)} - g_{(x)} \right) dx = \int \varphi_{(x)} dx + \int f_{(x)} \cdot dx - \int g_{(x)} \cdot dx$$

2) Sostituzione di variabile

Si usa per eliminare espressioni radicali:

Per esempio: (se ci siamo dimenticati che: $d(\operatorname{arcsen}(x)) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$)

$$\boxed{\int \frac{d(x)}{\sqrt{1-x^2}}} =$$

poniamo: $x = \operatorname{sen}(t) \rightarrow t = \operatorname{arcsen}(x)$; $dx = \cos(t)dt$
sostituendo:

$$= \int \frac{\cos(t)\, d(t)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(t)}} = \int \frac{\cancel{\cos}(t)\, d(t)}{\cancel{\cos}(t)} = (t) + c = \boxed{\operatorname{arcsen}(x) + c}$$

altro esempio:

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \boxed{\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + c}$$

altro esempio:

$$\int \frac{d(x)}{\sqrt{x^2-a^2}} =$$

(qui la radice potrebbe essere eliminata ponendo: $\left(\frac{x}{a}\right) = \cosh(t)$ poiché $(\cosh^2(t)-1) = \operatorname{senh}^2(t)$ e $d(\cosh(t)) = \operatorname{senh}(t)\, dt$. $\rightarrow t = \operatorname{argcosh}\left[\frac{x}{a}\right] = \ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right|$ ma, non avendo ancora trattato le funzioni iperboliche (vedi Vol. II e Vol V), facciamo la sostituzione classica:

poniamo: $\boxed{t = \sqrt{x^2 \mp a^2} + x}$ e cerchiamo di capire il motivo di tale sostituzione:

dalla: $t=(\sqrt{x^2\mp a^2}\ +x)$ ricaviamo x:

$$(t-x)^2 = x^2\mp a^2$$

$$\cancel{x^2}-2tx+t^2=\cancel{x^2}\mp a^2 \qquad \boxed{x=\left(\frac{t^2\pm a^2}{2t}\right)}$$

calcoliamo il differenziale; "dx":

$$dx=\frac{1}{2}\left(\frac{2t\cdot t-(t^2\pm a^2)}{t^2}\right)dt \rightarrow \qquad \boxed{dx=\left(\frac{t^2\mp a^2}{2t^2}\right)dt}$$

Poichè, dalla espressione: $t=(\sqrt{x^2\mp a^2}+x)$ possiamo ricavare: $\sqrt{x^2\mp a^2}=(t-x) = t-\left(\frac{t^2\pm a^2}{2t}\right) = \frac{2t^2-t^2\mp a^2}{2t}$

cioè: $\boxed{\left(\sqrt{x^2\mp a^2}\right)=\left(\frac{t^2\mp a^2}{2t}\right)}$

Sostituendo i valori trovati, nell'integrale si ha:

$$\int\frac{d(x)}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int\frac{\left(\frac{t^2-a^2}{2t^2}\right)dt}{\left(\frac{t^2-a^2}{2t}\right)} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t|+C$$

$$\boxed{\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|\sqrt{x^2-a^2}+x\right|+c}$$

Se poniamo $c=c_1-\ln|a|$ abbiamo:

$$\boxed{\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}} = \ln\left|\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\ +\left(\frac{x}{a}\right)\right|+c_1}$$

espressione che avevamo anticipato seguendo una diversa sostituzione. Questa sostituzione vale anche per:

$$\boxed{\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|\sqrt{x^2\pm a^2}+x\right|\ +c}$$

In generale le sostituzioni in integrali contenenti radici con x^2 nel radicando possono ridursi alle seguenti: $\sqrt{a^2-x^2} = a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ posto $\left(\frac{x}{a}\right)=\text{sen}(t)$ abbiamo $a\sqrt{1-\text{sen}^2(t)} = a\cos(t)$; e $d\left(\frac{x}{a}\right) = d(\text{sen}(t)) = \cos(t)\,dt$.
oppure: $\sqrt{x^2\mp a^2}$ per le quali vale la sostituzione: $t=(\sqrt{x^2\mp a^2}+x)$ oppure sapendo che $\cosh^2(t)-\text{senh}^2(t)=1$ le sostituzioni relative che elidono la radice.
Poiché alcune sostituzioni portano alla necessità di conoscere altri metodi di integrazione, continuiamo l'esposizione dei metodi.

Integrazione per parti

È uno dei metodi più importanti di integrazione. Quando abbiamo trattato la regola per la derivazione del prodotto di funzioni, siamo pervenuti all'importantissima espressione differenziale: $\boxed{d(u\cdot v) = u\,dv + v\,du}$ che può essere scritta:

$$u\,dv = d(u\cdot v) - v\,du$$

integrando: $\boxed{\int u\,dv = (u\cdot v) - \int v\,du}$

che è la formula dell'integrazione per parti "L'integrale di una funzione è dato dal prodotto del fattor finito per il fattore differenziale diminuito dell'integrale che ha scambiato il fattor finito col fattor differenziale.

Esempio:

$$\int \sqrt{1-x^2}\; dx \quad \text{posto } x = \text{sen}(t) \;\to \int \cos(t)\, d(\text{sen}(t))$$

$$= \int \cos^2(t)\, dt = (\text{che integriamo per parti}$$

$$= \int \cos(t)\, d(\text{sen}(t)) = (\cos(t))(\text{sen}(t)) - \int \text{sen}(t)\, d\cos(t)$$

$$= \text{sen}(t)\cos(t) + \int \text{sen}^2(t)\, dt$$

$$+ \int (1 - \cos^2(t))\, dt$$

$$2\int \cos^2(t)\, dt = \text{sen}(t)\cos(t) + t$$

$$\boxed{\int \cos^2(t)\, dt = \frac{\text{sen}(t)\cos(t) + t}{2} + c}$$

$$\boxed{\int (\sqrt{1-x^2})\, dx = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \text{arcsen}(x)}{2} + c}$$

altro esempio:

$$\int x\cos(x)\, d(x) = \int \frac{\cos(x)\; dx^2}{2} = \frac{1}{2}x^2\cos(x) - \frac{1}{2}\int x^2\, d\cos(x) \ldots$$

$$\int x\cos(x)\, d(x) = \int x\, d(\text{sen}(x))$$

Nella prima uguaglianza il processo di integrazione per parti può ripetersi infinite volte dando per risultato una serie. Mentre nel secondo caso si ha:

$$\boxed{\int x\cdot\cos(x)\, dx} = \int x\, d(\text{sen}(x)) = x\,\text{sen}(x) - \int \text{sen}(x)\, dx = \boxed{x\,\text{sen}(x) + \cos(x) + c}$$

Il fatto di lasciare la x a fattore finito, facilita l'integrale che si detrae dal prodotto del fattor finito per il fattore differenziale.

altro esempio:

$$\int \ln|x| \cdot d(x) = x\cdot\ln|x| - \int x\, d(\ln|x|) = x\cdot\ln|x| - \int x\, \frac{1}{x}\, dx =$$

$$\boxed{\int \ln|x|\, d(x) = x\ln|x| - x + c}$$

Artifizi di integrazione

Consideriamo il differenziale: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}$

$$\boxed{d\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{2}{(1-x)^2}dx}$$

e l'integrale:

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)}=\int\frac{dx}{(1-x)(1+x)}\cdot\frac{(1-x)}{(1-x)}=\frac{2}{2}\int\frac{dx}{(1-x)^2\cdot\frac{(1+x)}{(1-x)}}$$

Sostituendo il differenziale:

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+x)}{(1-x)}\right|+C_1$$

$$\boxed{\int\frac{dx}{(1-x^2)}=\ln\left|c\sqrt{\frac{(1+x)}{(1-x)}}\right|}$$

Sull'utilizzazione di questo differenziale ne abbiamo trattato per integrali del tipo:

$$\int\frac{dx}{\text{sen}(x)}\,\frac{(\text{sen}(x))}{(\text{sen}(x))}=-\int\frac{d(\cos(x))}{1-\cos^2(x)}=-\ln\left|c\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}}\right|=$$

$$\boxed{\int\frac{dx}{\text{sen}(x)}=\ln\left|\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right|+C}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{bx^2\pm a}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm\left(\frac{a}{b}\right)}}$$ poniamo: $(-x+t)=\sqrt{x^2\pm\left(\frac{a}{b}\right)}$

(vedi metodo di sostituzione) abbiamo:

$$\boxed{\int\frac{dx}{\sqrt{bx^2\pm a}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\sqrt{x^2\pm\left(\frac{a}{b}\right)}+(x)\right|+C}$$

utilizzando la derivata logaritmica

$$\boxed{\int x^{x}\left(\ln|x|+1\right)d(x)}$$

se poniamo: $e^{y}=x^{x}$; $y=x\ln|x|$; $x^{x}=e^{x\ln|x|}$

ma: $d\left(x\ln|x|\right)=\left(\ln|x|+1\right)dx$

sostituendolo:

$$\int e^{x\ln|x|}\,d\left(x\ln|x|\right)=e^{x\ln|x|}+c$$

$$\boxed{\int x^{x}\left(\ln|x|+1\right)d(x)\;=\;x^{x}+c}$$

---

utilizzando le formule di prostaferesi

Servono per i seguenti tipi di integrali, a fianco dei quali riportiamo la formula interessata.

$I_a)$ $\int\left[\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\right]dx$ $(\text{se}: n>m)\rightarrow$	$\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(p)-\operatorname{sen}(q)\right)$
$I_b)$ $''$ $(\text{se}: n<m)\rightarrow$	$\operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(p)+\operatorname{sen}(q)\right)$
$II)$ $\int\left[\cos(nx)\cos(mx)\right]dx$ $\rightarrow$	$\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos(p)+\cos(q)\right)$
$III)$ $\int\left[\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)\right]dx$ $\rightarrow$	$\operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos(q)-\cos(p)\right)$

Facciamo degli esempi numerici dei quattro casi, per evidenziare la snellezza del procedimento.

Ia) $\boxed{\int \mathrm{sen}(3x)\cos(5x)\cdot dx =}$

$$\left.\begin{aligned}(5x) &= \frac{p+q}{2}\\ (3x) &= \frac{p-q}{2}\end{aligned}\right\} \begin{array}{c}\text{sommando}\\ \text{e}\\ \text{sottraendo}\\ \text{(prostaferesi)}\end{array} \rightarrow \left\{\begin{aligned}(8x) &= p\\ (2x) &= q\end{aligned}\right.$$

$$\int \mathrm{sen}(3x)\cos(5x)\,dx = \frac{1}{2}\int\left[\mathrm{sen}(8x)-\mathrm{sen}(2x)\right]dx$$

$$\boxed{\int \mathrm{sen}(3x)\cos(5x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos(8x)}{8}+\frac{\cos(2x)}{2}\right)+C}$$

<u>controlliamo derivando</u>: $\frac{1}{2}\left(\frac{8}{8}\mathrm{sen}(8x)-\frac{2}{2}\mathrm{sen}(2x)\right)=$

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{aligned}\mathrm{sen}(8x) &= \mathrm{sen}(5x+3x) = \mathrm{sen}(5x)\cancel{\cos(3x)}+\cos(5x)\,\mathrm{sen}(3x)\\ -\mathrm{sen}(2x) &= -\mathrm{sen}(5x-3x) = \cancel{-\mathrm{sen}(5x)}\cos(3x)+\cos(5x)\,\mathrm{sen}(3x)\end{aligned}\right\}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}\left(\cancel{2}\cos(5x)\,\mathrm{sen}(3x)\right)$$

torna!

Analogamente il caso (I_b).

II) $\boxed{\int \cos(5x)\cos(3x)\,d(x)}$: $p=(8x)$; $q=(2x)$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\cos(p)+\cos(q)\right)dx = \boxed{\frac{1}{2}\left\{\frac{\mathrm{sen}(8x)}{8}+\frac{\mathrm{sen}(2x)}{2}\right\}+C}$$

III) $\boxed{\int \mathrm{sen}(5x)\,\mathrm{sen}(3x)\,dx} = \frac{1}{2}\int\left(\cos(2x)-\cos(8x)\right)dx =$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left\{\frac{\mathrm{sen}(2x)}{2}-\frac{\mathrm{sen}(8x)}{8}\right\}+C}$$

Si noti la snellezza <u>dei calcoli</u>.

Integrali di potenze delle funzioni trigonometriche spesso occorrono particolari artifizi.

$$\int \operatorname{sen}^7(x)\cos^4(x)\,dx =$$

$$-\int \operatorname{sen}^6(x)\cos^4(x)\,d\cos(x)$$

$$-\int \left(\operatorname{sen}^2(x)\right)^3\cos^4(x)\,d\cos(x)$$

$$-\int \left(1-\cos^2 x\right)^3\cos^4 x\;d\cos(x)$$

$$-\int\left(1-3\cos^2(x)+3\cos^4(x)-\cos^6(x)\right)\cos^4 x\Big)d(\cos x)$$

$$-\int\left(\cos^4 x-3\cos^6 x+3\cos^8(x)-\cos^{10}(x)\right)d\cos(x)$$

$$=\left[\left(-\frac{\cos^5(x)}{5}+\frac{3}{7}\cos^7(x)-\frac{\cos^9(x)}{3}+\frac{\cos^{11}(x)}{11}\right)\right]+C$$

$$=\left[\cos^5(x)\left(\frac{\cos^6(x)}{11}-\frac{\cos^4(x)}{3}+\frac{3}{7}\cos^2(x)-\frac{1}{5}\right)\right]+C$$

$$\int\cos^3(x)\,dx = \int\left(1-\operatorname{sen}^2(x)\right)d\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x)-\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}+C$$

$$=\operatorname{sen}x\left(\frac{3-\operatorname{sen}^2 x}{3}\right)+C = \frac{\operatorname{sen}x}{3}\left(2+\cos^2 x\right)+C.$$

$\boxed{\int\operatorname{sen}^K(x)\,dx}$ Si hanno due casi: $K=2n$ = pari oppure $K=(2n+1)$ = dispari

1) $K=(2n+1)$ $= -\int\operatorname{sen}^{2n}(x)\,d\cos x = -\int\left(1-\cos^2 x\right)^n d(\cos x)$ che sappiamo risolvere sviluppando il binomio $(1-\cos^2 x)^n$ (come sopra).

2) $K=2n$: $\int\operatorname{sen}^K(x)\,dx = -\int\left(\operatorname{sen}^{K-1}(x)\right)d(\cos(x))$, integrando per parti: $= -\operatorname{sen}^{K-1}(x)\cos(x)+\int(\cos(x))\,d\left(\operatorname{sen}^{K-1}(x)\right) \Rightarrow$

$$(K-1)\int\cos^2(x)\operatorname{sen}^{K-2}(x)\,d(x) = (K-1)\int\left(\operatorname{sen}^{K-2}(x)\right)\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)d(x) = (K-1)\left[\int\operatorname{sen}^{K-2}(x)\,dx-\int\operatorname{sen}^K x\,dx\right]$$

trasportando l'ultimo integrale al I° membro si ha:

$$\boxed{K\int\operatorname{sen}^K(x)\,dx = -\operatorname{sen}^{K-1}(x)\cos(x)+(K-1)\int\operatorname{sen}^{K-2}(x)\,dx}$$

per $\int\operatorname{sen}^{K-2}(x)\,d(x)$ si ripete il procedimento finché sarà facile calcolarlo.-

$\int \text{sen}^2(x)\,dx = -\int \text{sen}(x)\,d\cos x$ integrando per parti

$$= -\text{sen}(x)\cos(x) + \int(1-\text{sen}^2 x)\,dx$$

$$2\int \text{sen}^2(x)\,dx = -\text{sen}(x)\cos(x) + x$$

$$\boxed{\int \text{sen}^2(x)\,dx = \frac{-\text{sen}(x)\cos(x)+x}{2} + C}$$

$\int \text{sen}^4(x)\,d(x)$ = (applicando la formula di pag. precedente)

$4\int \text{sen}^4(x)dx = -\text{sen}^3(x)\cos x + 3\int \text{sen}^2(x)\,d(x)$ per cui utilizzando la formula sopra trovata si ha:

$$\int \text{sen}^4(x)\,d(x) = \frac{1}{4}\left[-\text{sen}^3 x\cos(x) + \frac{3}{2}(\text{sen}(x)\cos(x) - x)\right] + C$$

$$\boxed{\int \text{sen}^4(x)\,dx = \frac{1}{8}\left[x - (\text{sen}\,x\cos x)(2\,\text{sen}^2(x) - 3)\right] + C}$$

Analogamente: $\int \text{sen}^6(x)dx$ applicando la formula ed avvalendosi dei precedenti risultati:

$$\boxed{\int \text{sen}^6(x)\,dx = \frac{1}{6}\left[-\text{sen}^5(x)\cos(x) + 5\int \text{sen}^4(x)\,d(x)\right]}$$

$$\boxed{\int \text{arcsen}(x)\,d(x)} = x\,\text{arcsen}(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= x\,\text{arcsen}(x) - \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\,\text{arcsen}(x) + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$= \boxed{x\,\text{arcsen}(x) + \sqrt{1-x^2} + C}$$

Integrazione di funzioni razionali fratte

Siano $P(x)/B(x)$ i polinomi costituenti la frazione. Se $P(x)$ è di grado superiore a $B(x)$ dividendo abbiamo:

$$\frac{P(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

$Q(x)$ lo sappiamo integrare. La frazione: $\frac{R(x)}{B(x)}$ ove certamente il numeratore è di grado inferiore al denominatore, sia anche ridotta ai minimi termini.

Uguagliamo a zero il denominatore: $\boxed{B(x) = 0}$ e cerchiamo una radice α dell'equazione (α può essere reale o complessa); nel caso più generale supponiamo di aver trovato μ radici tutte uguali ad α. (Basta dividere per $(x-\alpha)$ successivamente finché il resto sia diverso da zero)

Avremo che il polinomio $B(x)$ si scompone in:

$$B(x) = (x-\alpha)^{\mu}(B_1(x))$$

e la frazione diventa:

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{R(x)}{(x-\alpha)^{\mu} B_1(x)}$$

aggiungiamo e togliamo al numeratore: $AB_1(x)$ (con A = costante) avremo:

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{AB_1(x) + R(x) - AB_1(x)}{(x-\alpha)^{\mu} B_1(x)}$$

che si scompone nella somma di due frazioni:

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^\mu} + \frac{R(x) - AB_1(x)}{(x-\alpha)^\mu \cdot B_1(x)}$$

La prima frazione la sappiamo integrare, infatti:

$$\boxed{\int \frac{A}{(x-\alpha)^\mu}\,dx = \frac{-A}{(\mu-1)(x-\alpha)^{\mu-1}} + C}$$

e se $\mu = 1$: $\boxed{\int \frac{A}{(x-\alpha)}\,dx = A \ln|x-\alpha| + C}$

La seconda frazione si può rendere semplificabile, se, con opportuno valore di A, rendiamo divisibile anche il numeratore per $(x-\alpha)$.

Se ad ogni termine di $R(x)$ sostituiamo (α) ad (x) otteniamo un altro polinomio: $R(\alpha)$, tale che: $(R(x) - R(\alpha))$ è certamente divisibile per $(x-\alpha)$ che può essere messo in evidenza termine a termine.

Perciò dovrà essere: $AB_1(x) = R(\alpha)$

cioè: $\boxed{A = \frac{R(\alpha)}{B_1(\alpha)}}$

ove: $B_1(\alpha)$ si è ottenuto da $B_1(x)$ sostituendo ad x il valore: (α). (Altrimenti A sarebbe stata $f(x)$ e non una costante. Mettendo in evidenza al numeratore $(x-\alpha)$ la seconda frazione diventa:

$$\frac{R(x) - AB_1(x)}{(x-\alpha)^\mu \cdot B_1(x)} = \frac{(x-\alpha)\ R_1(x)}{(x-\alpha)^\mu\ B_1(x)} = \boxed{\frac{R_1(x)}{(x-\alpha)^{\mu-1} B_1(x)}}$$

Con ciò si è abbassato di 1 l'esponente ad $(x-\alpha)$ ripetendo il procedimento, si risolvono gli integrali.

Facciamo un esempio assai semplice.

$$\boxed{\int \frac{(x-1)\,dx}{(x^3+2x^2+x)}} = \int \frac{(x-1)\,dx}{x(x^2+2x+1)} = \boxed{\int \frac{(x-1)\,dx}{(x+1)^2(X)}}$$

siamo nel caso studiato sopra, ove:

$$\alpha = -1 \quad ; \quad \mu = 2$$

$$B_1(x) = x \quad ; \quad R(x) = (x-1)$$

sostituendo α: $\quad B_1(\alpha) = (-1) \;;\; R(\alpha) = (-2)$

per cui $\quad A = \frac{R(\alpha)}{B_1(\alpha)} = A = \frac{(-2)}{(-1)} = \boxed{A=2}$

aggiungendo e togliendo: $AB_1(x) = 2(x)$ al numeratore si ha:

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{(x+1)^2 x} = \int \frac{2x+(x-1)-2x}{(x+1)^2 x}\,dx = 2\int\frac{dx}{(x+1)^2} - \int\frac{(x+1)\,dx}{(x+1)^2 x} =$$

$$= \boxed{-2\frac{1}{(X+1)}} - \int\frac{dx}{(X+1)X}$$

per il secondo integrale occorre ripetere il procedimento:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = -1 \;;\; \mu = 1 \\ B_1(x) = (x) \;;\; R(x) = 1 \\ B_1(\alpha) = -1 \;;\; R(\alpha) = 1 \end{array}\right\} A = \frac{R(\alpha)}{B_1(\alpha)} = -1 \;;\; AB_1(x) = -x$$

$$-\int\frac{dx}{(X+1)X} = -\int\frac{-x+1+x}{(X+1)\;x} = \boxed{+\int\frac{dx}{(X+1)}} - \int\frac{\cancel{(x+1)}}{\cancel{(X+1)}x}\,dx$$ quindi:

$$\boxed{\int\frac{(x-1)\,dx}{x^3+2x^2+x} = -\frac{2}{x+1} + \ln|x+1| - \ln|x| + C}$$

Se il polinomio al denominatore ha solo radici immaginarie.

per esempio si abbia: $\boxed{\int \frac{(Mx+N)\,dx}{x^2+px+q}}$

$$\left.\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{matrix}\right\} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad ; \quad \text{e sia: } \boxed{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0}$$

Si opera come segue:

poniamo: $\boxed{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = -K^2}$

ciò equivale a porre: $\boxed{\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \pm K}$

(decade la negatività del radicando)

Aggiungendo e togliendo: $\frac{Mp}{2}$ al numeratore e $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ al denominatore avremo:

$$\int \frac{(Mx+N)}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{Mx + M\frac{p}{2} + N - M\frac{p}{2}}{x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{M\left(x+\frac{p}{2}\right) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)}\,dx$$

Sostituendo: $\left(q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = K^2\right)$ e dividendo in due l'integrale si ha:

$$= \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{MP}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + K^2}$$

Ma, il numeratore del primo integrale è la derivata del denominatore, ed il secondo integrale evidenziando K^2 possiamo scrivere:

$$= \frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{\left(N - \frac{MP}{2}\right)\cancel{K}}{\cancel{K^2}}\int \frac{d\left(\frac{x+p/2}{K}\right)}{\left(\frac{x+p/2}{K}\right)^2 + 1}$$

cioè avremo:

$$\boxed{\int\frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+px+q)} = \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{1}{k}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x+p/2}{K}\right)\right)+C}$$

Si noti che le razionali fratte avranno per risultato di integrazioni solo espressioni del tipo:

$$\left(\frac{A}{(x-\alpha)^n}\ ;\ \text{logaritmi naturali}\ ;\ \operatorname{arctg}(\dots)\right)$$

Se il polinomio al denominatore ha due radici reali.

per esempio: $\boxed{\int\frac{(Mx+N)\,dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}}$ (con: α, β = reali)

Si opera come nel 1° caso ponendo: $\alpha = \alpha \quad \mu = 1$

$B_1(x) = (x-\beta) \quad R(x) = Mx+N$

$B_1(\alpha) = (\alpha-\beta) \quad R(\alpha) = M\alpha+N$

Esempio numerico: $\boxed{\int\frac{(7(x)+9)}{(x-3)(x-5)}\,dx} =$

$\alpha = 3 \qquad \mu = 1$

$B_1(x) = (x-5) \qquad R(x) = 7x+9$

$B_1(\alpha) = (3-5) = (-2) \qquad R(\alpha) = 21+9 = 30$

$\Big\}\ A = \frac{R(\alpha)}{B_1(\alpha)} = \frac{(30)}{(-2)} = -15 \ ;\ AB_1(x) = -15(x-5)$

aggiungendo e togliendo al numeratore $AB_1(x)$ abbiamo:

$$\int\frac{(7x+9)}{(x-3)(x-5)}dx = \int\frac{-15(x-5)+7x+9+15x-75}{(x-3)(x-5)}dx = \int\frac{-15\,dx}{(x-3)} + \int\frac{(22x-66)\,dx}{(x-3)(x-5)} =$$

$$= -15\ln|x-3| + 22\int\frac{dx}{(x-5)}$$

$$\boxed{\int\frac{(7x+9)}{(x-3)(x-5)}dx = -15\ln|x-3| + 22\ln|x-5| + C = \ln\left|K\frac{(x-5)^{22}}{(x-3)^{15}}\right|}$$

Qualora l'integrale fosse del tipo:

$$\boxed{\int \frac{(Mx + N)}{(x^2+px+q)^n}\,dx}$$

con gli stessi passaggi effettuati per "n=1" otteniamo:

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} + \left(N - Mp/2\right)\int \frac{d(x+p/2)}{\left((x+p/2)^2+K^2\right)^n} =$$

Il primo integrale è immediato:

$$\boxed{\frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} = \frac{M}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)\left(\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}\right)+c}$$

Per il secondo integrale poniamo: $(x+p/2) = Ky$, cioè facciamo una sostituzione di variabile:

$$\left(N-Mp/2\right)\int \frac{d(x+p/2)}{\left((x+p/2)^2+K^2\right)^n} = \left(N-Mp/2\right)\int \frac{d(Ky)}{\left((Ky)^2+K^2\right)^n} = \left(N-Mp/2\right)\int \frac{K\,dy}{K^{2n}(y^2+1)^n}$$

$$= \boxed{\frac{N-Mp/2}{K^{2n-1}}\int \frac{dy}{(y^2+1)^n}}$$

Se integriamo per parti l'integrale rimasto, senza operare trasformazioni avremo: (svolgendo il differenziale e semplificando):

$$\int \frac{dy}{(y^2+1)^n} = \frac{y}{(y^2+1)^n} + 2n\int \frac{y^2\,dy}{(y^2+1)^{n+1}}$$

ove aggiungendo e togliendo 1 al numeratore dell'integrale e separando in due integrali:

$$\cdots + 2n\int \frac{dy}{(y^2+1)^n} - 2n\int \frac{dy}{(y^2+1)^{n+1}}$$

ed anche cambiando n con (n−1) e risolvendo si ha:

$$\boxed{\int \frac{dy}{(y^2+1)^n} = \frac{y}{2(n+1)(y^2+1)^{n-1}} + \left(1-\frac{1}{2(n-1)}\right)\int \frac{dy}{(y^2+1)^{n-1}}}$$

formula ricorrente che degrada di 1 l'esponente e può ripetersi finchè n=1.

Integrazione di irrazionali algebrici

Premesso che si hanno irrazionali algebrici quando espressioni della x figurano sotto radici, noi considereremo il caso generale di esponenti frazionari, che possiamo sempre ridurre allo stesso denominatore (stesso indice di radice), e sia "m" il denominatore comune avremo:

$$\int f(x, x^{a/m}, x^{b/m}, x^{c/m} \ldots)\, dx \qquad (\underline{\text{irrazionale}})$$

ponendo: $\underline{x = t^m}$; $\underline{dx = m\, t^{m-1}\, dt}$

l'integrale diventa:

$$m \int f(t^m, t^a, t^b, t^c, \ldots)(t^{m-1})\, dt \quad (\underline{\text{razionale}})$$

Facciamo alcuni esempi

$$\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}+1}\, dx = \int \frac{(x^{1/2}+2)}{(x^{1/3}+1)}\, dx = \int \frac{(x^{3/6}+2)}{(x^{2/6}+1)}\, dx =$$

posto: $\underline{t^6 = x}$; $\underline{dx = 6t^5 dt}$; $t = x^{\frac{1}{6}}$

$$6\int \frac{t^3+2}{t^2+1}\, t^5\, dt \quad (\text{integrale di espressione razionale fratta})$$

$$= 6\int \frac{(t^8+2t^5)}{t^2+1}\, dt = 6\int (t^6 - t^4 + 2t^3 + t^2 - 2t - 1)\, dt + 6\int \frac{(2t+1)}{(t^2+1)}\, dt =$$

$$= 6\left[\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{2t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - t^2 - t + 2\int \frac{t\, dt}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1}\right]$$

$$\boxed{\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}+1}\, dx = \frac{1}{6}\left[\frac{x^{7/6}}{7} - \frac{x^{5/6}}{5} + \frac{x^{2/3}}{2} + \frac{x^{1/2}}{3} - x^{1/3} - x^{1/6} + \ln|x^{1/3}+1| + \operatorname{arctg}(x^{1/6})\right] + C}$$

Per razionalizzare un trinomio di secondo grado sotto radice: $\boxed{\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx ,}$ conviene porre:

$$\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = (\sqrt{a}\,x+t)}$$

ove elevando a quadrato sparisce il termine: (ax^2) :$(\underline{bx+c = 2\sqrt{a}\,xt+t^2})$

per cui: $\boxed{x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}}$

Esempi sono stati già proposti al capitolo "metodi di integrazione" (sostituzione di variabile)

Comunque, <u>se possibile</u>, è meglio porre in evidenza fuori radice il termine "$\sqrt{a}$" in modo che la funzione integranda diventi del tipo: $\sqrt{a}\int f(x, \sqrt{x^2+px+q})\,dx$.

Tal volta, se il trinomio è scomponibile in $(x-\alpha)(x-\beta)$, possono essere utili sostituzioni diverse. <u>Per esempio</u>:

$$\int\left(\frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}}\right) = \int\left(\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}\right)$$ <u>con α e β reali e distinte</u>

poniamo: $\left(\frac{(x-\alpha)}{(\beta-x)} = t^2\right)$ cioè: $(x-\alpha) = (\beta-x)t^2$ per cui l'integrale

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{t^2(\beta-x)^2}} = \int \frac{dx}{t(\beta-x)} \; ; \quad \text{ma: } x = \frac{t^2\beta+\alpha}{(1+t^2)} \; ; \quad dx = \frac{2t(\beta-\alpha)}{(1+t^2)^2}dt$$

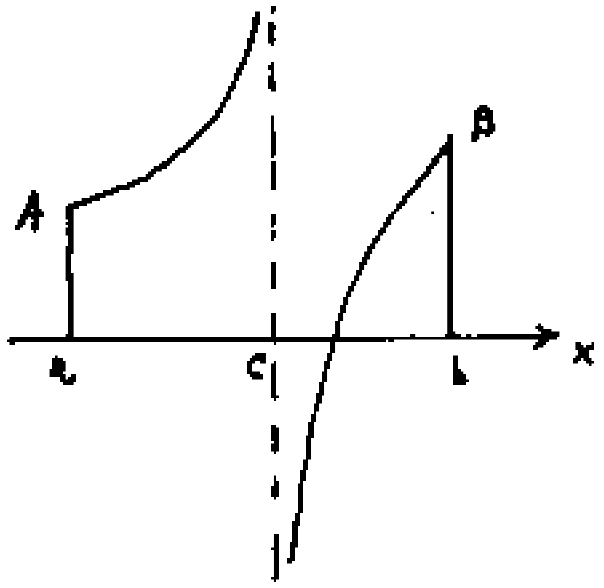
$$= \int \frac{\frac{2\cancel{t}(\beta-\alpha)}{(1+t^2)^2}\,dt}{\cancel{t}\left(\beta-\frac{(t^2\beta+\alpha)}{(1+t^2)}\right)} = \int \frac{2\cancel{(\beta-\alpha)}}{(1+t^2)\cancel{^2}}\,\frac{\cancel{(1+t^2)}\;dt}{\cancel{\beta+t^2\beta-t^2\beta-\alpha}} = 2\int\frac{dt}{1+t^2} = \underline{2\,\mathrm{arctg}(t)+c}$$

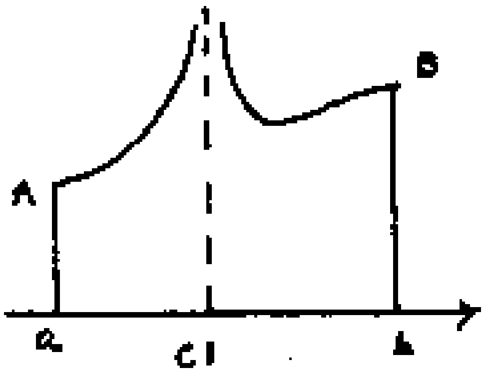
Sostituendo (t): $$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}} = 2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}\right)+c}$$

Integrali impropri

Consideriamo una funzione integranda nel campo A, B ove $X_A = a$; $X_B = b$. In questo campo la funzione presenti uno o più punti di discontinuità divergendo a $\pm\infty$.

Supponiamo che sia c, un punto interno all'intervallo ove avviene che la $f_{(c)} = \infty$.





è necessario in questo caso spezzare in due l'integrale

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

quindi considerando di avvicinarsi al punto c per quantità piccole a piacere sia a destra che a sinistra di C avremo:

$$I = \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

Possiamo rendere di nuovo integrabili le due espressioni per valori finiti, sia pure piccolissimi di ε. L'integrale improprio è detto generalizzato

Si verificano due casi:

I) Se: $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\, dx$ esiste ed è finito

allora l'integrale improprio generalizzato: $\int_a^c f(x)dx$ è detto convergente

II Se: $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx = \infty$ cioè: diverge a ∞

allora l'integrale improprio generalizzato $\int_a^c f(x)dx$ è detto divergente

Se il limite non esisiste l'integrale non ha significato

Lo stesso discorso vale per l'integrale $\int_c^b f(x)dx$ ove: $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$ esiste ed è finito, allora l'integrale improprio è detto convergente

se l'integrale è infinito è detto divergente.

se il limite non esiste l'integrale non ha significato

Naturalmente il punto C può coincidere con A oppure con B, o vi possono essere più punti C nell'intervallo AB ed in quest'ultimo caso dovremo spezzare il campo in più parti.

L'integrale improprio: $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\, dx$

può essere convergente in tutto il campo a,b; nei due campi a,c e c,b; oppure solo a sinistra o solo a destra di C od essere divergente nei due campi.

Facciamo degli esempi:

$$\int_0^2 \frac{1\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{arcsen}(1-\varepsilon) = \pi/2 \quad (\underline{\text{Convergente}})$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{arcsen}(2) - \operatorname{arcsen}(1+\varepsilon) = (\text{non esiste})$$

Cioè l'integrale $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ è convergente nel campo fra 0 ed 1, non ha significato nel campo fra 1 e 2.

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tang} x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\pi/2-\varepsilon}\operatorname{tang}(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\log\left|\cos(\pi/2-\varepsilon)\right|\right) = +\infty$$

L'integrale proposto è divergente

Facciamo ora il discorso inverso.

Sia *data una* *f(x)* nell'intervallo a, b *e sia continua* salvo un numero finito di punti singolari ove la f(x) può divergere all'infinito od avere discontinuità di prima o seconda specie, o faccia delle cuspidi; *ed esista una F(x)* *continua nell'inter=*

vallo a, b estremi inclusi, derivabile, la cui derivata è $f(x)$ cioè: $\frac{dF(x)}{d(x)} = f(x)$ (salvo i punti singolari ove può non essere derivabile). Diremo la $F(x)$, l'integrale di $f(x)\,dx$ cioè: $F(x) = \int f(x)\,dx$. Ed è possibile dimostrare che:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Infatti sia C un punto singolare interno all'intervallo A, B ove spezziamo l'integrale:

$$= \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx =$$

ed il $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(F(c-\varepsilon) - F(a) + F(b) - F(c+\varepsilon)\right)$ esista e sia quindi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(F(c) - F(a) + F(b) - F(c)\right) = \left(F(b) - F(a)\right) \qquad (\text{c.v.d.}).$$

La condizione di tale validità è che:

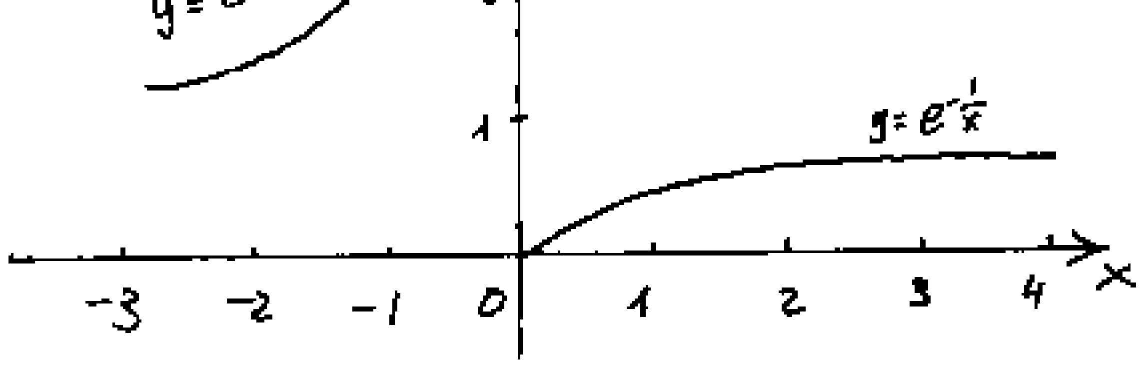
$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(F(c-\varepsilon)\right) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(F(c+\varepsilon)\right)$$

cioè che $F(x)$ sia continua in C

Facciamo un esempio:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\,dx \neq \left[e^{-\frac{1}{x}}\right]_{-1}^{+1}$$

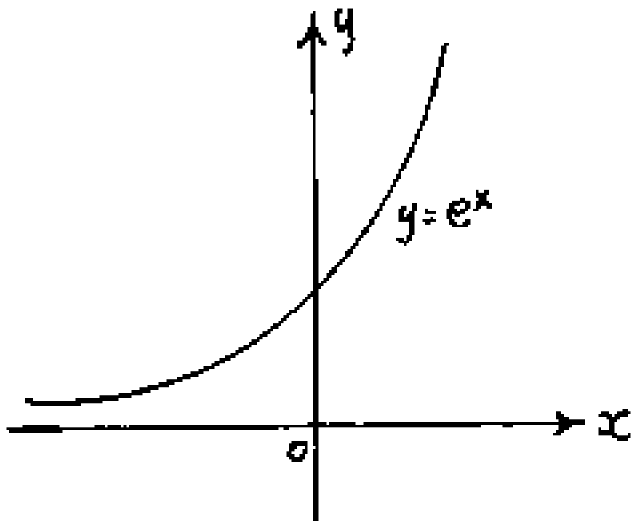
perché $\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)$ è discontinua nel punto $x = 0$; infatti: $\lim\limits_{x \to 0^-}\left(e^{-\frac{1}{x}}\right) = e^{\frac{-1}{-0}} = e^{\infty} = \infty$; mentre: $\lim\limits_{x \to 0^+}\left(e^{-\frac{1}{x}}\right) = e^{-\frac{1}{0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$; Per cui spezzando l'integrale abbiamo:



$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\,dx = \infty \ (\text{divergente})$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\,dx = \left(e^{-1} - 0\right) = \left(\frac{1}{e}\right)$$

(convergente).



Per l'integrale: $\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx = [e^x]_{-\infty}^{0}$

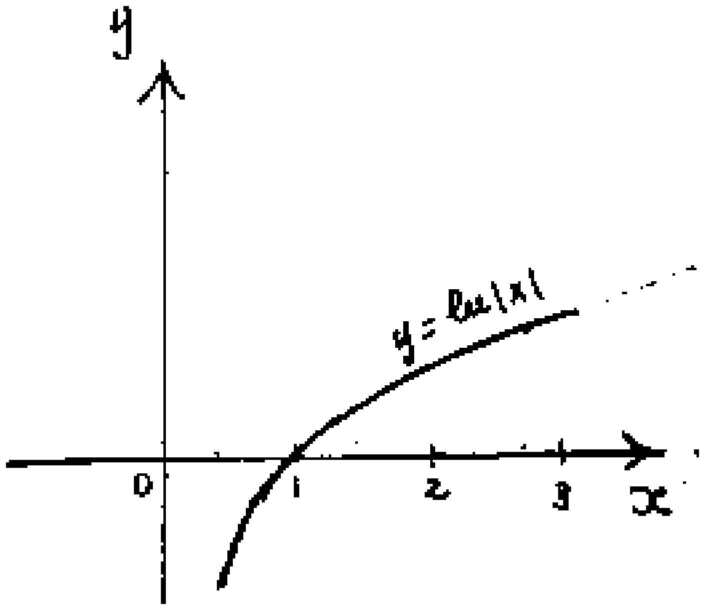
abbiamo $= [e^0 - e^{-\infty}] = +1$

l'integrale è convergente pur avendo un limite infinito.

Lo stesso integrale esteso fra 0 ed 1 sarà:

$$\int_0^1 e^x \, d(x) = [e^x]_0^1 = [e^1 - e^0] = \underline{(e-1)}$$

Ed in generale darà un valore finito finchè il limite superiore sarà finito: $\boxed{\int_0^x e^x \, dx = (e^x - 1)}$



L'integrale: $\int_0^1 \ln(x) \, d(x)$

essendo la stessa curva di e^x (ribaltata), sappiamo già che è convergente: $\int_0^1 \ln|x| \, dx = [x \ln|x| - x]_0^1$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [x \ln|x| - x]_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon \to 0} [1 - \varepsilon \ln|\varepsilon| - \varepsilon]$$

ma: $\lim_{\varepsilon \to 0} (\varepsilon \ln|\varepsilon|) = 0$ (vedi tabella dei limiti notevoli)

per cui:

$$\boxed{\int_0^1 \ln(x) \, dx = -1}$$

(Il segno (−) perchè l'area è sulle $y<0$)

L'integrale: $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} (\ln|\varepsilon|) = \infty$ (divergente)

Formula di Wallis

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^m(x)\, d(x) = -\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{m-1}(x)\, d\cos x$$; integrando per parti:

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^m(x)\, dx = -\Big[(\text{sen}^{m-1}(x))(\cos x)\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(x)\; d(\text{sen}^{m-1}(x))$$

notiamo che: $\Big[\text{sen}^{m-1}(x)(\cos x)\Big]_0^{\pi/2} = 0$

e che $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\, d\,\text{sen}^{m-1}(x) = (m-1)\int_0^{\pi/2} (\text{sen}^{m-2}(x))(\cos^2 x)\, dx =$

$$= (m-1)\int_0^{\pi/2} (\text{sen}^{m-2}(x))(1 - \text{sen}^2 x)\, dx = (m-1)\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{m-2}(x)\, dx - (m-1)\int_0^{\pi/2} \text{sen}^m(x)\, d(x) =$$

portando nel primo membro il secondo termine si ha:

$$((m-1)+1)\int_0^{\pi/2} \text{sen}^m(x)\, d(x) = (m-1)\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{m-2}(x)\, d(x)$$

cioè:

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^m(x)\cancel{dx} = \left(\frac{m-1}{m}\right)\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{m-2}(x)\, d(x)$$

questa formula è ricorrente per cui:

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{m-2}(x)\, d(x) = \left(\frac{m-3}{m-2}\right)\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{m-4}(x)\, d(x)$$

Per la ricorrenza della formula, si ha anche:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m(x)\, d(x) = \frac{(m-5)}{(m-4)}\cdot\frac{(m-3)}{(m-2)}\cdot\frac{(m-1)}{(m)}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{(m-6)}(x)\, dx$$

Se m è un numero pari, poniamo $(m = 2r)$ ed avremo:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2r}(x)\, dx = \frac{(2r-1)(2r-3)(2r-5)\ldots\ldots(2r-(2r-1))}{(2r)\cdot(2r-2)(2r-4)\ldots\ldots(2r-(2r-2)}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{(2r-2r)}(x)\, dx$$

cioè, essendo: $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^0(x)\, dx = \int_0^{\pi/2} dx = \pi/2$

si ha:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2r}(x)\, d(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\ldots(2r-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2r)}\left(\pi/2\right)$$

ed anche:

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2r}(x)\, d(x) = \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!}\cdot\frac{\pi}{2}}$$

Ove il simbolo: "$(n)!!$" ricordiamo che significa: "semifattoriale" cioè, prodotti consecutivi di fattori della stessa parità, da 1 ad $(2r-1)$ per i dispari da 2 ad $2r$ per i numeri pari.

Se invece m è un numero dispari: $(m=2r+1)$

sostituendo a $2r$ il valore: $(2r+1)$ abbiamo:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{(2r+1)}(x)\, d(x) = \frac{((2r+1)-1)((2r+1)-3)((2r+1)-5)\cdots\cdots((2r+1)-(2r-1))}{(2r+1)((2r+1)-2)((2r+1)-4)\cdots\cdots((2r+1)-(2r-2))}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2r+1-2r}(x)\, d(x) =$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2r+1}(x)\, d(x) = \frac{(2r)!!}{(2r+1)!!}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}[x]\, dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = -\Big[\cos(\tfrac{\pi}{2}) - \cos(0)\Big] = 1$$

per cui:

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{(2r+1)}(x)\, d(x) = \frac{(2r)!!}{(2r+1)!!}}$$

Dimostriamo anche l'uguaglianza: $\int_0^{\pi/2} \cos^m(x)\, d(x) = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m(x)\, d(x)$

posto: $x = \frac{\pi}{2} - t$ avremo che mentre x varia da 0 a $\frac{\pi}{2}$ t varia da $\frac{\pi}{2}$ a 0. Poiché: $\cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - t) = \operatorname{sen} t$. e poiché $dx = -dt$ avremo:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m(x)\, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \operatorname{sen}^m(t)\, d(t) = +\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m(t)\, d(t) \qquad \underline{\text{C.V.D.}}$$

cioè:

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \cos^{2m}(x)\, d(x) = \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!}\frac{\pi}{2}} \qquad \boxed{\int_0^{\pi/2} \cos^{(2r+1)}(x)\, dx = \frac{(2r)!!}{(2r+1)!!}}$$

che corrispondono ai valori trovati per il seno.

le famule trovate si prestano al calcolo di π; infatti:

essendo: $\boxed{0 < \operatorname{sen} x < 1}$ per x: $\boxed{0 < x < \pi/2}$

si ha:

$$\boxed{\operatorname{sen}^{(2r+1)}(x) < \operatorname{sen}^{(2r)}(x) < \operatorname{sen}^{(2r-1)}(x)}$$

integrando:

si ha:

$$\boxed{\frac{(2r)!!}{(2r+1)!!} < \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!}\left(\frac{\pi}{2}\right) < \frac{(2r-2)!!}{(2r-1)!!}}$$

moltiplicando la doppia disuguaglianza per $\left(\frac{(2r)!!}{(2r-1)!!}\right)$

otteniamo:

$$\boxed{\left(\frac{(2r)!!}{(2r-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{(2r+1)} < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{(2r)!!}{(2r-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{(2r)}}$$

ed anche:

$$\boxed{\frac{1}{(2r+1)} < \left(\frac{(2r-1)!!}{(2r)!!}\right)^2 \frac{\pi}{2} < \frac{1}{(2r+0)}}$$

posto: $(0 < \theta < 1)$

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \left(\frac{(2r)!!}{(2r-1)!!}\right)^2 \frac{1}{(2r+\theta)}}$$

$$\boxed{\pi = \left(\frac{(2r)!!}{(2r-1)!!}\right)^2 \left(\frac{2r}{2r+\theta}\right) \frac{1}{r}}$$

poichè: $\lim_{r\to\infty}\left(\frac{2r}{2r+\theta}\right) = 1$

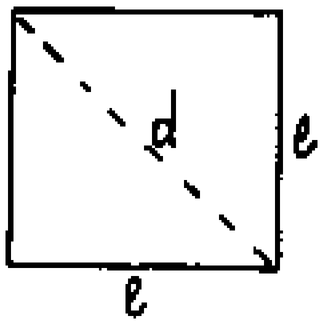
$$\boxed{\boxed{\lim_{r\to\infty}\left[\left(\frac{(2r)!!}{(2r-1)!!}\right)^2 \frac{1}{r}\right] = \pi}}$$

<u>formula di</u>

<u>Wallis</u>

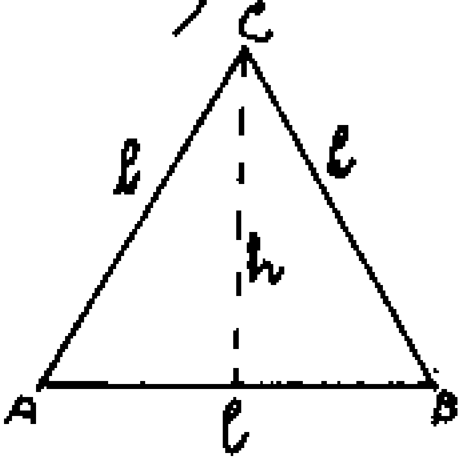
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8 \cdots\cdots (2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \cdots\cdots (2n-1)}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \pi$$

Quadro riepilogativo delle figure geometriche elementari

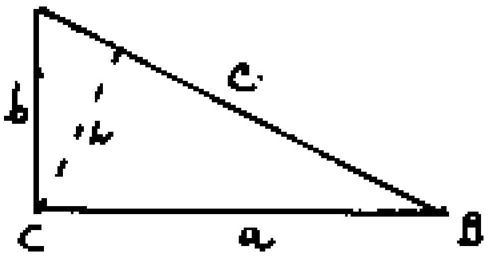


quadrato: l = lato ; d = diagonale ; $d = l\sqrt{2}$ Area = l^2 ; $l = \frac{d}{2}\sqrt{2}$; Area = $d^2/2$; perimetro = $4l$ = $2d\sqrt{2}$. (quattro angoli retti bisecati dalle diagonali)

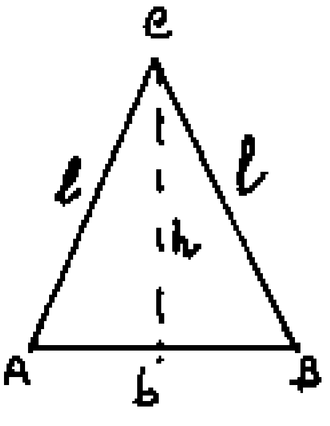
Rettangolo: b = base ; h = altezza ; d = diagonale $d = \sqrt{b^2+h^2}$; Area = bh ; perimetro = $2(b+h)$. (Quattro angoli retti)



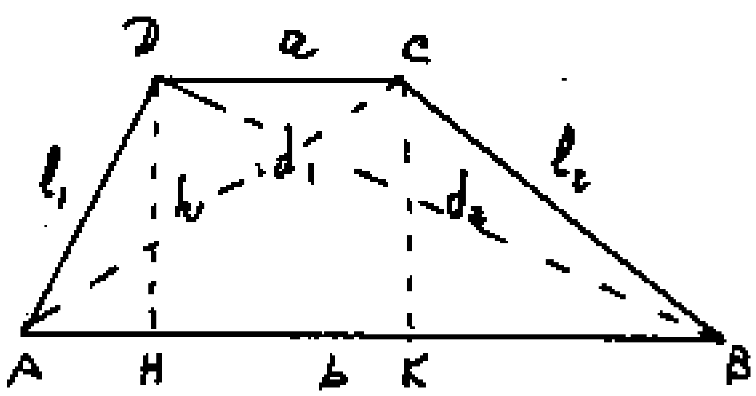
Triangolo equilatero ; l = lato h = altezza su $\overline{AB}$ = mediana su $\overline{AB}$ = bisettrice in C. ; $h = \frac{l}{2}\sqrt{3}$; Area = $\frac{lh}{2} = \frac{l^2}{4}\sqrt{3}$ perimetro = $3l$. (3 angoli uguali $60° = \pi/3$)



Triangolo rettangolo ; c = ipotenusa, b, a = cateti ; $c = \sqrt{a^2+b^2}$; h = altezza relativa all'ipotenusa ; $h = \frac{ba}{c}$; area = $\frac{ba}{2} = \frac{ch}{2}$; perimetro = $(a+b+c)$.

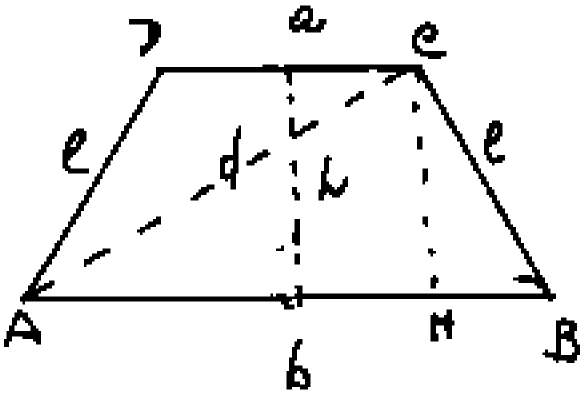


Triangolo isoscele ; b = base ; l = lato obliquo ; h = altezza e mediana su $\overline{AB}$, bisettrice in C. $h = \sqrt{l^2-(b/2)^2}$; Area = $\frac{bh}{2}$; perimetro = $(2l+b)$; (due angoli uguali alla base)

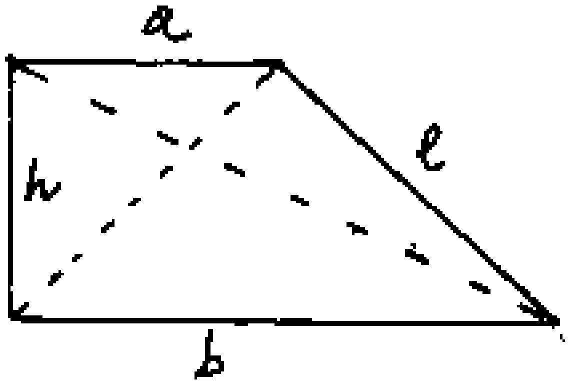


Trapezio = quadrilatero avente due lati paralleli.

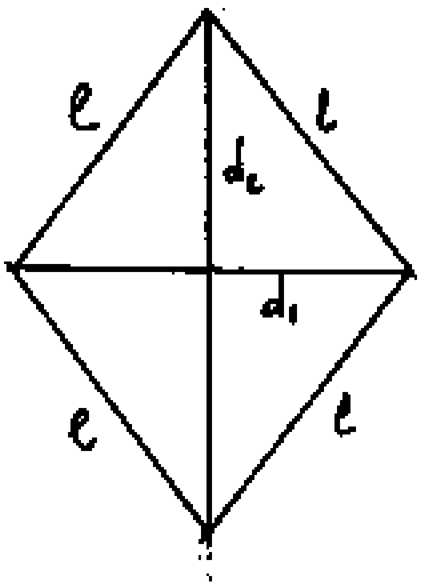
b = base maggiore ; a = base minore ; l_1 , l_2 lati obliqui ; h = altezza ; d_1 ; d_2 = diagonali. per definirlo occorrono almeno quattro elementi per es: a, b, h, l_1 ; $\overline{AH}=\sqrt{l_1^2-h^2}$; $\overline{KB}=b-a-\overline{AH}$; $l_2=\sqrt{h^2+\overline{KB}^2}$ $d_1=\sqrt{(\overline{AH}+a)^2+h^2}$; $d_2=\sqrt{(b-AH)^2+h^2}$; Area = $h\left(\frac{a+b}{2}\right)$; perimetro = $a+b+l_1+l_2$.



Trapezio isoscele (lati obliqui uguali, basi parallele. l = lato obliquo b = base maggiore ; a = base minore, ed h = altezza : $l=\sqrt{h^2+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}$; $\overline{HB}=\frac{b-a}{2}$ $\overline{AH}=b-\overline{HB}$; $d=\sqrt{\overline{AH}^2+h^2}$; Area = $\left(\frac{a+b}{2}\right)h$; perimetro = $(a+b)+2l$. (angoli uguali alle basi) (inscrittibile in un cerchio)



Trapezio rettangolo un lato h perpendicolare alle basi parallele a e b. ; l = lato obliquo. $l=\sqrt{(b-a)^2+h^2}$; area = $\left(\frac{a+b}{2}\right)h$; perimetro = $(a+b+h+l)$ (due angoli retti adiacenti h).

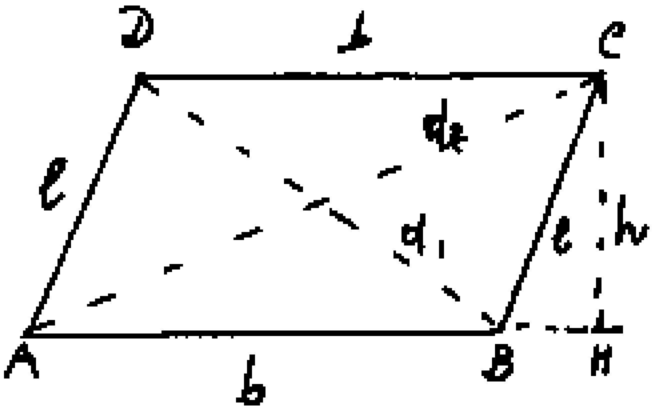


Rombo

quadrilatero avente quattro lati l uguali, diagonali perpendicolari fra loro bisecanti

$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2=l^2$; Area = $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

perimetro = 4l ; (angoli opposti uguali); (lati opposti paralleli)

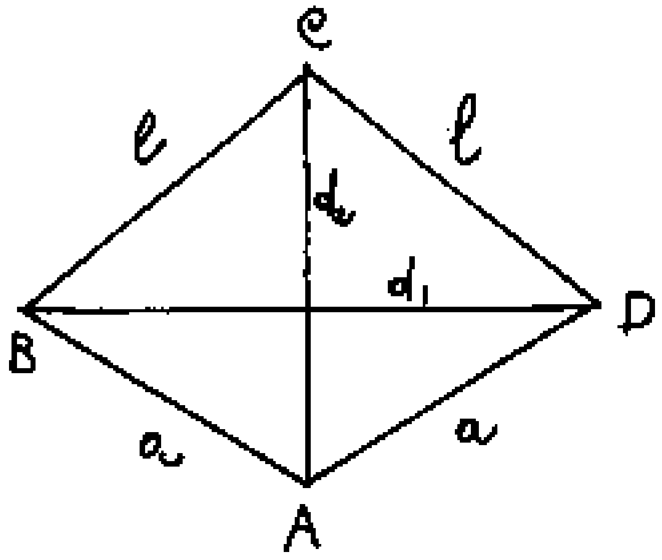


Parallelogramma

quadrilatero avente i lati opposti uguali e paralleli; b = lato base; l = lato obliquo; h = altezza

d_1, d_2 = diagonali; $\overline{BH}=\sqrt{l^2-h^2}$; $d_1=\sqrt{(b-\overline{BH})^2+h^2}$; $d_2=\sqrt{(b+\overline{BH})^2+h^2}$

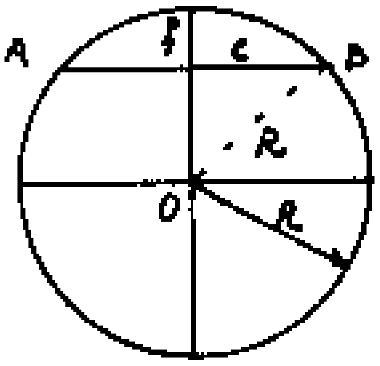
Area = bh ; perimetro = 2(b+l) ; (angoli opposti uguali)



Rombodeltoide (deltoide)

quadrilatero avente le diagonali diverse e perpendicolari di cui una sola biseca l'altra.

lati adiacenti a due a due uguali; Area = $\frac{d_1 d_2}{2}$; perimetro = 2(l+a) (sono facce del deltoide dodecaedro e trapezoedro)

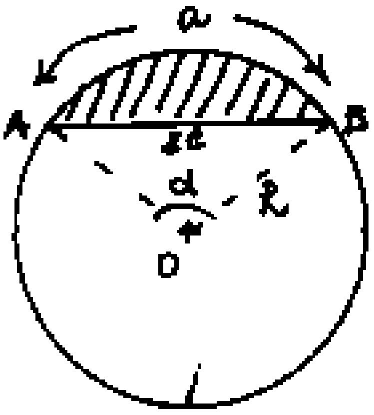


Cerchio O = centro; R = raggio;
$\overline{AB} = 2c$ = corda; f = freccia; diametro = $2R$

$c = \sqrt{R^2 - (R-f)^2}$; $c = \sqrt{2Rf - f^2}$;

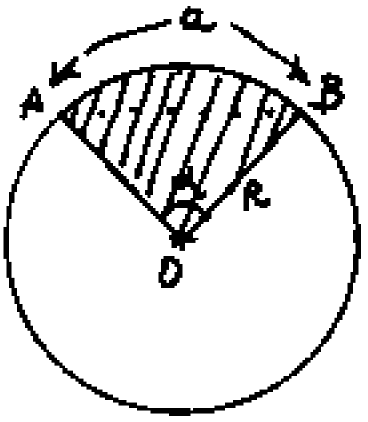
$f = R - \sqrt{R^2 - c^2}$; Area = $R^2\pi$

circonferenza = $2\pi R$; $\widehat{AB}_{rad} R$ = arco $\widehat{AB}$



segmento circolare delimitato dall'arco $\widehat{AB}$ e dalla corda $\overline{AB}$.

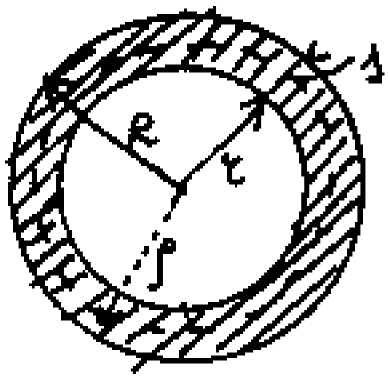
$\widehat{AB} = \alpha_{rad} \cdot R = a$ Area = $\frac{aR}{2} - c\sqrt{R^2 - c^2}$



Settore circolare delimitato dall'arco $\widehat{AB}$ e dai raggi $\overline{OA}$ ed $\overline{OB}$

Area = $\frac{aR}{2}$; $a = \widehat{AB} = \alpha_{rad} R$.

se $\alpha°$ è dato in gradi: Area = $\frac{\alpha°}{360°} R^2 \pi$

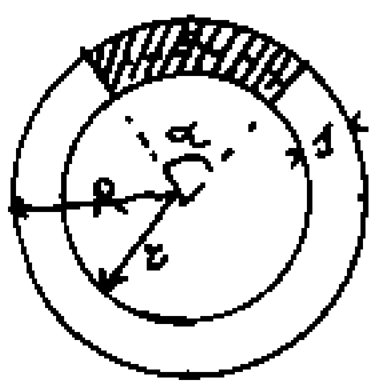


corona circolare delimitata da due circonferenze: $2R\pi$ e $2r\pi$

Area = $(R^2 - r^2)\pi = (R+r)(R-r)\pi = 2\rho s\pi$

ove: $\rho = \frac{R+r}{2}$ = raggio medio $s = (R-r)$ = spessore

$2\rho\pi$ = circonferenza media.

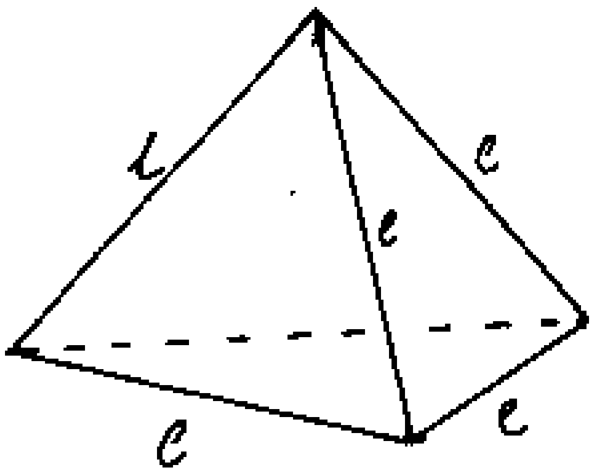


Settore di anello o corona circolare

a = arco medio = $\left(\frac{R+r}{2}\right)\alpha_{rad}$ $s = (R-r)$ -

Area = as ; Area = $(R^2 - r^2)\pi \frac{\alpha°}{360°}$

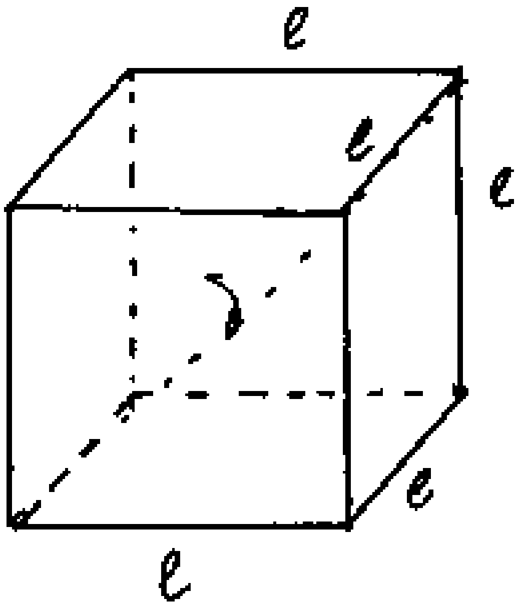
Solidi elementari



Tetraedro : l = spigolo del tetraedro; $a = \frac{l}{2}\sqrt{3}$ = apotema di una faccia; $H = a\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{2}}{3} = \frac{l}{3}\sqrt{6}$ = altezza del tetraedro

Area della superficie = $l^2\sqrt{3}$

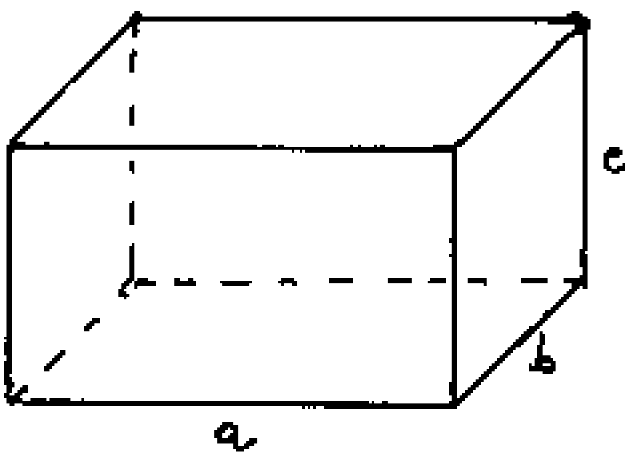
Volume = $l^3\sqrt{2}/12$.



Cubo : l = spigolo $d = l\sqrt{3} = \delta$ = diagonale de cubo;

Area laterale = Area totale = $6\,l^2$

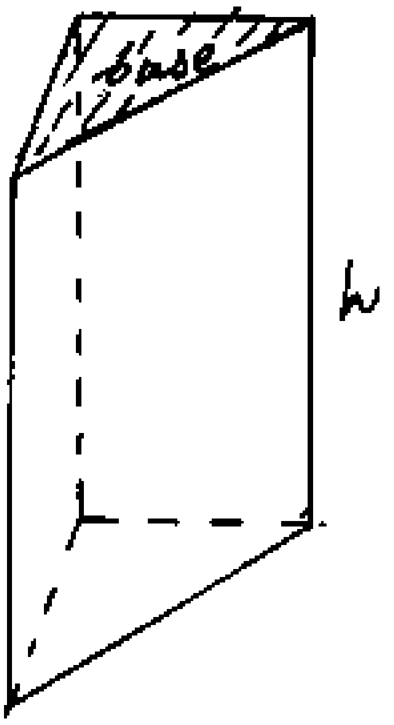
Volume = l^3



Parallelepipedo a, b, c = spigoli; d = diagonale = $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Area laterale = $2(ab + ac + bc)$

Volume = abc



Prisma retto $2p_b$ = perimetro base

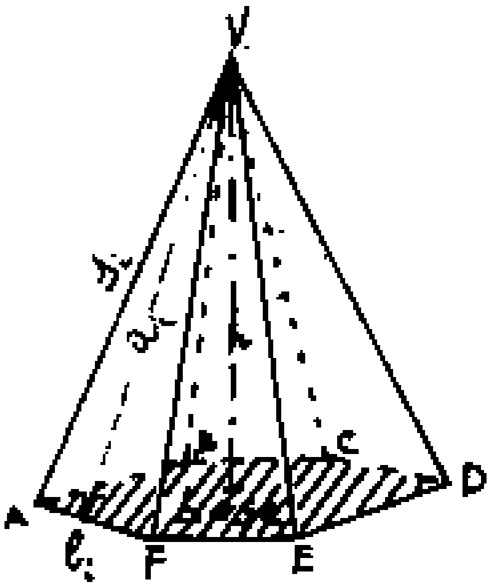
A_b = area base ; h = altezza

A_l = area della superficie laterale = $(2p_b \cdot h)$

A_t = area della superficie totale = $Al + 2A_b$

Volume = $A_b \cdot h$

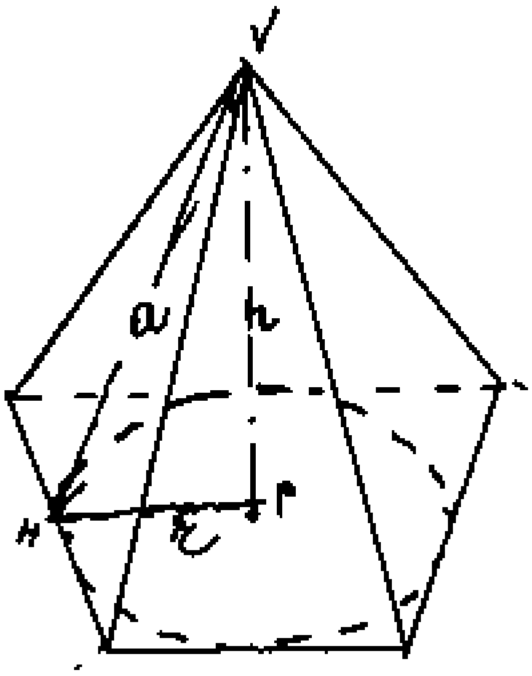
Piramide



Dicesi piramide il solido che si ottiene proiettando un poligono (base della piramide) da un punto V (vertice della piramide) esterno al piano del poligono. Il nome del poligono si estende alla piramide (triangolare; esagonale ecc.). Abbiamo così una parte di spazio limitata da un poligono e tanti triangoli quanti sono i lati "l" del poligono, tutti aventi in comune il vertice V della piramide. Questi triangoli sono detti facce della piramide. L'altezza "a" di questi triangoli, relativa al lato di base, è detta apotema. La distanza h del vertice dalla base é detta altezza della piramide.

Se le apoteme sono tutte uguali avremo che:

$r = \sqrt{a^2 - h^2}$ è costante, cioè il poligono di base è circoscrittibile ad una circonferenza, (ma ciò non è sufficiente per dire che il poligono è regolare) Il piede dell'altezza della piramide cade nel centro della circonferenza e la piramide è detta: Piramide Retta. Se il poligono di base è



regolare, (cioè se ha lati ed angoli uguali ed è inscrittibile e circoscrittibile ad una circonferenza) ed il piede dell'altezza cade al centro della base (che è centro anche delle circonferenze); si ha che anche gli spigoli, oltreché le apoteme, sono uguali, cioè le facce sono uguali, in questo caso la piramide si dice: Piramide regolare alcuni testi dicono: Piramide regolare retta, (Se è regolare è certamente retta)

La superficie laterale della piramide è data dalla somma delle aree delle singole facce.

L'area di una faccia è data dal semiprodotto del lato di base per l'apotema.

L'apotema è data da: $a = \sqrt{h^2+\overline{PH}^2}$ ove P è il piede dell'altezza, ed H è il punto di intersezione, sul lato di base, della perpendicolare condotta ad esso da P

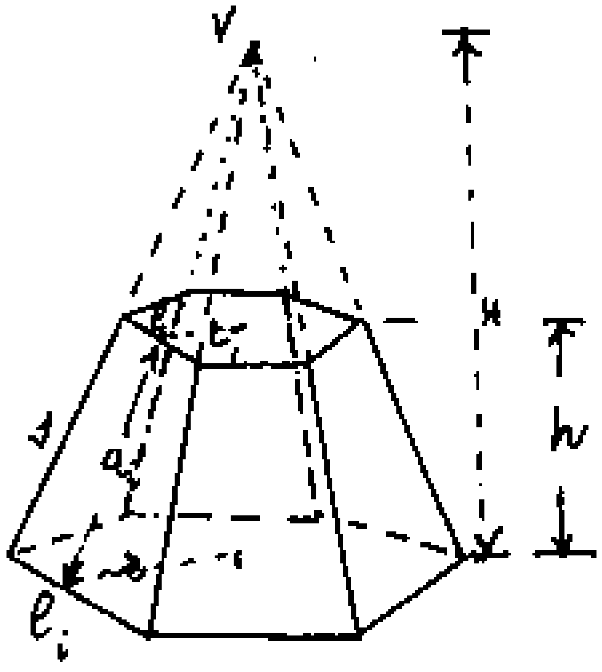
Ovvio che nel caso di Piramide retta l'area laterale è data dal semiperimetro di base per l'apotema.

(che solo in questo caso è uguale per tutte le facce

Il volume è dato da: $V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$ un terzo del prodotto dell'area di base per l'altezza

Intendendo per altezza la distanza del vertice dal piano di base. (vale quindi anche per piramidi inclinate

<u>Per il tronco di piramide</u>, affinché la figura del solido sia definita, occorre



che oltre l'altezza h sia possibile definire l'altezza H della piramide di provenienza. Se il tronco di piramide <u>è regolare</u> basta l = lato di base, n = numero dei lati di base · l_1 = lato della base superiore; h = altezza

avremo: $l_1 : (H-h) = l : H \quad > \quad l_1 H = lH - lh$

$\boxed{H = \left(\frac{l}{l-l_1}\right) h}$ in base ad n è possibile calcolare r = = raggio del cerchio inscritto quindi l'altezza "a" delle facce trapezie sarà: $\boxed{a = \sqrt{h^2 + (r-r_1)^2}}$ da cui l'area di una faccia $= \frac{l+l_1}{2} a$ e <u>l'area della superficie laterale</u> $\boxed{A_l = na\left(\frac{l+l_1}{2}\right)}$

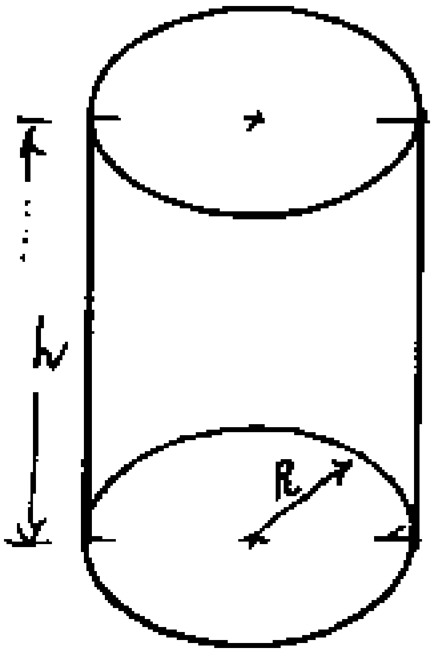
<u>l'area delle basi sarà</u>: $\boxed{A_b = \frac{nrl}{2}}$ $\boxed{A_{b_1} = \frac{nr_1 l_1}{2}}$

<u>l'area Totale</u> $\boxed{A_t = A_l + A_b + A_{b_1}}$

<u>Il volume sarà</u>: $\frac{1}{3}\left[A_b \cdot H - A_{b_1}(H-h)\right] = V$

che può ridursi: $\boxed{V = \frac{h}{3}\left(A_b + A_{b_1} + \sqrt{A_b \cdot A_{b_1}}\right)}$

cilindro



Area base $= R^2\pi = A_b$

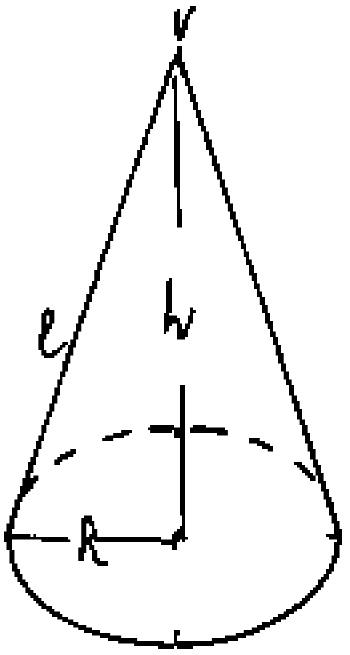
Area della superficie laterale $= 2hR\pi = A_l$

Area totale $A_t = A_l + 2A_b$

Volume $= (A_b)\cdot h$

analogia col prisma

cono



Area base $= R^2\pi = A_b$

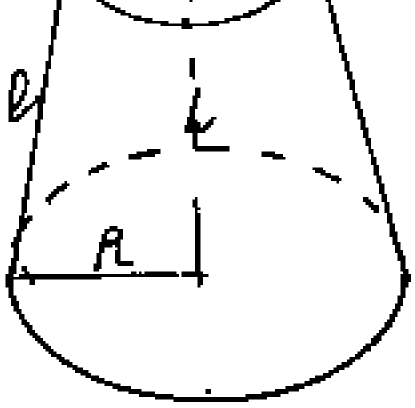
Area della superficie laterale $= A_l = lR\pi$

Area totale $= A_l + A_b$

Volume $= \frac{A_b h}{3} = \frac{hR^2\pi}{3}$

analogia con la piramide

Tronco di cono



Area base maggiore $A_b = R^2\pi$

" " minore $A_{b_1} = r^2\pi$

$l = \sqrt{h^2+(R-r)^2}$. = generatrice

Area della superficie laterale $A_l = l\pi(R+r)$

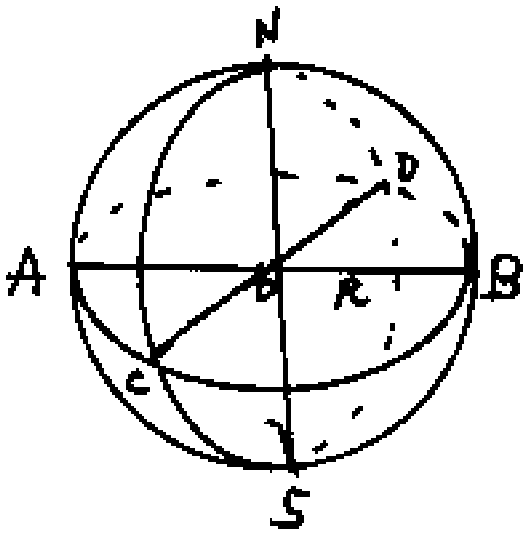
Area totale $= A_t = A_l + A_b + A_{b_1}$

Volume $=$ $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$

analogia col tronco di piramide.

La sfera area $= 4\pi R^2$; volume $= \frac{4}{3}\pi R^3$;

Nomenclatura

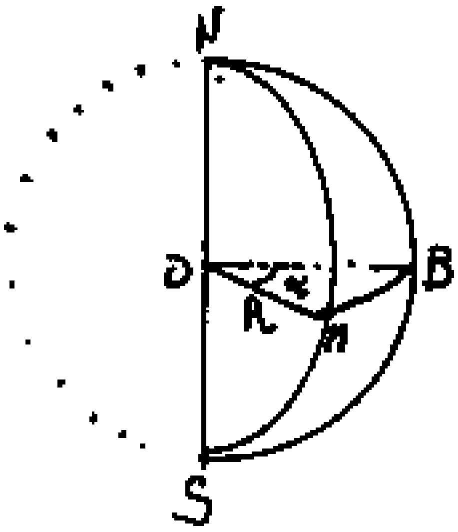


R = raggio $= \frac{\overline{AB}}{2}$; O = centro

$ACBD$ = cerchio massimo orizzontale (equatore)

$CNDS$ = " " verticale (meridiano)

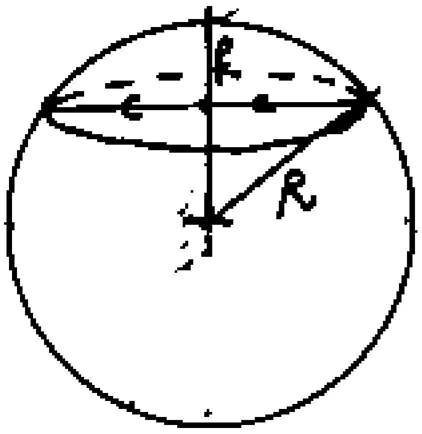
N ; S = vertici o poli



Spicchio sferico = il solido delimitato dai semicerchi NMS e NBS e dal fusosferico NMSBN.

Se S_1 = area della superficie sferica; l'area del fuso = $\boxed{S_F = \frac{S_s \alpha°}{360°}}$

Se V_1 = volume sfera, il volume dello spicchio = $\boxed{V_s = \frac{V_1 \alpha°}{360°}}$



Calotta sferica

Un piano divide la superficie sferica in due parti dette calotte.

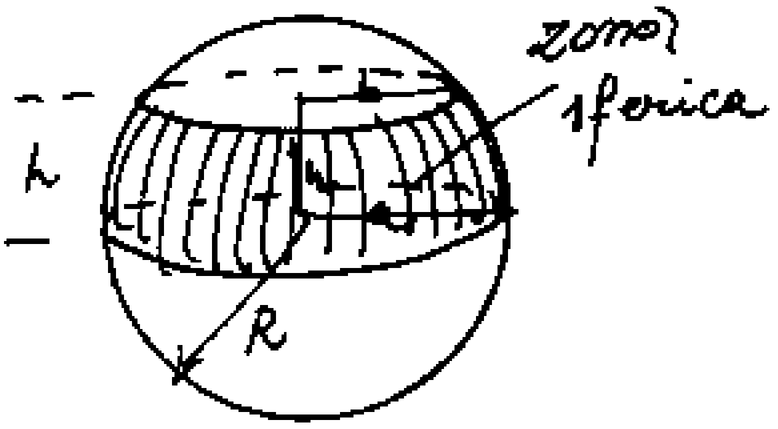
L'area di una calotta $A_1 = 2R\pi f$

L'area dell'altra calotta $A_2 = (2R-f)2R\pi = 4R^2\pi - 2R\pi f$.
la calotta è solo superficie.

Segmento sferico è il solido delimitato da una calotta sferica e dal piano che, sezionando la sfera, ha generato la calotta. volume segmento $V = \frac{\pi}{3} f^2 (3R-f)$

zona sferica

è la parte di superficie sferica intermedia a due calotte con basi parallele

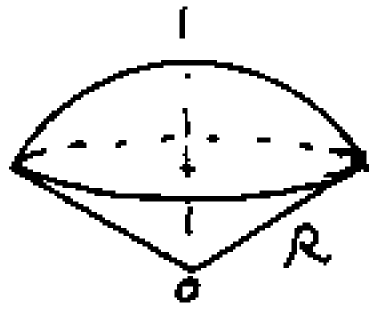


Area della superficie di una zona sferica = $2\pi Rh$.

$V=\frac{\pi h}{6}(3a^2+3b^2+h^2)$ (segmento a due piani)

Settori sferici

Solidi generati dalla ruotazione di un settore circolare attorno ad un diametro del cerchio cui appartiene il settore. Volume $=\frac{2r^2}{3}f\pi$.



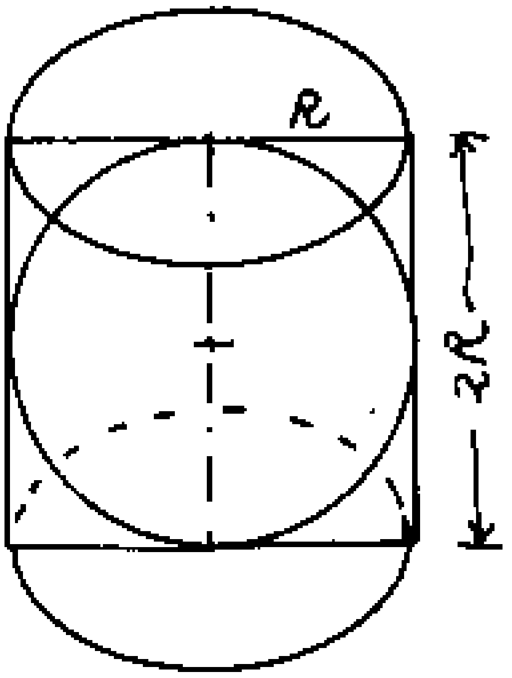
I° TEOREMA di Archimede

L'area della superficie sferica è uguale all'area laterale del cilindro equilatero circoscritto

II° Teorema di Archimede

Il volume di una sfera è uguale ai due terzi del volume del cilindro equilatero circoscritto

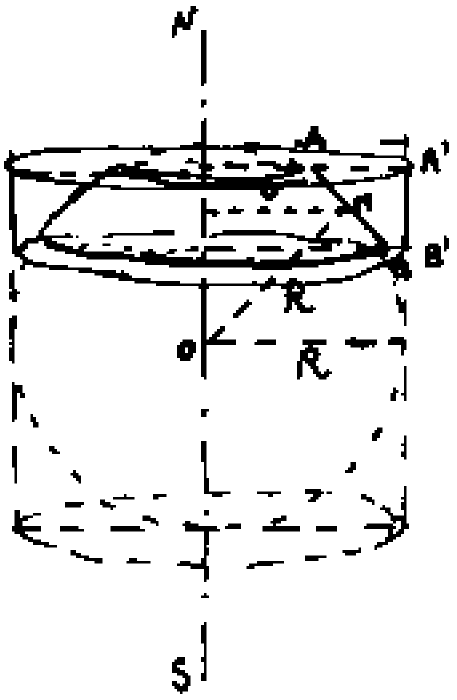
Archimede - siracusano - (287 - 212 a.C.)



Superficie laterale del cilindro:

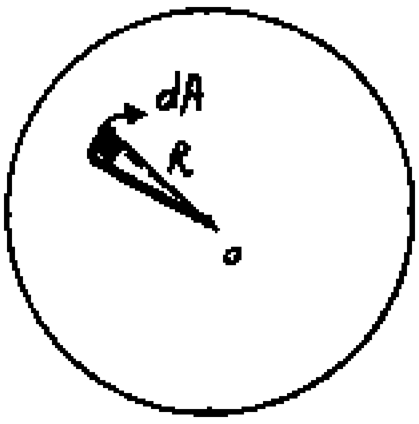
$Al = (2R\pi)(2R) = 4R^2\pi$ = Area laterale

per il I° teorema di Archimede è uguale all'area della superficie sferica che risulta pari a "Quattro volte l'area del cerchio massimo"



Consideriamo il tratto $\widehat{AB} \simeq \overline{AB}$ sulla circonferenza della sfera così piccolo da considerarlo rettilineo. Esso, ruotando intorno all'asse NS genererà una zona sferica che, data la piccolezza di AB, possiamo equiparare ad un tronco di cono la cui superficie laterale sarà: $\overline{AB}\,2r\pi$, ove r è la distanza dall'asse del punto medio di $\overline{AB}$. M. Se proiettiamo $\overline{AB}$ sulla superficie cilindrica avremo il tratto piccolissimo $\overline{A'B'}$ che ruotando intorno all'asse NS genererà la superficie cilindrica di area $A'B'\,2R\pi$. Per similitudine di triangoli si ha $R : r = \overline{AB} : \overline{A'B'}$ da cui $R\overline{A'B'} = r\overline{AB}$ cioè l'area della zona sferica equivale all'area della superficie cilindrica corrispondente.

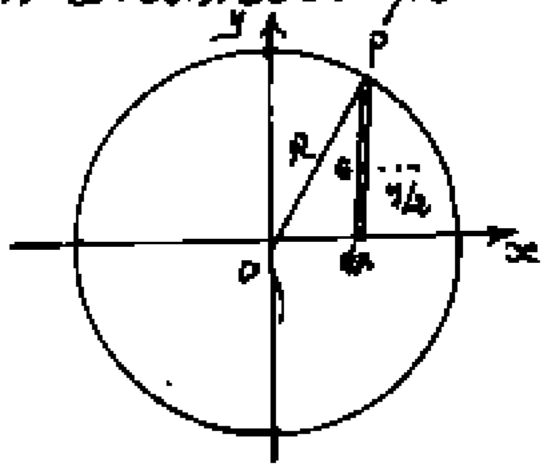
Sommando i vari tratti infinitesimi si ha la dimostrazione del I° teorema di Archimede.



Consideriamo ora un elementino di superficie sferica così piccolo da poterlo ritenere piano, esso dista dal centro O il raggio R., è una piramide elementare il cui volume: $dV = \frac{1}{3} R \cdot dA$, se sommiamo tutte le piramidi possibili avremo che $R/3$ può essere messo in evidenza, mentre la somma delle aree infinitesime "dA" è l'aa della superficie sferica $4R^2\pi$ per cui il volume della sfera: $\boxed{V = \frac{4}{3} R^3 \pi}$

Che possiamo scrivere: $\frac{2}{3}(R^2\pi)(2R) = V = \left(\frac{2}{3}\text{cilindro}\right)$ e resta dimostrato il secondo teorema di Archimede.

Ma c'è ancora un metodo migliore per calcolare il volume della sfera, come solido di rotazione di un semicerchio, cioè come momento statico dell'area rispetto ad un diametro per 2π.



$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \; ; \quad S_x = \int_{-R}^{+R} \frac{y}{2} \cdot dA = \int_{-R}^{+R} \frac{y}{2} \cdot y\,dx = \frac{1}{2}\int_{-R}^{+R} y^2 dx$$

$$S_x = \int_0^R (R^2 - x^2)dx = \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^R = R^3 - \frac{R^3}{3} = \frac{2}{3} R^3$$

$$V = S \cdot 2\pi = \frac{2}{3} R^3 \cdot 2\pi = \boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

Triangoli Pitagorici

Diconsi pitagorici quei triangoli rettangoli nei quali, le dimensioni dei cateti e dell'ipotenusa, sono espresse da numeri interi.

Detti M ed N i cateti ed I l'ipotenusa:

$$I^2 = M^2 + N^2$$

occorre attribuire un'altra correlazione fra I, M ed N, per determinare la legge di un insieme di triangoli pitagorici.

Poniamo: $\boxed{N = I - 1}$

avremo: $\cancel{I^2} = M^2 + \cancel{I^2} - 2I + 1$

$$\boxed{I = \frac{M^2+1}{2}}$$

Affinché I sia intero, il numeratore deve essere pari, cioè M deve essere dispari; si hanno così le terne: (imponendo ad M l'ordine crescente dei numeri dispari) della tabella a fianco; costituita da triangoli pitagorici base, nel senso che i tre numeri non ammettono un fattore comune. Per ciascuna terna è possibile ottenere la serie infinita di triangoli simili, moltiplicando i tre valori per un numero. (p.es. 3,4,5, dà luogo a: 6,8,10 ; 9,12,15 ; 12,16,20; ecc)

M	N	I
1	0	1
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
13	84	85
15	112	113
17	144	145
19	180	181
21	220	221
23	264	265
25	312	313
27	364	365
29	420	421

Ma la serie dei triangoli pitagorici base, non è completa, poniamo quindi: $\boxed{N = I - 2}$

avremo: $\cancel{I^2} = M^2 + \cancel{I^2} - 4I + 4$

$$\boxed{I = \frac{M^2 + 4}{4}} \; ; \; \boxed{I = \left(\frac{M}{2}\right)^2 + 1}$$

Cioè M deve essere pari, e solo alternativamente si hanno triangoli base intervallati dai triangoli simili (1) ottenuti da M dispari moltiplicato per 2, come si può vedere dalla tabella a fianco.

M	N	I	
2	0	2	
4	3	5	
6	8	10	1
8	15	17	
10	24	26	1
12	35	37	
14	48	50	1
16	63	65	
18	80	82	1
20	99	101	
22	120	122	1
24	143	145	
26	168	170	1
28	195	197	
30	224	226	1

Qualora si generalizzi la formula: $\boxed{N = I - a}$; $\boxed{\frac{M^2 + a^2}{2a} = I}$ e poniamo che M sia multiplo di "a" perciò:

$I = \frac{(Ka)^2 + a^2}{2a} = \left(\frac{K^2 + 1}{2}\right) a$ otteniamo triangoli simili con rapporto "a".(2)

---

(1) abbiamo affiancato uno 1 alle terne di triangoli pitagorici simili elencati in tabella.

(2) Le formule che abbiamo utilizzato portano a triangoli pitagorici base in cui un cateto differisce di 1 o di 2 dall'ipotenusa; però esistono triangoli pitagorici base che non hanno tali restrizioni, (per es. 95 - 168 - 193), ne vedremo le determinazioni.

Triangoli pitagorici aventi un cateto comune M.

Se I è l'ipotenusa ed N l'altro cateto si ha:

$$I^2 - N^2 = M^2$$

cioè: $(I - N)(I + N) = M^2$

con ciò abbiamo scomposto M^2 (noto) in due fattori:

$(I - N) = p$; $(I + N) = q$; ove $p \cdot q = M^2$.

Sommando i due fattori: $(I - N) + (I + N) = 2I = p + q$

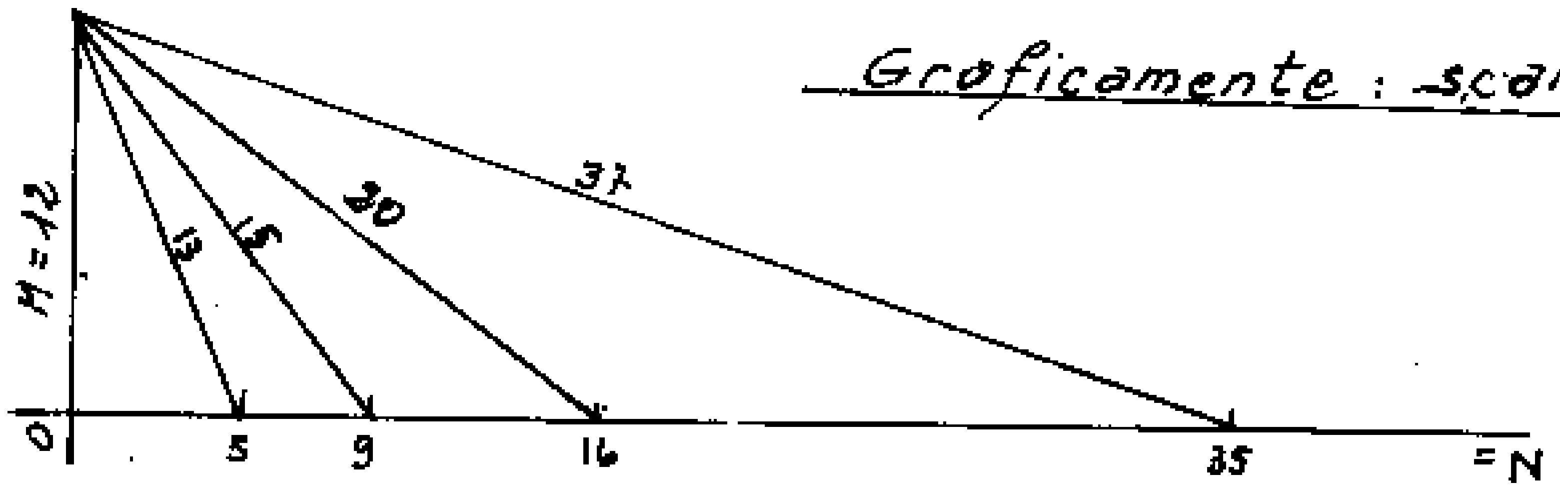
avremo: $\boxed{\frac{M^2}{p} = q}$; $\boxed{\frac{(p+q)}{2} = I}$; $\boxed{N = I - p}$

Anche qui sorge il problema della parità, infatti dovendo l'ipotenusa I essere un numero intero, p e q debbono essere della stessa parità; e p deve essere della stessa parità di M.

Esempio: sia $M = 12$ ed $M^2 = 144$

$p = (I - n) =$	2	4	6	8	12
$q = \frac{M^2}{p} = (I + n) =$	72	36	24	18	12
$2I =$	74	40	30	26	24
$I =$	37	20	15	13	12
$(I - p) = N =$	35	16	9	5	0
$M =$	12	12	12	12	12

Graficamente: scala 1:100 m.



Però assunto $\mathcal{M}$ intero e quindi intero il suo quadrato, con "p" intero, anche il rapporto: $\frac{\mathcal{M}^2}{p} = q$, è razionale e sono razionali: $I = \frac{p^2+\mathcal{M}^2}{2p}$ ed $N = \frac{\mathcal{M}^2-p^2}{2p}$.
quindi la terna $2pM$; $\mathcal{M}^2-p^2$; $\mathcal{M}^2+p^2$; è certamente una terna pitagorica.

Come Esempio, prendiamo ancora $M = 12$; $\mathcal{M}^2 = 144$ e "p" facciamolo variare per numeri dispari.

$p = (I - n) =$	1	3	5	7	9	11
$q = \frac{\mathcal{M}^2}{p} = (I+n) =$	144	48	144/5	144/7	16	144/11
$2I =$	145	51	169/5	193/7	25	265/11
$I =$	145/2	51/2	169/10	193/14	35/2	265/22
$(I-p) \neq N =$	143/2	45/2	119/10	95/14	7/2	23/22
$M =$	24/2	24/2	120/10	168/14	24/2	264/22
$I_1 = 145$		17	169	193	25	265
$N_1 = 143$		15	119	95	7	23
$M_1 = 24$		8	120	168	24	264

Le terne di numeri pitagorici base, che abbiamo ottenuto, sono in parte ottenibili con le formule precedenti (le prime due e le ultime due), mentre le terne: 169 - 119 - 120 e 193 - 95 - 168 non sono ottenibili con le due formule precedenti, salvo prendere $M = 120$ ed $a = 49$ per la prima ed $M = 168$ ed $a = 98$ per la seconda.
Con $M < 7$ non si hanno nuove terne pitagoriche "base".

Riportiamo un elenco di terne "base" di numeri pitagorici, ricordando che iniziamo col cateto minore quindi occorre scorrere i primi due numeri per avere entrambi i cateti. Nelle colonne a fianco abbiamo moltiplicato le terne pitagoriche "base" per 2, 3, 4, 5 ottenendo altre terne pitagoriche, ove scorrendo i primi due numeri possiamo trovare cateti uguali, o scorrendo i terzi numeri possiamo trovare ipotenuse uguali.

3-4-5	6-8-10	9-12-15	12-16-20	15-20-25
5-12-13	10-24-26	15-36-39	20-48-52	25-60-65
7-24-25	14-48-50	21-72-75	28-96-100	35-120-125
8-15-17	16-30-34	24-45-51	32-60-68	40-75-85
9-40-41	18-80-82	27-120-123	36-160-164	45-200-205
11-60-61	22-120-122	33-180-183	44-240-244	55-300-305
12-35-37	24-70-74	36-105-111	48-140-148	60-175-185
13-84-85	26-168-170	39-252-255	52-336-340	65-420-425
15-112-113	30-224-226	45-336-339	60-448-452	75-560-565
16-63-65	32-126-130	48-189-195	64-252-260	80-315-325
17-144-145	34-288-290	51-432-435	68-576-580	85-720-725
19-180-181	38-360-362	57-540-543	76-720-724	95-900-905
20-21-29	40-42-58	60-63-87	80-84-116	100-105-145
21-220-221	42-440-442	63-660-663	84-880-884	105-1100-1105

- Si noti che l'ipotenusa di una terna pitagorica "base" è sempre dispari; infatti, "<u>i quadrati dei numeri sono sempre della stessa parità delle</u>

basi: $\left((2m-1)^2 = 4m^2-4m+1 = 2(2m^2-2m)+1\right)$, ma la somma di due numeri della stessa parità è sempre pari, perciò i cateti di una terna pitagorica "base", saranno uno pari ed uno dispari.

Col metodo del cateto comune troviamo tutte le terne pitagoriche che hanno in comune quel cateto; e se vi sono terne che non hanno sottomultipli in comune quelle sono terne "base": (5-12-13 ; 12-35-37) sul cateto 12 abbiamo due terne base.

Verificheiamo che sul cateto $M = 14$; $M^2 = 196$; non vi sono terne pitagoriche "basi".

$(I-N) =$	1	2	3	4	5	6	7
$(I+N) =$	196	98	196/3	49	196/5	98/3	28
$2I =$	197	100	205/3	53	221/5	116/3	35
$I =$	197/2	50	205/6	53/2	221/10	58/3	35/2
$N =$	195/2	48	187/6	45/2	171/10	40/3	21/2
$M =$	28/2	14	84/6	28/2	140/10	42/3	28/2

$(1-N) =$	8	9	10	11	12	13	14
$(1+N) =$	49/2	196/9	196/10	196/11	49/3	196/13	14
$2I =$	65/2	277/9	296/10	317/11	85/3	365/13	28
$I =$	65/4	277/18	148/10	317/22	85/6	365/26	14
$N =$	33/4	115/18	48/10	75/22	13/6	27/26	0
$M =$	56/4	252/18	140/10	308/22	84/6	364/26	14.

Lo studio dei triangoli Pitagorici ha interessato generazioni di studiosi. Le formule sono in genere date in funzione di un parametro "n" intero 1, 2, 3, ... seguente la serie naturale dei numeri, ove posti $x^2+y^2=z^2$ i lati del triangolo,

Secondo Pitagora abbiamo:

$$\boxed{x=(2n+1)}\ ;\ \boxed{y=2n(n+1)}\ ;\ \boxed{z=n^2+(n+1)^2}$$

Secondo Platone:

$$\boxed{x=n^2-1}\ ;\ \boxed{y=2n}\ ;\ \boxed{z=(n^2+1)}$$

Secondo Diofanto: $(n=2,3,4\ldots)$ (esclude l'unità)

Siano $a>b$ due numeri interi positivi

$$\boxed{x=a^2-b^2}\ ;\ \boxed{y=2ab}\ ;\ \boxed{z=a^2+b^2}$$

Queste ultimo formule sono dette generali:

$$b^2=(a^2-x)=z-a^2 \ > \ a^2=\left(\frac{z+x}{2}\right)\ ;\ b^2=\left(\frac{z-x}{2}\right)$$

$$y=2\sqrt{\frac{z^2-x^2}{4}} \ > \ \boxed{x^2+y^2=z^2}$$ (equazione del cono con vertice nell'origine)

Un triangolo pitagorico ha le funzioni trigonometriche seno, coseno, e tangente espresse da numeri razionali. E' detto anche triangolo aritmetico.

Considerando che l'angolo di $45°=\pi/4$ rad è il limite al quale si scambiano i valori dei cateti, ricordando che: $\operatorname{sen}(\alpha)=\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{M}{I}$;

$\cos(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{tang^2\alpha+1}}=\frac{N}{I}$; $tang\,\alpha=\frac{M}{N}$;

Poiché, in un triangolo pitagorico, i cateti M ed N non potranno mai essere uguali, essendo $I = \sqrt{2}$ (non intero) e dovendo essere numeri interi essi differiranno di almeno una unità. Cioè: $M = (N-1)$ e dovrà essere:

$(N-1)^2 + N^2 = I^2$; $2N^2 - 2N - (I^2-1) = 0$;

$$N^2 - 2\frac{N}{2} - \frac{I^2-1}{2} = 0$$

$N = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{I^2}{2} - \frac{1}{2}}$; $N = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{2I^2-1}{4}}$; $N = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{2I^2-1}\right)$

oppure: $I = \sqrt{2N^2-2N+1}$

con questa formula troviamo: $N=4$; $M=3$; $I=5$;

ma $\tan \alpha = \frac{M}{N} = \frac{3}{4} > \alpha = 36°52'11'',63 = 0{,}20483\,\pi$ rad.

20 - 21 - 29 ove $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{20}{21}\right) = \alpha = 43°36'10'',15 = 0{,}2422\,\pi$ rad.

119 - 120 - 169 ove $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{119}{120}\right) = \alpha = 44°45'36'',97 = 0{,}24866\,\pi$ rad.

696 - 697 - 985 ove $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{696}{697}\right) = \alpha = 44°57'31'',93 = 0{,}24977\,\pi$ rad

4059 - 4060 - 5741 ove $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{4059}{4060}\right) = \alpha = 44°59'34'',59 = 0{,}24996079\,\pi$ r.

23660 - 23661 - 33461 ove $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{23660}{23661}\right) = \alpha = 44°59'55'',64 = 0{,}249993273\,\pi$,

possiamo trovare ancora triangoli pitagorici con $N > 100.000$. Si noti come: $\frac{5741}{4059} = 1{,}41438778$; e

$\frac{5741}{4060} = 1{,}414039409$; $\frac{33461}{23660} = 1{,}4142349$; $\frac{33461}{23661} = 1{,}41418367\,8$.

L'approssimazione di $\sqrt{2}$ per difetto e per eccesso è data dalla successione delle frazioni che hanno al numeratore il doppio del denominatore della frazione precedente aumentato del numeratore precedente e per denominatore la somma dei precedenti numeratore e denominatore. Cioè se $\frac{N}{D}$ è una frazione, quella seguente è $\frac{2D+N}{N+D}$.

abbiamo così:

$\frac{1}{1}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{17}{12}$; $\frac{41}{29}$; $\frac{99}{70}$; $\frac{239}{169}$; $\frac{577}{408}$; $\frac{1393}{985}$; $\frac{3363}{2378}$; ...

1	1,5	1,4	$1,4166\overline{6}$	1,413793103	1,414285714	1,414201183	1,414215686	1,41423198	1,414213625

$\sqrt{2} = 1,4142135623 73\ldots$ (vedi Vol. II - frazioni continue)

Però nessuna di queste frazioni ha per termini lati di triangoli pitagorici. Il triangolo pitagorico vicino a 45° con cateti fra 100.000 e 200.000 è:

$\underline{137903}^2 = 19017237409$ +

$\underline{137904}^2 = 19017513216$

$\underline{195025}^2 = 38034750625$

$\frac{137904}{137903} = tg(45° \, 00' \, 00'',75)$

$\frac{137903}{137904} = tg(44° \, 59' \, 59',25)$

Si noti come a questo livello la differenza è 0,75''

$\frac{195025}{137903} = 1,414218690 \longleftarrow$

$\sqrt{2} = 1,414213562$ media 1,414219578

$\frac{195025}{137904} = 1,414208435 \longleftarrow$

Se invece consideriamo triangoli rettangoli pitagorici in cui l'angolo opposto al cateto minore sia piccolissimo, utilizzando le prime formule: $N = I - 1$; $I = \frac{M^2+1}{2}$; ricordando che M deve essere dispari, posto $M = 99999$; $I = 4999900001$; $N = 4999900000$;

$$\begin{array}{l r} N^2 = & 24\,999\,00001\,0000000000 \\ M^2 = & 9999800001 \\ \hline I^2 = & 24\,999\,00001\,9999800001 \end{array}$$

$$\frac{4999900000}{99999} = (49999{,}49999) = \text{tang}\,(89°\,59'\,55'',87)$$
$$= \text{cotg}\,(0°\;0'\;4'',13)$$

Con ciò si è voluto dimostrare che si possono trovare triangoli rettangoli pitagorici prossimi quanto si vuole a triangoli rettangoli ad angoli prefissati. Col sistema del cateto comune, abbiamo visto (e disegnato per $M=12$) i vari triangoli pitagorici. Per esempio per avere un triangolo pitagorico i cui angoli si approssimino a 30°; 60° e 90° si può prendere:

$M = 10864$; $N = 6273$; $I = 12545$;

$(M^2 + N^2 = I^2) \equiv (118026496 + 39350529 = 157377025)$

$$\frac{M}{N} = \frac{10864}{6273} = \text{tang}\,(59°\,59'\,50'',51) = \text{cotg}\,(30°00'\,09'',49).$$

$\frac{10864}{6273} = 1{,}73186673$ ove $\sqrt{3} = 1{,}732050808$ ci dice che possono trovarsi triangoli migliori —.

I triangoli pitagorici che hanno l'ipotenusa numero primo, sono detti <u>elementari</u>.
I triangoli pitagorici che pur essendo triangoli base (cioè i lati non ammettono un divisore comune) tuttavia l'ipotenusa non è un numero primo, ma è divisibile; questi triangoli sono detti <u>composti</u>.
Fra i triangoli composti ve ne sono alcuni che hanno l'ipotenusa comune; per esempio:
16 - 63 - 65 ; 33 - 56 - 65 ; 13 - 84 - 85 ; 36 - 77 - 85.

Poiché ogni numero quadrato perfetto è la somma progressiva dei numeri dispari da 1 a $2I - 1$ per ottenere I^2, cioè: $(2I-1)$ è il massimo numero dispari utilizzato, che può e non può essere quadrato perfetto, se lo è esiste un triangolo pitagorico $(N = I - 1)$; $M^2 = (2I-1)$; $D = (2I-1)$, possiamo fare la somma a ritroso dei numeri dispari cioè $D + D-2 + D-4 + \cdots = S$ ed avremo che $S_i = (2iI - i^2)$ per i variabile da 1 ad $\frac{1}{2} I$. se S_i è quadrato perfetto si ha un triangolo pitagorico di ipotenusa I.

Per esempio per $I = 25$

$S_1 = (2 \cdot 25 - 1) = 49 = 7^2$ per cui: 7 - 24 - 25

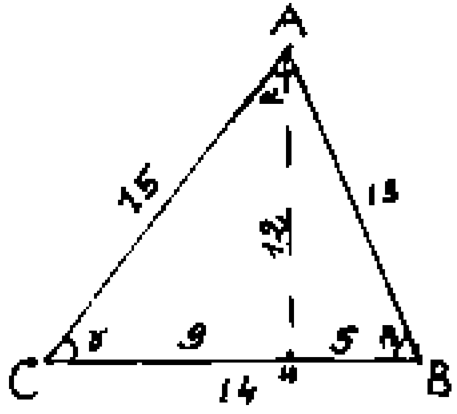
...

$S_5 = (10 \cdot 25 - 25) = 225 = 15^2$ " " 15 - 20 - 25 ove però 15 - 20 - 25 non è "base" perché multiplo di 3 - 4 - 5 per 5.

Con ipotenusa 65 oltre i triangoli base: 16 - 63 - 65 e 33 - 56 - 65 si hanno i triangoli: 25 - 60 - 65 che è multiplo di 5 - 12 - 13 per 5, e 39 - 52 - 65 che è multiplo di 3 - 4 - 5 per 13.

Fra i triangoli base, oltre quelli elencati, con ipotenusa compresa fra 1 e 100, vi sono: 28 - 45 - 53 ; 48 - 55 - 73 ; 39 - 80 - 89 ; 65 - 72 - 97 ; 20 - 99 - 101.

Un triangolo scomponibile in triangoli pitagorici è il triangolo 13 - 14 - 15 nel quale l'altezza relativa al lato 14 è 12 e lo divide in 9 e 5. L'area di questo triangolo è $(14 \times 12)\frac{1}{2} = 84$;



$$\begin{array}{rl} \alpha = 59^\circ & 29'\ 23'',14 \\ \beta = 67^\circ & 22'\ 48'',49 \\ \gamma = 53^\circ & 07'\ 48'',37 \\ \hline 180^\circ & 0'\ \ 0'' \end{array}$$

Col principio del cateto comune si possono costruire triangoli aventi i lati e l'area espressi da numeri interi; per esempio il triangolo di lati 17-25-28 con altezza 15 area = 210.

Triangoli Eroniani

Diconsi triangoli eroniani quei triangoli in cui i lati e l'area sono espressi da numeri razionali.

È ovvio quindi che anche le altezze, relative ai lati, nonché i raggi dei cerchi inscritti, circoscritti ed exinscritti sono espressi da numeri razionali. Gli angoli sono detti aritmetici chiamando aritmetici quegli angoli le cui funzioni trigonometriche sono espresse da numeri razionali.

Verso l'anno 599 D.C. BRAHMAGUPTA, fissò i lati di un triangolo eroniano con:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+b\right) \quad ; \quad \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c}+c\right) \quad ; \quad \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-b\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c}-c\right) \quad ;$$

ove: a, b, c, sono numeri razionali.

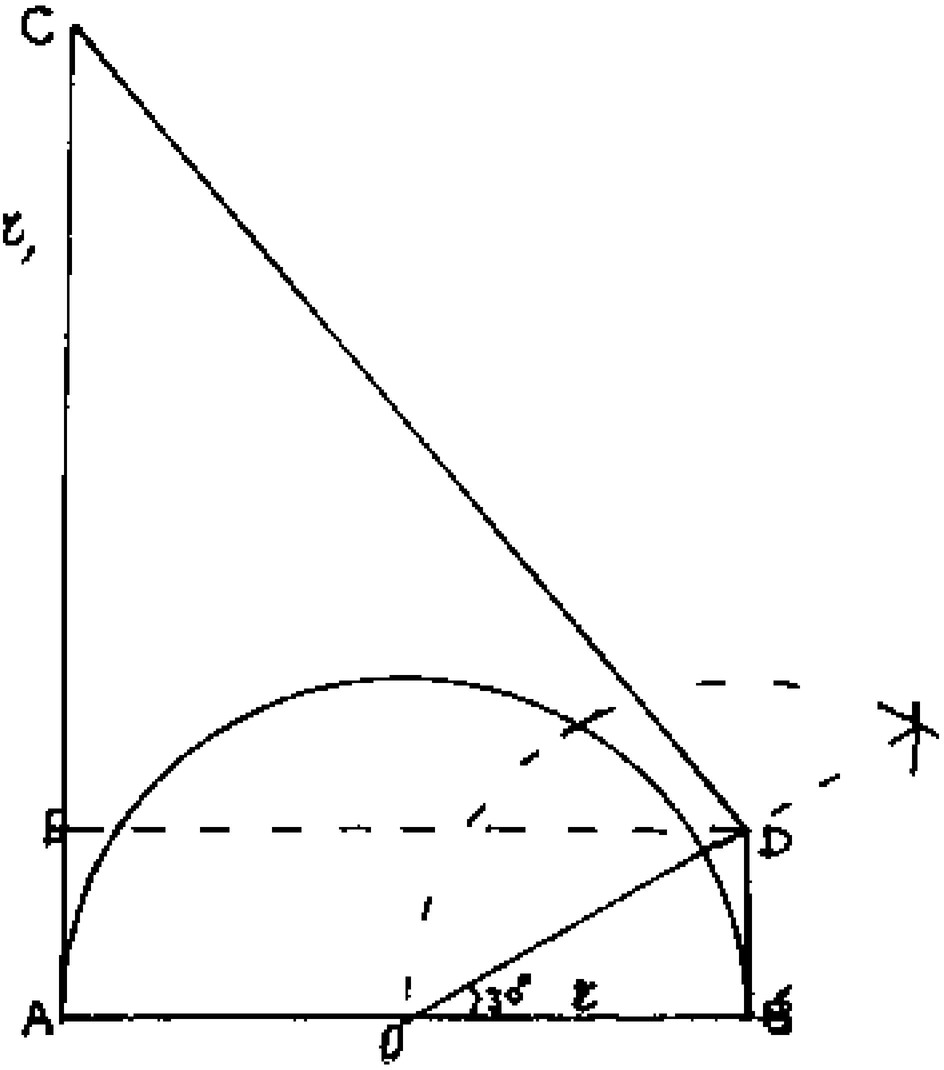
Un triangolo pitagorico, o composto di triangoli pitagorici è eroniano.

Per esempio il triangolo di lati 4-13-15 ove l'altezza rispetto al lato 4 è 12 cioè l'Area = 24 ottenuto per differenza dai triangoli pitagorici 9-12-15 e 5-12-13, è eroniano.

Costruzione approssimata della circonferenza rettificata

Data la semicirconferenza $\widehat{AB}$ di raggio r, si riporta, sulla tangente in A, il segmento $\overline{AC}=3r$, sulla tangente in B si costruisce il segmento $\overline{BD}$ (ove $B\hat{O}D = 30°$),

$\overline{CD} \doteq r\pi$



$\overline{BD} = r/\sqrt{3}. = \overline{AE}$; $\overline{ED} = 2r$;

$\overline{EC} = (\overline{AC} - \overline{AE}) = (3r - r/\sqrt{3})$

$\overline{CD} = \sqrt{\overline{ED}^2 + \overline{EC}^2}$

$\overline{CD} = \sqrt{4r^2 + r^2\left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$\overline{CD} = \sqrt{r^2\left(4 + 9 + \frac{1}{3} - \frac{6}{\sqrt{3}}\right)}$

$\overline{CD} = r\sqrt{\frac{39+1}{3} - \frac{6}{\sqrt{3}}} \quad = \quad \boxed{\overline{CD} = r\sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}}$

$\sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \quad = \quad \underline{3,1415}33339$

$\pi \quad = \quad \underline{3,1415}92$

si puó quindi dire: $\overline{CD} \simeq r\pi$

con errore alla 5 cifra decimale cioè: $\frac{0,593}{10000} r$.

con raggio 1 metro l'errore è $\sim \frac{1}{30}$ di millimetro

Calcolo numerico approssimato (1)

L'introduzione dei numeri irrazionali ci pone ora nella necessità di stabilire in qual modo si dovranno eseguire le operazioni elementari su gli essi.

È evidente che essendo un numero irrazionale espresso da un numero decimale, illimitato non periodico, cioè da un numero decimale avente infinite cifre senza legge di periodicità, le operazioni non si potranno eseguire sui numeri irrazionali stessi, giacché ogni nostra attività è limitata nello spazio e nel tempo, ma solo sui loro valori approssimati per difetto e per eccesso.

Vi è un inoltre, un'altra ragione che ci induce a considerare valori approssimati anziché valori esatti.

La misura di ogni grandezza esistente nella natura si fa per mezzo di appositi strumenti che non danno mai un risultato del tutto preciso a causa degli inevitabili errori di costruzione, ai quali si aggiungono ancora gli errori di osservazione dovuti alla imperfezione dei nostri organi sensitivi.

---

1) Dalle dispense del Rag. Rossi gratuitamente date agli allievi del Regio Istituto Tecnico Galileo Galilei sez. Geometri anni 1936/37 - 1937/38 - FI.

Per queste due ragioni è necessario trattare di calcolo numerico approssimato.

Passiamo ora in rassegna le quattro operazioni elementari con numeri approssimati per difetto e per eccesso.

Addizione

$$\begin{array}{r} \text{se:} \\ \\ \text{è:} \end{array} \boxed{\begin{array}{c} a < x < b \\ c < y < d \\ \hline (a+c) < (x+y) < (b+d) \end{array}}$$

Esempio: Calcolare $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

$\sqrt{2} = 1,4142\ldots\ldots$

$\sqrt{3} = 1,7320\ldots\ldots$

$$\begin{array}{c} 1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143 \\ 1,7320 < \sqrt{3} < 1,7321 \\ \hline 3,1462 < (\sqrt{2}+\sqrt{3}) < 3,1464 \end{array}$$

quindi: $\underline{(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 3,146}$

Sottrazione

$$\begin{array}{r} \text{se:} \\ \\ \text{è:} \end{array} \boxed{\begin{array}{c} a < x < b \\ c < y < d \\ \hline (a-d) < (x-y) < (b-c) \end{array}}$$

Esempio: Calcolare $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

$\sqrt{3} = 1,7320$

$\sqrt{2} = 1,4142$

$$\begin{array}{c} 1,7320 < \sqrt{3} < 1,7321 \\ 1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143 \\ \hline (1,7320 - 1,4143) < (\sqrt{3}-\sqrt{2}) < (1,7321 - 1,4142) \\ 0,3177 < (\sqrt{3}-\sqrt{2}) < 0,3179 \end{array}$$

quindi: $\underline{(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 0,317\ldots\ldots}$

Moltiplicazione

$$\begin{array}{rl} \text{se:} & \boxed{\begin{array}{c} a < x < b \\ c < y < d \\ \hline ac < xy < bd \end{array}} \\ \text{è:} & \end{array}$$

Esempio: calcolare $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

$\sqrt{2} = 1,4142$

$\sqrt{3} = 1,7320$

$$\begin{array}{c} 1,7320 < \sqrt{3} < 1,7321 \\ 1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143 \\ \hline 1,7320 \times 1,4142 < \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} < 1,7321 \times 1,4143 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{1,7320 \times} \\ \multicolumn{2}{l}{1.4142} \\ \hline 17320 & \\ 6928 & 0 \\ 173 & 20 \\ 69 & 280 \\ 3 & 4640 \\ \hline 2,4493 & 9440 \end{array} < \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} < \begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{1.7321 \; \times} \\ \multicolumn{2}{l}{1.4143} \\ \hline 17321 & \\ 6928 & 4 \\ 173 & 21 \\ 69 & 284 \\ 5 & 1963 \\ \hline 2,4497 & 0903 \end{array}$$

quindi $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 2,449 \ldots$

E' bene osservare quante <u>cifre inutili</u> sono state trascinate nei due calcoli eseguiti con la <u>moltiplicazione ordinaria</u> con perdita di tempo, mentre poche, tre sole sono le cifre decimali sicure utilizzabili per il prodotto esatto.

Pertanto si vede l'opportunitá di trovare un procedimento di calcolo che eviti le cifre inutili, cioé quelle che stanno a destra delle linee verticali. Ció si puó fare utilizzando la cosi detta:

Moltiplicazione abbreviata. per difetto e per eccesso, in cui si terra conto però dei riporti dai riporti provenienti delle cifre trascurate.

I riporti si prendono per difetto nel primo calcolo e per eccesso nel secondo.

$$
\begin{array}{r}
1,7320 \\
\underline{24141} \\
17320 \\
6928 \\
173 \\
69 \\
\underline{3} \\
2,4493
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
1,7321 \\
\underline{34141} \\
17321 \\
6929 \\
174 \\
70 \\
\underline{6} \\
2,4500
\end{array}
$$

quindi $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \underline{2,449}\ldots\ldots$

In pratica per la maggior parte dei calcoli di applicazione si fa una sola moltiplicazione che si può *chiamare moltiplicazione compensata*: essa serve per ottenere, col minor dispendio di calcolo, *il valore più attendibile* che può risultare per difetto e per eccesso, ma sempre molto vicino al valore esatto del prodotto.

Esempio: calcolare il valore più attendibile di: $\sqrt{10}\cdot\sqrt{8}$

$\sqrt{10} = 3,162\underline{3}$ (per eccesso)
$\sqrt{8} = 2,8284$ (per difetto)

$$
\begin{array}{r}
3,1623 \\
\underline{48282} \\
63246 \\
25298 \\
632 \\
253 \\
\underline{12} \\
8,9441
\end{array}
$$

$$\underline{\sqrt{10}\cdot\sqrt{8} \cong 8,9441}$$

$\left(\sqrt{10}\cdot\sqrt{8} = \sqrt{80} = 8,94427191\right)$

Divisione

$$\begin{array}{r|c|} \cline{2-2} \text{Se:} & a < x < b \\ & c < y < d \\ \cline{2-2} \text{è:} & \frac{a}{d} < \frac{x}{y} < \frac{b}{c} \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Esempio: calcolare $\sqrt{3} : \sqrt{2}$

$\sqrt{3} = 1,7320\ldots$

$\sqrt{2} = 1,4142\ldots$

$$\begin{array}{c} 1,7320 < \sqrt{3} < 1,7321 \\ 1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143 \\ \hline 1,7320 : 1,4143 < (\sqrt{3} : \sqrt{2}) < 1,7321 : 1,4142 \end{array}$$

$$1,2246 < \sqrt{3} : \sqrt{2} < 1,22479 \simeq 1,2248$$

Lasciamo quí le dispense del Prof. Rossi degli anni 1936-37, le quali propongono una *divisione abbreviata* per ottenere il *valore piú attendibile*.

I moderni calcolatori elettronici ottengono valori con molte piú cifre decimali, l'ultima delle quali è arrotondata e forniscono valori ancor piú attendibili. Però concettualmente il problema di esprimere *il valore attendibile* di una certa grandezza rimane, e non possiamo dire numericamente risolto. Infatti su questo problema, che torneremo, occorre introdurre il *concetto di precisione*, *di tolleranza*, di *campo di oscillazione*.

La Precisione

La cosiddetta precisione è in genere espressa in percentuale della grandezza cui si riferisce; per esempio una lunghezza precisa all'un per mille, (precisione $\frac{1}{1000}$) vuol dire che ogni metro, può essere affetto da un errore non superiore al millimetro, cioè la distanza di 1 Km precisa $1/1000$ può esprimersi

999 metri < 1 Km < 1001 metri. ; $D = 1000 m. \pm 1$.

Il campo di variazione di una grandezza, non dipende solo da errori o approssimazioni, ma dipende anche da condizioni variabili di stato fisico come la temperatura, la pressione, la tensione, ecc. delle quali si deve tener conto, sopratutto se trattasi di strumenti di misura.

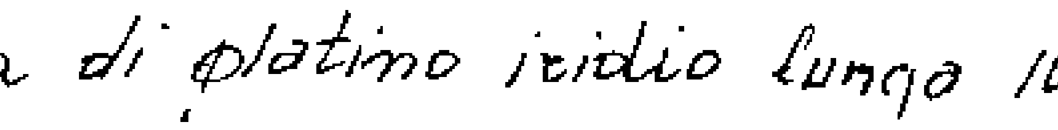
La tolleranza di un micron in certi pezzi meccanici, può diventare di qualche metro se si valuta la lunghezza di un cavo elettrico per coprire una linea di 100 Km.

Sarebbe assurdo esprimere in micron le dimensioni di un vano di abitazione ove le irregolarità dell'intonaco e della tinteggiatura fanno saltare i millimetri, quindi la precisione numerica data dal numero di cifre è solo valida a fini teorici, in quanto, altri fattori, possono invalidare, almeno in parte, delle cifre, rendendole inutili.

Sistema metrico decimale

La laboriositá dei calcoli sui numeri complessi costituiti dalle antiche unitá di misura con multipli e sottomultipli non decimali (ancor oggi esistenti nelle misure inglesi), convinse nel 1790 l'assemblea Costituente francese a nominare una commissione per l'unificazione delle unitá di misura.

La commissione decise di fondare le misure sulla unitá di misura delle lunghezze, assumendo come unitá la quarantamilionesima parte del meridiano terrestre, quale risultava dai calcoli della Meridiana di Parigi, tale unitá fu chiamata: "mètre" in italiano: "metro" e deriva dal greco antico: "μέτρον" = misura. Di tale unitá ne fu fatto un campione costituito dalla distanza di due tratti sottili su una barra di platino iridio lunga 102 cm, con sezione ad X per avere la massima resistenza ad inflettersi



la distanza $\overline{AB}$ dei tratti è di un metro alla temperatura di zero gradi Celsius e 760 mm. di Hg di pressione. (1841)

Ma la definizione della unitá di misura non poté essere : "la quarantamilionesima parte del meridiano terrestre" Perché successive misure del meridiano portarono a differenze ben maggiori dei confronto fra due segmenti. Perciò il "metro" è stato definito (nel 1872)

"La lunghezza del metro campione conservato negli Archivi dell'Ufficio Internazionale di Pesi e Misure di Sèvres (Parigi), misurato alla temperatura di zero gradi Celsius e 760° millimetri di Hg di pressione."

Per temperature diverse, la lunghezza "l" del campione fu definita:

$$l = 1 m + (8,651 t + 0,00100 t^2) \cdot 10^{-6}$$

(ove "t" è la temperatura del termometro ad idrogeno) più recenti misure darebbero il primo coefficiente in 8,635 anziché 8,651.

Nell'industria il metro è una lunghezza che a 20°C di temperatura equivale il metro campione a 0°C, ciò per ragioni pratiche.

Ma a fini scientifici era necessaria una più precisa definizione del metro, perciò si è utilizzata la lunghezza d'onda della riga rossa del cadmio a 15°C e 760 mm. Hg.

$\lambda_{cd} = 0,000000 643 84696$ metri; 1 metro $= 1.553164,13 \lambda_{cd}$.

per la fisica atomica si ha il metro moltiplicando per 1.650.763,73 la lunghezza d'onda del cripto-86 dovuto alla transizione fra i livelli $2p_{10}$ e $5d_5$. (Nel vuoto).

Abbiamo già accennato che il cosiddetto <u>vuoto</u> non può esistere in realtà, ed è una astrazione del nostro pensiero, ed i signori fisici all'atto stesso che dicono <u>nel</u> lo riempiono, e non è più vuoto nemmeno come astrazione del nostro pensiero.

La definizione iniziale del metro legale o campione conservato a Sèvres fu detto corrispondente a 443,296 linee della cosiddetta "<u>Tesa del Perù</u>", ed era un campione in ferro a 13° Reaumur.

In Italia il sistema metrico decimale fu introdotto nel 1861, è stato adottato in molti paesi esclusa l'Inghilterra per la quale è stato stabilito:

1 metro = 39,370113 pollici (inches)(in)

cioè 1 pollice = 2,5399779 ≃ 2,54 centimetri.

Altre misure lineari inglesi: 1 Piede (foot)(ft) = 12 pollici
1 yard = 3 piedi ; 1 fathom = 2 yard = 6 piedi;
1 pole = 16,5 piedi = 198 pollici ≅ 5,0292 metri
1 statute mile = 8 furlongs = 1760 yard ≅ 1,609342 Km.
1 miglio inglese (Londra) = 5000 piedi = 1,524 Km.
1 nautical mile (nodo) = 6080 piedi = 1,85318 Km.
1 Admiralty mile = 6086,5 piedi = 1.8551 Km.

misure di lunghezze nel sistema metrico decimale

Denominazione	simbolo	equivalenza
Miriametro	Mm	10.000 m = 10^4 metri
chilometro	Km	1.000 m = 10^3 "
ettometro	hm	100 m = 10^2 "
decametro	dam	10 m = 10^1 "
metro	m	1 m = 10^0 "
decimetro	dm	$1/10$ m = 10^{-1} "
centimetro	cm	$\frac{1}{100}$ m = 10^{-2} "
millimetro	mm.	$\frac{1}{1000}$ m = 10^{-3} "
micron	μ	$\frac{1}{1000}$ mm = 10^{-6} "
Angström	Å	$\frac{1}{10000}\mu = 10^{-8}$ cm = 10^{-10} metri
Fermi	fm	$10^{-8}\mu = 10^{-13}$ cm. = 10^{-15} metri

Altre unitá di lunghezza non strettamente legate al sistema decimale, ma aventi per base il metro.

doppio metro in uso in negozi di stoffe

tripIometro (canna metrica) in uso in topografia

doppio decametro " "

miglio marino (internazionale) = 1852 metri

anno luce ≃ 9461 miliardi di chilometri (in astronomia).

parsec = 3,263 anni luce (in astronomia)

Per completezza riportiamo l'equivalenza di altre misure inglesi.

1 Acre = 0,404286 ettari

misure di superficie: 1 pollice q. (sq. in) = 6,4516 cm^2

1 piede q (sq. ft) = 0,0929 m^2

1 yard q (sq yd) = 0,8361 m^2

1 miglio q (sq mile) = 2,59 Km^2

misure di volume: 1 pollice cubo (cu. in) = 16,387 cm^3

1 piede cub. (cu. ft) = 0,0283 m^3

1 yard cub. (cu. yd) = 0,7646 m^3

1 register-ton = (100 cu. ft.) = 2,832 m^3

1 ocean ton = (40 cu. ft.) = 1,1327 m^3

1 Imperial gallon = 4 quarts = 8 pints = 8 (U.K. pt) = 32 gills = 4,54596 litri

1 barrel = 4 bushel = 32 gallons = 1,6365 hl.

1 last = 10 quarters = 80 buschel = 320 peks = 29,078144 hl

misure di peso: 1 libbra avoir dupois (lb) = 16 once (oz) =

= 256 drams = 7000 troygrains = 0,463292 Kg

1 libbra troy = 12 once = 240 pennyweights (dw) =

(dw) = 5760 troygrains = 0,373242 Kg

1 short-ton = 2000 libbre (lbs) = 907,1853 Kg

1 long-ton = 20 cwtweigth = 80 quaters =

= 2240 libbre (lbs) = 1016,0471 Kg

Dalle misure di lunghezza sono derivate <u>le misure di superfici</u> nel sistema metrico decimale

NOMI	Simboli	equivalenza	
Miriametro quadrato	Mm^2	10^8 metri quadri	
chilometro quadrato	Km^2	10^6 " "	
ettometro quadrato	hm^2	10^4 " "	
detto <u>ettaro</u>	ha	" " "	dizioni del catasto terreni
Decametro quadrato	dam^2	100 " "	
detto <u>ara</u>	a	" " "	
Metro quadrato	m^2	1 " "	
detto <u>centiara</u>	ca	" " "	
decimetro quadrato	dm^2	$10^{-2} = \frac{1}{100}$ di metro quadro	
centimetro quadrato	cm^2	$10^{-4} = \frac{1}{10\,000}$ " " "	
millimetro quadrato	mm^2	$10^{-6} = \frac{1}{1000\,000}$ " " "	

tal volta anziché m^2 si scrive mq = metri quadri.

<u>Nelle misure di volume</u> il m^3 è detto <u>"stero"</u> e la dizione si estende a ("$10\ m^3$") detto: <u>decastera</u> ed al <u>decistero</u> = $\frac{1}{10}\ m^3$.

I nomi: <u>s =</u> stero = $1\ m^3$; <u>das</u> = decastero = $10\ m^3$; <u>ds</u> = decistero = $\frac{1}{10}\ m^3$; sono generalmente usati, per misurare (vuoto per pieno) le cotaste di legname, o volume di granaglie, carbone, foglia ecc.

Per le misure di volume distinguiamo la misura di volume per solidi da quella per liquidi.

NOMI	Simboli	equivalenza	Note
Miriametro cubo	Mm^3	10^{12} m^3	poco usate
chilometro cubo	Km^3	10^9 m^3	
ettometro cubo	hm^3	10^6 m^3	
decametro cubo	dam^3	10^3 m^3	
metro cubo (stero)	m^3	1 - metri cubi	
decimetro cubo	dm^3	10^{-3} m^3	- circa 1 litro cioè = 0,999972 l.
centimetro cubo	cm^3	10^{-6} m^3	
millimetro cubo	mm^3	10^{-9} m^3	

tal volta anziché m^3, cm^3, mm^3, si usa mc., cmc, mmc.

NOMI	Simboli	equivalenza	NOTE
chilolitro	Kl	1000 l	- circa $1 m^3$
ettolitro	hl	100 l	
decalitro	dal	10 l	
litro	l	1 litro $\simeq$ 1 dm^3	= 1,000028 dm^3
decilitro	dl	$\frac{1}{10}$ litro	
centilitro	cl	$\frac{1}{100}$ litro	
millilitro	ml.	$\frac{1}{1000}$ litro	

nella pratica i contenitori di granaglie, di farine, di liquidi hanno misure approssimate variabili da regione a regione; daremo le antiche misure nelle regioni italiane, nel seguito.

Per le misure di peso il sistema metrico decimale prese come unità il grammo (gr) che avrebbe dovuto corrispondere ad un centimetro cubo di acqua distillata alla temperatura di 4 °C e 760 mm di Hg di pressione, con una gravità non specificata e pertanto, sia come peso, che come unità di massa ha poco di assoluto. Il campione fu fatto su un Kg di H_2O, ma, come abbiamo già detto, corrisponde al volume di un litro (unità di massa o chilogrammomassa (Kg) nel sistema M,K,S), invece nel sistema pratico l'unità è 9,806 litri di acqua alla massima densità termica 4°C e 760 mmHg di pressione il numero 9,806 spesso arrotondato a 9,8 od anche a 9,81 dovrebbe corrispondere ad una accelerazione media sulla terra misurata in metri al secondo per secondo (m/sec^2). Sappiamo che l'accelerazione di gravità varia con la quota, varia anche nel tempo e da luogo a luogo. Inoltre occorre tener conto dell'accelerazione centrifuga dovuta alla rotazione della terra ..., come si vede occorre contentarsi.

Vi sono molti modi per effettuare una pesata. Le misure di precisione sono spesso per confronto di masse, utilizzando l'equilibrio di una leva. Se la bilancia è a due piatti, su un piatto si pone ciò che si vuol pesare equilibrando con zavorra sull'altro piatto quindi si toglie ciò che si voleva pesare, ponendo masse di pesi tarati fino all'equilibrio della *stessa* zavorra. L'artificio di non porre su un piatto l'oggetto e sull'altro i pesi compensa certe imperfezioni della bilancia. Nelle stadere ad un piatto il romano è il contrappeso che si sposta sul braccio della leva che è tarato, oppure la rotazione di un indice su una scala sfraziona gli intervalli di spostamento del contrappeso.

Diverse per principio sono le pesatrici a molla dette anche *dinamometri* che indicano su scala graduata la deformazione della molla.

La molla può essere ad elica cilindrica, tesa o compressa, che accumula l'energia elastica in seguito all'abbassamento del corpo da pesare; poiché l'azione è dovuta alla gravità, cambia da luogo a luogo. Se invece l'azione si esercita per torsione di un filo sottile (bilancia di Coulomb) è possibile la misura di piccole forze attrattive o repulsive, anche di cariche elettriche.

Nel sistema metrico decimale i pesi sono:

NOME	simbolo	equivalenza
Tonnellata	t	$= 1000\ Kg \cong (1 m^3 \text{ di } H_2O)$
Quintale	q	$= 100\ Kg$
Miriagrammo	Mg	$= 10\ Kg = 10000\ gr$
Kilogrammo	Kg	$= 1\ Kg = 1000\ gr \simeq (1\ dm^3 \text{ di } H_2O)$
ettogrammo	hg	$= \frac{1}{10} Kg = 100\ gr$
decagrammo	dag	$= \frac{1}{100} Kg = 10\ gr$
grammo	gr	$= 10^{-3} Kg = 1\ gr \doteq (1\ cm^3\ H_2O)$
decigrammo	dg	$= 10^{-4} Kg = \frac{1}{10} gr$
centigrammo	cg	$= 10^{-5} Kg = \frac{1}{100} gr$
milligrammo	gm	$= 10^{-6} Kg = \frac{1}{1000} gr$.

Per le misure angolari il sistema metrico decimale divise il cerchio in 400 parti che chiamò gradi centesimali (g), ogni grado era diviso in 100 parti dette primi centesimali (c) ed ogni primo centesimale era diviso in 100 parti dette secondi centesimali (cc) cosicché: 400 × 100 × 100 = 4.000 000 cioè il metro base del sistema avrebbe dovuto corrispondere ad $\frac{1}{10}$ di secondo centesimale. Approssimativamente, considerando la terra sferica, avrebbe rappresentato la variazione di latitudine.

Misure di valore

La misura di valore è diverso da stato a stato. e varia nel tempo. Tuttavia i commerci e le relazioni internazionali impongono un riferimento comune. Per molti anni il riferimento comune è stato ed ancor oggi, seppure in minore, è l'oro. Per molti anni, fino alla seconda guerra mondiale, (1940-1945) la moneta universalmente accettata è stata la Lira Sterlina (inglese), oggi è il dollaro (America). Il valore di scambio delle varie monete è determinato giornalmente dalla borsa che quota anche il valore dell'oro e del petrolio, oltre alla quotazione dei titoli di credito e delle azioni delle società industriale.

Questi brevi cenni per affermare e confermare che l'economia non è una tavoletta **d'argilla** sulla quale l'uomo (di governo o no) può incidere ciò che vuole, ma segue leggi, dette di mercato, difficilmente esprimibili matematicamente, ma esprimibili in detti: come la legge della domanda e dell'offerta che determina il prezzo di mercato; oppure: "la moneta cattiva scaccia la buona"; oppure "Contingentare i prezzi fa nascere il mercato nero" ecc.. La matematica finanziaria in base ad una grandezza che a seconda dei casi è detta: "saggio interesse", "tasso di sconto", "saggio o tasso di capitalizzazione", ma che, in ogni caso, è un coefficiente di rischio, riesce a trasdurre i valori nel tempo ... "meglio un uovo oggi che una gallina domani". Naturalmente l'incertezza del futuro, grosso modo quantificabile col calcolo delle probabilità e con la statistica determinano il rischio e quindi i saggi interesse o tassi di sconto. (Torneremo sull'argomento in matematica finanziaria).

L'unità di misura per l'unità monetaria in Italia è la "Lira Italiana" che in epoca prebellica era costituita da un disco di metallo pesante 5 grammi lega di cui $9/_{10}$ d'argento ed $\frac{1}{10}$ di rame. L'oro e l'argento si dicono metalli fini.

Si dice titolo di una lega il rapporto o percentuale del metallo fino. La lira con titolo $9/_{10}$ di cui sopra è detta lira di conto, anziché $9/_{10}$ è più proprio $900/_{1000}$. Le monete effettive anche di argento hanno titolo più basso per esempio le 5 lire (detta aquilotto) aveva un titolo di $835/_{1000}$ di argento fino e $165/_{1000}$ di rame. Vi erano monete d'oro al titolo 0,900. Altri metalli per monete il nichel, il bronzo, il rame. (vedi anche monete)

Si chiama <u>taglio</u> delle monete il numero di pezzi che si possono fare con un chilogrammo di lega.

<u>Piede</u> è il numero di monete che si possono coniare con un chilogrammo di metallo fino.

<u>Tolleranza</u> è un errore leggero in più o meno che la legge ammette sul peso o sul titolo.

<u>Valore di una moneta</u> è il prezzo del metallo di cui è formata.

<u>Valore reale o intrinseco</u> e il prezzo del solo metallo fino.

<u>Valore legale, estrinseco o di tariffa</u> è il valore del metallo aumentato delle <u>spese di coniazione</u> e <u>di diritto di conio</u>.

Oltre a ciò le monete hanno un <u>valore di corso</u> che segue la legge di mercato della domanda e dell'offerta.

Per legge la coniazione in Italia era:

Metalli	Valore reale £/Kg	diritto di conio	Valore reale di un kilogrammo
Oro fino	£ 3437	£ 7,444	£ 3.444,444
" monetato a 9/10	" 3093,30	" 6.70	" 3100.–
Argento fino	£ 220,50	" 1,722	" 222,222
" monetato a 9/10	" 198,45	" 1,55	" 200.–

(Notare che il rapporto : $\frac{oro}{argento}$ = 15,5873 ; se monetato $\frac{3100}{200}$ = 15,5)

(nella borsa del 21/12/1993 - Milano $\frac{oro\ fino}{argento\ ind}$ = $\frac{20950\ £/gr}{279,8\ £/gr}$ = 74,87491 ..)

La tabella delle monete del Regno d'Italia era:

Metallo	valore £		titolo	taglio	peso in gr	Tolleranza		
						sul titolo	sul peso	
	legale	reale					di coniazione	di consumo
					gr		mg	mg
Oro	100	99,78	0,9000	31	32,258	0,002	32,26	161,12
″	50	49,89	″	62	16,129	″	16,13	80,56
″	20	19,95	″	155	6,452	″	12,90	32,19
″	10	9,97	″	310	3,226	″	6,45	16,08
″	5	4,98	″	620	1,613	″	4,14	8,04
Argento	5	4,96	0,9000	40	25	0,003	75	249,25
″	2	1,84	0,835	100	10	″	50	497,50
″	1	0,92	0,835	200	5	″	25	248,75
Nichel (lega)	0,20	–	0,750	250	4	0,005	1⅕ %	–
Nichel (puro)	0,20	–	1000	250	4	″	1,½ %	–
″	0,50	–	1000	166 ⅔	6	–	″	–
Rame antico conio	0,10	–	950	100	10	–	100	–
″	0,05	–	″	200	5	–	50	–
Rame nuovo conio	0,10	–	950	181 9/11	5,50	–	–	–
″	0,05	–	″	307 41/45	3,25	–	–	–

La carta monetata, non è "moneta", la rappresenta, ed il suo valore varia notevolmente con le situazioni politico-economiche. (l'oro fino da allora al 22/12/33 è aumentato circa seimila volte in 63 anni; (c'è stata una guerra)

Tavole di Ragguaglio di Antiche Misure Italiane ed estere, precedenti l'adozione del sistema metrico decimale

Misure di lunghezza

Regioni Italiane

Bolognese	Piede - (12 once - 12 punti) ...	m. 0,380098
	Braccio o auna - (20 once)	" 0,640039
	Pertica - (10 piedi)	" 3,80098
	Miglio - (500 pertiche)	Km 1.90049
Genovesato	Canna - (10 palmi - 12 once - 12 punti)	m. 2,49095
	Cannella - (12 palmi)	" 2,98914
	Miglio	Km 1,488
Lombardia	Piede - (12 pollici)	m 0,435185
	Trabucco - (6 piedi)	" 2,61111
	Braccio - (12 Oncie - 12 punti - 12 atomi)	" 0,594936
	Miglio - (3000 braccia)	Km 1,4848
Modenese	Piede	m. 0,523048
	Pertica o Cavezzo - (6 piedi)	" 3,138288
	Braccio	" 0,63315
	Miglio	Km 1,5691
Napoletano	Palmo - (12 once - 5 minuti - $\frac{10}{10}$ - $\frac{100}{100}$)	m. 0,26455
	canna - (10 Palmi)	" 2,6455
	Miglio (di 60 al grado) - 700 canne	Km. 1,85185

Parmense	Braccio -(12 oncie - 12 punti)	m 0,5452
	Pertica - (6 braccia)	" 3,2712
	braccio - da seta	" 0,5878
	da tela	" 0,6395
	Miglio - di (75 al grado)	Km. 1,613
Piemonte	Piede -(12 once - 12 punti - 12 atomi)	m. 0,514403
	Trabucco -(6 piedi)	" 3,086418
	Raso - (14 once del piede)	" 0,600137
	Miglio di 45 al grado	Km. 2,469136
Romagna	Piede	m. 0,2978
	Passo -(5 piedi)	" 1,48948
	Palmo mercantile	" 0,2491
	Canna -(8 palmi)	" 1,9928
	Miglio -(1000 passi - 5000 piedi)	Km. 1,48948
Sardegna	Palmo	m. 0,2625
	Trabucco -(12 Palmi)	" 3,15
	Miglio	Km. 2,51856
Sicilia	Palmo -(12 once - 12 linee - 12 punti)	m. 0,258098
	canna -(8 palmi)	" 2,06478
	passetto -(2 palmi)	" 0,516
	Miglio - (5760 palmi)	Km. 1,4866
Toscana	Braccio - (20 soldi - 12 denari)	m. 0,58366
	Canna agrimensoria -(5 braccia)	" 2,9183
	Canna per stoffe (4 braccia)	" 2,33464
	Miglio (braccia 2833 312)	Km. 1,65361

Veneto	Piede (o palmo) – (12 once)	m. 0,347398
	Passo (5 piedi)	" 1,73899
	braccio da lana	" 0,6833
	braccio da seta	" 0,6387
	Miglio (1000 passi)	Km. 1,73867

STATI ESTERI

Austria	Piede (Fuss) – (12 pollici – 12 linee)	m. 0.316081
	Tesa (Klafter) – (6 piedi)	" 1,896486
	Miglio di posta	Km. 7,856
Baviera	Piede (Fuss) – (12 pollici – 12 linee)	m. 0,291859
	Tesa (Klafter) – (6 piedi)	" 1,751154
Danimarca	Piede del Reno – (12 pollici – 12 linee)	m. 0,31385
	pertica – (12 piedi)	" 3,7662
	Miglio di 14 3/4 a grado	Km 7,532
Francia	Lega metrica	Km. 4.—
Inghilterra	Piede (feet) – (12 pollici o inches)	m. 0,304794
	Yard – (3 piedi)	" 0,914382
	Fathom – (2 Yards)	" 1,828764
	Rod – (2 3/4 Fathom)	" 5,02910!
	Miglio (1760 yards)	Km 1,609
Norvegia	Piede (fod)	m 0,313763
	Favn – (6 piedi)	" 1,88257
	Miglio	Km 11,205

Olanda	Piede del Reno	m. 0,31385
	Piede di Amsterdam (11 pollici)	m 0,2831
	Miglio di 15 a grado	Km 7,408
Portogallo	Piede (Pé) - 12 pollici	m 0,3285
	Palmo-(di $1\frac{1}{2}$ piedi)	" 0,49275
	Lega di 18 a grado	Km 6,173
Prussia	Piede decimale	m. 0,3768
	Ruthe -(12 piedi)	" 4,5216
	Piede del Reno - (12 pollici - 12 linee)	" 0,31385
	Miglio del Reno (2000 pertiche)	Km 7,532
Rumenia	Palma (10 degeli)	m. 0,196213
	Stangenu (10 palme)	m. 1,96213
	Miglio	Km. 7,848
Russia	Piede inglese	m. 0,304794
	Archin - (16 Werschock)	" 0,711194
	Sagèna - (3 Archin)	" 2,133582
	Wersta -(500 Sagène)	Km 1,06679
	Miglio finlandese -(100 Werste)	" 106,679
Serbia	Hâlebi	m. 0,6858
Spagna	Piede (pié) - (12 pollici)	m. 0,2875
	Estado (2 vare - 3 piedi)	" 1,725
	Legà di $16\frac{2}{3}$ al grado	Km. 6,693
Svezia	Piede - (10 Pollici - 10 linee)	m. 0,2969
	Corda - (10 pertiche - 10 piedi)	" 29,69
	Tesa - (3 aune - 2 piedi)	" 1,7814
	Miglio	Km. 10,628

Svizzera	Lega		Km. 4,8
Turchia	Archin	-(2 cadem - 12 parmac)	m. 0,75774
	Berri	66 2/3 al grado	Km. 1,667

Misure di Superficie

Regioni Italiane

Bolognese	tornatura	,-(144 tavole o pertiche quadre)	m^2. 2080,43
Genovesato	cannella quadra	-(144 palmi quadrati)	m^2 8,928
Lombardia	Pertica	(24 tavole - 144 piedi quadrati)	m^2. 654,52
Modenese	Biolca	-(72 tavole - 4 pertiche quadrate)	m^2 2836,47
Napoletano	Moggio	-(100 canne quadrate)	m^2 699,87
Parmense	Biolca	-(6 staia - 12 tavole - 4 pertiche^2)	m^2 3081,44
Piemonte	giornata	-(100 tavole - 4 trabucchi^2)	m^2 3810,39
Romagna	Pezza	-(16 catene quadrate)	m^2 2640,63

Sardegna	Starello di Cagliari		m^2 3986,75
Sicilia	Salma	- (4096 canne quadrate)	m^2 17462,58
Toscana	Quadrato	- (10 tavole - 10 pertiche - 10 deche - 10 braccia^2)	m^2 3406,19
Veneto	Migliaio	- (1000 passi quadrati - 25 piedi^2)	m^2 3022,99

Roma antica	Iugero	- (28800 piedi antichi quadrati)	m^2 2527,61
Grecia antica	plettro	- (10000 piedi olimpici quadrati)	m^2 952,3

STATI ESTERI

Austria	Yucart	- (1600 Klafters quadrati)	m^2 5755,43
Inghilterra	acre	- (4840 Yards quadrate)	m^2 4046,71
Prussia	morgen	- (180 pertiche quadrate)	m^2 2553, 93
Russia	Deciatine	- (~~2400~~ sagène quadrate)	m^2 1.0925. =
Spagna	Fanegada pei campi	- (500 estadales^2)	m^2 4834, =
	Aranzada pei vigneti	- (400 estadales^2)	m^2 3867, =

(l'estadales)^2 = (11 piedi)^2 = (3,$\frac{2}{3}$ vare)^2

MISURE di CAPACITÀ per aridi e per liquidi

Regioni Italiane

Bolognese	Corba da grano - (2 staia - 4 quartaroli)	litri	78,645
	corba da vino - (60 boccali - 4 fogliette)	"	78,593
Genovesato	Mina - per aridi - (4 staia - 8 ottavi)	"	116,5596
	Barile da vino - (90 amole)	"	79,016
	Mezzarola - (2 barili)	"	158,032
Lombardia	Moggio (per aridi) - (8 staia - 4 quartari)	"	146,24
	Brenta - (3 staia - 4 quartari - 8 boccali)	"	75,55
Modenese	Staio - (2 mine - 4 quarti)	"	63,25
	Quartaro - (90 boccali)	"	101,812
Napoletano	Tomolo - (2 mezzette - 2 quarti - 6 misure)	"	55,545
	Barile - (60 caraffe)	"	43,625
Parmense	Staio - (2 mine - 8 quartaroli)	"	47,040
	Brenta - (36 pinte - 2 boccali)	"	71,672
Piemonte	Emina - (8 coppi - 24 cucchiai)	"	23,05
	Sacco - (5 emine)	"	115,25
	Brenta - (36 pinte - 2 boccali - 2 quartini)	"	49,3069

Romagna	Rubbio - (4 quarti - 4 staia - 2 quartucci)	litri	294,46
	Barile da Vino - (32 boccali - 4 fogliette)	"	58,34
Sardegna	Starello - (16 imbuti)	"	49.17
	Botte - (100 quartari)	"	502,66
Sicilia	Tomolo - (1 palmo^3 - 4 mondelli)	"	17,193
	Barile - (2 quartari - 20 quartucci)	"	34,386
Toscana	Staio - (2 mine - 2 quarti - 8 mezzette)	"	24,363
	Sacco - (3 staia)	"	73,089
	Moggio - 8 sacca	"	584,712
	Barile da Vino (20 fiaschi) (4 mezzette)	"	45,584
	Barile da olio (16 fiaschi)	"	30,08544
Veneto	Moggio - (4 staia - 4 quarti - 4 quartaroli)	"	333,268
	Anfora - 4 bigonce - 2 mastelli - 24 bozze)	"	600,934

Roma antica	Anfora - (piede^3 antico romano)	litri	26
Grecia antica	Anfora attica - ($\frac{3}{2}$ del cubo di $\frac{24}{25}$ di un piede olimpico)	"	39

STATI ESTERI

Austria	Metzen - (4 Vierteln - 4 mässeln - 4 frutter)	litri	61,5045
	Eimer - (4 vierteln - 10 mässe - 4 seidel)	- "	56,6819
Danimarca	Toende - (8 schieps)	"	139,084
	Ancker - (10 stubgen)	"	37,646
Inghilterra	Bushel - (4 pecks - 2 gallons - 2 pottles)	"	36,3477
	Gallone - (4 quarts - 2 pints - 5 gills)	"	4,54346
	Quarter - (8 bushels)	"	290,7816
	Firkin - (9 Gallons)	"	40,8912
	Barrel - (4 Firkin)	"	163,56165
	Load - (10 firkins)	"	408,91
Norvegia	Toende - (8 skjaepper - 18 potter)	"	139,001
	Pibe	"	463,3375
	Ame - (155 potter)	"	149,6194
	Potter	"	0,965286
olanda	Mudde - (10 schepel)	"	100,—
	Last	"	3000,—
	Vat - (100 Kan = litro)	"	100,—
Portogallo	Fanego - (4 alqueires)	"	55,36
	Almuda - (12 canadas)	"	16,74
	Pipa - (30 Almudes)	"	502,2

Prussia	Sheffel - (16 melzen - 3 quarts)	litri 54,961
	Eimer - (12 anker - 30 maass)	" 68,69
Russia	Tschetwert - (2 osmin - 2 paiok -)	" 219,9
	Tschetwerick - (7 tschetwerka)	" 27,4875
	Wedro - (10 stoff - 10 tscharcheys)	" 12,229
	Oxhoft - (6 ankers)	" 221,—
Spagna	Fanega - (12 calemines)	" 55,501
	Moyo - (16 arrobes)	" 258,128
Svezia	Tunna - (2 spanne - 4 fierdtn)	" 146,49
	Oxhufwud	" 235,-
Turchia	Fortin - (4 kilow)	" 141,08
	Alma	" 5,205

MISURE di PESO

Regioni Italiane

Bolognese	Libbra - (12 once - 16 ferlini - 10 carati)	Kg. 0,36185
Genovesato	Libbra grossa - (12 once - 8 ottavi)	" 0,349
	Libbra sottile - (12 once - 24 denari)	" 0,317

Lombardia	Libbra grossa - (28 once - 24 denari)	Kg	0,7625
	Libbra sottile - (3/7 di libra grossa)	〃	0,32679
Modenese	Libbra - (12 once - 12 ferlini)	〃	0,340455
	Peso - (25 libbre)	〃	8,511375
Napoletano	Libbra - (12 once)	〃	0,320759
	Rotolo - ($2\frac{7}{9}$ libbre)	〃	0,891
Parmense	Libbra - (12 once - 24 denari)	〃	0,328
	Rubbo - (25 libbre)	〃	8,2
Piemonte	Libbra - (12 once - 8 ottavi - 3 denari)	〃	0,36888
Romagna	Libbra - (12 once - 24 denari)	〃	0,3391
Sardegna	Libbra - (12 once)	〃	0,40577
Sicilia	Rotolo - ($2\frac{1}{2}$ libbre - 12 once)	〃	0,79342
Toscana	Libbra - (12 once - 24 denari - 24 grani)	〃	0,339542
Veneto	Libbra grossa - (12 once - 16 carati)	〃	0,476998
	Libbra sottile	〃	0,3012
Roma Antica	libbra - ($\frac{1}{80}$ peso del piede^3 pieno d'acqua)	〃	0,3258
Grecia Antica	Mina Attica o libbra ($\frac{1}{120}$ peso d'acqua in anfora)	〃	0,3258

STATI ESTERI

Austria	Libbra (Pfund) - (16 once - 2 lothe)	Kg 0,560012
	Quintale - (100 libbre)	„ 56,0012
Baviera	Pfund	„ 0,56
Danimarca	Libbra - (32 lothe - 4 dramme)	„ 0,500194
Inghilterra	Libbra troy - (12 once - 20 denari - 24 grani)	„ 0,373242
	Libbra avoir du poid (lb) (16 once - 16 dramme)	„ 0,453598
	Quintal (112 libbre (lbs)) (avoir du poid)	„ 50,802376
	Short-ton - (2000 libbre) (lbs)	„ 907,1847
	Ton. (long-ton)	„ 1016,05
Norvegia	Pund - (16 once)	„ 0,498212
	Vog - (36 pund)	„ 17,9356
	Toende	„ 1295,3512
Olanda	libbra (suddivisa come il Kg)	„ 1.—
Portogallo	Arratel	„ 0,458921
	Arroba - (32 arratel)	„ 14,685472
	Quintale - (4 arroba)	„ 58,741888.
Prussia	Libbra - (32 lothe - 4 quentleine)	„ 0,467702
	Libbra nuova - (30 lothe)	„ 0,500
Rumenia	Litra	„ 0,318812
	oka - (4 Litre)	„ 1,275248
	Cantarin - (44 oke)	„ 56,110912

Russia	Libbra	- (32 once - 3 Solotnicks)	Kg 0,409512
	Poud	- (40 libbre)	" 16,38048
	Last	- (100 Poud)	" 1638,048
Serbia	Oka	-	" 1,282
	Tovar	- (100 oke)	" 128,2
Spagna	Libbra	- (16 once - 8 Dramme)	" 0,4605
	Arroba	- (25 libbre)	" 11,562
	Quintale	- (4 Arrobe)	" 46,049
Svezia	Libbra	- (32 lothe - 4 grasse)	" 0,425082
	Waag	- (165 libbre)	" 70,13853
	Quintal (center)	- (128 libbre)	" 54,410496
Turchia	Oka	- (400 dramme)	" 1,282
	Cantar		" 566,36

Antiche monete

Regioni Italiane

Genovesato	Lira antica - (20 Soldi - 12 denari)	£ 0,835
Lombardia	Lira antica -	" 5,76
	" austriaca	" 0,865
Modenese	lira - (20 soldi - 12 denari)	" 0,383
Napoletano	Ducato - (20 carlini - 10 grani)	" 4,25
Parmense	Lira antica	" 0,25
Piemonte	Lira antica - (20 soldi - 12 denari)	" 1,18
Romagna	Scudo - (10 Paoli - 10 baiocchi)	" 5,384
Sardegna	Lira antica	" 1,88
sicilia	Oncia - (30 tarì - 2 carlini - 10 grani)	" 12,75
Toscana	Lira - (12 crazie o 20 soldi di 12 denari)	" 0,85
	Fiorino	" 1,40

Roma antica	Sesterzio (o nummus)	£ 0,20
	Denaro	" 0,80
	Aureo	" 20,38
	Talento grande (32 000 sesterzi)	" - 6522,=
	Talento piccolo (24000 sesterzi)	" 4491
GRECIA antica	Dramma	" 0,93
	Mina	" 92,68
	Talento d'argento (60 mine)	" 5561,=
	Talento d'oro (600 mine)	" 55609,=

Stati esteri

I notevoli cambiamenti che si sono avuti nel tempo consigliano di riferire il ragguaglio delle monete a due epoche diverse e con diversi criteri.

1) Con RD=(Regio Decreto) del 21-XII-1927 fu definita la lira italiana = Lit = 0,27276 $£_0$ ($£_0$ = lira oro, di cui abbiamo dato in tabella le caratteristiche).

Volendo riferirsi a _dopo_ la crisi del 1929, ma _prima_ della guerra di Abissinia, cioè al 1935 occorre considerare una svalutazione media del 40% - cioè:

$$1\ Lit = 0,163\ £_0$$

2) Indicheremo con ₤ la lira corrente al cambio del 27-XII-1993 - cioè mezzo secolo dopo la caduta del fascismo.-

		al 1935	cambio al 27-XII-1993		
Argentina -	Peso oro	$£_0$ 5,-			
Australia -			Dollaro	₤	1.140,83
Austria -	Shilling	Lit. 2,673	Scellino	"	140,35
Belgio -	Belga	" 2,642	Franco	"	47,439
Brasile -	Cruzeiro	" 2,273			
Bulgaria -	Leu	$£_0$ 1,=			
Canadà -			Dollaro	"	1.264,79
Cecoslovacchia -	corona	$£_0$ 1,05			
Chilì	peso	$£_0$ 1,89			
Cina	Tael	$£_0$ 3,444			
Danimarca	corona	$£_0$ 1,389	corona		252,91

	al 1935		Cambio al 27-XII-1993		
EUROPA	—		ECU	£	1906,53
Finlandia	marco	£. 0,130	marco	"	294,13
Francia	franco	£. 0,203	franco	"	289.57
Germania	marco oro	£. 1,2346	marco	"	986,88
Giappone	Yen	£. 2,583	Yen	"	15,087
Grecia	dracma	£. 1	dramma	"	6,875
India	rupia	£. 1.892			
Inghilterra	sterlina	Lit 25,221	sterlina	"	2527.29
Jugoslavia	dinar	" 1			
Irlanda			Lira	"	2402,99
Messico	peso	" 5,438			
Norvegia	corona	" 5,092	corona	"	227,47
Olanda	Fiorino	" 7,637	Fiorino	"	881,43
Portogallo	scudo	" 5.5986	scudo	"	9,681
Romania	Lei	£. 1.-			
Russia	rublo	Lit 9,7768			
Spagna	peseta	£. 1 —	peseta		12.023
Stati Uniti	dollaro	£. 5.1025	dollaro		1680,31
Svezia	corona	£. 1,389	corona		202,54
Svizzera	Franco	£. 1,-	Franco		1163,48
Turchia	Lira	£. 22,784			
Ungheria	pengo	£. 0,906			
Uraguai	piastra	Lit. 5.36			
Venezuela	piastra	" 5			

Tavola di confronto di antiche misure lineari

Occorre avvertire che spesso autori diversi interpretano diversamente le misure più antiche; Sono note le misure ragguagliate a giornate di viaggio, poi trasformate in stadi, così le misure di Eratostene della distanza fra Alessandria e Syene valutata 5000 stadi pari a 925 Km (di fatto è 780 Km.)

Antica Grecia:

Stadio Olimpico = (600 piedi olimpici) = m. 185
Stadio Pizio o delfico (600 piedi delfici) = m. 148
Piede Olimpico = m. 0,30859
Piede delfico (4/5 dell'olimpico) = m. 0,246872
Miglio = 8 stadi olimpici = m 1480
Miglio di 60 a grado = 10 stadi olimpici = m. 1850
Miglio di 75 a grado = 10 stadi Pizi o delfici = m 1480

Roma Antica:

Piede antico (pes) = m. 0,29625
Piede moderno = m. 0,29780
Cubito = 1,5 piedi antichi = m. 0,444375
Miglio di 75 a grado = 1000 passi = m 1481
Passo = 5 piedi antichi = m 1,48125

Prima dell'avvento del sistema metrico decimale, il problema di ragguagliare le varie unitá di misura era particolarmente sentito, come unitá di riferimento fu presa la 1440$^{\underline{ma}}$ parte del piede di Parigi, detto piede del re. (pied de roi). Riportiamo da: Giuseppe Antonio Alberti - Trattato della misura delle fabbriche - III ediz. Firenze 1822 - pag. XXXII e che rinvia, per un piú minuto dettaglio, alla Geometria Pratica di Lodovico Perini pag. 57, "le parti" di alcune unitá

unitá lineare - localitá	Parti	equivalenza in metri	
		con base Parigi	altre fonti
Piede di Parigi (de roi)	1440	0,325. m	0,32484 m.
" " Bologna "	1682 $\frac{2}{5}$	0,380 m.	0,380098 m
" " Danimarca "	1404	0,317 m.	0,31385m.
" del Reno o di Leiden	1390	0,314 m.	0,31385 m.
" di Londra	1350	0,305 m.	0,304797 m
" " Svezia	1316	0,297 m.	0,2969 m.
" Romano del Campidoglio "	1306	0,295 m.	0,29625 m.
" di Danzica	1272	0,287 m.	......
" d'Asterdam	1258	0,284 m.	0,2831
" di Venezia	1525	0,345 m.	0,348 m.
" di Piacenza	2080	0,470 m.	——
—	1	≅ 0,225694/1000 m	

unitá lineare - localitá	Parti	equivalenza in metri	
		con base Parigi	altre fonti
Braccio di Lucca	2620	0,591 m.	—
" di Bologna	2640	0,596 m.	0,640039 m.
" di Firenze da terra	2430	0,548 m.	—
" di Firenze da panno	2580	0,582 m.	0,58366 m.
" di Parma e Piacenza	2423	0,547 m.	0,6395 da panno 0,587 da seta 0,545 leg. muro Pertica 3,271
" di Modena da terra	2300	0,519 m.	0,523 agrim.
" di Reggio	2348	0,53 m.	0,531 agrim.
" di Milano	2166	0,489 m.	0,594936 m.
" di Milano da legno	2620	0,591 m.	
" di Brescia	2075	0,468 m.	0,674 da Panno 0,640 da Seta cavezzo: 2,853
" di Mantova	2062	0,465 m.	0,638 merc. 0,467 agrim.
Palmo di Napoli	1169	0,264 m.	0,264 m. (dopo il 1840)
" di Genova	1113	0,251 m.	0,248 m.
" di Palermo	1073	0,242 m.	0,258 m. (palmo legale dopo il 1809)
" Romano d'Architetto	990	0,223 m.	Canna d'arch. (10 palmi) 2,234 m.

Il palmo Romano di Architetto è diviso in 12 once, perció a ciascuna oncia toccane 82½ parti: (82,5)(12)=(990). Ogni oncia è suddivisa in 5 minuti, perció a ciascun minuto toccano 16½ parti: (16,6)(5)=(82,5). Undici piedi di Perugia confrontano esattamente 18 palmi romani :

Oltre il piede; il braccio; il palmo; il passo; grandezze tutte riferite al corpo umano; occurreva dimensionare un riferimento materiale. Un oggetto leggero, maneggevole, poco deformabile, e spesso perfettamente rettilineo, erano le canne: nacque così a Firenze ed in Toscana la *canna agrimensoria* (5 bracci) = m. 2,9183 e *la canna da panno* (4 bracci) = m. 2,3346. Poiché la canna è fragile il suo posto fu spesso sostituito dalla "*Pertica*" avente le stesse dimensioni. Un'altra misura lineare riportata su un'asta è il "*Trabucco*" usato a Torino (m. 3,086); a Milano (m. 2,611); ed in Sardegna (m. 3.148); a Torino e Milano il *Trabucco* è 6 piedi; in Sardegna il *Trabucco* è 12 *palmi* Si noti che, come strumento per misure agrarie, la Canna o Pertica, ed il Trabucco, sono sostituite dai *Triplometri* (dopo l'avvento del sistema metrico decimale). A Genova c'era *La Cannella* = (m. 2,98914) = 12 palmi.

Il sottomultiplo più comune sia del *piede*, sia del *braccio*, sia del *palmo* è "*l'oncia*"; in genere 1/12 dell'unità cui si riferisce, ed ogni oncia divisa *in 12 Punti*, Salvo in Sicilia ove $\frac{1}{12}$ di oncia è la *linea*, ed $\frac{1}{12}$ di linea *il punto*. Ed in Toscana ove il braccio si divide in *20 soldi*. ed il soldo in 12 *denari*.

Altre misure lineari sono: "Il Raso" = m. 0,600 usato in Piemonte ed è pari a 14 once di piede. "La Tesa", in uso a Torino (m. 1,713); ad Aosta (m. 1,872); ad Acqui (tesa di Monferrato = m. 1,675); a Novara (m. 1,414). "L'Auna" ad Aosta = (m. 0,827); a Bologna = m. (0,640) coincidente col braccio. Anche il Trabucco, di cui abbiamo già parlato varia da città a città, a Torino prima del 1818 era: (m. 3,083), dopo: (m. 3,086). ad Alessandria (m. 2,861); a Casale (m. 2,904); a Tortona (m. 2,853); Pavese (m. 2,832) a Novara (m. 2,826); a Cremona (2,901); a Vigevano (m. 2,774) a Bobbio (m. 2,868): Val tellina (m. 2,677); Milano (m. 2,611); Sardegna (m. 3,148). Altre misure lineari: il "Cavezzo" a Clusone (Bergamo) = (m. 2,627); a Salò = (m. 2,853); a Breno = (m. 2,852). "Il Passetto" a Massa, per tess. = (m. 0,791) a Firenze = (m. 1,167); In Sicilia = (m 0,516). Il "Passo" in Romagna = (m. 1,48948); Veneto = (m. 1,73867); a Roma braccio o passo = (m. 0,670). Lo "Staiolo" a Velletri = (m. 1,285). Il "Miglio" Bolognese: (m. 1900,49); Genovese: (m. 1488); Lombardia = (m. 1784,8); Modenese = (m. 1569,10); Napoletano = (m. 1851,85); Parmense = (m. 1613); Piemontese = (m. 2469,136) (di 45 al grado); Romagna = (m 1489,48) Sardegna = (m. 2518,56); Sicilia = (m. 1486,60); Toscana = (m. 1653,61); Veneto = (m. 1738,67); Romano = (m. 1489) e (m. 2228);

Tavola di Ragguaglio

ZONA	Piede	Braccio	Palmo	Passo	canna o (pertica)	Miglio	oncia	punto	/
Bolognese	0,380098	(o auna) 0,640039			3,80098	1900,49 500 pertiche	0,031675 1/12 di piede	0,00264	
Genovesato			0,249095		2,49095	1488	0,0207579 1/12 palmo	0,001729826	2,98914 (cannella)
Lombardia	0,435185 (12 pollici)	0,594936				1784,8 3000 braccia	0,049578 1/12 braccio	0,0041315 (12 atomi)	2,61111 (Trabucco)
Modenese	0,523048	0,63315			3,138288 (cavezzo)	1569,1 500 pertiche			
Napoletano			0,26455 [illegible] oppure [illegible]		2,6455	1/60 al grado 1851,85 700 canne	0,02204583 1/12 palmo		0,004409166 (minuto)
Parmense		0,5452			3,2712	di 1/60 grado 1613	0,0454333 1/12 braccio	0,003786111	0,5878 = braccio da seta 0,6395 = braccio da tela
Piemonte	0,514403					45 al grado 2469,136	0,042866916 1/12 piede	0,003572243 (12 atomi)	3,086418 (Trabucco) 0,600 (raso)
Romagna	0,2976		0,2491 mercantile	1,488 5 piedi	1,9928 (8 palmi)	1489,48 1000 passi 5000 piedi			
Sardegna			0,2625			2518,56			3,15 (Trabucco) Di 12 palmi
Sicilia			0,258098		2,062 (4 passetti) 2,064784 (8 palmi)	1486,6 (5760 palmi)	0,021508166 1/12 di palmo	0,000149362 1/12 di linea	0,001792343 lin 0,5155 passetto
Toscana		0,58366 (20 soldi)			2,9183 (5 braccia)	1653,61 (2833,312 br.)			2,334 canna per stoffa (4 br.) [illegible]
Veneto	0,347398 (o palmo)	(da lana) 0,6833	0,347398 (o piede)	1,73699 (5 piedi)		1738,67 (1000 passi)	0,028949833 1/12 di palmo o piede		braccio da seta 0,6387.

Ivalori in metri sono ripresi o calcolati sulla base dei dati esposti in: A. Socci - Aritmetica Pratica - Ed. Le Monnier Firenze 1894-1930. N.B. Spesso i conteggi corrispondono solo grossolanamente

Di particolare interesse è il braccio toscano per il grande numero di monumenti progettati su tale unitá di misura.

Nell'opera di Cesare Guasti: "SANTA MARIA DEL FIORE" a pag. LIX del "discorso analitico sui documenti viene riportato: « Le braccia fiorentine .... sono rimaste fino ai nostri anni quali erano nel Milletrecento, il doppio dell'antico piede romano, forse una vetusta misura degli Etruschi: in somma, qualcosa di piú di 58 centimetri ». Boito, pag 196.

Peró Antonio Alberti ed altri distinguono il braccio di Firenze in: 1) braccio da terra ≃ 0,548 m. 2) braccio da stoffa ≃ 0,582 – (come la misura citata da Cammillo Boito per le costruzioni.)

L'antico catasto toscano fatto eseguire dal Granduca sulla base del Catasto Austriaco di Maria Teresa, ma come unitá di misura usó il braccio toscano ≃ 0,58366 m. e come unitá di superficie il braccio quadro = 0,3406 metri quadri. (misure che corrispondono al braccio da stoffa e da costruzioni, ma non corrispondono al braccio da terra)

Il catasto unico in Italia fu stabilito nel 1886 con base metrica: Ha = ettari, are, centiare. – 1 Ha = 10 000 metri quadri; 1 ara = 100 metri quadri; 1 centiara = 1 metro quadro.

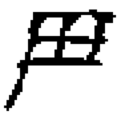
Considerazioni di aritmetica razionale.

detta anche aritmetica ragionata

Abbiamo già, sinteticamente accennato, nel primo volume, ai criteri di divisibilità, alle notazioni numeriche, agli operatori ed alle operazioni comprese quelle aritmetiche, abbiamo classificato le frazioni; ma lo scopo era di raggiungere velocemente la notazione algebrica da usarsi nelle matematiche applicate.

Qui vogliamo evidenziare alcune proprietà del calcolo numerico, premettendo cenni sui sistemi numerici.

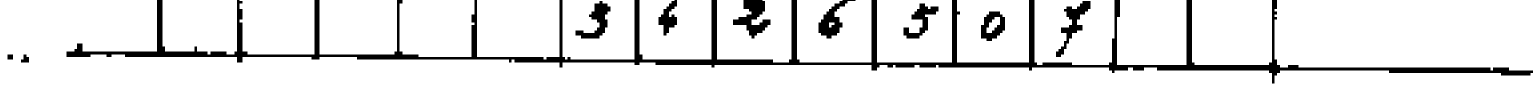
Che, per esprimere una piccola quantità numerica, si mostri il corrispondente numero di dita delle mani; è un fatto, direi, istintivo comune a popoli di ogni tempo e di ogni lingua o cultura.

Se pensiamo ai numeri romani per es. VII è molto più espressivo di: 7 o di: 5 o di , e molto più vicino a: . I numeri romani sono a notazione addittiva, ma a noi interessa la notazione posizionale, com'è la nostra numerazione decimale.

La prima osservazione è quella di stabilire di:

quanti simboli diversi possiamo disporre, la loro sequenza, la loro corrispondenza a numeri, questi simboli sono detti <u>cifre numeriche</u>. Ciascun numero ha anche un nome e può essere espresso sia in cifre che in simboli fonetici del suo nome: uno, due, ..ecc. Importantissimo lo "zero" che gli indiani chiamavano Sunia = nulla e gli arabi: as-sifr, (ne abbiamo già parlato), infatti l'unità abbinata allo zero, nella nostra numerazione, fa ripartire una nuova unità 10 volte più grande.

Consideriamo una cassetta composta di tanti scomparti affiancati, ogni scomparto può contenere una sola cifra che viene moltiplicata per il valore dello scomparto che occupa. I valori degli scomparti sono i valori delle potenze della base.



nella figura abbiamo rappresentato negli scomparti della numerazione decimale il numero: 3426,507 ; si noti la virgola che separa la parte intera dalla parte decimale, e si noti il valore:

$$\underbrace{3\cdot10^{3}}_{\text{tremila}}+\underbrace{4\cdot10^{2}}_{\text{quattrocento}}+\underbrace{2\cdot10^{1}}_{\text{venti}}+\underbrace{6\cdot10^{0}}_{\text{sei}}+\underbrace{5\cdot10^{-1}+0\cdot10^{-2}+7\cdot10^{3}}_{\substack{\text{cinquecentosettemillesimi}\\ \text{5 decimi + 0 centesimi + 7 millesimi}}}$$

Il minimo di cifre si ha col sistema binario, elettricamente abbinabile alle condizioni: acceso, spento; le cifre sono 1 (uno), e 0 (zero).
Le potenze per i valori degli scomparti sono quelle del due. Per uniformarsi a come viene usato il sistema binario, non consideriamo scomparti ove il 2 ha esponente negativo, vedremo come si rappresentano i numeri frazionari. Per ora consideriamo gli interi. Notiamo che i numeri pari hanno la prima casella 0 (zero).

2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
		1	0	1	1	0	1	1
256	128	64	32	16	8	4	2	1

$\boxed{0|0|1} = 1$

$\boxed{0|0|1|0} = 2$

$\boxed{0|0|1|1} = 3$

$\boxed{0|1|0|0} = 4$

$\boxed{0|1|0|1} = 5$

$\boxed{0|1|1|0} = 6$

$\boxed{0|1|1|1} = 7$

$\boxed{0|1|0|0|0} = 8$

$\boxed{0|1|0|0|1} = 9$

$\boxed{0|1|0|1|0} = 10$

Il numero incasellato sopra vale: $2^6+0+2^4+2^3+0+2^1+2^0$

$64 \quad +16+8 \quad +2+1 = 91$

Volendo rappresentare in binario il n° 354 decimale si ha: la massima potenza del due che entra in 354 è $2^8=256$

$354-256 = 98$. In 98 non entra $2^7=128$, ma $2^6=64$ perciò $98-64 = 34$

da $34 -(2^6=32) = 2$ e $2-2=0$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0_{bin} \\ 2^8 & 2^7 & 2^6 & 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \end{array} = 354 \text{ dec.}$$

Le operazioni aritmetiche in binario sono come quelle di altre basi. esempio:

$$\begin{array}{r l}
101100010 & = 354 \quad + \\
1011011 & = 91 \\
\hline
110111101 & = 445 \\
\\
100000111 & = (354 - 91) = 263
\end{array}$$

Si noti il gioco del "riporto" nella somma ove 1 e 1 incolonnati danno zero ed un 1 nello scomparto adiacente (come avviene nel sistema decimale quando la somma di cifre incolonnate supera 10)

Però il sistema binario necessita di troppe cifre quando il numero diventa grande perciò, in particolare per i computer, è stata introdotta la numerazione esadecimale. (Hexadecimal, da cui il simbolo Hex). Questa ha le prime dieci cifre corrispondenti alla decimale (dec.), alle quali seguono le lettere dell'alfabeto dalla A = 10 alla F = 15, cioè con lo zero sono 16 cifre diverse, cioè i valori degli scomparti (= posizione delle cifre) corrispondono alle potenze con base 16.

Facciamo gli scomparti in base 16.

	6	8	D	6	E	0	8	C
16^8	16^7	16^6	16^5	16^4	16^3	16^2	16^1	16^0
	268435456	16777216	1048576	65536	4096	256	16	1

Il numero exadecimale ove rispetto al 10 si ha:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

diventa : $(6)\cdot 16^7 + (8)16^6 + (13)16^5 + (6)(16^4 + (14)16^3 + 0 + (8)16^1 + (12)(1)$

$$
\begin{array}{rcl}
161061736 \; + & & = 6 \cdot 16^7 \\
134217728 \; + & & = 8 \cdot 16^6 \\
13631488 \; + & & = 13 \cdot 16^5 \\
393216 \; + & & = 6 \cdot 16^4 \\
57344 \; + & & = 14 \cdot 16^3 \\
128 \; + & & = 8 \cdot 16 \\
12 & & = 12 \cdot 1 \\
\hline
\underline{1\,758\,912\,662} & &
\end{array}
$$

1 758 912 662 (dec) equivale a 68D6E08C (exa).

per esempio:

$FFF\ (\text{exa}) = 16^2 \cdot 15 + 16 \cdot 15 + 15 = 4095$ dec.

inversamente : essendo $256 \times 15 = 3840$

$$
\left.\begin{array}{rl}
4000 - (\text{dec}) & \\
\underline{3840} & = 16^2 \cdot F \\
160 - & \\
\underline{160} & = 16 \cdot A \\
0 & = 0
\end{array}\right\}
$$

$4000(\text{dec}) = FA0\ (\text{exa})$

e si noti che aumentando di 1 il numero exadecimale FFF, poiché F è l'ultima cifra il riporto finisce nell'ulteriore scomparto cioè:

$(FFF + 1)_{\text{exa}} = 1000_{\text{exa}} = 16^3 \cdot 1 = 4096_{\text{dec}} = (4095 + 1)(\text{dec})$

Un altro sistema è il sistema octale, (oct) in base 8) ove le prime otto cifre (compreso lo zero) corrispondono alle cifre decimali.

8^7	8^6	8^5	8^4	8^3	8^2	8^1	8^0
					3	0	7
2097152	262144	32768	4096	512	64	8	1

Il numero sopra indicato equivale $(3)8^2 + 0 + (7)(1)$

307(oct) = 199(dec) se aggiungiamo 1 abbiamo:

310 (oct) = 200(dec) $(3)8^2 + (1)8^1 + 0 = 192 + 8 + 0 = 200.$

Volendo esprimere in octale il n° decimale 1523 avremo: 1523 |512 −499 2... ; 1523 − 512·2 = 499 |64 51 7... ;

51 |8 3 6 da cui: $1523 = 2\cdot8^3 + 7\cdot8^2 + 6\cdot8^1 + 3\cdot8^0$

cioè $\underline{1523_{dec}}$ = $\underline{2763(oct)}$ Si noti l'importanza del resto di una divisione di interi. Nel linguaggio BASIC si indica con "mod" (aritmetica modulare) cioè chiedere al computer 7 MOD 4 la rispostorta è 3; e chiedere 7 MOD 2 la risporta è 1. (cioè il resto)

Questi brevi cenni, fanno già intravedere la complessità della rappresentazione numerica delle quantità, e come occorra fissare una serie di norme basilari ordinariamente esposte nell'aritmetica razionale (o ragionata)

Le operazioni aritmetiche

La somma.

Quando incolonnate le cifre, ove le colonne sono posizioni di ugual valore (stessi scomparti), avviene che la somma delle cifre di quella colonna supera come valore quello della cifra più alta si ha il cosiddetto "riporto" per es.

(dec)	(exa)	(bin)	(oct)
8 +	8 +	1000 +	00010 +
7	7	111	00007
= 15	= F	= 1111	00017

Si noti che per ragioni diverse, nell'esempio, il riporto si è avuto solo nel sistema decimale.

Facciamo un secondo esempio:

(dec)	(exa)	(bin)	(oct)
15 +	F +	1111 +	00017 +
3	3	11	00003
18	12	10010	00022

ove i riporti sono su gli altri sistemi e non sul decimale. Ricordiamo che:

18 (dec) = 1(10) + 8 = 18

12 (exa) = 1(16) + 2 = 18

10010 (bin) = 1(16)+0+0+1(2)+0 = 18

00022 (oct) = 2(8) + 2 = 18

La sottrazione

Incolonnati il diminuendo ed il diminutore, puó avvenire che nella stessa colonna la cifra del diminutore sia maggiore di quella del diminuendo, in questo caso si ha il procedimento inverso del riporto, in questi casi si suol dire che si chiede a prestito una unitá dalla adiacente colonna di maggior valore:

(dec)	(exa)	(bin)	(oct)
18 -	12 -	10010 -	22 -
7	7	111	7
11	B	1011	13

Vi sono vari teoremi sulle operazioni somma e sottrazione, per esempio: "Sommando o sottraendo ai due termini di una sottrazione lo stesso valore, il risultato della sottrazione non cambia". ecc.

Dicesi somma algebrica il risultato di somme e sottrazioni dei termini in dipendenza al loro segno. Il prodotto di una somma algebrica per una somma algebrica è una nuova somma algebrica ottenuta moltiplicando ciascun termine della prima per ciascun termine della seconda ed il segno sarà positivo se i segni dei due termini sono concordi, negativo se discordi.

La moltiplicazione

In sintesi consiste nell'addizionare con se stesso il moltiplicando tante volte quante indica il moltiplicatore. E viceversa perché invertendo i fattori il prodotto non cambia. (Si dicono fattori il moltiplicando ed il moltiplicatore; si dice prodotto il risultato della moltiplicazione.

Nel sistema decimale, la moltiplicazione delle singole cifre fra loro è conglobata in una tavola detta tavola pitagorica. Praticamente è richiesto che questi valori si conoscano a memoria.

TAVOLA PITAGORICA

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Si nota che i prodotti di due cifre prevalgono sui prodotti di una sola cifra, ció implica i riporti. Non solo, ma la cifra oltre che moltiplicare per il valore della cifra in se, moltiplica anche per il valore della posizione che occupa. Ció ha portato ad una molteplicitá di metodi per eseguire la moltiplicazione (Cfr. Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi - Vol I parte I cap III pag 232-233 — ediz. Hoepli)

Il segno × oggi universalmente usato deriva dal "<u>metodo a crocetta</u>" usato da Luca Pacioli e da Leonardo Fibonacci, riprendiamo l'esempio riportato nell'Enciclopedia sopra citata:

```
   5   9
     X
   4   7
 ---------
 2 7 7 3
```

Per il metodo a crocetta il Pacioli dice:

"el qual modo vole alquanto piú fantasia e cervello che alcuno degli altri ...; é bella e sottil cosa, ... ma ... vol cervello a casa e l'occhio a bottega"

si é sviluppata la moltiplicazione a fianco in modo da evidenziare il prodotto in croce 35 + 36 = 71

```
     5 9  × 4 7
 ----------------
       6 3
     3 5
     3 6
   2 0
 ------------
   2 7 7 3
```

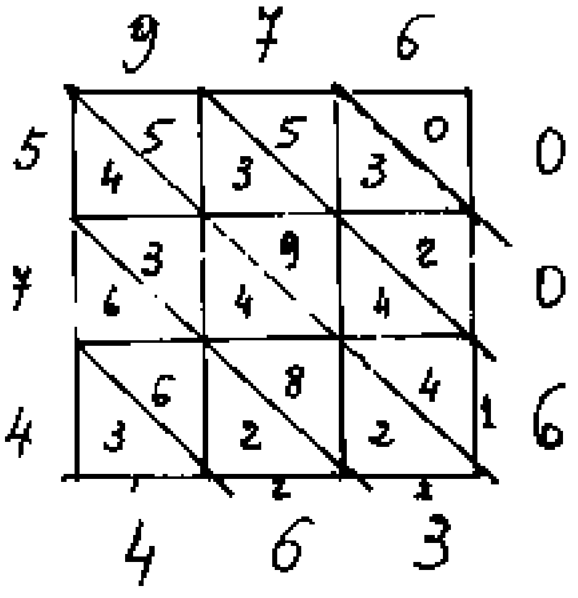
Cioè per eseguire la moltiplicazione a crocetta abbiamo fatto i seguenti passaggi:

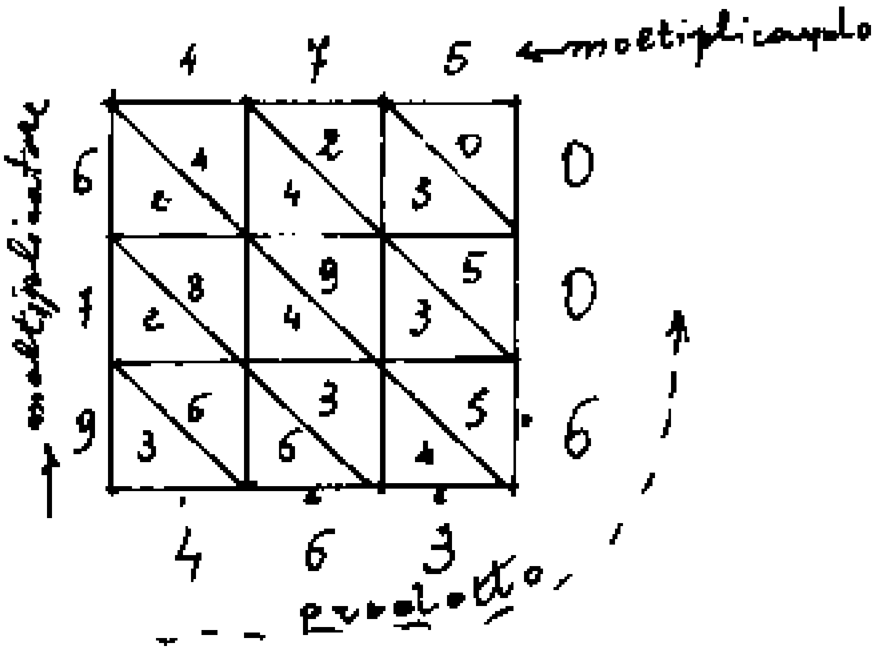
5 9
×
4 7

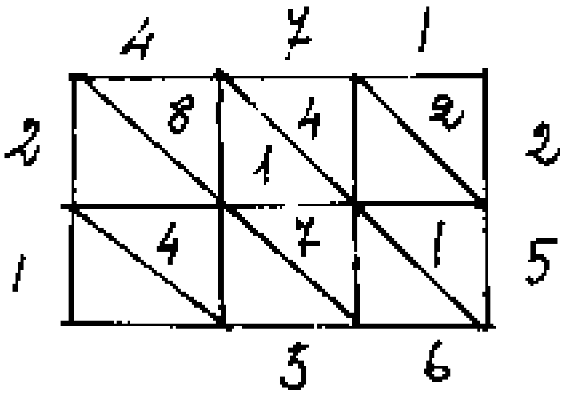
2 7 7 3

7 × 9 = 63
4 × 5 = 20
(5×7)=35 + (4×9)=36
35 + 36 = 7 1
2 7 7 3

Un'altro metodo è quello detto <u>per gelosia o per graticola</u>, da altri detto <u>metodo arabo</u> od anche <u>tavola mussulmana</u> con la quale volendo moltiplicare per esempio: 475 × 976 si costruisce una "graticola" quadrata o rettangolare che ha in orizzontale tante caselle quante sono le cifre del moltiplicatore, col in verticale tante caselle quante sono le cifre del moltiplicando (o viceversa); si tracciano le <u>diagonali "principali"</u> dei quadratini costituenti le caselle (che si allineeranno in rette parallele); si riportano sul bordo superiore (orizzontale, esterno alla graticola) le cifre del moltiplicatore e sul bordo esterno verticale sinistro, le cifre del moltiplicando scritte dal basso verso l'alto; quindi riempiamo le caselle con i prodotti delle due cifre che determinano la casella stessa e scrivendo le decine sotto la diagonale principale senza curarsi di riporti. Quindi si sommano, iniziando dal vertice in alto a destra, le cifre delimitate dalle diagonali principali, i risultati si scrivono sul bordo esterno con le decine in basso che finiranno come un riporto nella successiva somma delle cifre delimitate dalle diagonali adicenti. Il risultato (prodotto) si legge nelle cifre più esterne iniziando dal vertice sinistro in basso fino al vertice destro in alto.   976 x 475 = 475 x 976 = 463600.-







471 X 12 = 5652

L'antica moltiplicazione egizia scomponeva il moltiplicatore nella somma di potenze del 2, (oggi binario) ed il prodotto era la somma delle successive duplicazioni del moltiplicando.

Il metodo attualmente usato era detto dai fiorentini: "per bericuocolo" e dai Veneziani "per scachero" o "per organetto" altri metodi sono: "per castelluccio" o "all'indietro"; "per gelosia" o "per graticola"; ecc.

Consideriamo due numeri espressi in un sistema di base K e siano: x, y, z le cifre del primo numero: $M = xK^2 + yK + z$ e sia $N = eK^2 + fK + g$; il prodotto $M \cdot N$ sarà:

$$\begin{aligned} & exK^4 + eyK^3 + ezK^2 \\ & \qquad + fxK^3 + fyK^2 + fzK \\ & \qquad\qquad + gxK^2 + gyK + gz \end{aligned}$$

Se non vi fossero riporti nei prodotti fra cifre avremmo:

$$\Big[(e \cdot x)K^4 + (ey + fx)K^3 + (ez + fg + gx)K^2 + (fz + gy)K + gz = MN$$

Se il sistema fosse (oct) $K = 8$ e siano $x = 5$, $y = 3$, $z = 1$ $e = 4$; $f = 3$; $g = 7$ avremmo: $531_{(oct)} = 345_{(dec)}$; $437_{(oct)} = 287_{(dec)}$, si noti che la cifra 1 nel numero 531 octale non corrisponde alla 1 decimale infatti il corrispondente decimale è 345 cioè all'1 oct corrisponde (in questo caso: 5): $5(64) + 3(8) + 1 = 320 + 24 + 1 = 345 =$ $= 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5$. Questi confronti vogliono solo abituare a sistemi modulari, cioè a far acquisire il concetto: "quantità" ed espressione numerica di quella quantità.

Cerchiamo di fare una specie di tavola pitagorica nel sistema octale.

1	2	3	4	5	6	7	10
2	4	6	10	12	14	16	20
3	6	11	14	17	22	25	30
4	10	14	20	24	30	34	40
5	12	17	24	31	36	43	50
6	14	22	30	36	44	52	60
7	16	25	34	43	52	61	70
10	20	30	40	50	60	70	100

Per capire questi sistemi numerici occorre aver presente i numeri complessi ove non v'è più una base fissa, ma per esempio 12 pollici = 1 piede, 3 piedi = 1 yard, 2 yard = 1 fathom.

Per esempio ricordando che una dozzina è 12 unità e che una grossa è dodici dozzine cioè 144 unità, nel sistema con base 12 il numero $210_{(12)}$ = 300 (dec.) infatti 2 grosse + una dozzina = = 2(144) + 12 + 0 = 300 (dec). La posizione implica una nuova unità di riferimento delle cifre.

Nel sistema sessagesimale: 25° 32' 40" =

$$=(25)(3600)+(32)(60)+40 = 91960'' = \frac{91960}{1296000} \text{ giri} = 0{,}44583 \text{ rad.}$$

I Celti usavano una notazione ventesimale che ha lasciato traccia nella lingua francese, infatti per dire 90 (novanta), in francese si dice quatre-vingt-dix (quattro volte venti più dieci).

Il problema di esprimere quantità numeriche con un limitato numero di simboli, è, forse, assai più sottile di quanto può apparire a prima vista.

Il concetto "quantità" di cui abbiamo già evidenziato le limitazioni della numerabilità, nel senso che la quantità numerica si riferisce solo all'attributo o caratteristica comune.

La numerabilità implica l'unità di misura che può essere numerica indipendentemente da essere qualitativa. Per fare un esempio banale se l'unità numerica è il paio gli oggetti od unità semplici sono due, quindi l'uno è il due! La serqua che propriamente usata per le uova equivale ad una dozzina, e si può dire una serqua di pere o di mele sempre contandone dodici; però è usata anche come ventiquattresima parte, oppure si ritrova: "di ciascuno si facciano dieci serque di pane". (Etimologicamente alcuni dicono dal latino: siliqua = baccello.) Questa interpretazione ci porterebbe a considerare la misura del contenitore. Si usa dire un paniere di pere o di altre cose, si usa anche: "un panierino." Queste dizioni legano l'unitá al contenitore.

Abbiamo giá trattato lo zero, l'uno, e l'infinito, nell'introdurre il calcolo infinitesimale. Ora stiamo equiparando l'uno ed il molteplice per studiare una corretta rappresentazione numerica.

Se consideriamo che: "il tutto" è ancora una unitá, e che l'unitá puó sempre essere divisa in infinite parti, avvertiamo una forma di relativitá assai delicata.

Cerchiamo di partire da casi piú semplici come: "Il contare" proprio come fanno i bambini. uno, due, tre, quattro, ... muovendo le dita di una mano, ... e cinque. Si nota che alla denominazione dei numeri non possono darsi parole tutte diverse (come diversi sono i numeri), ma occorre trovare delle regole, cioè delle unitá piú grosse che contengano un numero finito di unitá elementari; nascono cosí i sistemi di numerazione, il nostro decimale che utilizza il 10, il 100, il 1000, ecc.. cioè le potenze del dieci come nuove unitá.

Lo stesso avviene suddividendo l'unitá (nel nostro caso l'esponente da assegnare al dieci sará negativo) ed avremo i decimi, i centesimi, i millesimi, ecc.

Tutti i numeri interi sono multipli di uno, in quanto la loro sequenza si ottiene aggiungendo uno al precedente. I primi simboli numerici fino all'unitá immediatamente superiore sono dette cifre e debbono essere diverse fra loro come lo sono i loro nomi. Abbiamo giá esposto i sistemi numerici; ci domandiamo se, oltre la notazione additiva e la notazione posizionale, possono esservi notazioni diverse. Certamente possono esservi; ma noi dobbiamo notare che la nostra scrittura è per linee da sinistra a destra, e le linee si susseguono dal margine superiore al margine inferiore; altre scritture seguono linee diverse. Ció condiziona la notazione posizionale dei numeri. Una notazione che fosse universale dovrebbe essere indipendente da tutto ció.

Il complemento aritmetico

Dicesi complemento aritmetico di un numero il resto della sottrazione fra l'unitá superiore ed il numero. Cosí il complemento aritmetico di 7 è : $10-7=3$; il complemento aritmetico di 54 è $100-54=46$.

Ovvio che il complemento aritmetico di un complemento aritmetico é il numero del complemento aritmetico. Meglio è dire che la somma di un numero e del suo complemento aritmetico è l'unitá immediatamente superiore. $(526+474=1000)$ ove ogniuno dei due numeri è complemento aritmetico dell'altro.

Il complemento aritmetico serve a trasformare una differenza in una somma alla quale va tolta l'unitá superiore

per esempio $853-526 = 853+474-1000=327$

Il complemento aritmetico era sistematicamente usato nei calcoli logaritmici coi logaritmi decimali o di Brigg per evitare caratteristiche negative (vedi vol I - logaritmi).

La divisione

L'operazione della divisione è forse la più impegnata ai fini dell'aritmetica razionale.

Dividere un numero detto dividendo, per un numero detto divisore significo sottrarre al primo il multiplo del secondo che più si avvicina al primo, il risultato della sottrazione è detto resto il multiplo del divisore è il prodotto del divisore per un numero detto quoziente che è il risultato della divisione. Se il resto è zero il dividendo è multiplo del divisore.

La divisione puó anche farsi sottraendo successivamente tante volte il divisore quant'é il quoziente. Peró se il quoziente è grande, fare tante sottrazioni sarebbe poco razionale.

Prima della introduzione del sistema posizionale di numerazione scritta, la divisione era una operazione difficilissima, ed i matematici del nostro risorgimento scientifico escogitarono vari metodi per effettuarla. (Cfr. Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi, op. cit.

Vol. I parte I cap III aritmetica pratica)

Un metodo, che è rimasto, era detto: "partire a dauda" Attenzione la parola "partire" non stó per "iniziare", ma per: "fare le parti" cioè: "dividi" ancora oggi a Vinci ad Empoli e d'intorni si dice: "partisci o parti il pane" nel senso "di affetta il pane" cioè dividilo in fette, da non confondere con "fare le parti" che potrebbero essere diverse a seconda di chi sono destinate. Altri metodi di dividere erano detti: "per testa"; per scapezzo; per ripiego; ed altri. Per scapezzo era detto anche il metodo per fare la moltiplicazione. Il Tommaseo nel suo dizionario srive: "Scapezzo S. m. [Fanf] Moltiplicare a scapezzo. Pare corrisponda ai Rotti; quasi scavezzare l'integrità del numero. Paccioli, Aritm. 29. Octavo ed ultimo modo di multiplicare a scapezzo è... quando se have a multiplicare due numeri che dell'uno si fà più parti e l'altro si lascia sano. — E anche dicesi quando tutti e due i numeri si moltiplicano segnatamente."

Ed alla voce: "Rotti" riporta: "s(Arit.) Rotti si dicono dagli Aritmetici quelle parti che avanzano nel partire un numero per un altro; altrimenti *Fratti* o Frazioni..." Si usa anche oggi dire l'interi di un numero ed aggiungere "e...rotti,"...

Luca Pacioli (sopra scritto come Paccioli - (Tommaseo)) riteneva che, per la divisione, il modo più veloce e leggero era: "*per galea*" ... a similitudine della galea che nel mare è ritenuto il legno" el più securo, el più veloci, el più snello e ligiadro..". *Il partire a galea* comunissimo in Italia a tutto il secolo XVI cadde in disuso, tanto che Giuseppe Antonio Alberti nel suo trattato di Arimetica pratica, (Venezia 1752) lo chiama *partire all'uso ultramontano*.

Secondo alcuni (cfr. T. Sabatino, Aritmetica Ragionata, - ed Paravia - 1915) i simboli dell'aritmetica e dell'algebra sarebbero dovuti ad autori diversi. Il segno = (uguale) sarebbe stato introdotto nel 1552 dal matematico inglese Robert Record. ; i segni > e < (maggiore e minore) da Harriot; le parentesi sarebbero state usate da Alberto Girard nel 1629. Le cifre arabiche sarebbero state introdotte in Europa nel 960 d.C. ed il primo ad introdurle sarebbe stato il famoso Gerberto che divenne papa (Silvestro II) che le introdusse prima in Francia, poi in Italia

I segni + e − (più e meno) sarebbero stati introdotti da Leonardo da Vinci, Il segno × (per) della moltiplicazione sarebbe stato introdotto da Oughtred nel 1631 ed il punto · (moltiplica) da Leibnitz nella II metà del secolo XVII. La notazione degli esponenti si trova per la prima volta nell'Aritmetica di Stefano de la Roche (Lyon 1520), ma l'uso fu perfezionato da Herigon (1634) e da Descartes (1637). I due punti (:) per indicare la divisione sarebbero stati introdotti da Leibnitz, mentre la linea di separazione fra numeratore e denominatore sarebbe una deformazione del segno di divisione usato dagli antichi egiziani, (segno che era arcuato), la linetta di divisione sembra essere stata introdotta in Europa colle cifre arabiche e la si trova per la prima volta in Leonardi Pisano nato nel 1180 e morto verso la metà del secolo XIII e conosciuto anche sotto il nome di Fibonacci, contrazione di Filius Bonacci.

Infatti le regole della prova del 9 per le quattro operazioni le avrebbe date per primo Abou-Ali-Al-Hossei (nato nel 980 presso Chiraz in Persia, e morto ad Hamadan nel 1037) nella sua Esposizione delle radici del Calcolo e dell'Aritmetica.

Abbiamo riportato quanto espone il Sobatino nelle note della sua Aritmetica Ragionata (op.cit.). Riteniamo peró opportuno citare l'articolo di Ettore Bortolotti - Storia della matematica elementare - riportato nel III volume, parte 2ª - LVIII - della citata *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi*, ove la vasta bibliografia citata permette allo Studioso una ricerca approfondita.

Altri testi: Dirk J. Struik - *Matematica un profilo storico* - ediz Il Mulino - Bologna - 1981.

Georges Ifrah - *Storia universale dei numeri* - Ediz. Mondadori 1989. - Attilio Fraiese - *Attraverso la storia della matematica* - ediz. Le Monnier - Firenze - 1977.

O NEUGEBAUER - *Le scienze esatte nell'antichitá* - ed Feltrinelli op cit. -

Torniamo alla nostra divisione ove il dividendo ed il divisore si identificano nel numeratore e nel denominatore di una frazione, generalmente impropria ove il quoziente è una frazione apparente ed il resto il numeratore di una frazione propria.

Abbiamo già esposti i criteri di divisibilità, vi sono vari problemi che possono essere istruttivi per l'aritmetica razionale. Per esempio:

1) Dimostrare che N^2+1 non è divisibile per 3

- Premesso che i multipli consecutivi di 3, differiscono di 3 .cioè sono una progressione aritmetica di ragione 3, quindi se ad un multiplo di tre si aggiunge o si toglie un numero inferiore a tre, (diverso da zero) il risultato non è più divisibile per 3.

1) Il quadrato di un numero è divisibile per 3 solo se la base è divisibile per 3 e non lo è più se aggiungiamo $1 < 3$

2) Se la base non è divisibile per 3 non lo è neppure il suo quadrato. La base può essere $N = 3K \pm 1$, oppure: $N = 3K \pm 2$ i cui quadrati aggiungendo 1 danno $(N^2+1) = (9K^2 \pm 6K) + 2$ oppure: $(9K^2 \pm 12K) + 5$ ove il primo addendo è divisibile per 3, ma non lo è il secondo, poiché né 2, né 5 sono divisibili per 3. Resta così dimostrato che qualunque sia N il numero N^2+1 non è divisibile per 3.

Prova per 9 delle quattro operazioni

Fare la prova delle quattro operazioni avvalendosi della divisibilità, e quindi dei resti, in linea di principio si potrebbe prendere un divisore qualsiasi; ma ricordando il criterio di divisibilità per 3, o per 9, cioè che la somma delle cifre sia divisibile per 3 o per 9, diventa facilissimo trovare i resti, basta togliere le somme di cifre che danno 9. Per esempio: 67456 si può dire: $6+5=11, -9=2, +4=6+7=13, -9=4, +6=10-9=1$ il resto è uno (1).

$$\left(\begin{array}{r|l} 67456 & 9 \\ \cline{2-2} 44 & 7495. \\ 85 & \\ 46 & \\ 1 & \end{array}\right)$$

e non è necessario fare la divisione.

Riprova per la somma

1) Teorema: Se più numeri si dividono per uno stesso numero, la loro somma e la somma dei loro resti, divise per quel numero, danno resti uguali.

I numeri siano: A, B, C, il divisore è 9, i resti r ed i quozienti q; avremo:

$$\left.\begin{array}{l} A = 9q_1 + r_1 \\ B = 9q_2 + r_2 \\ C = 9q_3 + r_3 \end{array}\right\} \frac{(A+B+C)}{9} = \frac{\cancel{9}(q_1+q_2+q_3)}{\cancel{9}} + \frac{(r_1+r_2+r_3)}{9}$$

Infatti la somma dei quorienti moltiplicata e divisa per 9 non da resti: Per esempio numerico:

$$\begin{array}{lrl}
A = & 4723\ + & \text{resto } r_1 = 7\ + \\
B = & 3714 & r_2 = 6 \\
C = & 9457 & r_3 = 7 \\
\hline
A+B+C = & 17894 & r_1+r_2+r_3 = 20 \\
 & r = 2 & r = 2
\end{array}$$

Ed è la prova della somma.

Riprova della sottrazione

2) Teorema: Se due numeri si dividono per uno stesso numero la loro differenza e la differenza de' loro resti divise per quel numero dànno reste eguali.

$$A = 9q_1 + r_1$$

$$B = 9q_2 + r_2$$

$$\frac{(A-B)}{9} = \frac{9(q_1+q_2)}{9} + \frac{(r_1+r_2)}{9}$$

Stessa dimostrazione. Esempio numerico

$$\begin{array}{lrl}
A = & 49732 & r_1 = 7 \\
B = & 32491 & r_2 = 1 \\
\hline
(A-B) = & 17241 & (r_1-r_2) = 6 \\
 & r = 6 & r = 6
\end{array}$$

ed è la prova della sottrazione

Riprova della moltiplicazione

3') Teorema: Se due numeri si dividono per uno stesso numero, il loro prodotto ed il prodotto dei loro resti, divisi per quel numero, dànno resti uguali.

$$A = (9 \cdot q_1 + r_1)$$
$$B = (9 \cdot q_2 + r_2)$$
$$\frac{(A)(B)}{9} = \frac{(\cancel{9}q_1)(9q_2)}{\cancel{9}} + \frac{\cancel{9}q_1(r_2)}{\cancel{9}} + \frac{\cancel{9}q_2 r_1}{\cancel{9}} + \frac{r_1 r_2}{9}$$

Dimostrazione come le precedenti.

Esempio numerico

$A = 3491 \times$ $\qquad r_1 = 8$

$B = 782$ $\qquad r_2 = 8$

$(A)(B) = 2729962$ $\qquad r_1 \cdot r_2 = 64$

$r = 1$ $\qquad r = 1$

ed è la prova della moltiplicazione.

Notare com'è facile fare il resto di:

2729962 si tolgono i due 9 e (7+2) resta 6+2+2 = 10 che 10 − 9 = 1 e corrisponde a (6+4) = 10; 10-9 = 1

Riprova per la divisione

Si usa poco perché la riprova della divisione si effettua moltiplicando il quoziente per il divisore e aggiungendo il resto deve tornare il dividendo.

$$A = Bq + R$$

Volendo fare la prova del 9 si fa sulle due operazioni di questa formula, cioè per la moltiplicazione e per la somma, però non è assolutamente probante perché può esservi un errore multiplo di 9 e la riprova decade, e non viene rilevato l'errore.

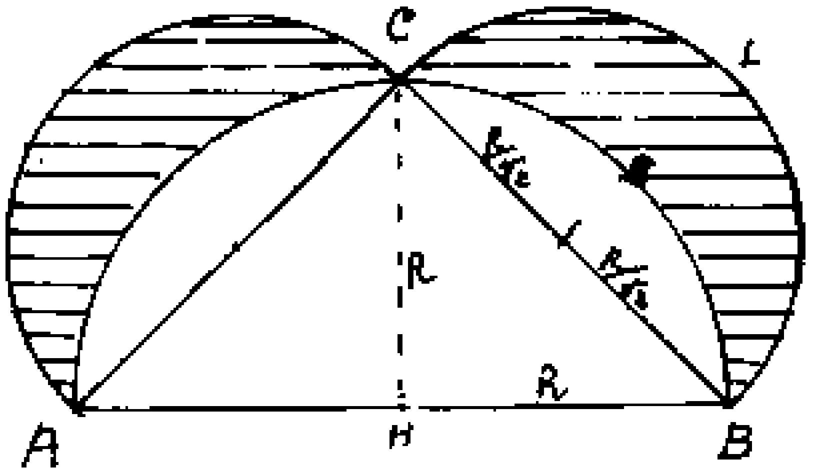
I limiti della prova del 9 si possono evidenziare dimostrando che la differenza fra un numero qualunque ed un altro composto dalle stesse cifre poste in diverso ordine è sempre divisibile per 9. (è multipla di 9).

$$\begin{array}{rcl} A & = & 7473 \\ B & = & \underline{3747} \\ (A-B) & = & 3726 \\ & & r = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} r_1 & = & 3 \\ \underline{r_2} & \underline{=} & \underline{3} \\ (r_1 - r_1) & = & 0 \end{array}$$

Se un numero non è divisibile per un altro, basta toglierli il resto, oppure aggiungervi la differenza fra <u>divisore</u> e resto per renderlo divisibile.

Le Lunule e le figure piane delimitate da archi di cerchio

Alla parola "lunule" si associa in genere il nome del filosofo matematico greco Ippocrate di Chio, (da distinguersi dal medico Ippocrate di Cos (460 - 377 A.C), ma lo studio di queste figure ha interessato, anche per motivi diversi, gli studiosi nel corso dei secoli. Abbiamo accennato alle lunule di Ippocrate nel II volume, e che riportiamo in figura, ed è facile dimostrare che l'area di ciascuna lunula equivale metà del triangolo ABC, cioè $\hat{AHC} = \hat{BHC}$.



Infatti: area settore $\overset{\frown}{BHC} = R^2\pi/4$;

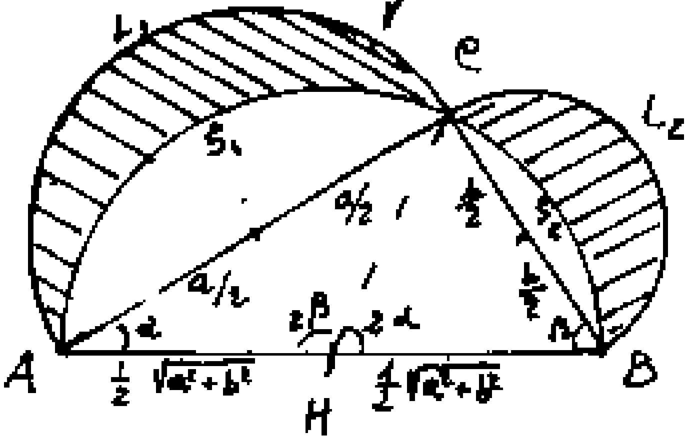
area triangolo retto $\hat{BHC}$ = $R^2/2$;

area segmento circolare $\overset{\frown}{BSC} = R^2\pi/4 - R^2/2$

area semicerchio $\overset{\frown}{BLC} = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{2}\pi = R^2\pi/4$

area lunula $\overset{\frown}{BSCLB} = (R^2\pi/4) - (R^2\pi/4 - R^2/2) = R^2/2$

Il concetto può estendersi alle lunule rappresentate a fianco ove detti "a" e "b" i cateti del triangolo rettangolo ABC,



avremo:

area del triangolo $\overline{ABC} = \frac{1}{2}ab$

area del semicerchio $\widehat{ACB} = \frac{1}{4}(a^2+b^2)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}(a^2+b^2)$

area del semicerchio $A\widehat{L_1}C = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{a^2\pi}{8}$

area del semicerchio $B\widehat{L_2}C = \frac{b^2}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{b^2\pi}{8}$

area dei due segmenti circolari $\widehat{CS_1AL_1}+\widehat{CS_2BL_2} = \left[\frac{\pi}{8}(a^2+b^2)-\left(\frac{1}{2}ab\right)\right]$

<u>area della somma delle due lunule</u> $= \left(\frac{a^2\pi}{8}+\frac{b^2\pi}{8}\right)-\left[\frac{\pi}{8}(a^2+b^2)-\frac{1}{2}ab\right] = \left(\frac{1}{2}ab\right)$ <u>equivalente l'area del triangolo ABC.</u>

Consideriamo ora i triangoli isosceli: $A\hat{H}C$ e BHC le cui altezze relative alle basi sono rispettivamente $b/2$ ed $a/2$ per cui le aree sono:

area $A\hat{H}C = \frac{1}{2}a\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{ab}{4}$; area $B\hat{H}C = \frac{1}{2}b\left(\frac{a}{2}\right) = ab/4$

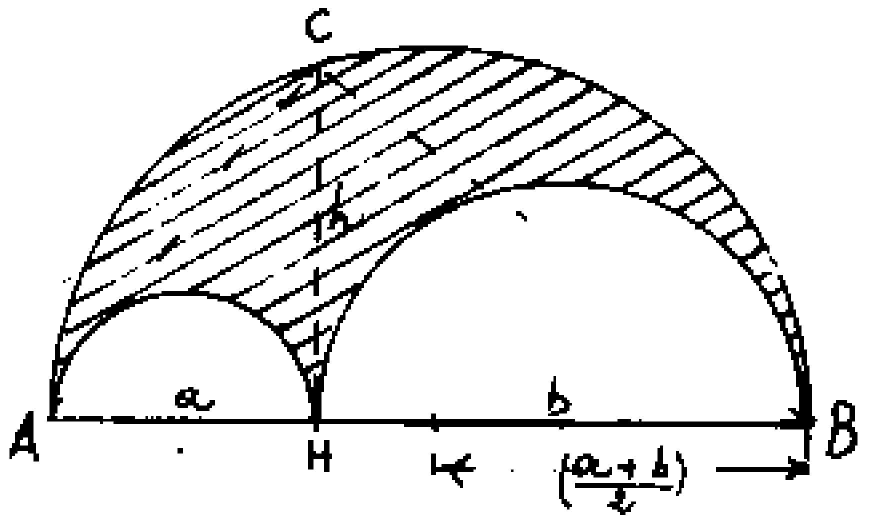
Il che vuol dire che: "<u>la mediana rispetto all'ipotenusa divide il triangolo rettangolo in due triangoli isosceli equivalenti</u>" (metà del triangolo rettangolo).

Però le aree delle singole lunule diventano funzione degli angoli α e β del triangolo rettangolo e di π ove sommando: $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$ sparisce anche π e torna la relazione di cui sopra: (area settore $B\hat{H}C = \frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right)\pi$) − (area triangolo $B\hat{H}C = \frac{ab}{4}$) = (area semento); area semicerchio $B\widehat{L_2}C = \frac{b^2}{4}\pi$; area lunula $BS_2CL_2 = \frac{ab}{4}+\frac{b^2}{4}\pi-\alpha\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right)$

area lunula $AS_1CL_1 = \frac{ab}{4}+\frac{a^2}{4}\pi-\beta\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right)$; sommando le aree delle due lunule: $\underline{2\left(\frac{ab}{4}\right)}+\cancel{\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right)\pi}-\cancel{(\alpha+\beta)\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right)} = \frac{ab}{2}$

L'Arbelo

Anche Archimede si occupò di lunule, si attribuiscono ad Archimede due lunule speciali: l'Arbelo costituita da una figura geometrica triangolare a lati curvilinei costituiti da semicirconferenze, tutte tangenti fra loro ed aventi il diametro sul segmento $\overline{AB}$ che è anche il diametro maggiore.



Posto $\overline{AH} = a$; $\overline{HB} = b$; $\overline{AB} = (a+b)$ l'area dell'arbelo sarà: $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \pi - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \pi\right] = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\cancel{a^2} + \cancel{b^2} + 2ab - \cancel{a^2} - \cancel{b^2}}{4}\right] =$

$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{2ab}{4}\right) = \pi \frac{ab}{4}$:

Detto h il segmento $\overline{HC}$ innalzato perpendicolarmente ad $\overline{AB}$ fino ad incontrare la semicirconferenza maggiore in C; poiché per il teorema secondo di Euclide $ab = h^2$ avremo che

$$\boxed{\text{l'Area dell'Arbelo} = \left(\frac{h}{2}\right)^2 \pi}$$

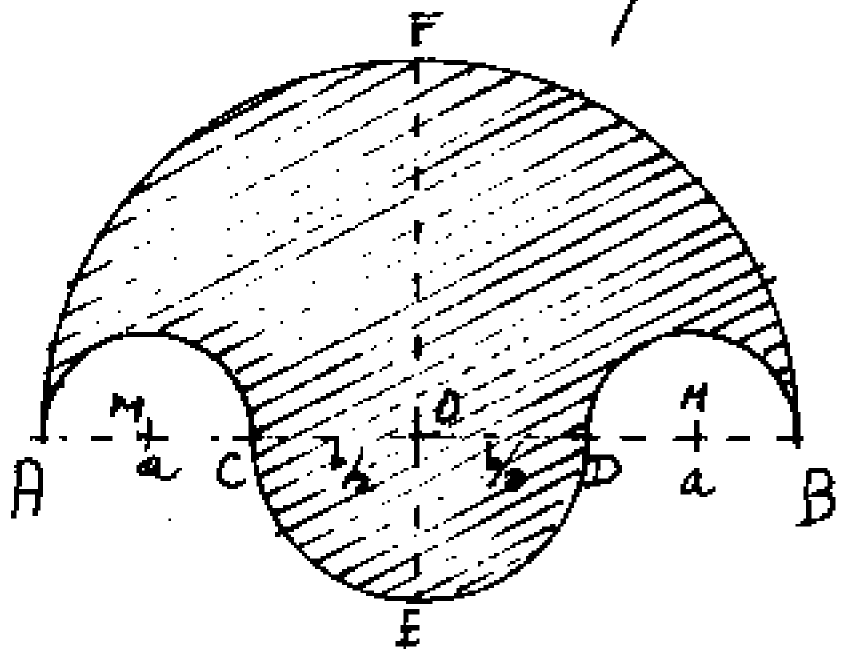
è equivalente all'area del cerchio di diametro $h = \overline{HC}$.

La parola "Arbelo" deriva dal greco: αρβηλος = "trincetto" (coltello da calzolaio) ma era usata anche αρβηλος = figura geometrica.

Si ritrova anche come "zona" fra i Cerchi di Mohr.

Il Salinon

Anche il Salinon fu studiata da Archimede,



è una lunula delimitata da una semicirconferenza maggiore e da tre semicirconferenze minori aventi il diametro sullo stesso diametro, le estreme sono uguali fra loro ($\overline{AC}=\overline{DB}$) e sono tangenti interne alla maggiore, mentre la centrale (che ha lo stesso centro della maggiore) è esterna e raccorda le due interne.

Questa lunula inizialmente fu studiata da Ippocrate e poi da Archimede, la parola Salinon deriverebbe dal greco σαλέη = = agitazione, oppure mare agitato, tempesta.

Siano: $\overline{AC}=\overline{BD}=a$; $\overline{CD}=b$; per cui $\overline{AB}=(2a+b)$

area del semicerchio maggiore $=\frac{1}{2}\left(a+\frac{b}{2}\right)^2\pi=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{8}+\frac{ab}{2}\right)\pi$

area dei semicerchi laterali $=-\frac{2}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi=-\frac{a^2\pi}{4}$

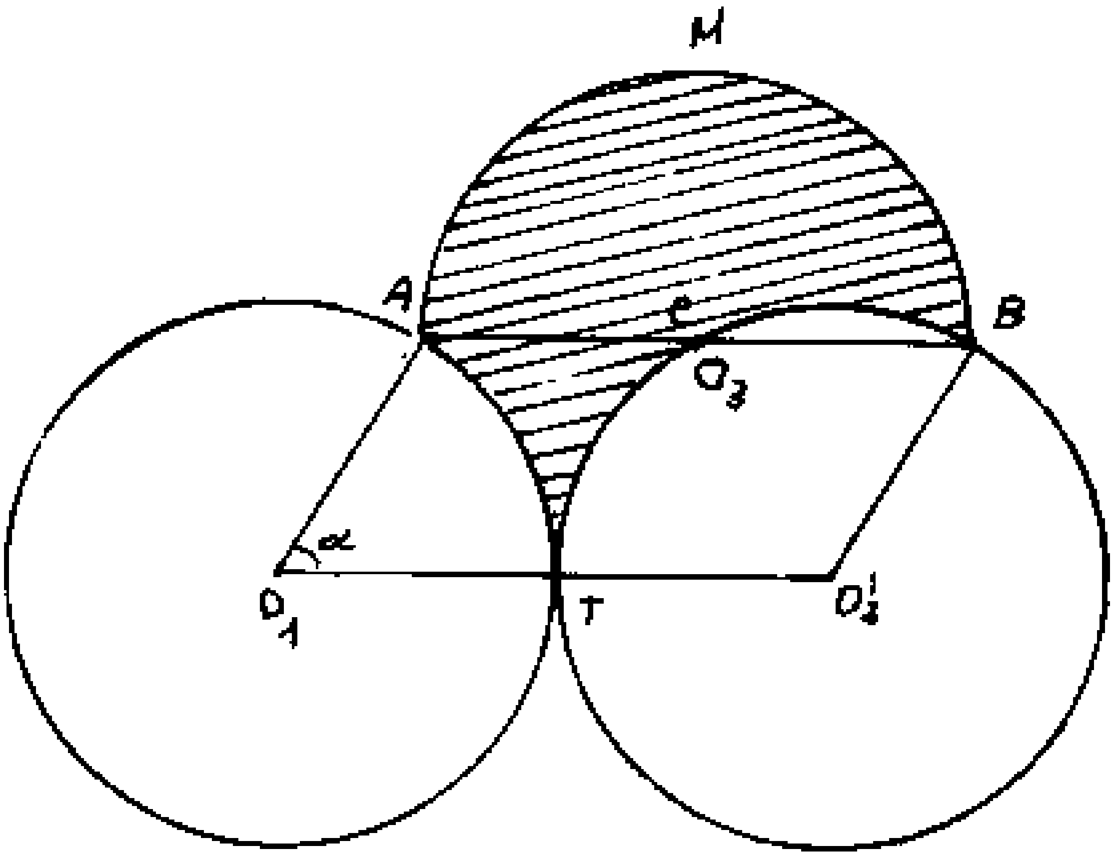
area del semicerchio mediano $=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2\pi=\quad+\frac{b^2\pi}{8}$

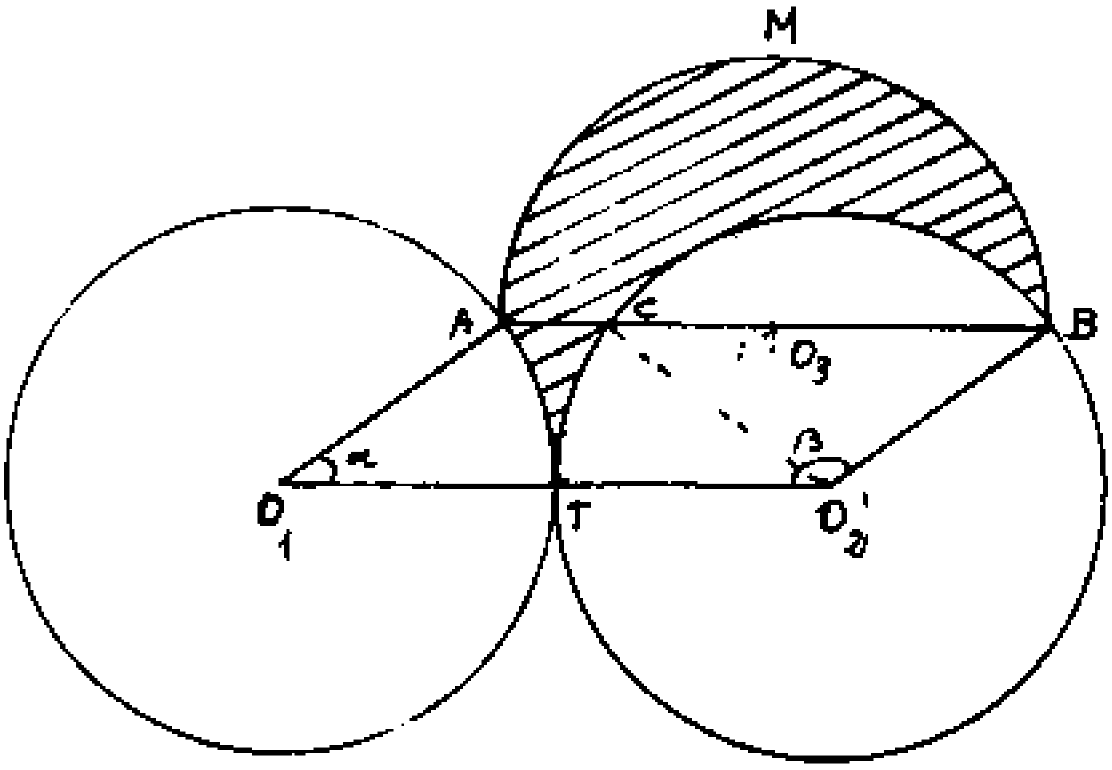
Complessivamente $=\left(\frac{a^2}{4}+\frac{2b}{8}+\frac{ab}{2}\right)\pi$

$\overline{FE}=FO+OE=a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}=(a+b)$

$\left(\frac{FE}{2}\right)^2\pi=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\pi=\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{ab}{2}\right)\pi$ Perciò l'area del Salinon equivale l'area del cerchio che ha per diametro la somma dei raggi delle circonferenze concentriche.

Drepanoide





Il drepanoide è delimitato da tre archi di cerchio aventi lo stesso raggio $r = \overline{OO'}/2 = \overline{AB}/2$, due cerchi sono tangenti ed il terzo cerchio ha il diametro parallelo all'unione dei centri dei cerchi tangenti ed è definito dall'angolo α del parallelogramma: (OO'BA).

La parola drepanoide è composta dal greco: δρεπανον = falce ed εῖδος = forma.

La lunula drepanoide deriva da studi abbastanza più recenti di quelli delle lunule di Ippocrate o di Archimede.

L'area del drepanoide è data dal semicerchio: $\frac{r^2\pi}{2}$ diminuito del segmento di corda $\bar{C}B$, ed aumentato del triangolo curvilineo ACT.

L'area del segmento di corda $\bar{C}B$ è data dall'area del settore: $\frac{r^2(\beta-\alpha)}{2}$ diminuita dell'area del triangolo $O_2\overset{\triangle}{B}C$.

Complessivamente l'area del drepanoide risulta quindi: $\frac{r^2\pi}{2} - \frac{r^2(\beta-\alpha)}{2} + O_2\hat{B}C + ACT =$

ed anche, essendo: $\beta = (\pi - \alpha)$

$$A = \cancel{\frac{r^2\pi}{2}} - \cancel{\frac{r^2\pi}{2}} + \frac{r^2(2\alpha)}{2} + O_2\overset{\triangle}{B}C + ACT$$

$$\boxed{A = r^2\alpha + O_2\overset{\triangle}{B}C + ACT.}$$

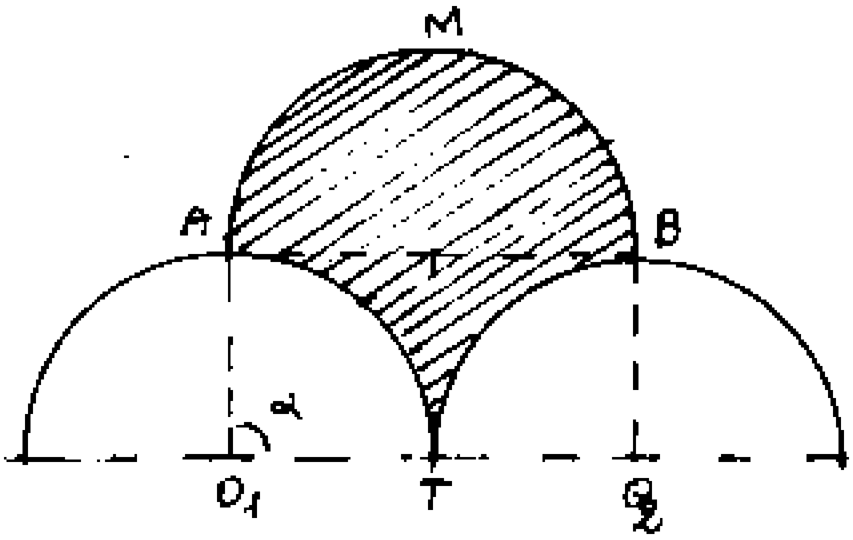
Equivalente l'area del parallelogramma: ABO_2O_1 costituito da due settori AO_1T e CO_2T di area: $2\left(\frac{r^2\alpha}{2}\right)$, dal triangolo $O_2\hat{B}C$ e dal triangolo curvilineo ACT.

Il perimetro del drepanoide (perimetro curvilineo o contorno) equivale alla lunghezza di una circonferenza: infatti è costituito da:

$\overset{\frown}{AMB} = r\pi + \overset{\frown}{AT} = r\alpha + \overset{\frown}{TB} = r\beta$; contorno $= r\pi + (\alpha+\beta)r$

ma: $(\alpha+\beta) = \pi$ per cui: $\overbrace{ATCBM} = 2r\pi$.

Sul drepanoide vi sono alcuni casi particolari abbastanza interessanti: poichè l'area del parallelogramma può anche essere espressa da: $A_{ABO_2O_1} = 2r^2 \operatorname{sen}\alpha$; quando α assume valori tali per cui $\operatorname{sen}(\alpha)$ è un numero razionale, od anche non trascendente anche l'area del drepanoide è un numero non trascendente.



per $\alpha = \pi/2$ → area drepanoide $= 2r^2$

area Triangolo $A\hat{T}B = r^2(2-\pi)$

per $\alpha = \pi/6$ → area drepanoide $= r^2$

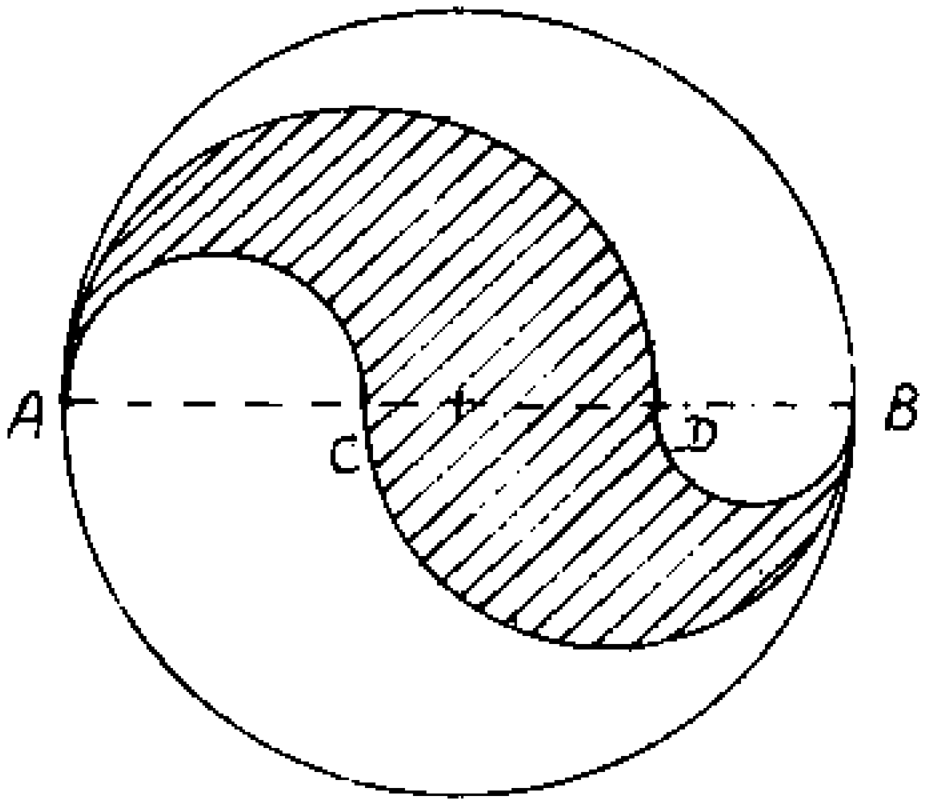
per $\alpha = 45° = \pi/4$ – " " $= r^2\sqrt{2}$

per $\alpha = 60° = \pi/3$ – " " $= r^2\sqrt{3}$

Il pelecoide

Anche il pelecoide è una figura geometrica piana a contorno costituito da archi di cerchio, la parola deriva dal greco: πέλεχυς = scure, ed εἶδος = forma.

Per disegnare il pelecoide si prendono arbitrariamente due punti C e D sul diametro $\overline{AB}$ di una circonferenza, e si raccordano con gli estremi A e B mediante semicirconferenze tali che quelle uscenti da A, stanno da banda opposta, rispetto al diametro $\overline{AB}$, di quelle uscenti da B.



I raggi saranno rispettivamente $r_1 = \overline{AC}/2$; $r_2 = \overline{AD}/2$ $r_3 = \overline{BC}/2$; $r_4 = \overline{BD}/2$. ove : $(r_1+r_3) = (r_2+r_4) = R = \overline{AB}/2$ quindi $2R\pi = (r_1+r_3)\pi + (r_2+r_4)\pi$ cioè *il contorno del pelecoide equivale la circonferenza di diametro $\overline{AB}$*.

$$\overline{CD} = a = (2R - 2r_1 - 2r_4) = (2r_2 - 2r_1) = (2r_3 - 2r_4)$$

*area del **pelecoide*** $= (r_2^2 - r_1^2)\frac{\pi}{2} + (r_3^2 - r_4^2)\frac{\pi}{2} =$

$$= \frac{\pi}{2}\left[(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) + (r_3 - r_4)(r_3 + r_4)\right] = \frac{\pi}{2}\left[\frac{a}{2}(\underbrace{r_1 + r_3} + \underbrace{r_2 + r_4})\right] = \frac{\pi}{2}\left[\left(\frac{a}{2}\right)(2R)\right]$$

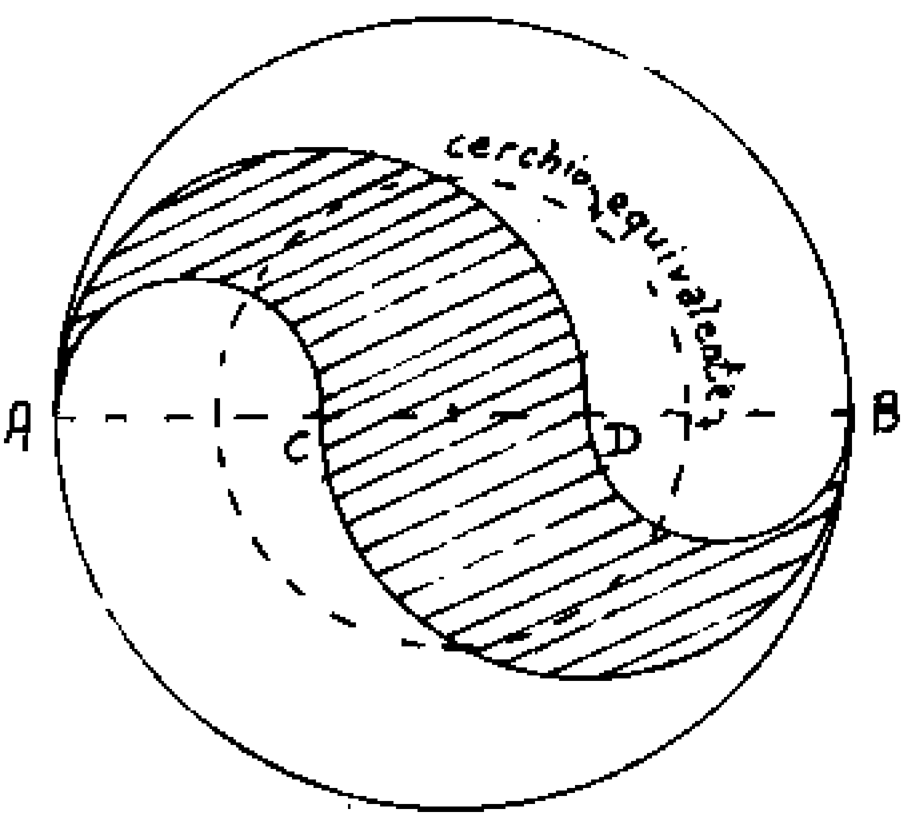
$\boxed{A = \frac{aR\pi}{2}}$ $/R^2\pi \Rightarrow$ · *area pelecoide* / *area cerchio* = $\underline{a/2R}$

cioè le aree stanno tra loro come $\overline{CD}$ stà ad $\overline{AB}$ meglio dire come: $\overline{CD} \cdot \overline{AB}$ sta $\overline{AB}^2$.
se moltiplichiamo ambo i termini per π avremo che le due aree stanno fra loro come le aree di due rettangoli aventi per base la stessa base: $\overline{AB} \cdot \pi =$ = lunghezza della circonferenza e per altezza $\overline{CD} = a$ e $\overline{AB} = 2R$.

Anche per il pelecoide sono interessanti alcuni casi particolari; il più comune si ha quando $\overline{CD} = a = \frac{\overline{AB}}{3} = \frac{2R}{3}$; in questo caso l'area diventa

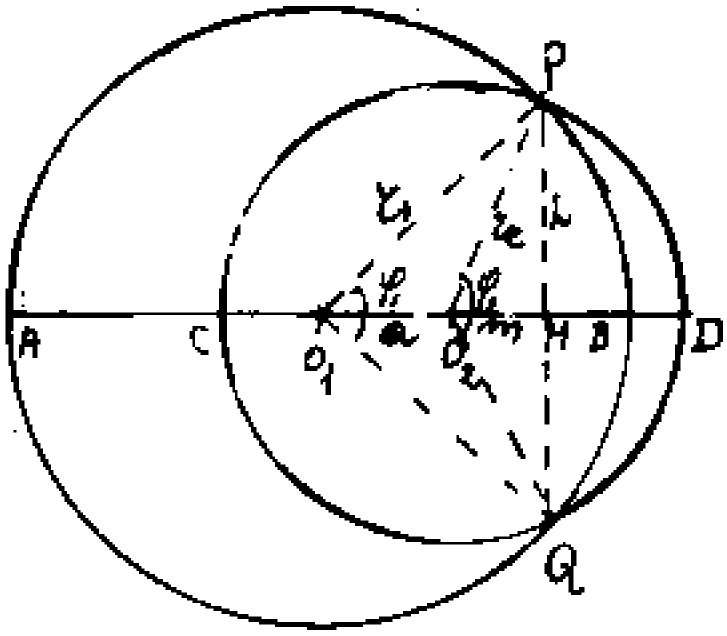
$$A = \frac{aR\pi}{2} \Rightarrow \frac{R^2\pi}{3}$$

Cioè l'area del pelecoide diventa un terzo del cerchio di diametro $\overline{AB}$, il cui raggio è: $R/\sqrt{3}$.
se generalizziamo e poniamo: $a = \frac{2}{n}R$, l'area di questo pelecoice diventa $\frac{1}{n}$ dell'area del cerchio di diametro $\overline{AB}$



Il pelecoide è stato studiato per dividere il cerchio e la circonferenza in un numero intero di parti uguali.

Consideriamo ora le lunule generate dall'intersezione di due cerchi di raggi: r_1 ed r_2 ed i centri distanti: $(a = \overline{O_1O_2})$.



$$r_1^2 - (a+m)^2 = h^2 = r_2^2 - m^2$$

$$r_1^2 - a^2 - \cancel{m^2} - 2am = r_2^2 - \cancel{m^2}$$

$$\boxed{m = \frac{r_1^2 - r_2^2 - a^2}{2a}}$$

area: $A_{O_1\hat{P}Q} = \frac{1}{2} r_1^2 \operatorname{sen} \varphi_1$;

area settore $A_{O_1PDQ} = \frac{1}{2} r_1^2 \varphi_1$

$$\left.\right\} \frac{A_{O_1PQ}}{A_{O_1PDQ}} = \text{rasen}(\varphi_1)$$

area segmento $A_{PDQ} = \frac{r_1^2}{2}(\varphi_1 - \operatorname{sen}\varphi_1) = \frac{r_1^2}{2}($[illegible]$\operatorname{sen}\varphi_1)$

<u>Area lunula</u> $A_{PDQB} = \frac{1}{2}(r_1^2\varphi_1 - r_1^2 \operatorname{sen}\varphi_1 - r_2^2\varphi_2 + r_2^2 \operatorname{sen}\varphi_2)$

<u>Area figura</u> $A = \frac{1}{2}\left[r_1^2(2\pi - \varphi_1 - \operatorname{sen}\varphi_1) + r_2^2(\operatorname{sen}\varphi_2 - \varphi_2)\right]$

<u>Area lunula</u> $A_{PAQC} = \frac{1}{3}\left[r_1^2(2\pi - \varphi_1 - \operatorname{sen}\varphi_1) - r_2^2(2\pi - \varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_2)\right]$

essendo:

$A_{PO_1QO_2} = ah$

$$\boxed{A_{\text{lunula}} = \frac{r^2\varphi_2}{2} - \frac{r_1^2\varphi_1}{2} + ah}$$

Si nota che: $(r_1 - a) < r_2$ con O_2 interno al cerchio 1

$(r_1 + a) > r_2 > (a - r_1)$ O_2 esterno " "

per avere soluzioni reali.

Quando $\varphi_1 = 90°$; $\varphi_2 = 180°$; $r_2 = r_1/\sqrt{2}$ si torna alle lunule di Ippocrate.

Prisma Prismatoide Prismoide

Consideriamo i solidi che hanno i vertici su due piani paralleli.

I poligoni dei vertici di ciascun piano parallelo sono le due basi del solido.

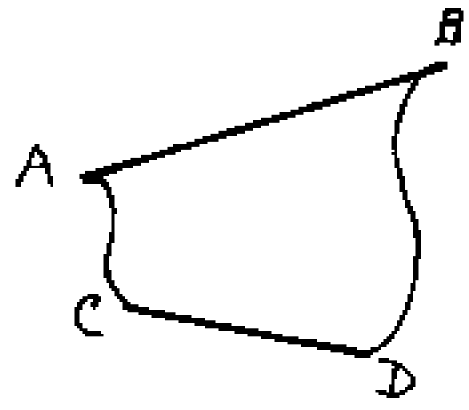
Se le due basi sono uguali ed ugualmente orientate si ha il prisma.

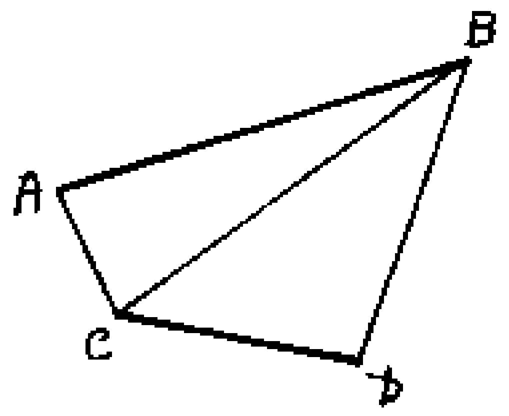
Se i segmenti che uniscono i vertici corrispondenti delle due basi uguali (spigoli laterali) sono ortogonali alle basi il prisma è retto.

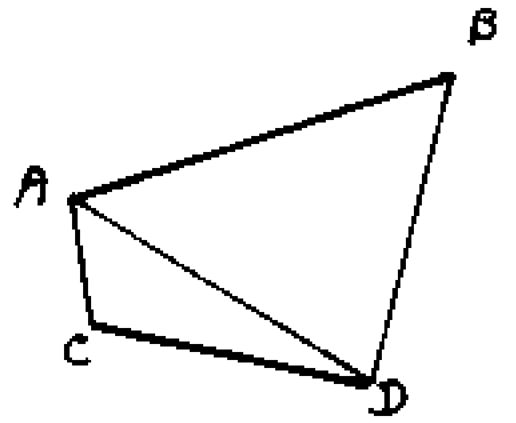
Se gli spigoli laterali sono inclinati sui piani base il prisma è obliquo.

Se le basi pur essendo uguali non sono ugualmente orientate, ovvero che i lati delle basi (che dovrebbero costituire le facce laterali, insieme agli spigoli laterali) si trovano su rette sghembe. Il problema dei quadrilateri non piani, è già stato accennato (nel IV. vol al capitolo: la misura degli angoli solidi). Anche: "solidi a facce non piane" sono stati trattati nel IV. volume; qui vogliamo vederne la genesi.

Consideriamo un poliedro (trapezio) avente due lati paralleli, supponiamo di ruotare i due lati paralleli mantenendoli su piani paralleli, cioè le rette su cui giacciono, da parallele diventano sghembe mantenendo costante il segmento di minima distanza.







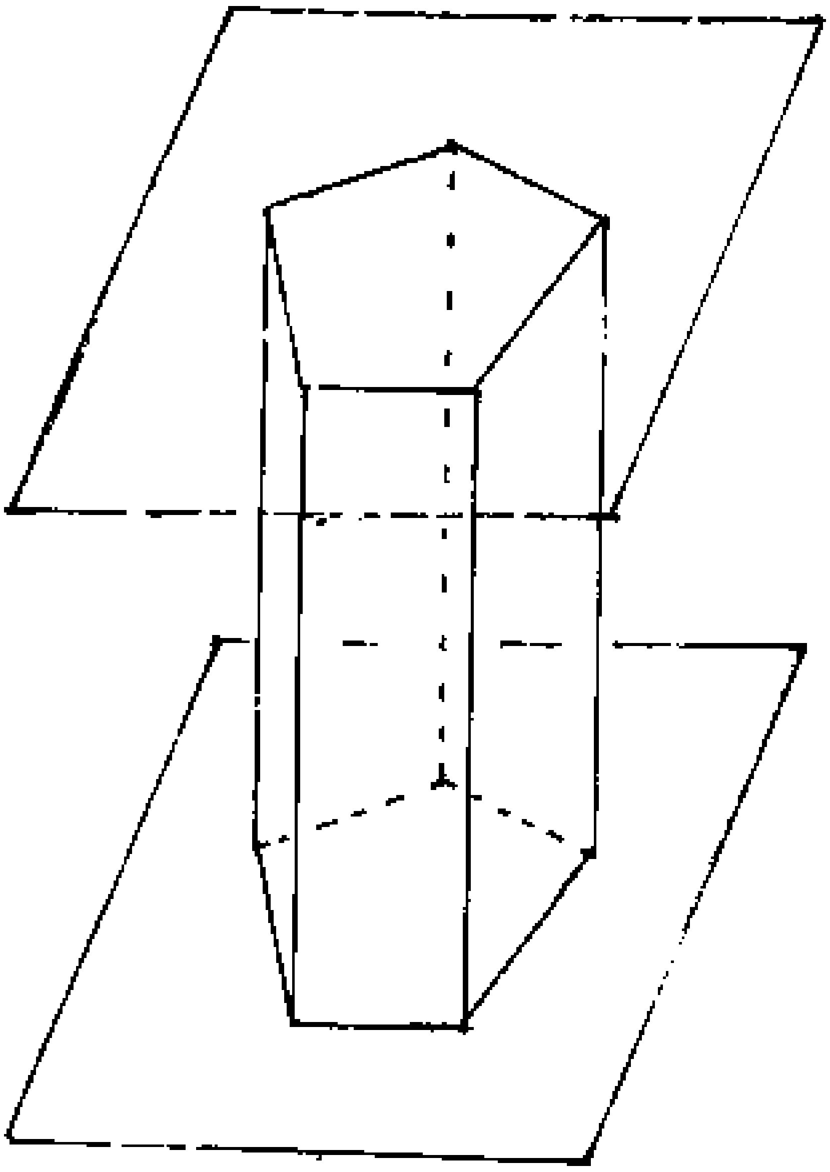
La superficie ABDC puó diventare curvilinea, oppure il quadrilatero non piano puó dividersi in due triangoli piani, e si hanno due possibilità a seconda di quale diagonale assumiamo come spigolo.

Diconsi "Prismatoidi" quei solidi che hanno i vertici su due piani paralleli.

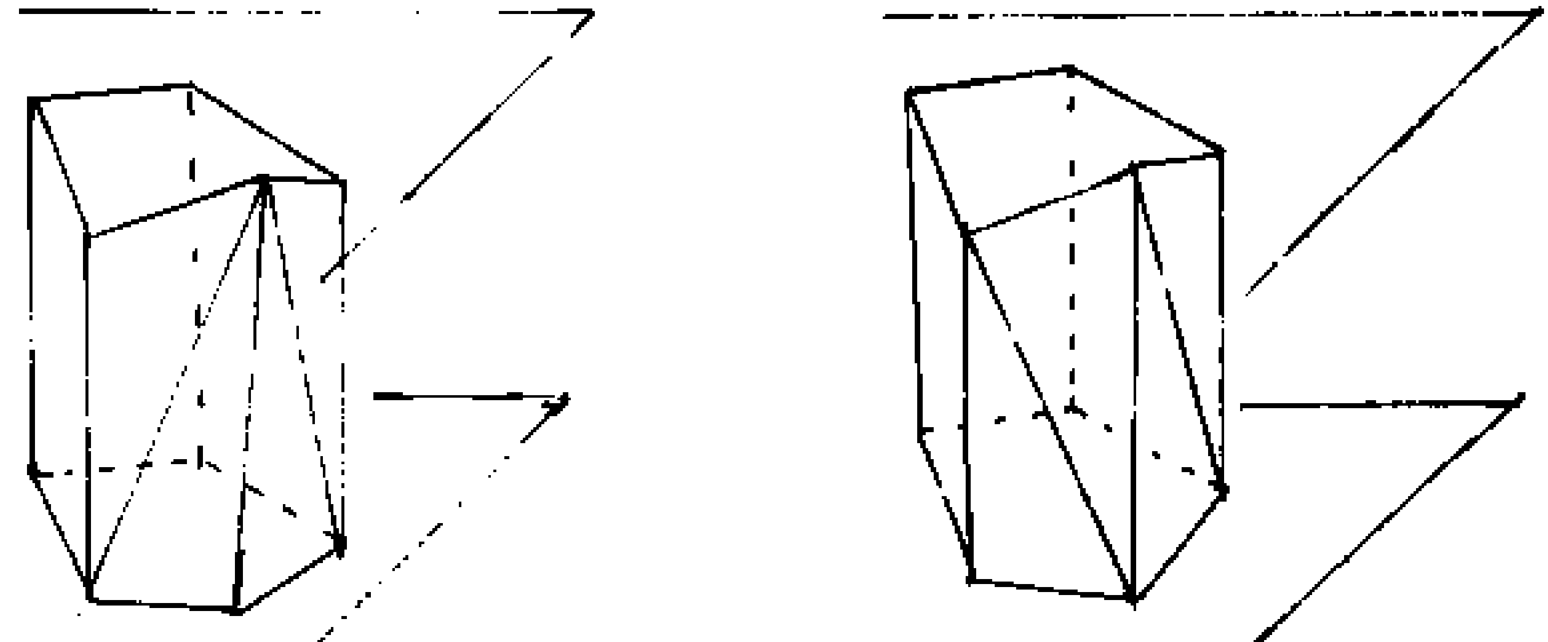
Se il numero dei vertici è uguale sui due piani il solido è detto "prismoide".

Se le due basi hanno lati corrispondenti paralleli, il quadrilatero è piano ed è la faccia laterale del prismatoide.

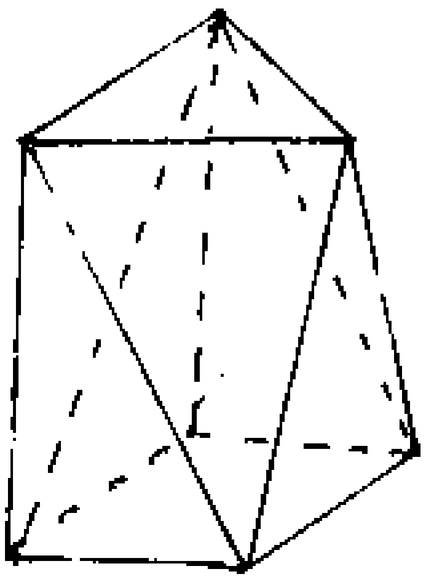
Le facce laterali piane del solido possono essere triangoli o quadrilateri.



<u>prisma retto</u>



<u>prismoidi</u> con stesse basi diversamente collegate



Prismatoide ove si notano possibilità diverse di collegamento fra le basi.

Il poliedro prismatoide ha un volume calcolabile con una formula semplice detta "formula dei tre livelli"

Siano:

A_1 ed A_2 = area delle basi

h = altezza del prismatoide = distanza dei piani paralleli

A_m = area della sezione mediana del solido

V = volume del solido:

avremo:

$$\boxed{V = \frac{h}{6}\left(A_1 + A_2 + 4A_m\right)}$$

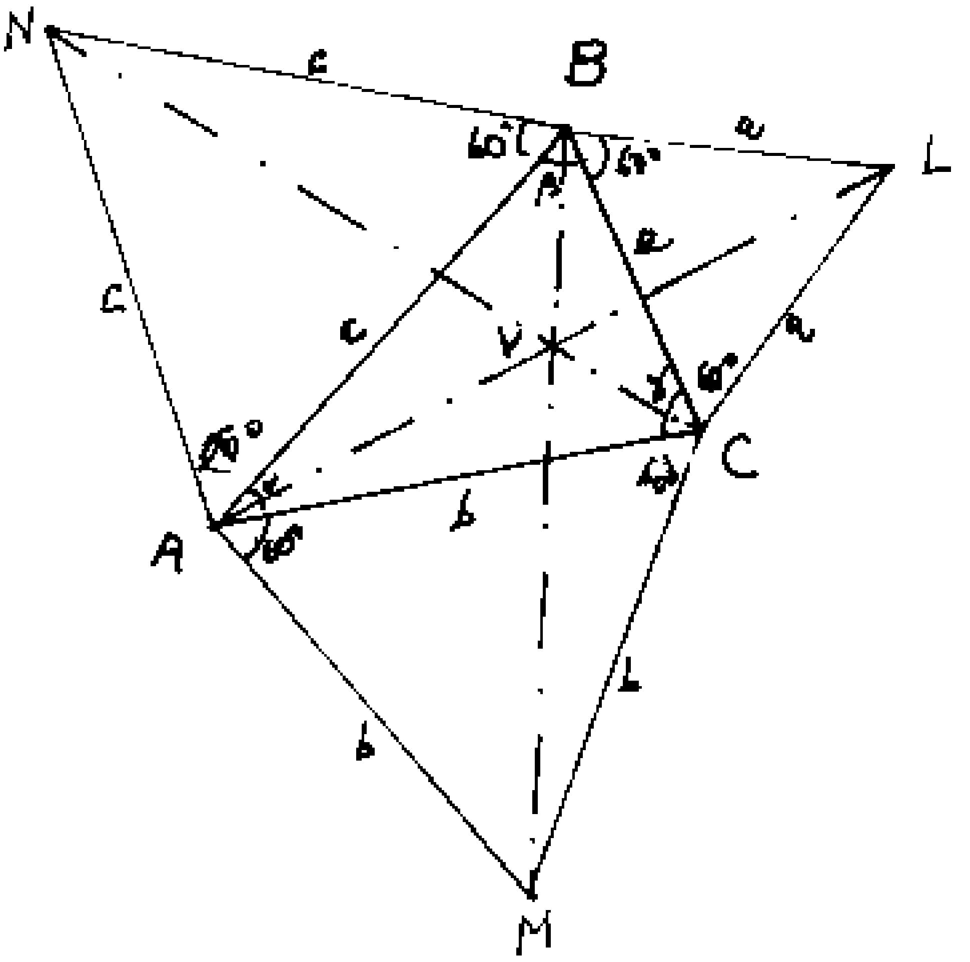
Si noti che se il solido è un prisma: $A_1 = A_2 = A_m = A$

avremo: $V = \frac{h}{6}\cdot\left(A + A + 4A\right) = \frac{h}{\cancel{6}}\cancel{6}A = \underline{Ah}.$

Centri isogonici; metapoli; punti isodinamici.

Dicesi centro isogonico quel punto che vede i segmenti sotto la stesso ampiezza angolare. Inversamente, luogo dei centri isogonici di un segmento sono gli archi di cerchio di cui il segmento è corda.

Particolarmente importanti i centri isogonici dei triangoli, ove il centro isogonico V, interno al triangolo ABC avrà $\widehat{AVB} = \widehat{BVC} = \widehat{CVA} = \frac{2\pi}{3} = 120°$.



Per trovare V ci si avvale della costruzione a fianco detta figura di Torricelli, per eseguirlo basta costruire esternamente al triangolo ABC, tre triangoli equilateri sui lati di ABC, ed avremo: BCL di lato a, ACM di lato b, ABN di lato c; uniti AL; BM; CN; il punto comune è il centro isogonico "V" ed è detto punto di Torricelli.

Sia $\widehat{BAC}=\alpha$; $\widehat{ABC}=\beta$; $\widehat{BCA}=\gamma$; si dimostra che $\overline{AL}=\overline{BM}=\overline{CN}$, infatti per Carnot applicato ai triangoli: ACL, ABL, BAM, BCM, CAN, CBN, si ha:

$$\overline{AL}^2 = a^2+b^2-2ab\cdot\cos(\gamma+60°)$$
$$\overline{AL}^2 = a^2+c^2-2ac\cdot\cos(\beta+60°)$$
$$\overline{BM}^2 = b^2+c^2-2ac\cdot\cos(\alpha+60°)$$
$$\overline{BM}^2 = a^2+b^2-2ab\cos(\gamma+60°)$$
$$\overline{CN}^2 = b^2+c^2-2bc\cos(\alpha+60°)$$
$$\overline{CN}^2 = a^2+c^2-2ac\cos(\beta+60°)$$

$\overline{AL}=\overline{BM}$

$\overline{AL}=\overline{CN}$

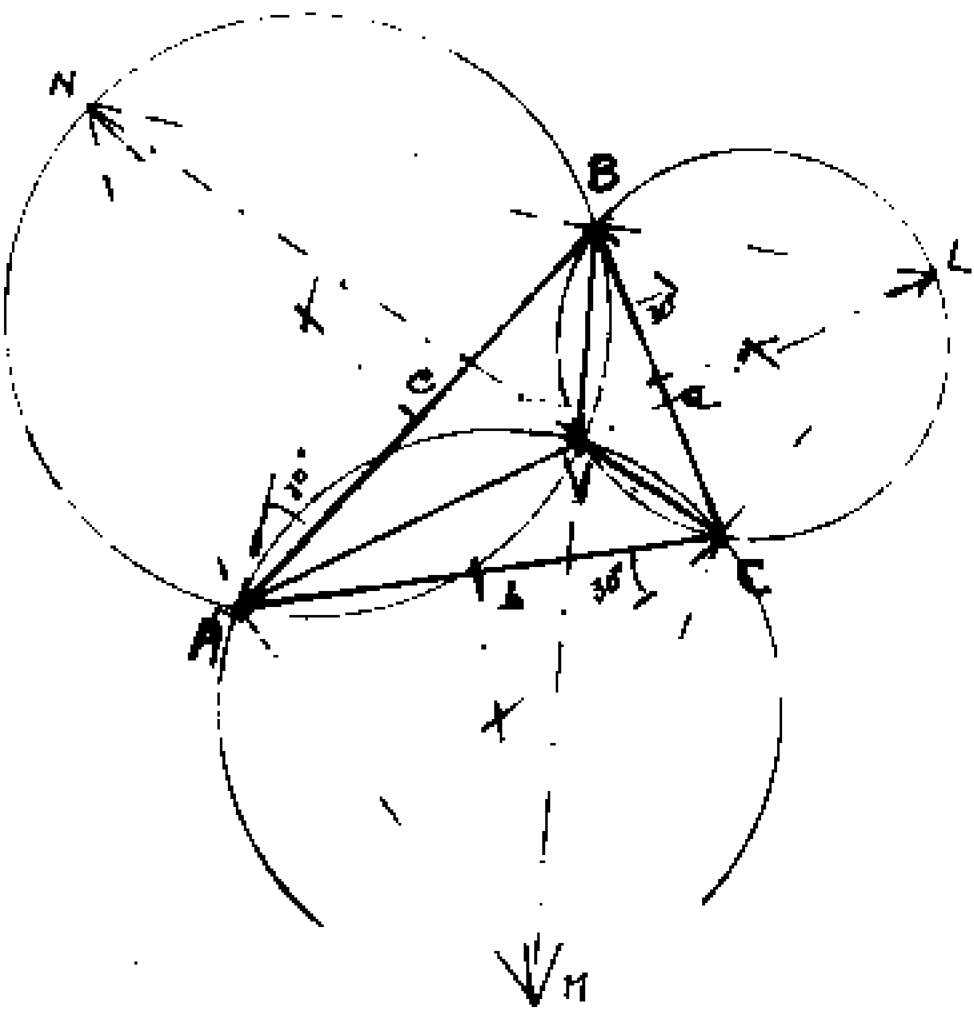
$\overline{CN}=\overline{BM}$

c.v.d.

Abbiamo già trattata la condizione perché tre rette uscenti dai vertici di un triangolo si incontrino in un punto, (v. Vol I)

Si può dimostrare che "V" è quel punto che rende minima la somma delle distanze dai vertici del triangolo, cioè:

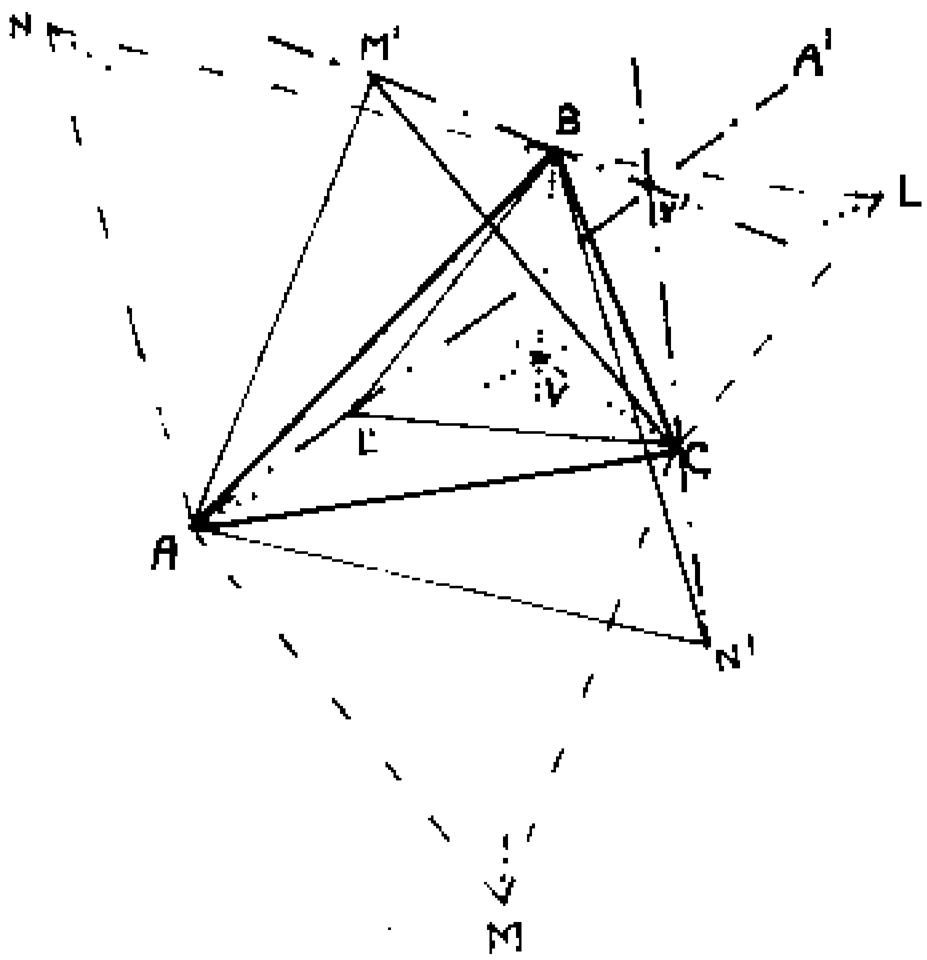
$$\overline{VA}+\overline{VB}+\overline{VC} = \text{minimo}$$



La costruzione di V può anche effettuarsi come il punto comune di tre archi di circonferenza aventi per corde i lati del triangolo, che impostano alla circonferenza angoli di 120°.

I centri delle circonferenze sono i centri dei triangoli equilateri.

Se i triangoli equilateri, sui lati del triangolo dato, anziché esternamente, li costruiamo internamente al triangolo dato, e ripetiamo la costruzione avremo: BCL', CAM', ed ABN', ove: $\overline{AL'}$; $\overline{BM'}$; $\overline{CN'}$ avranno il punto comune V'.

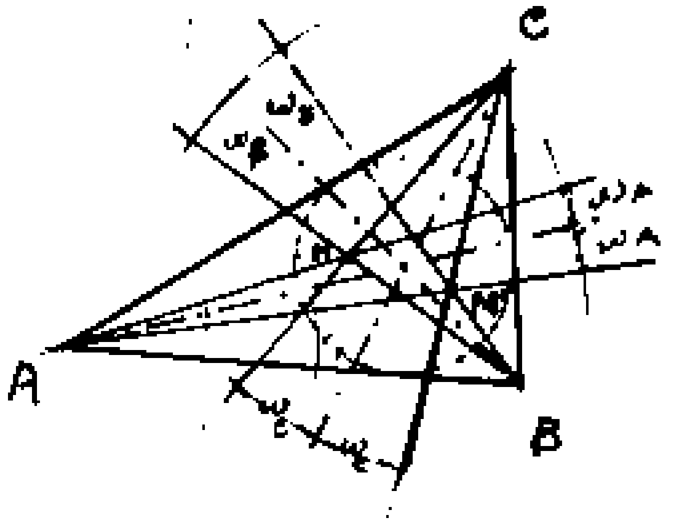


I punti V e V' sono detti centri isogonici od anche punti gemelli del triangolo ABC.

Anche V' può costruirsi come punto comune delle circonferenze che hanno per corde i lati del triangolo e per centri i centri dei triangoli equilateri interni per V', esterni per V.

Si noti però che V' è esterno al triangolo ABC ed è sui prolungamenti di AL', BM', CN', e $\widehat{AV'B} = \widehat{AV'C}$; ma $\widehat{BV'C} = 120° = \widehat{AV'B} + AV'C$.

Preso però il punto A' (vedi figura) si ha: l'isogonicità: $\widehat{A'V'B} = A'\widehat{V'}C = BV'C = 120°$.



Diconsi isogonali le rette simmetriche alla bisettrice in un triangolo, ed uscenti dallo stesso vertice

Se tre ceviane uscenti ciascuna da un vertice del triangolo hanno un punto comune M le loro isogonali si incontrano in M' ove M ed M' sono detti punti isogonali.

I punti isogonali dei punti o centri isogonici sono detti hessiani, o equianarmonici o punti isodinamici.

Se esternamente al triangolo ABC, i triangoli equilateri, costruiamo triangoli simili i punti comuni ad AL, BM, CN, sono detti metapoli perció i punti o centri isogonici sono particolari metapoli.

Se chiamiamo asse radicale la retta sulla corda comune di due circonferenze e punto radicale di tre circonferenze il punto comune ai loro assi radicali, il centro isogonico è un particolare punto radicale.